ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

ALGEBRAS ESTELARES DE BANACH CON ELEMENTO UNIDAD

PUBLICADO EN «ACTAS DE LAS PRIMERAS JORNADAS MATEMÁTICAS HISPANO-LUSITANAS»

MADRID
1973

ALGEBRAS ESTELARES DE BANACH CON ELEMENTO UNIDAD

por

ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

«Aunque las álgebras de von Neumann sean ejemplos de álgebras estelares, la teoría de las álgebras estelares es de hecho tributaria de la de las álgebras de von Neumann...». «Me parecía que la mayoría de los teoremas expuestos (está hablando de la teoría de álgebras de von Neumann) tenían una forma casi definitiva. Por el contrario, la teoría de las álgebras estelares me parece lejos de haber alcanzado un estado estable.»

Esta opinión, extraída de la introducción que Jacques Dixmier hace a este trabajo: intentar una nueva axiomática para las álgebras estelares, cuya equivalencia con la clásica esté fuera de duda (piénsese, por ejemplo, que a partir de los axiomas usuales se demuestra que toda álgebra estelar es isomorfa a una subálgebra cerrada y autoadjunta de un álgebra de operadores continuos en un Hilbert H, de donde la existencia de la familia «admisible» de funcionales positivos $\{u \longrightarrow (u\,x \mid x) \mid 0 \neq x \in H\}$ cumpliendo las condiciones de nuestros axiomas), que facilite su estudio y permita quitar esa dependencia «tributaria» de estructuras con axiomas más fuertes.

El primer capítulo del trabajo se dedica a la exposición de los axiomas, mientras que en los otros dos se intenta justificar la utilidad de los mismos generalizando los métodos seguidos por Riesz-Nagy en sus «Lecciones de análisis funcional» en el estudio de las álgebras de endomorfismos continuos de un espacio de Hilbert.

I. Fundamento algebraico y axiomas

1. *Estructura algebraica base*

Se parte de un álgebra U sobre C con elemento unidad (que designaremos I) y se supone definida una aplicación $u \longrightarrow u^*$, de U en U, verificando:

a) $\forall (u, v) \in U \times U$: $(u + v)^* = u^* + v^*$.

b) $\forall (z, u) \in C \times U$: $(z \cdot u) = \bar{z} \cdot u^*$.

c) $\forall (u, v) \in U \times U$: $(u \cdot v)^* = v^* \cdot u^*$.

d) $\forall u \in U$: $(u^*)^* = u$.

La aplicación $u \longrightarrow u^*$ se acostumbra a llamar conjugación; u^* se llama el adjunto de u. Algunos elementos del álgebra reciben nombres especiales; así, por ejemplo:

Normales: si conmutan con su adjunto.

Simétricos o autoadjuntos: si coinciden con su adjunto.

Algunas propiedades de la conjugación, cuya demostración es fácil, son:

e) $I^* = I$.

f) Si u ($\in U$) es inversible, u^* también lo es, y se verifica:

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

g) Todo elemento u del álgebra se puede descomponer de manera única en la forma $u = u_1 + i\, u_2$, con u_1 y u_2 simétricos.

2. *Estructura del dual algebraico U' de nuestra álgebra*

Al conjunto U' se puede dotar de estructura de U-módulo por la izquierda sin más que definir el producto de un elemento u de U por un elemento u' de U mediante la fórmula

$$\langle u \cdot u', v \rangle = \langle u', v \cdot u \rangle; \quad \forall v \in U.$$

La comprobación de los axiomas de la estructura de módulo es inmediata.

Análogamente se puede dotar a U' de estructura de U-módulo por la derecha, definiendo ahora el producto por la fórmula

$$\langle u' \cdot u, v \rangle = \langle u', u \cdot v \rangle; \quad \forall v \in U.$$

Ambas estructuras son compatibles en el sentido de ser

$$(u \cdot u') \cdot v = u \cdot (u' \cdot v); \quad \forall (u, u', v) \in U \times U' \times U.$$

También es posible definir en U′ una conjugación; bastará poner para cada u' de U

$$\langle u'^*, u\rangle = \overline{\langle u', u^*\rangle}\,; \qquad \forall\, u \in U.$$

Es fácil ver que la aplicación u'^* de U en C así definida es lineal y por tanto un elemento de U′. Igualmente se podrá comprobar que la aplicación $u' \dashrightarrow u'^*$ de U′ en U′ goza de las propiedades usuales de una conjugación definida en un espacio vectorial, a saber:

$$(u' + v')^* = u'^* + v'^*$$

$$(z \cdot u')^* = \bar{z} \cdot u'^*$$

$$(u'^*)^* = u'.$$

Es útil la siguiente caracterización de los elementos simétricos de U′, de demostración inmediata:

A) Un elemento u' de U′ es simétrico si y sólo si toma valores reales sobre todos los elementos simétricos de U.

3. *Elementos positivos de U′*

Un elemento u' de U′ se llama positivo si verifica

$$\langle u', u^* u\rangle \geqslant 0\,; \qquad \forall\, u \in U.$$

El conjunto de los elementos positivos de U′ es cerrado respecto a la suma y respecto a la multiplicación por números positivos o nulos, por lo que si, para dos elementos u' y v' de U′, ponemos por definición

$$u' \leqslant v' \Longleftrightarrow v' - u'$$

es positivo, habremos dotado a U′ de una relación de orden (la antisimetría es consecuencia de la propiedad d), que citaremos próximamente). Esta relación será evidentemente compatible con la suma y con el producto por números positivos, en el sentido de verificarse

$$u' \leqslant v' \Longrightarrow u' + w' \leqslant v' + w'\,; \qquad \forall\, w' \in U'$$

$$u' \leqslant v' \Longrightarrow z \cdot u' \leqslant z \cdot v'\,; \qquad \forall\, z \geqslant 0.$$

Propiedades de los funcionales positivos:

(Todas son consecuencia de la primera.)

a) Si u' es positivo, la aplicación

$$(u, v) \longrightarrow \langle u', v^* u \rangle$$

de $U \times U$ en C es una forma hermitiana positiva sobre U.

b)

$$| \langle u', v^* u \rangle |^2 \leqslant \langle u', u^* u \rangle \cdot \langle u', v^* v \rangle ; \quad \forall (u, v) \in U \times U.$$

c) La aplicación

$$u \longrightarrow \sqrt{\langle u', u^* u \rangle}$$

de U en R es una seminorma.

d)

$$| \langle u', u \rangle |^2 \leqslant \langle u', I \rangle \cdot \langle u', u^* u \rangle.$$

e) Todo funcional positivo es simétrico.

De esta última afirmación resulta que carece de interés considerar la relación de orden de la que antes hablábamos, definida en todo el conjunto U', pues teniendo en cuenta 1, g) (que también es válido en U') y nuestra propiedad e), si

$$\begin{cases} u' = u'_1 + i\, u'^2 \\ v' = v'_1 + i\, v'^2 \end{cases} ; \quad u' \leqslant v' \Rightarrow \begin{cases} u'_1 \leqslant v'_1 \\ u'^2 = v'_2. \end{cases}$$

Así, pues, dicha relación de orden se considerará solamente definida en el conjunto de los elementos simétricos de U'.

4. *Axiomática usual de las álgebras estelares*

Una norma, definida en un álgebra U con conjugación, se llama estelar cuando dote a U de estructura de álgebra normada y se cumpla además la llamada condición estelar

$$\| u^* u \| = \| u \|^2 ; \quad \forall u \in U.$$

De la condición estelar se deducen fácilmente algunas propiedades:

a) $\| I \| = 1$.

b) $\| u^* \| = \| u \|, \quad \forall u \in U.$

Un álgebra U con conjugación se llama estelar cuando admite una norma estelar con respecto a la cual U sea completa.

El propósito de este trabajo es dar una nueva axiomatización para las álgebras estelares con elemento unidad, que, a nuestro juicio, va más al fondo de la cuestión, permite un estudio más fácil y constituye un potente útil de trabajo en las aplicaciones a casos concretos.

Veamos previamente algunos conceptos.

5. *Familias "admisibles" de funcionales positivos*

Sea U un álgebra con conjugación y elemento unidad; una familia F de elementos positivos de U' la llamaremos admisible si cumple:

a) $0 \notin F$.

b) F separa los elementos de U.

c)

$$(u \in U,\ u' \in F,\ u \cdot u' \cdot u^* \neq 0) \Longrightarrow u \cdot u' \cdot u^* \in F.$$

d) Para cada u de U, el conjunto de números

$$\{ \langle u', u\rangle / \langle u', 1\rangle \mid u' \in F \}$$

está acotado.

Observaciones:

En vista de la linealidad de los elementos de F, la condición b) se puede escribir así:

$$\forall u \in U\ (u \neq 0) : \exists u' \in F \mid \langle u', u\rangle \neq 0.$$

Si F es la familia de todos los funcionales estrictamente positivos de U, se demuestra sin dificultad que c) se cumple automáticamente.

Es digno de notar también que la propiedad d) es cierta, cualquiera que sea la familia F, si nuestra álgebra U es un álgebra de Banach involutiva; basta para ello recordar un teorema de la teoría general de álgebras involutivas (cuya demostración puede verse en Dieudonné, «Eléments d'analyse», tomo II), afirmando:

B) Todo funcional positivo u' sobre un álgebra de Banach involutiva con elemento unidad es continuo y

$$\| u' \| = \langle u', 1\rangle.$$

De este teorema se deduce fácilmente que $\| u \|$ acota en módulo al conjunto

$$\{ \langle u', u \rangle / \langle u', I \rangle \mid u' \in F \}.$$

6. *Norma estelar asociada a una familia admisible de funcionales positivos*

Sea F una familia admisible de funcionales positivos sobre U. Por 5, d), para cada u de U el conjunto de números positivos

$$\{ \sqrt{\langle u', u^* u \rangle / \langle u', I \rangle} \mid u' \in F \}$$

está mayorado. Visto esto, podemos demostrar el siguiente teorema:

C) La aplicación

$$u \longrightarrow \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^* u \rangle / \langle u', I \rangle}$$

de U en R es una norma estelar sobre U.

DEMOSTRACIÓN.—Pongamos

$$\| u \| = \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^* u \rangle / \langle u', I \rangle}.$$

Desde luego, la aplicación $u \longrightarrow \| u \|$ es una seminorma por ser extremo superior de una familia de seminormas acotada. Se verificará, por tanto,

$$\| u + v \| \leqslant \| u \| + \| v \|; \quad \forall (u, v) \in U \times U.$$
$$\| z \cdot u \| = | z | \cdot \| u \|; \quad \forall (z, u) \in C \times U.$$

Demostremos la compatibilidad con el producto. Sea (u, v, u') de $U \times U \times F$: la desigualdad

$$\sqrt{\langle v \cdot u' v^*, u^* u \rangle / \langle v \cdot u' v^*, I \rangle} \leqslant \| u \|$$

es evidente si $v \cdot u' \cdot v^* = 0$ es de F y la definición de nuestra norma. Pero esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$\sqrt{\langle u', (u v)^* \cdot u v \rangle / \langle u', I \rangle} \leqslant \| u \| \cdot \sqrt{\langle u', v^* v \rangle / \langle u', I \rangle}$$

(trivial cuando $v \cdot u' \cdot v^* = 0$)

Tomando extremos superiores ($u' \in F$), resulta:

$$\| u \cdot v \| \leqslant \| u \| \, \| v \|.$$

Demostremos, por último, la condición estelar. Sea (u, u') de $U \times F$; apliquemos 3, d), poniendo en lugar de u, $u^* u$:

$$\langle u', u^* u \rangle \leqslant \sqrt{\langle u', 1 \rangle \cdot \langle u', u^* u u^* u \rangle} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \langle u', u^* u \rangle / \langle u', 1 \rangle \leqslant \sqrt{\langle u, u^* u u^* u \rangle / \langle u', 1 \rangle}.$$

Tomando extremos superiores ($u' \in F$):

$$\| u \|^2 \leqslant \| u^* u \|.$$

De esta desigualdad se deduce fácilmente $\| u^* \| = \| u \|$, y aplicando la compatibilidad de la norma respecto al producto, se llega al resultado deseado $\| u^* u \| = \| u \|^2$.

Que la seminorma $u \longrightarrow \| u \|$ es una norma, es consecuencia directa de la propiedad 5, b).

7. *Nueva axiomatización de las álgebras estelares con elemento unidad*

Un álgebra U con conjugación y elemento unidad la llamaremos estelar si:

Axiomática &.—La familia de todos los elementos estrictamente positivos de U' es admisible y U es completa con respecto a la norma asociada a dicha familia.

Axiomática £.—Existe una familia F admisible de elementos positivos de U', y U es completa con respecto a la norma asociada a F.

D) TEOREMA.—Los axiomas & y £ son equivalentes y las normas a que aluden dichos axiomas coinciden (en consecuencia, si se toma £ como definición de álgebra estelar, resulta que la norma de un álgebra estelar no depende de la familia admisible que se tome para generarla).

Siendo evidente que el axioma & implica el £, pasemos a demostrar el recíproco. Llamemos $\| \; \|_F$ a la norma asociada a F.

Nuestra álgebra U con la norma $\| \; \|_F$ es un álgebra de Banach involutiva. Llamemos P a la familia de todos los elementos estrictamente positivos de U' y demostremos en primer lugar que P es admisible:

Las condiciones 5, a) y 5, c) son siempre ciertas para P.

La condición 5, b) es también inmediata, pues, por hipótesis, F separa los elementos de U y $F \subseteq P$.

Respecto a la propiedad 5, d), también es fácil su verificación para P. Basta recordar que si U es un álgebra de Banach involutiva con elemento unidad (lo cual, en nuestro caso, es cierto considerando la norma $\| \|_F$), cualquier familia de elementos estrictamente positivos de U′ goza de dicha propiedad. Tenemos ya demostrado que P es admisible.

Llamemos $\| \|$ a la norma asociada a P. Desde luego, por ser $F \subseteq P$, se tendrá $\| u \|_F \leqslant \| u \|$. Por otra parte, si aplicamos 5, B) al álgebra de Banach involutiva (U, $\| \|_F$), obtenemos para todo u' de P y para todo u de U:

$$\langle u', u^* u \rangle \leqslant \| u' \|_F \cdot \| u^* u \|_F = \langle u', 1 \rangle \| u \|^2_F,$$

de donde

$$\sqrt{\langle u', u^* u \rangle / \langle u', 1 \rangle} \leqslant \| u \|_F ; \quad \forall u' \in P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| u \| = \sup_{u' \in P} \sqrt{\langle u', u^* u \rangle / \langle u', 1 \rangle} \leqslant \| u \|_F.$$

Concluimos: $\| u \|_F = \| u \|$, c. q. d.

La identidad de las dos normas hace trivial el hecho de que U sea completa con respecto a la norma asociada a P, pues por hipótesis lo era con respecto a la norma asociada a F, que es la misma.

II. RELACIÓN DE ORDEN

1. *Elementos positivos de un álgebra estelar*

Sea U un álgebra estelar en el sentido del axioma £ y sea F la familia admisible de funcionales positivos generadora de la norma de U. Un elemento u de U diremos que es positivo si verifica

$$\langle u', u \rangle \geqslant 0 ; \quad \forall u' \in F.$$

PROPIEDADES:

a) El conjunto de los elementos positivos de U es cerrado respecto a la suma y respecto al producto por números positivos.

b) Si u y $-u$ son positivos, u tiene que ser cero, puesto que el ser u y $-u$ positivos, exige

$$\langle u', u \rangle = 0 ; \quad \forall u' \in F,$$

lo que por I, 5, b) implica $u = 0$.

c) $\forall u \in U$: $u^* u$ es positivo; en particular, el cuadrado de todo elemento simétrico es positivo; el elemento unidad 1 es positivo.

d) Si v es positivo, $u^* v u$ también lo es, cualquiera que sea u de U. Es consecuencia de I, 5, c).

e) El conjunto de los elementos positivos de U es un cerrado de U con la topología de la norma. En efecto, dicho conjunto aparece como intersección de los conjuntos

$$A_{u'} = \{ u \in U \mid \langle u', u \rangle \geqslant 0 \} \qquad (u' \in F)$$

que son cerrados por la continuidad de los u'.

f) Todo elemento positivo de U es simétrico. En efecto, sea u el elemento positivo en cuestión, recordando la definición de la conjugación en U', se tendrá:

$$\langle u', u^* \rangle = \overline{\langle u'^*, u \rangle}; \quad \forall u' \in F;$$

pero los u' son simétricos por I, 3, e), luego

$$\langle u', u^* \rangle = \overline{\langle u', u \rangle}; \quad \forall u' \in F,$$

y como u es positivo, $\langle u', u \rangle$ es positivo y coincide con su conjugado; se tiene así

$$\langle u', u^* \rangle = \langle u', u \rangle; \quad \forall u' \in F,$$

lo que teniendo en cuenta I, 5, b), nos permite afirmar: $u^* = u$, como se quería demostrar.

Teniendo en cuenta 1, a) y 1, b), si definimos la relación

$$u \leqslant v \Longleftrightarrow v - u$$

es positivo, esta relación será de orden y cumplirá, análogamente a I, 3:

$$u \leqslant v \Longrightarrow u + w \leqslant v + w; \quad \forall w \in U:$$
$$u \leqslant v \Longrightarrow z \cdot u \leqslant z \cdot v; \quad \forall z \geqslant 0.$$

Al igual que en I, 3, por 1, f), esta relación de orden interesará considerarla definida tan sólo en el conjunto de los elementos simétricos de U.

2. *Cotas de los elementos simétricos de un álgebra estelar*

Sea U nuestra álgebra estelar y sea F la familia admisible de funcionales positivos generadora de la norma de U. Para cada u simétrico de U, pongamos:

$$M(u) = \sup_{u' \in F} (\langle u', u \rangle / \langle u', I \rangle), \qquad m(u) = \operatorname{Inf}_{u' \in F} (\langle u', u \rangle / \langle u', I \rangle);$$

los números $M(u)$ y $m(u)$ así definidos, se llaman cotas superior e inferior, respectivamente, del elemento simétrico u. De la definición de la norma y I, 3, d), se obtiene:

a)

$$-\| u \| \leqslant m(u) \leqslant M(u) \leqslant \| u \|,$$

de donde claramente:

b)

$$\text{máx}\,(| m(u) |, | M(u) |) \leqslant \| u \|.$$

La desigualdad inversa la demostraremos más adelante. Sigamos con propiedades de demostración sencilla:

c)

$$m(u) \cdot I \leqslant u \leqslant M(u) \cdot I;$$

$M(u)$ es el menor de los números K, y $m(u)$ el mayor de los K' que verifiquen

$$K' \cdot I \leqslant u \leqslant K \cdot I.$$

De c) se deduce:

d)

$$u \leqslant v \Longrightarrow \begin{cases} M(u) \leqslant M(v), \\ m(u) \leqslant m(v) \end{cases}$$

e)

$$\left. \begin{array}{l} m(u+v) \geqslant m(u) + m(v) \\ M(u+v) \leqslant M(u) + M(v) \end{array} \right\},$$

cualesquiera que sean u y v simétricos.

Consecuencias directas de las definiciones son:

f)

$$m(u) = -\mathrm{M}(-u); \quad \forall\, u \text{ simétrico.}$$

g)

$$\left.\begin{aligned} m(u + z \cdot \mathrm{I}) &= m(u) + z \\ \mathrm{M}(u + z \cdot \mathrm{I}) &= \mathrm{M}(u) + z \end{aligned}\right\},$$

para todo u simétrico y todo número real z.

h)

$$\left.\begin{aligned} m(z \cdot u) &= z \cdot m(u) \\ \mathrm{M}(z \cdot u) &= z \cdot \mathrm{M}(u) \end{aligned}\right\},$$

para todo u simétrico y todo número positivo z.

i)

$$u \geqslant 0 \Longleftrightarrow m(u) \geqslant 0$$

para un u simétrico.

3. *Relación entre la norma y las cotas de un elemento simétrico*

En este apartado nos proponemos establecer la desigualdad inversa de 2, b) y sacar unas primeras consecuencias de la igualdad resultante.

Llamemos $p(u)$ al mayor de los números $|m(u)|$ y $|\mathrm{M}(u)|$. Teniendo en cuenta las definiciones de cotas, se tendrá:

$$p(u) = \sup_{u' \in \mathrm{F}} (|\langle u', u\rangle| / \langle u', \mathrm{I}\rangle);$$

es decir, $p(u)$ es el menor de los números K que cumplen

$$|\langle u', u\rangle| \leqslant \mathrm{K} \cdot \langle u', \mathrm{I}\rangle; \quad \forall\, u' \in \mathrm{F}.$$

Visto esto, hagamos uso de la identidad

$$u^2 = (1/4)\,((z + z^{-1} u)\, u\, (z + z^{-1} u) - (z - z^{-1} u)\, u\, (z - z^{-1} u)),$$

válida para cualquier u de U y para cualquier complejo $z \neq 0$, pero en la que consideraremos que u es nuestro elemento simétrico en cuestión, y z

es un número positivo que más adelante se especificará. Cualquiera que sea u' de F, se tendrá:

$$\langle u', u^2 \rangle = (1/4)\left(\langle (z + z^{-1}\, u)\, u'\, (z + z^{-1}\, u),\, u \rangle - \langle (z - z^{-1}\, u)\, u'\, (z - z^{-1}\, u),\, u \rangle\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$(z + z^{-1}\, u)\, u'\, (z + z^{-1}\, u) \quad \text{y} \quad (z - z^{-1}\, u)\, u'\, (z - z^{-1}\, u)$$

por 1, 5, c), pertenecen a F y la caracterización que acabamos de hacer de $p(u)$:

$$\langle u', u^2 \rangle \leqslant (1/4)\, p(u)\, \left(\langle u', (z + z^{-1}\, u)^2 \rangle + \langle u', (z - z^{-1}\, u)^2 \rangle\right) =$$
$$= (1/2)\, p(u)\, (z^2 \langle u', \mathrm{I} \rangle + z^{-2} \langle u', u^2 \rangle).$$

Si hacemos

$$z = \sqrt[4]{\langle u', u^2 \rangle / \langle u', \mathrm{I} \rangle},$$

obtenemos finalmente

$$\langle u', u^2 \rangle \leqslant p(u) \cdot \sqrt{\langle u', u^2 \rangle \cdot \langle u', \mathrm{I} \rangle} \Longrightarrow \sqrt{\langle u', u^2 \rangle / \langle u', \mathrm{I} \rangle} \leqslant p(u) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \| u \| = \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^2 \rangle / \langle u', \mathrm{I} \rangle} \leqslant p(u).$$

Tenemos así:
y por 2, b):

$$\left.\begin{array}{l} \| u \| \leqslant \text{máx}\, (| m(u) |, | \mathrm{M}(u) |) \\ \| u \| \geqslant \text{máx}\, (| m(u) |, | \mathrm{M}(u) |) \end{array}\right\}$$

de donde:

A)

$$\| u \| = \text{máx}\, (| m(u) |, | \mathrm{M}(u) |); \qquad \forall\, u \text{ simétrico}.$$

CONSECUENCIAS:

a)

$$u \geqslant 0 \Longrightarrow \| u \| = \mathrm{M}(u).$$

Puesto que, por 2, i) y 2, a), se tendrá

$$0 \leqslant m(u) \leqslant \mathrm{M}(u),$$

con lo que bastará aplicar A) para obtener el resultado que se pretende.

Tomemos ahora un elemento simétrico u cualquiera de U; teniendo en cuenta 2, a) y 2, c), el elemento $u + \| u \|$ será positivo, con lo que aplicando nuestra anterior consecuencia a) y 2, g), se tiene:

$$\| u + \| u \| \| = \mathrm{M}(u + \| u \|) = \mathrm{M}(u) + \| u \|,$$

lo que permite dar la siguiente expresión de M (u) por medio de la norma:

b)

$$\mathrm{M}(u) = \| u + \| u \| \| - \| u \|; \quad \forall\, u \text{ simétrico.}$$

Si utilizamos ahora 2, f), obtenemos la expresión análoga para $m(u)$:

c)

$$m(u) = \| u \| - \| \| u \| - u \|.$$

4. *Caracterización "intrínseca" de los elementos positivos*

La definición que dimos en **1** para los elementos positivos de U, y por tanto el orden deducido canónicamente, dependía de la familia admisible F generadora de la norma de U. Ahora bien, analizando conjuntamente los resultados 2, i) y **3**, c), según los cuales el concepto de «positivo» se puede dar en términos de cotas y éstas, a su vez, se pueden definir a partir de la norma (que sabemos no depende de la familia F que la genere), se deduce que el orden de U es intrínseco y no queda ligado a la familia admisible F generadora de la norma que tomemos para definirlo. Este hecho se especifica claramente en el siguiente teorema:

B) Para un elemento simétrico u de U, las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) u es positivo.

b)

$$\| u - (1/2) \| u \| \| = (1/2) \| u \|.$$

c)

$$\| \| u \| - u \| \leqslant \| u \|.$$

Demostración.—a) $\Longrightarrow$ b). Siendo u positivo, por 2, a) y 2, i):

$$0 \leqslant m(u) \leqslant u.$$

de donde por sustracción de $\| u \|/2$:

$$-\frac{\| u \|}{2} \leqslant m(u) - \frac{\| u \|}{2} \leqslant \frac{\| u \|}{2} \Rightarrow \left| m(u) - \frac{\| u \|}{2} \right| \leqslant \frac{\| u \|}{2}$$

Calculando las cotas de $u - \| u \|/2$ mediante las reglas 2, g) y 3, a), y aplicando finalmente 3, A), se obtiene

$$\left\| u - \frac{\| u \|}{2} \right\| = \text{máx}\left(\left| m(u) - \frac{\| u \|}{2} \right|, \frac{\| u \|}{2} \right) = \frac{\| u \|}{2} \qquad , \quad \text{c. q. d.}$$

b) $\Longrightarrow$ c). Si se cumple b), se tendrá

$$\| \| u \| - u \| = \left\| \frac{\| u \|}{2} - \left(u - \frac{\| u \|}{2} \right) \right\| \leqslant \frac{\| u \|}{2} + \left\| u - \frac{\| u \|}{2} \right\| = \frac{\| u \|}{2} + \frac{\| u \|}{2} = \| u \|.$$

c) $\Longrightarrow$ a). La condición c) equivale, según 3, c), a $m(u) \geqslant 0$. Bastará aplicar 2, i).

5. *Espectro de los elementos simétricos*

La base de todo lo que vamos a decir en este apartado está en el siguiente lema:

C) Un elemento positivo de U es inversible si y sólo si su cota inferior es distinta de cero.

DEMOSTRACIÓN: «sólo si».—Suponemos u positivo e inversible. Por ser u positivo, cualquiera que sea u' de F (F: familia admisible generadora de la norma de U), en vista de I, 5, c), se tiene que la aplicación

$$(v, w) \longrightarrow \langle u', w^* u v \rangle$$

de U $\times$ U en C es una forma hermitiana positiva, con lo que, por la desigualdad de Schwartz, se verificará:

$$| \langle u', w^* u v \rangle |^2 \leqslant \langle u', v^* u v \rangle \cdot \langle u', w^* u w \rangle ; \quad \forall (v, w) \in \text{U} \times \text{U}.$$

Haciendo $v = u$, $w = \text{I}$:

$$\langle u', u^2 \rangle^2 \leqslant \langle u', u^3 \rangle \cdot \langle u', u \rangle ;$$

pero

$$\langle u', u^3 \rangle \leqslant \sqrt{\langle u', u^2 \rangle \cdot \langle u', u^4 \rangle}$$

(por I, 3, b), poniendo u^2 en lugar de u y u en lugar de v). Asimismo,

$$\sqrt{\langle u', u^4 \rangle} \leqslant \| u \| \cdot \sqrt{\langle u', u^2 \rangle}$$

(esta desigualdad en la forma

$$\sqrt{\langle u \cdot u' \cdot u, u^2 \rangle \, / \, \langle u \cdot u' \cdot u, \mathrm{I} \rangle} \leqslant \| u \|$$

es evidente). Sustituyendo, obtenemos (después de simplificar):

$$\langle u', u^2 \rangle \leqslant \| u \| \cdot \langle u', u \rangle \,; \qquad \forall\, u' \in \mathrm{F} \Longrightarrow u^2 \leqslant \| u \| \cdot u.$$

Haciendo uso ahora de que u es inversible, es fácil demostrar que

$$\mathrm{I} \leqslant \| u^{-1} \|^2 \cdot u^2$$

(a partir de la desigualdad

$$(u^{-1})^2 \leqslant \| u^{-1} \|^2 \cdot \mathrm{I},$$

multiplicando a derecha e izquierda por u, lo que está permitido por 1, d)). En resumen:

$$\| u \|^{-1} \cdot \| u^{-1} \|^{-2} \cdot \mathrm{I} \leqslant u.$$

Recordando 2, c) se tiene por fin

$$m(u) \geqslant \| u \|^{-1} \cdot \| u^{-1} \|^{-2},$$

y por tanto $m(u) \neq 0$, c. q. d.

«si».—Suponemos ahora u positivo y $m(u) \neq 0$; por 2, i) y 2, a), será:

$$0 < m(u) \leqslant \| u \|.$$

Fijemos un número c con la condición

$$0 < c < 2 \, / \, \| u \|$$

se verifica

$$| c \| u \| - 1 | < 1 \quad \text{y} \quad | c\, m(u) - 1 | < 1.$$

Pero los números $(c \| u \| - 1)$ y $(c\, m(u) - 1)$ son precisamente las cotas superior e inferior respectivas del elemento $c\, u - I$. Recordando 3, A), se obtiene

$$\| I - c \cdot u \| = \text{máx}\,(| c \| u \| - 1 |, \; | c\, m(u) - 1 |) < 1.$$

Este hecho asegura la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (I - c \cdot u)^n,$$

cuya suma, como se sabe de la teoría general de álgebras de Banach, es el inverso de $I - (I - c \cdot u) = c \cdot u$. Así, pues, $c \cdot u$ es inversible, lo que permite asegurar que u lo es, c. q. d.

Como corolario de nuestro lema, resulta:

D).—Para que un elemento u de U sea inversible es necesario y suficiente que los elementos positivos $u^* u$ y $u\, u^*$ tengan sus cotas inferiores no nulas.

DEMOSTRACIÓN.—Si u es inversible, u^* también lo es, por tanto también lo serán los productos $u^* u$ y $u\, u^*$ (Teoría general de anillos). Basta, pues, aplicar el lema.

Recíprocamente, si $u^* u$ y $u\, u^*$ tienen cotas inferiores no nulas, por nuestro lema serán inversibles; sean u_1 y u_2 sus respectivos inversos; entonces $u_1\, u^*$ es inverso de u por la izquierda y $u^*\, u_2$ es inverso de u por la derecha; dichos inversos, se sabe de la teoría de anillos, han de coincidir y u es por tanto inversible.

Estamos ya en condiciones de demostrar el siguiente teorema referente al espectro de los elementos simétricos:

E) El espectro de un elemento simétrico u de U es un subconjunto de R, siendo M (u) y $m\,(u)$ su máximo y mínimo, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.—Sea u el elemento simétrico en cuestión; empecemos viendo que un número $z = x + i\,y$ no real (es decir, $y \neq 0$) no puede ser un valor espectral de u. En efecto, llamemos $v = u - z \cdot I$; v es normal y se tiene

$$v^* v = v\, v^* = (u - x \cdot I)^2 + y^2 \cdot I \geqslant y^2 \cdot I.$$

Así, pues,

$$m\,(v^* v) = m\,(v\, v^*) \geqslant y^2 > 0.$$

y por D), v es inversible, con lo que $z \notin \sigma(u)$, y $\sigma(u) \subset R$. Que $M(u)$ y $m(u)$ pertenecen al espectro de u y son los valores máximo y mínimo de éste, es consecuencia directa del lema C) y de las reglas de cálculo de cotas.

Como corolario a nuestro teorema, resulta una nueva caracterización intrínseca de los elementos positivos, sin más que tener en cuenta 2, i) (esta caracterización es la que suele tomarse como definición en los tratados clásicos de álgebras estelares):

Un elemento simétrico es positivo si y sólo si su espectro está contenido en el intervalo $[0, \longrightarrow)$ de R.

III. FUNCIONALES POSITIVOS SOBRE UN ÁLGEBRA ESTELAR

1. *Caracterización de los elementos positivos de U'*

A) Sea U un álgebra estelar, u un elemento simétrico de su centro y u' un elemento de U' verificando

$$\langle u', u \rangle = \| u' \| \, \| u \| ;$$

en estas condiciones u' es simétrico.

DEMOSTRACIÓN.—Cualquiera que sea v, elemento simétrico de U, y z número real, por ser u del centro de U, $v + i z u$ es normal y se verifica

$$\| v + i z u \|^2 = \| v^2 + z^2 u^2 \| \leqslant \| v \|^2 + z^2 \| u \|^2 .$$

Pongamos

$$\langle u', v \rangle = a + i b$$

(a y b, números reales). Será

$$\langle u', v + i z u \rangle = a + i (b + z \| u' \| \, \| u \|),$$

y entonces

$$a^2 + (b + z \| u' \| \, \| u \|)^2 = | \langle u', v + i z u \rangle |^2 \leqslant \| u' \|^2 \| v + i z u \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| u' \|^2 (\| v \|^2 + z^2 \| u \|^2),$$

desigualdad que, convenientemente simplificada, queda en la forma

$$2 b \| u' \| \, \| u \| z \leqslant \| u' \|^2 \| v \|^2 - | \langle u', v \rangle |^2 ; \quad \forall z \in R.$$

Descartando el caso $u' = 0$, en que el teorema es evidente, esta desigualdad no puede ser cierta ($\forall z \in R$!) a no ser que se tenga $b = 0$. Así, pues, $\langle u', v\rangle = a$ (real); u' toma valores reales sobre todos los elementos simétricos de U y por tanto, según I, 2, A), habrá de ser u' simétrico, c. q. d.

Podemos ya enunciar:

B) Sea U un álgebra estelar; para un elemento u' de U las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) u' es positivo.

b) u' es continuo y $\langle u', I\rangle = \| u' \|$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\Longrightarrow$ b). Es cierto inclusive en las álgebras de Banach involutivas (véase I, 5, B)).

b) $\Longrightarrow$ a). Por ser

$$\langle u', I\rangle = \| u' \| = \| u' \| \cdot \| I \|$$

y pertenecer I al centro de U, estamos en las condiciones de A), por tanto u' será simétrico. Sea u un elemento positivo cualquiera de U; según II, b) es

$$\| u - \| u \| / 2 \| = \| u \| / 2,$$

y entonces

$$\langle u', u\rangle = (\| u \| / 2) \langle u', I\rangle + \langle u', u - \| u \| / 2\rangle \geqslant (\| u \| / 2) \langle u', I\rangle -$$
$$- \| u' \| \, \| u - \| u \| / 2 \| = (\| u \| / 2) \| u' \| - (\| u \| / 2) \| u' \| = 0,$$

que demuestra que u' es positivo, c. q. d.

Basándonos en el resultado que acabamos de demostrar, podemos completar A) sustituyendo la hipótesis hecha allí (pertenecer el elemento simétrico en cuestión al centro de U) por otra independiente de ésta, siendo los resultados más potentes (pues el funcional u' va a ser definido, positivo o negativo):

C) Sea U un álgebra estelar, sea u un elemento simétrico de U tal que $-m(u) \neq M(u)$, y sea u' de U' verificando

$$\langle u', u\rangle = \| u' \| \cdot \| u \|;$$

en estas condiciones u' es positivo o negativo (y por demás simétrico, según I, 3, c)), según que

$$-m(u) < M(u) \quad \text{ó} \quad -m(u) > M(u).$$

Demostración.—Sea $-m(u) \neq M(u)$. Supongamos que es $-m(u) < < M(u)$ (el caso $-m(u) > M(u)$ se trata análogamente). Como siempre es cierto que $m(u) \leqslant M(u)$, se tendrá entonces $|m(u)| \leqslant M(u)$. Recordando II, 3, A), se verifica

$$M(u) = \text{máx}(|m(u)|, M(u)) = \|u\|.$$

Con igual base se llega a

$$\left\| u - \frac{M(u) + m(u)}{2} \cdot 1 \right\| = \frac{M(u) - m(u)}{2};$$

y entonces

$$\|u'\| \cdot M(u) = \|u'\| \cdot \|u\| = \langle u', u\rangle =$$

$$= \langle u', u - \frac{M(u) + m(u)}{2} \cdot I\rangle + \frac{M(u) + m(u)}{2} \cdot \langle u', I\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|u'\| \cdot \frac{M(u) - m(u)}{2} + \langle u', I\rangle \cdot \frac{M(u) + m(u)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u'\| \cdot \frac{M(u) + m(u)}{2} \leqslant \langle u', I\rangle \cdot \frac{M(u) + m(u)}{2}$$

dividiendo por el número positivo $(M(u) + m(u))/2$:

$$\|u'\| \leqslant \langle u' I\rangle;$$

pero como será también

$$\langle u', I\rangle \leqslant \|u'\| \, \|I\| = \|u'\|.$$

se obtiene

$$\|u'\| = \langle u', I\rangle,$$

lo que teniendo en cuenta B), demuestra que u' es positivo. (Se ha tenido en cuenta en la demostración que el número $\langle u', I\rangle$ es real, lo que es consecuencia de A) aplicado a la restricción de u' al álgebra estelar de todos los elementos de U que conmutan con u.)

2. *Carácter filtrante de U′*

Doy a continuación un resultado original que permite dar una expresión explícita del elemento u'^{+} (u', elemento simétrico de U′), cuya existencia y unicidad se prueba en la teoría clásica de álgebras estelares a partir de la teoría de álgebras de von Neumann y aquí se hace de forma directa:

D) Cualquiera que sea u', elemento simétrico de U′, existe un único elemento positivo u'^{+}, verificando

$$u'^{+} \geqslant u'$$

$$\| u'^{+} \| = (1/2)\,(\| u' \| + \langle u', I \rangle).$$

Dicho elemento u'^{+} materializa la distancia de u' al conjunto de los elementos positivos de U′, así como la distancia de 0 al conjunto de los mayorantes de u'. Para u'^{+} es válida cualquiera de las dos expresiones explícitas:

$$\left.\begin{aligned} \langle u'^{+}, u \rangle &= \sup_{w \leq u} \left(\langle u', w \rangle + (1/2)\,(\| u' \| - \langle u', I \rangle)\, m(w) \right) \\ \langle u'^{+}, u \rangle &= \inf_{w \geq u} \left(\langle u', w \rangle + (1/2)\,(\| u' \| - \langle u', I \rangle)\, M(w) \right) \end{aligned}\right\} \ \forall\, u \text{ simétrico}$$

Esquematizo a continuación la parte constructiva de la demostración: fijado un elemento simétrico u de U, se consideran los conjuntos de números reales:

$$\left\{ \langle u', w \rangle + \frac{\| u' \| - \langle u', I \rangle}{2}\, m(w) \mid w \leqslant u \right\}, \left\{ \langle u', w \rangle + \frac{\| u' \| - \langle u', I \rangle}{2}\, M(w) \mid w \geqslant u \right\}.$$

Se demuestra que cada número del primer conjunto minora a todos los del segundo y que la distancia entre ambos conjuntos es 0 (en consecuencia el extremo superior del primero coincide con el extremo inferior del segundo). Se define entonces la función

$$h = u \longrightarrow \sup_{w \leq u} \left(\langle u', w \rangle + (1/2)\,(\| u' \| - \langle u', I \rangle)\, m(w) \right) = \inf_{w \geq u} \left(\langle u', w \rangle + \right.$$

$$\left. + (1/2)\,(\| u' \| - \langle u', I \rangle)\, M(w) \right)$$

del conjunto de los elementos simétricos de U en R. Utilizando la primera definición de h, es fácil demostrar:

$$h(u+v) \geqslant h(u) + h(v)$$
$$h(z \cdot u) = z \cdot h(u); \quad \forall z \geqslant 0.$$

y utilizando la segunda:

$$h(u+v) \leqslant h(u) + h(v).$$

De estas tres propiedades se deduce que h es un funcional lineal sobre el R-espacio vectorial de los elementos simétricos de U. Recordando I, 1, g), h se extiende de manera única en una aplicación lineal u'^{+} de U en C que es positiva (y por tanto continua) y mayora a u'; además es

$$\| u'^{+} \| = \langle u'^{+}, I \rangle = (1/2)(\| u' \| + \langle u', I \rangle):$$

u'^{+} es único, pues de haber otro u'_0 cumpliendo las condiciones del enunciado, se tendría para todo w simétrico:

$$\langle u'_0 - u', w - m(w) \rangle \geqslant 0 \Longrightarrow \langle u'_0, w \rangle \geqslant \langle u', w \rangle +$$
$$+ (1/2)(\| u' \| - \langle u', I \rangle)\, m(w)$$

y tomando extremos superiores ($w \leqslant u$), resulta:

$$\langle u'_0, u \rangle \geqslant \langle u'^{+}, u \rangle; \quad \forall u \text{ simétrico},$$

lo que implica (siendo u'_0 y u'^{+} lineales): $u'_0 = u'^{+}$.

Que u'^{+} materializa la distancia de 0 al conjunto de los mayorantes de u', resulta de ser

$$\| u'^{+} \| = (1/2)(\| u' \| + \langle u' \cdot I \rangle),$$

mientras que, para cualquier v' mayorante de u', se tiene

$$\| u' \| - \| v' \| \leqslant \| v' - u' \| = \langle v', I \rangle - \langle u', I \rangle \leqslant \| v' \| - \langle u', I \rangle \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \| v' \| \geqslant (1/2)(\| u' \| + \langle u', I \rangle).$$

Análogamente se demuestra que u'^{+} materializa la distancia de u' al conjunto de los positivos.

Como corolario resulta el enunciado clásico:

Para cada elemento simétrico u' de U' existe un par único de elementos positivos u'^{+} y u'^{-}, verificando

$$u' = u'^{+} - u'^{-} \quad \text{y} \quad \| u' \| = \| u'^{+} \| + \| u'^{-} \|$$

(basta tomar $u'^{-} = u'^{+} - u'$).