Revista del Dpto. de Estadística Matemática de Granada 3(1976) 64-66

DERIVACIONES DE LAS ALGEBRAS NORMADAS Y CONMUTATIVIDAD. II

Angel Rodriguez Palacios

Dpt° de Teoría de Funciones

En [2] (teorema II-1-5) demostramos:

Teorema 1.- Sea A un álgebra normada, D una Jordan-derivación contínua de A, a ε A. Si $[a,D(a)]$ pertenece al centro de A, D(a) es casi-nihilpotente.

Y, basados en él, obteníamos una variante ([2], teorema II-1-9):

Teorema 2.- Sea A un álgebra de Banach, D una derivación contínua de A, a ε A; se supone que $[a,D(a)]$ pertenece al radical de A. Entonces D(a) es casi-nihilpotente.

Hemos llamado "variante" a este teorema puesto que la obtención de igual tesis que en el primero (la casi-nihilpotencia de D(a)) ha requerido el fortalecimiento de dos hipótesis, a saber:

- exigir a A ser completa
- exigir a D ser una auténtica derivación de A,

teniendo, en contrapartida, la ventaja de que, siendo ahora A completa, la hipótesis nueva de que $[a,D(a)]$ pertenezca al radical de A es más débil que la antígua (pertenencia de $[a,D(a)]$ al centro de A).

En efecto: si $[a,D(a)]$ (=b) pertenece al centro de A, b es un corchete con términos en un álgebra normada que conmuta con uno de sus términos, y en consecuencia ([2], II-1-4; el resultado se debe a Kleinecke, [1]), b es casi-nihilpotente, es decir: r(b) =0 y como es cb = bc para todo c de A, será r(cb) = 0 para todo c, lo que , como es sabido, caracteriza en álgebras de Banach a b como elemento del radical.

El propósito de esta nota es demostrar que, en el teorema 2, exigir a D ser derivación es innecesario, siendo dicho teorema válido para D Jordan-derivación contínua.

Cuando redactábamos [2] nos fué imposible esta generalización pues desconocíamos si las Jordan-derivaciones contínuas conservaban el radical de un álgebra de Banach (cuestión a la que dábamos respuesta afirmativa en [2]-II-1-10, mediante un razonamiento elemental, para el caso particular de auténticas derivaciones contínuas). Ahora bien, Sinclair ha demostrado en [3] (lema 3.2):

Lema.- Toda Jordan-derivación contínua de un álgebra de Banach deja invariantes los ideales primitivos.

De donde, teniendo en cuenta que el radical de un álgebra es precisamente la intersección de los ideales primitivos:

Corolario.- Toda Jordan-derivación contínua de un álgebra de Banach deja invariante el radical.

Con esto podemos demostrar:

Teorema 3.- Sea A un álgebra de Banach, D una Jordan-derivación contínua de A, $a \in A$; si $[a,D(a)]$ pertenece al radical de A, D(a) es casi-nihilpotente.

Demostración (se trata de retocar convenientemente la que hicimos en [2] para el teorema 2):

Según el corolario anterior, el radical de A es invariante por D, lo que permite definir $\tilde{D}: b+Rad(A) \longrightarrow D(b)+Rad(A)$, aplicación del álgebra de Banach A/Rad(A) en sí misma, que resulta ser una Jordán-derivación contínua de esta última; la hipótesis "$[a,D(a)]$ pertenece al radical" se traduce por el hecho de que $a+Rad(A)$ y $\tilde{D}(a+Rad(A))$ conmutan; lo que nos pone en las hipótesis del teorema 1 aplicado al álgebra A/Rad(A), a la Jordan-derivación $\tilde{D}$ y al elemento a+Rad(A); con lo que $r(\tilde{D}(a+Rad(A))) = r(D(a)+Rad(A)) = 0$, y entonces también será $r(D(a)) = 0$ puesto que D(a) y D(a)+Rad(A) tienen igual espectro, resultando así D(a) casi-nihilpotente, como se quería demostrar.

Nota.- El teorema 2 queda así como corolario del teorema 3,no - obstante el que enunciamos a continuación (demostrado en la primera nota a II-1 de [2]) es independiente del teorema 3, pues la continuidad de D se rebaja al simple hecho de conservar el radical a costa de exigirle ser auténtica derivación, hipóteis esta que es esencial en el razonamiento que allí hacíamos en el que jugaba un papel decisivo la continuidad automática de las derivaciones de las álgebras de Banach semisimples, mientras que permanece desconocida la certeza de la afirmación "toda Jordan-derivación de un álgebra de Banach semisimple es contínua" ([3],3.4), equivalente en vista del teorema 3.3 de [3] a esta otra: "toda Jordan-derivación de un álgebra de Banach semisimple es derivación".

Teorema 4.- Sea A un álgebra de Banach, D una derivación de A - que conserva el radical, $a \in A$; si $[a,D(a)]$ pertenece al radical de A, D(a) es casi-nihilpotente.

REFERENCIAS

1.- Kleinecke, D.C..- On operator commutators (Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 8, págs. 535-536, 1957).

2.- Palacios, A.R..- Derivaciones de las álgebras normadas y conmutatividad (Cuadernos del Dptº de Estadística Matemática, - Vol. 2, págs. 51-68, 1975).

3.- Sinclair, A.M..- Jordan homomorphisms and derivations on --- semi-simple Banach algebras (Proc. Amer. Math. Soc., Vol.24, págs. 209-214, 1970).