Revista del Departamento de Estadística Matemática de Granada 2 (1975), 51-68

DERIVACIONES EN ALGEBRAS NORMADAS Y CONMUTATIVIDAD

Angel Rodríguez Palacios

Departamento de Teoría de Funciones

EXTRACTO

Es conocido que la imagen de un álgebra de Banach conmutativa mediante una derivación continua está contenida en el radical de Jacobson de dicha álgebra (conjunto de los elementos casi-nihilpotentes). En este trabajo se prueba (teorema II-1-5) que, sin necesidad de la conmutatividad del álgebra, la casi-nihilpotencia de D(a) (a: elemento del álgebra; D: derivación continua) es consecuencia de que a conmute con D(a) o incluso de la hipótesis más general de que aD(a) - D(a)a pertenezca al centro del álgebra (en álgebras de Banach semisimples, ambas hipótesis coinciden); Además D puede ser simplemente una Jordan-derivación, lo que en álgebras no conmutativas no semisimples es una situación menos restrictiva.

En los preámbulos algebraicos se ha demostrado (teorema I-2-6) que, en las mismas hipótesis de arriba, la nihilpotencia de D(a) es consecuencia de la nihilpotencia de a, o también de ser D algebraica; hecho éste que permite reencontrar de manera elegante, para álgebras de dimensión finita, los más importantes resultados conocidos sobre derivaciones en álgebras de Banach.

I.- PRELIMINARES

I-1.- Definiciones y propiedades elementales.

I-1-1.- Un álgebra sobre K ($K = R$ ó C) es un espacio vectorial sobre K dotado canónicamente de una aplicación bilineal $(x,y) \longrightarrow x.y$ de X en X denominada en general producto. Si este producto es conmutativo, el álgebra se llamará conmutativa.

I-1-2.- Si el producto es asociativo, el álgebra se llamará igualmente asociative.

I-1-3.- Un álgebra de Lie es un álgebra cuyo producto (que suele denominarse "corchete" y escribirse en consecuencia: $(x,y) \longrightarrow [x,y]$) goza de las propiedades:

a.- $[x,x] = 0$

b.- (Identidad de Jacobi):

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad .$$

Un ideal de un álgebra de Lie X es una variedad lineal M de X tal que $[M,X] \subseteq M$.

Un álgebra de Lie se llama semisimple si su único ideal conmutativo es $\{0\}$.

Referencias: [1],[2] y [3] .

I-1-4.- Un álgebra de Jordan es un álgebra conmutativa cuyo producto goza de la siguiente relación:

$$x^2.(x.y) = x.(x^2.y) \qquad ([3]) \quad .$$

I-1-5.- Una derivación de un álgebra X es una aplicación lineal de X en X, D, verificando:

$$D(x.y) = x.D(y) + D(x).y \quad .$$

~~Entonces~~ Cualquiera que sea la derivación D de un álgebra X, es válida la fórmula de Leibnitz:

$$D^n(x.y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(x).D^{n-k}(y) \quad .$$

Si X tiene elemento unidad (e), es $D(e) = 0$.

I-1-6.- Un álgebra asociativa A puede ser dotada canónicamente de estructura de álgebra de Lie y de álgebra de Jordan sin más que añadir a su estructura de espacio vectorial, respectivamente, los productos:

$$\left.\begin{array}{l} [a,b] = a.b - b.a \\ a * b = a.b + b.a \end{array}\right\} \qquad (a,b) \in A^2 \quad ;$$

en este sentido hablaremos de álgebra de Lie y álgebra de Jordan subyacente a A.

Así mismo, para simplificar el lenguaje, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

Entenderemos por Lie-derivación (resp.: Jordan-derivación) de A toda derivación del álgebra de Lie (resp.: de Jordan) subyacente a A.

Es inmediato que toda derivación de A es Lie-derivación y Jordan-derivación, con lo que estos dos últimos conceptos son más generales; si bien, en el caso de ser A conmutativa, los conceptos de derivación y Jordan-derivación coinciden, mientras que el de Lie-derivación degenera hacia el concepto general de operador lineal.

I-1-7.- Si X es un álgebra y L(X) designa el álgebra (asociativa) de todas las aplicaciones lineales de X en X, mientras que D(X) designa el conjunto de todas las derivaciones de X, es fácil comprobar que D(X) es una variedad lineal de L(X) así como que, si D_1 y D_2 son derivaciones, también es una derivación su corchete $[D_1, D_2] = D_1.D_2 - D_2.D_1$; lo que se puede resumir diciendo que D(X) es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie subyacente a L(X) (I-1-6)(Ref.:[3]).

I-1-8.- Si A es un álgebra asociativa, para cada a de A, la aplicación $x \longrightarrow [a,x] = a.x - x.a$ de A en A es una derivación de A que llamaremos derivación interior asociada a $\underline{a}$ y que denotaremos por d_a .

$d_a = 0$ si y sólo si $\underline{a}$ pertenece al centro de A.

I-1-9.- Sea X un álgebra, D una derivación de X, M un ideal bilátero de X invariante por D; entonces la aplicación $\tilde{D}: x + M \longrightarrow D(x) + M$ es una derivación del álgebra X/M.

I-1-10.- Si A es un álgebra asociativa, se define el "casi-producto" por la fórmula

$a \circ b = a + b - a.b \quad , \quad (a,b) \in A^2$.

El "casi-producto" (que no es bilineal) es asociativo y admite el cero como elemento neutro.

Un elemento de A se dice "casi-inversible" si admite simétrico con respecto al casi-producto.

Se llama radical de Jacobson de A ($Rad(A)$) al conjunto de los elementos $\underline{a}$ de A tales que $A \circ a$ tiene todos sus elementos casi-inversibles. Se demuestra que $Rad(A)$ es un ideal bilátero de A. Si $Rad(A) = \{0\}$, A se llama semisimple. (Ref.: [4] , pág. 119 y siguientes).

I-1-11.- Si A es un álgebra asociativa y M un ideal de A, M se llama nihilpotente si existe un natural p tal que $M^p = 0$ (donde M^p designa la variedad lineal engendrada por los elementos de la forma $m_1 . m_2 . \dots m_p$, con $m_i \in M$).

Se llama radical nihilpotente de A a la unión de todos los ideales por la izquierda ~~nihilpotentes~~ nihilpotentes de A, que resulta ser un ideal bilátero.

Si A es además conmutativa, su radical nihilpotente coincide con el conjunto de sus elementos nihilpotentes.

Un álgebra asociativa cuyo radical nihilpotente se reduzca a cero la llamaremos nihilpotentemente semisimple.

I-1-12.- El radical nihilpotente de un álgebra asociativa está siempre contenido en el radical de Jacobson (si el álgebra es finito-dimensional, ambos radicales coinciden), con lo que, en general, la semisimplicidad nihilpotente es una situación menos restrictiva que la semisimplicidad Jacobson.

I-2.- Dos lemas algebraicos y algunas consecuencias.

Un resultado definitivo sobre derivaciones en álgebras de Banach, que no por negativo deja de ser interesante, consiste en que las álgebras de Banach conmutativas semisimples no poseen derivaciones (salvo la nula, com es natural) (Este resultado asegura, por ejemplo, que el álgebra de las funciones indefinidamente derivables en $[0,1]$ con valores complejos no puede ser substrato algebraico de ningún álgebra de Banach).

Pues bien, a este resultado se llega mediante dos teoremas independientes:

- La imagen de una derivación continua de un álgebra de Banach conmutativa está contenida en su radical ([4]).

- Toda derivación de un álgebra de Banach semisimple es continua ([5]).

Es el primero de estos teoremas el que saldrá en el capítulo siguiente como corolario de uno más amplio (II-1-5) el cual a su vez es consecuencia casi directa de dos lemas algebraicos, uno conocido (I-2-1) y otro que tímidamente viene sugerido en [3] (I-2-4). Son éstos los que paso a citar y extraer consecuencias.

I-2-1.- Sea A un álgebra asociativa, $a \in A$ y D una derivación de A. Si $D^2(a) = 0$, se verifica

$$\left.\begin{array}{l} a.- \quad D^{n+1}(a^n) = 0 \\ b.- \quad D^n(a^n) = n!(D(a))^n \end{array}\right\} \qquad n \in N$$

Ref.: [4], [6] y [8] .

Consecuencia casi inmediata es:

I-2-2.- Sea A un álgebra asociativa, a y b elementos de A. Se supone que $[a,b]$ conmuta con b y que o bien ó a es algebraico o bien b es nihilpotente. En estas condiciones $[a,b]$ es nihilpotente.

Demostración: sea d_b la derivación interior asociada a b; la hipótesis de que $[a,b]$ conmuta con b se traduce por el hecho de ser $d_b^2(a) = 0$. Si suponemos a algebraico, será $a^p + l_{p-1}a^{p-1} + \dots + l_1 a = 0$, para un cierto natural p y ciertos escalares $\{l_i\}$; aplicando d_b^p y teniendo en cuenta I-2-1 resulta $(d_b(a))^p = 0$, y como es $d_b(a) =$ $= -[a,b]$, es $[a,b]$ nihilpotente, como se quiere demostrar. Si se supone b nihilpotente, será $b^k = 0$ para un cierto k natural con lo que $d_b^{2k} = 0$ (la comprobación de este paso es rutinaria) con lo que utilizando otra vez I-2-1-b , será $[a,b]^{2k} = (d_b(a))^{2k} = 0$, con lo que la demostración está terminada.

I-2-3.- Notación.- Sea X un álgebra; para cada x de X designaremos por $\hat{x}$ (resp.: $\bar{x}$) la aplicación $y \longrightarrow y.x$ (resp.: $y \longrightarrow x.y$) de X en X. La aplicación $x \longrightarrow \hat{x}$ (resp.: $x \longrightarrow \bar{x}$), del álgebra X en el álgebra (asociativa) L(X) de los operadores lineales sobre X, es evidentemente lineal y la llamaremos representación regular por la derecha (resp.: por la izquierda) de X.

Para un álgebra conmutativa, las dos representaciones regulares coinciden.

Con esta notación, pasamos a citar el segundo lema al que aludíamos al principio del apartado:

I-2-4.- Sea X un álgebra, D una derivación de X; se verifica:

$$\left.\begin{array}{l}[D\,,\,\bar{x}] = \overline{D(x)}\\ [D\,,\,\hat{x}] = \widehat{D(x)}\end{array}\right\} \qquad x \in X \qquad\qquad ([3]).$$

Es de comprobación inmediata.

El lema que acabamos de citar será aplicado en nuestra exposición al álgebra de Jordan subyacente a un álgebra asociativa; será por tanto conveniente analizar algunas propiedades de la representación regular asociada a la estructura de álgebra de Jordan subyacente a una tal álgebra asociativa:

I-2-5.- Sea A un álgebra asociativa. Para cada a de A, sean $\bar{a}$, $\hat{a}$ y a^J, respectivamente:

- la representación regular por la izquierda de a respecto al producto ordinario,
- la representación regular por la derecha de a respecto al producto ordinario,
- la representación regular de a respecto al producto de Jordan.

Se verifica:

a.- La aplicación $a \longrightarrow \bar{a}$ (resp.: $a \longrightarrow \hat{a}$) es un homomorfismo (resp.: antihomomorfismo) del álgebra A en el álgebra L(A). En particular:

$$a \text{ conmuta con } b \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\bar{a} \text{ conmuta con } \bar{b}\\ \hat{a} \text{ conmuta con } \hat{b}\end{array}\right.$$

b.- $\bar{a}$ conmuta con $\hat{b}$, cualesquiera que sean a y b de A.

Estas dos propiedades son consecuencia directa de la asociatividad de A.

c.- a^J conmuta con b^J si y sólo si $[a,b]$ pertenece al centro de A ($a,b \in A$).

Es consecuencia de la fórmula $[a^J, b^J] = d_{[a,b]}$ que se obtiene inmediatamente de la relación evidente $c^J = \bar{c} + \hat{c}$ ($\forall c \in A$) aplicando las propiedades (a) y (b).

d.- $\underline{a}$ es nihilpotente si y sólo si lo es a^J ($a \in A$).

En efecto: si es $a^p = 0$, será:

$$(a^J)^{2p} = (\bar{a} + \hat{a})^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \bar{a}^k \hat{a}^{2p-k} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \overline{a^k}.\widehat{a^{2p-k}} = 0$$

(téngase en cuenta que para $0 \leq k \leq 2p$, ó es $k \geq p$, ó es $2p - k \geq p$).

Recíprocamente: si es $(a^J)^p = 0$, se tiene:

$$0 = (a^J)^p (a) = (\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \bar{a}^k \hat{a}^{p-k})(a) = 2^p . a^{p+1} \quad .$$

Estamos ya en condiciones de aplicar el lema I-2-4 para encontrar una interesante retraducción de I-2-2:

<u>I-2-6.- Teorema</u>.- Sea A un álgebra asociativa, D una Jordan-derivación de A, $a \in A$. Se supone Que $[a, D(a)]$ pertenece al centro de A y que, o bien $\underline{a}$ es nihilpotente, o bien D es algebraica. En estas condiciones D(a) es nihilpotente.

Demostración: con la notación de I-2-5 , el lema I-2-4 nos permite escribir: $[D , a^J] = D(a)^J$. Como por hipótesis $[a, D(a)]$ pertenece al centro de A, lo que obliga (I-2-5-c) a que a^J conmute con $D(a)^J$, estamos en las condiciones de I-2-2 aplicado al álgebra asociativa L(A) y, en consecuencia, tanto si D es algebraica, como si $\underline{a}$ es nihilpotente (a^J lo será igualmente, según I-2-5-d), concluimos que $D(a)^J$ es nihilpotente. Basta aplicar otra vez I-2-5-d , para tener asegurada la nihilpotencia de D(a) , tal como se desea.

<u>Corolarios</u>.-

<u>I-2-7</u>.- Sea A un álgebra asociativa de dimensión finita, D una Jordan-derivación de A, $a \in A$. Si $[a, D(a)]$ pertenece

al centro de A, D(a) es nihilpotente (versión finitodimensional de II-1-5).

Es consecuencia directa de I-2-6 si se tiene en cuenta que D ha de ser automáticamente algebraica en vista de la finitodimensionalidad de A.

I-2-8.- La unidad de un álgebra asociativa de dimensión finita no puede pertenecer a la imagen de ninguna Jordan-derivación de dicha álgebra (de nos ser cierto, dicha unidad sería nihilpotente según I-2-7 , lo que es absurdo).

I-2-9.- Toda derivación de un álgebra conmutativa conserva el radical nihilpotente (I-1-11 y I-2-6).

I-2-10.- La imagen de un álgebra conmutativa por una derivación algebráica está contenida en su radical nihilpotente (idem).

Y en particular:

I-2-11.- Un álgebra conmutativa nihilpotentemente semisimple no posee derivaciones algebraicas (salvo la nula).

I-2-12.- La imagen de un álgebra conmutativa de dimensión finita por cualquier derivación está contenida en su radical (I-1-12 y I-2-7).

Particularizando:

I-2-13.- Un álgebra conmutativa semisimple de dimensión finita no posee derivaciones (versión finitodimensional del teorema de Johnson; [4], pág. 95)

Nota.- En los corolarios I-2-9 hasta I-2-13 hemos omitido para no cansar el adjetivo "asociativa" para el álgebra en cuestión.

II.- DERIVACIONES EN ALGEBRAS NORMADAS

II-1.- Consecuencias de la conmutación de un elemento con su imagen por una derivación.

II-1-1.- Dado un elemento a de un álgebra normada, la sucesión numérica $\left\{ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \right\}$ es convergente; al límite de esta sucesión se le llama radio espectral del elemento a ($r(a)$). Si el álgebra normada es completa, el radio espectral es un invariante algebraico pues coincide con el radio del más pequeño círculo de centro cero que contiene el espectro del elemento a (de aquí su nombre).

Si a y b son elementos permutables de un álgebra normada, se verifica:

$$\begin{cases} r(a+b) \leq r(a) + r(b) \\ r(a.b) \leq r(a).r(b) \end{cases} \qquad ([4]).$$

Un elemento a de un álgebra normada se llama casi-nihilpotente si $r(a) = 0$.

II-1-2.- Si A es un álgebra normada y B(A) designa el álgebra normada de los operadores lineales continuos sobre A, para cada a de A, $\bar{a}$, $\hat{a}$, y a^J (véase notación introducida en I-2-5) son elementos de B(A). Interesa destacar, por la aplicación que va atener más adelante, que es:

$$r(a) = r(\bar{a}) = r(\hat{a}) = (1/2).r(a^J) \quad , \quad \forall a \in A .$$

En efecto: las desigualdades $r(\bar{a}) \leq r(a)$, $r(\hat{a}) \leq r(a)$ son casi inmediatas si se tiene en cuenta la definición del radio espectral, que las aplicaciones $a \longrightarrow \bar{a}$, $a \longrightarrow \hat{a}$ son respectivamente homomorfismo y antihomomorfismo de álgebras (I-2-5-a) y que es $\|\bar{a}\| \leq \|a\|$, $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$, $\forall a \in A$.

Por otra parte, por conmutar $\bar{a}$ y $\hat{a}$, es

$$r(a^J) = r(\bar{a} + \hat{a}) \leq r(\bar{a}) + r(\hat{a}) .$$

Además, para cada natural n, es $(a^J)^n (a) = 2^n . a^{n+1}$; de

donde, tomando normas: $2\,\|a^{n+1}\|^{\frac{1}{n}} \le \|(a^J)^n\|^{\frac{1}{n}} . \|a\|^{\frac{1}{n}}$;
y calculando límites ($n \longrightarrow \infty$): $2.r(a) \le r(a^J)$.

Resumiendo nuestros resultados:

$$\left.\begin{array}{l} r(\bar{a}) \le r(a) \ , \quad r(\hat{a}) \le r(a) \\ 2r(a) \le r(a^J) \le r(\bar{a}) + r(\hat{a}) \end{array}\right\} \Longrightarrow r(a)=r(\breve{a})=r(\hat{a})=(1/2)r(a^J) \ ,$$

tal como habíamos enunciado.

Hecha esta introducción, podemos empezar la cadena de sencillos razonamientos que nos llevarán al propósito esencial de este apartado (II-1-5):

II-1-3.- Sea A un álgebra normada, D una derivación continua de A, $a \in A$. Si $D^2(a) = 0$, entonces $D(a)$ es casi-nihilpotente.

Demostración: aplicando I-2-1-b , será:

$$D^n(a^n) = n!\,D(a)^n \Longrightarrow \|D(a)^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|D\|\,\|a\|(n!)^{-n} \longrightarrow 0 \ .$$

II-1-4.- Sea A un álgebra normada, a y b elementos de A; se supone que $a.b - b.a$ conmuta con a ; entonces $a.b - b.a$ es casi-nihilpotente ([4],[8]).

Demostración: por conmutar $a.b - b.a$ con a, será $d_a^2(b) = a(ab - ba) - (ab - ba)a = 0$, y, como d_a es continua, se aplica II-1-3 con lo que $d_a(b) = ab - ba$ es casi-nihilpotente.

Resumamos II-1-4 en la forma:

II-1-4-bis.- Si un corchete $[a,b]$, con términos en un álgebra normada, conmuta con uno de sus términos, entonces dicho corchete es casi-nihilpotente.

Con esto podemos establecer:

II-1-5.- Teorema.- Sea A un álgebra normada, D una Jordan-derivación continua de A, $a \in A$. Si $[a,D(a)]$ pertenece al centro de A, $D(a)$ es casi-nihilpotente.

Demostración: con la notación de I-2-5, el lema I-2-4 asegura que es $[D, a^J] = D(a)^J$. Por otra parte, la hipótesis de que $[a,D(a)]$ pertenece al centro de A se traduce por el hecho de que a^J y $D(a)^J$ conmutan (I-2-5-c). Así pues, en el álgebra normada $B(A)$, $D(a)^J$ es un corchete que conmuta con uno de sus términos: a^J. Aplicando II-1-4-bis, concluimos que $D(a)^J$ es casi-nihilpotente, lo que a su vez implica la casi-nihilpotencia de $D(a)$, si se recuerda II-1-2.

Como corolario resulta el conocido teorema de Singer y Wermer ([4]):

II-1-6.- La imagen de un álgebra de Banach conmutativa por una derivación continua está contenida en su radical (generalización de I-2-12).

En efecto: basta tener en cuenta que el radical de un álgebra de Banach conmutativa es precisamente el conjunto de sus elementos casi-nihilpotentes (ver, por ejemplo, [4]).

El teorema II-1-5 admite ciertas variantes por debilitación de alguna de las hipótesis y fortalecimiento, en contrapartida, de otras. Así por ejemplo, el siguiente enunciado en el que, por facilitar el lenguaje, utilizaremos el adjetivo "algebraicamente continua", para una derivación de un álgebra normada, significando la existencia de un polinomio P tal que $P(D)$ sea continuo (D es naturalmente la derivación en cuestión):

II-1-7.- Sea A un álgebra normada, D una derivación algebraicamente continua de A, $a \in A$. Si $[a, D(a)]$ pertenece al centro de A, $D(a)$ es casi-nihilpotente.

Para demostrarlo, veamos previamente un lema:

II-1-8.- Sea A un álgebra normada, D una derivación de A, p un número natural. Se verifica: la aplicación
$a \longrightarrow |a| = \sum_{k=0}^{p} (1/k!)\,\|D^k(a)\|$ es una norma sobre A compatible con el producto ($|ab| \leq |a|.|b|$); evidentemente: $\|a\| \leq |a|$.

Demostración: que es $|a+b| \leq |a| + |b|$ y $|la| = |l|.|a|$ ($l \in K$) es evidente. Por otra parte:

$$|a.b| = \sum_{k=0}^{p} (1/k!)\|D^k(a.b)\| \leq \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=0}^{k} (1/k!\,i!)\|D^i(a)\|\,\|D^{k-i}(b)\| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{0\,k\,p\\ 0\,i\,p}} (1/k!\,i!)\|D^i(a)\|\,\|D^k(b)\| = |a|.|b|$$

(Se ha aplicado la fórmula de Leibnitz, I-1-5).

Demostración de II-1-7: Sea P un polinomio tal que $P(D)$ sea continuo. Evidentemente se puede elegir P de la forma

$$P(D) = l_1 D + \dots + l_n D^n + D^{n+1}$$

para un cierto natural n. Llamemos A_1 al álgebra normada $\{A, |\ |\}$, donde es $|b| = \sum_{k=0}^{n} (1/k!)\,\|D^k(b)\|$, $\forall\, b \in A$ (II-1-8). Se tiene:

$$|D(b)| = \sum_{k=0}^{n} (1/k!)\|D^{k+1}(b)\| = \sum_{k=1}^{n} (1/(k-1)!)\|D^k(b)\| +$$

$$+ (1/n!)\|D^{n+1}(b)\| \leq \sum_{k=1}^{n} ((1/(k-1)!)+(|l_k|/n!))\|D^k(b)\| +$$

$$+ (\|P(D)\|/n!)\|b\| \leq M\,|b| \quad , \quad \forall\, b \in A$$

($M = \text{máx}\ (\|P(D)\|/n!);((1/(k-1)!)+(|l_k|/n!))k!,\ 1 \leq k \leq n$).
Así pues D es continua en A_1; con lo que aplicando II-1-5 $D(a)$ es casi-nihilpotente en A_1; y como es $\|\ \| \leq |\ |$, con más razón lo es en A.

Otra variante de II-1-5 es:

II-1-9.- Sea A un álgebra de Banach, D una derivación continua de A; se supone que $[a,D(a)]$ pertenece al radical de A. Entonces $D(a)$ es casi-nihilpotente.

Para demostrarlo veamos un resultado previo:

II-1-10.- Las derivaciones continuas conservan el radical de un álgebra de Banach (al igual que cualquier variedad lineal cerrada invariante por automorfismos).

Demostración: sean A y D el álgebra y la derivación en cuestión. Se sabe ([4]) que, para cada $t \in R$, e^{tD} ($= \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)t^n D^n$) es un automorfismo de A; con lo que, aplicando teoría elemental de series de potencias en los espacios de Banach, será:

$$D = \lim_{t \to 0} (e^{tD} - I)/t$$

en la topología de la norma de $B(A)$ (I: operador identidad sobre A) y con más razón:

$$D(a) = \lim_{t \to 0} (e^{tD}(a) - a)/t \quad , \quad \forall a \in A$$

en la topología de la norma de A.

Sea entonces $a \in Rad(A)$, será $e^{tD}(a) \in Rad(A)$, puesto que evidentemente el radical es invariante por automorfismos; y entonces claramente:

$$D(a) = \lim_{t \to 0} (e^{tD}(a) - a)/t \in Rad(A)$$

por ser $Rad(A)$ una variedad lineal cerrada ([4]).

Demostración de II-1-9: Por ser D continua, el radical de A es invariante por D (II-1-10). Entonces $\tilde{D}: \{b\} \to \{D(b)\}$ ($\{b\}$: clase de b módulo $Rad(A)$) es una derivación del álgebra de Banach $A/Rad(A)$ (I-109). Como $\tilde{D}$ es claramente continua y la hipótesis $[a,D(a)] \in Rad(A)$ se traduce por el hecho de que $\{a\}$ y $\tilde{D}(\{a\})$ conmutan, estamos en las condiciones de II-1-5 , quien nos asegura que

$r(\widetilde{D}(\{a\})) = r(\{D(a)\}) = 0$. Basta entonces tener en cuenta que el espectro de un elemento es igual al espectro de su clase módulo el radical ([9]) y la caracterización del radio espectral para álgebras de Banach que citamos en II-1-1 para concluir $r(D(a)) = 0$, con lo que está acabada la demostración.

Notas.- Según se habrá notado en la demostración que acabamos de hacer, la hipótesis de ser D continua sólo ha servido para tener asegurada la invarianza del radical por D (en efecto: una vez asegurado este paso, como $A/Rad(A)$ es semisimple ([4]) y toda derivación de un álgebra de Banach semisimple es continua ([5]), la continuidad de $\widetilde{D}$ es automática), con lo que el teorema II-1-9 subsiste bajo la hipótesis más débil de que D conserve el radical.

La fórmula utilizada en la demostración de II-1-10 $D = \lim_{t \to 0} (e^{tD} - I)/t$ para cualquier derivación continua D de un álgebra de Banach pone de manifiesto el hecho, demostrado en [10] de forma más complicada para derivaciones de C^*-álgebras, según el cual toda derivación continua pertenece a la variedad lineal cerrada engendrada por los automorfismos continuos.

II-2.- Semisimplicidad del álgebra de Lie de las derivaciones de un álgebra de Banach semisimple.

La demostración del enunciado que encabeza como título este apartado se basa en tres resultados, dos de ellos algebraicos, que paso a demostrar:

II-2-1.- Sea A un álgebra asociativa, D una Lie-derivación de A, $a \in A$ (para cada b de A, d_b designa la derivación interior asociada a b, I-1-8). Se verifica:

$$[D, d_a] = d_{D(a)} \quad .$$

En efecto: puesto que $b \longrightarrow d_b$ no es otra cosa que la representación regular por la izquierda respecto al producto de Lie, nuestro enunciado es consecuencia directa de I-2-4 aplicado al álgebra de Lie subyacente a A.

<u>II-2-2</u>.- Sea D una derivación de un álgebra asociativa A. Si $\mathrm{imag}(D^2) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$, entonces también $\mathrm{imag}(D) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$.

Demostración: sean <u>a</u> y <u>b</u> elementos de A; por la fórmula de Leibnitz, se tiene:

$D(a).D(b) = (1/2)(\ D^2(a.b) - a.D^2(b) - D^2(a).b\ )$, con lo que $D(a).D(b) \in \mathrm{Rad}(A)$ (por ser éste un ideal bilátero y ser $\mathrm{imag}(D^2) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$ por hipótesis).

Por otra parte:

$(a.D(b))^2 = (aD(b))(aD(b)) = (aD(b))(\ D(ab) - D(a)b\ ) =$

$= aD(b)D(ab) - aD(b)D(a)b \in \mathrm{Rad}(A)$.

Si convenimos en llamar $\{a\}$ a la clase de <u>a</u> módulo el radical y pasamos a cociente la anterior afirmación, resulta:

$(\{a\}\{D(b)\})^2 = 0 \quad , \quad \forall (a,b) \in A^2$.

Fijado provisionalmente <u>b</u>, resulta entonces que para cada $\{a\}$ de $A/\mathrm{Rad}(A)$ $\{a\}\{D(b)\}$ es nihilpotente y con más razón casi-inversible; en consecuencia (I-1-10) $\{D(b)\} \in \mathrm{Rad}(A/\mathrm{Rad}(A))$. Pero como $A/\mathrm{Rad}(A)$ es semisimple ([4]), resulta $\{D(b)\} = 0 \implies D(b) \in \mathrm{Rad}(A)$.

Si se tiene en cuenta por último la arbitrariedad de <u>b</u>, nuestra proposición queda probada.

<u>II-2-3</u>.- Sea A un álgebra de Banach semisimple, Z su centro, D una derivación de A; se verifica: $\mathrm{imag}(D) \cap Z = \{0\}$.

Demostración: por ser A semisimple, D es automáticamente continua ([5]). Sea entonces $b \in \mathrm{imag}(D) \cap Z$; será $b = D(a)$ para un cierto <u>a</u> de A y evidentemente <u>a</u> conmuta con $D(a)$; aplicando II-1-5 , <u>b</u> ($= D(a)$) es casi-nihilpotente, es decir: $r(b) = 0$.

Pero por ser b de Z, se tendrá (II-1-1)

$r(cb) \leq r(c)r(b) = 0 \implies r(cb) = 0 \quad , \forall c \in A$

y en consecuencia ([4], pág. 126, proposición 1,ii)

$b \in \mathrm{Rad}(A) = \{0\} \implies b = 0$.

Podemos pasar ya a demostrar:

II-2-4.- Teorema.- El álgebra de Lie de las derivaciones de un álgebra de Banach semisimple es semisimple.

Demostración: Sea A el álgebra de Banach en cuestión, D(A) el álgebra de Lie de las derivaciones de A (I-1-7), sea M un ideal conmutativo de D(A) y $D \in M$, queremos probar que es $D = 0$ (I-1-3).

Para ello, sea $a \in A$; $[D, d_a] = d_{D(a)}$ (II-2-1) pertenece evidentemente a M, luego ha de conmutar con D, es decir: $d_{D^2(a)} = [D, d_{D(a)}] = 0$, con lo que $D^2(a)$ ha de pertenecer al centro de A (I-1-8). Si aplicamos II-2-3, resulta $D^2(a) = 0$, $\forall a \in A$. Entonces, trivialmente, $\mathrm{imag}(D^2) \subseteq \mathrm{Rad}(A)$, con lo que, según II-2-2 , será $\mathrm{imag}(D) \subseteq \mathrm{Rad}(A) = \{0\} \implies D = 0$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Dixmier, J..- Algebres envelopants (Gauthier-Villar, 1.974).

2.- Bourbaki, N..- Algebres de Lie (Elements de mathematique, Fasc. XXVI ; Hermann, 1.960).

3.- Schafer, R. D..- Inner derivations of non-associative algebras (Bull. of the Amer. Math. Soc., Vol. 55, págs.: 769-776, 1.949).

4.- Bonsall, F. F. - Duncan, J..- Complete normed algebras (Springer-Verlag, 1.973).

5.- Johnson, B. E. - Sinclair, A. M..- Contunuity of derivations and a problem of Kaplansky (Amer. J. Math., Vol. 90, págs.: 1067-1073, 1.968).

6.- Halmos, P. R..- A Hilbert space problem book (D. van Nostrand, inc., 1.967).

7.- Newman, D. J..- A radical algebra without derivations (Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 10, págs.: 584-586, 1.959).

8.- Putnam, C. R..- Commutation properties of Hilbert space operators and related topics (Springer-Verlag,1967).

9.- Bourbaki, N..- Theories spectrales (Elements de mathematique, Fasc. XXXII; Hermann, 1.967).

10.- Palacios, A. R..- Contribución a la teoría de las C^*-álgebras con unidad (Publicaciones de la Universidad de Granada, 1.974).