Práctica 4 – Matemática Aplicada. Grupo 1^oB

Espacio afín. Cambio de sistema de referencia. Cónicas y cuádricas.

Índice

1. Coordenadas de un punto en un sistema de referencia afín.
2. Cambio de sistema referencia afín.
3. (Incidencia).
4. Ejemplos de cónicas.

1. Ejercicio de cálculo de coordenadas de un punto en un sistema de referencia afín

Nos planteamos el siguiente ejercicio para resolverlo con Python.

> Calcule las coordenadas del punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\}$, donde
>
> $$O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Según la definición, buscamos los valores de a_1, a_2 y a_3 que cumplan que

$$\overrightarrow{OQ} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + a_3 \cdot \mathbf{v}_3.$$

Esto es

$$Q - O = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a obtener los valores de a_1, a_2 y a_3 de dos maneras. La primera es expresar esta última ecuación en forma de sistema lineal,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & = & -1, \\ a_1 & - & a_2 & & & = & 2, \\ a_1 & + & a_2 & - & a_3 & = & 3. \end{array}\right.$$

Este sistema lineal se puede resolver de la siguiente manera.

Ejemplo 1.

```
from sympy import symbols, Matrix, solve_linear_system

a1, a2, a3 = symbols('a1, a2, a3')
A = Matrix( [[1, 0, 0, -1], [1, -1, 0, 2], [1,1,-1,3]] )

print( solve_linear_system(A, a1, a2, a3) )
```

Como el resultado del código es `{a1: -1, a2: -3, a3: -7}`, esto significa que

$$Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

La otra forma de obtener a_1, a_2 y a_3 es expresar la ecuación vectorial usando una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

y multiplicando por la matriz inversa se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esta operación se puede efectuar con las siguientes líneas de código.

Ejemplo 2.

```
from numpy import *

A = array([ [1,0,0],[1,-1,0],[1,1,-1] ])
b = array( [ -1, 2, 3 ] )

print( dot(linalg.inv(A) , b) )
```

Y se obtiene la misma solución.

Ejercicio 3.

Calcule las coordenadas del punto $Q = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ *en el sistema de referencia* $\mathcal{R} = \{(1,1); \{(1,-1),(-1,2)\}\}$.

(Sol. $Q = (-2,-1)_{\mathcal{R}}$ *).*

2. Ejercicio de cambio de sistema referencia afín

Nos planteamos el siguiente ejercicio para resolverlo con Python.

En $\mathbb{R}^3$ se consideran los sistemas de referencia:

$$\mathcal{R} = \left\{ O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

y

$$\mathcal{R}' = \left\{ O' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

a) Determine las ecuaciones de los cambios de los sistemas de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

b) Si el punto P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tiene coordenadas (2, -1, 0), halle sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}$.

c) Si el punto Q respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ tiene coordenadas (-1, 2, 3), halle sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$.

d) ¿Existe algún punto que tenga iguales coordenadas en ambos sistemas de referencia?

Para hacer el apartado a), recordamos la ecuación del cambio de sistema de referencia vista en clase,

$$X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}} + M_{B'B} \cdot X_{\mathcal{R}'},$$

donde $X_{\mathcal{R}}$ son las coordenadas de un punto genérico en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, $O'_{\mathcal{R}}$ son las coordenadas de O' en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, $M_{B'B}$ es la matriz de cambio de base de B' a B, y $X_{\mathcal{R}'}$ son las coordenadas del mismo punto genérico pero en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

Para hacer este apartado en Python sólo se necesitan comandos de álgebra lineal para definir vectores y matrices, productos matriciales y la inversa de una matriz.

Comenzamos planteando el cálculo de la matriz de cambio de base de B' a B. Lo hacemos pasando por la base canónica B_C, ya que

$$M_{B'B} = M_{B_C B} \cdot M_{B'B_C} = (M_{BB_C})^{-1} \cdot M_{B'B_C},$$

con lo que sólo aparecen las matrices M_{BB_C} y $M_{B'B_C}$ de cambio de base a la base canónica. Recordamos que estas matrices se construyen poniendo los vectores de las bases por columnas. Al escribirlo en Python, por comodidad, escribimos los vectores por filas, y luego hacemos la traspuesta.

En el siguiente código definimos la matriz `MBaBc`, que es la matriz de cambio de base de B a la base canónica y está formada por los vectores de la base B por columnas. Luego definimos la matriz `MBpaBc` es la matriz de cambio de base de B' a la base canónica, está formada por los vectores de la base B' por columnas. Tras definir estas dos matrices, calculamos la matriz de cambio de base de B' a B.

Ejemplo 4.

```
from numpy import *

MBaBc=transpose( array([ [1,-1,0],[1,0,0],[2,3,5] ]) )

MBpaBc=transpose( array([ [0,-2,3],[1,1,1],[3,4,0] ]) )
```

```
# Calculamos la matriz de cambio de base de Bp a B
MBpaB=dot( linalg.inv(MBaBc) , MBpaBc )
```

Con este código calculamos

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 3{,}8 & -0{,}4 & -4 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez que hemos calculado $M_{B'B}$, continuamos con la ecuación del cambio de sistema de referencia, para lo cual vamos a hallar $O'_{\mathcal{R}}$.

Según el enunciado, $O' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, que tendrá coordenadas $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$. Según la definición, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Despejando podemos obtener los valores de a_1, a_2 y a_3,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

En Python estas operaciones se pueden realizar con el siguiente código.

Ejemplo 5.

```
OOp=array([2,2,2])-array([0,0,-4])
OpenR=dot( linalg.inv(MBaBc) , OOp )
```

De manera análoga vamos a calcular el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, para lo cual emplearemos la siguiente ecuación.

$$X_{\mathcal{R}'} = O_{\mathcal{R}'} + M_{BB'} \cdot X_{\mathcal{R}}.$$

Para poder tener el cambio de sistema de referencia, debemos calcular en Python la matriz $M_{BB'}$ y las coordenadas de $O_{\mathcal{R}'}$.

La matriz $M_{BB'}$ es fácil de calcular ya que basta usar que $M_{BB'} = (M_{B'B})^{-1}$.

El punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tendrá coordenadas $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ que verifican, por definición,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Despejando el vector con b_1, b_2 y b_3, se tiene que

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Estas operaciones se pueden escribir en Python de la siguiente forma.

Ejemplo 6.

```
MBaBp=linalg.inv(MBpaB)

OpO=array([0,0,-4])-array([2,2,2])
OenRp=dot( linalg.inv(MBpaBc), OpO )
```

Para hacer el apartado b) tenemos que dar las coordenadas en $\mathcal{R}$ de un punto dado en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, es decir tenemos que usar las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$,

$$P_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}} + M_{B'B} \cdot P_{\mathcal{R}'}$$

donde se sabe por el enunciado que $P_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los valores de $O'_{\mathcal{R}}$ y $M_{B'B}$ ya se han calculado en el apartado anterior.

Las siguientes líneas permiten calcular las coordenadas de P en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Ejemplo 7.

```
PenRp=array([2,-1,0])
PenR=OpenR+dot(MBpaB,PenRp)
```

El apartado c) es análogo ya que se piden las coordenadas en $\mathcal{R}'$ de un punto dado en el sistema de referencia $\mathcal{R}$. Usaremos la ecuación del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$,

$$Q_{\mathcal{R}'} = O_{\mathcal{R}'} + M_{BB'} \cdot Q_{\mathcal{R}}$$

donde $Q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ viene dada por el enunciado, y $O_{\mathcal{R}'}$ y $M_{BB'}$ se han calculado previamente.

Con las siguientes lineas en Python podemos calcular las coordenadas de Q en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

Ejemplo 8.

```
QenR=array([-1,2,3])
QenRp=OenRp+dot(MBaBp,QenR)
```

En el apartado d) se pregunta si existe algún punto que tenga las mismas coordenadas en $\mathcal{R}$ y en $\mathcal{R}'$, esto es, que cumpla $X_{\mathcal{R}} = X_{\mathcal{R}'}$. Para responder, consideramos de nuevo la ecuación de cambio de sistema de referencia

$$X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}} + M_{B'B} \cdot X_{\mathcal{R}'},$$

solo que en este caso, como pide el enunciado, buscamos los puntos que cumplen $X_{\mathcal{R}} = X_{\mathcal{R}'}$.

Por tanto buscamos vectores que cumplan que

$$X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}} + M_{B'B} \cdot X_{\mathcal{R}},$$

donde el vector $O'_{\mathcal{R}}$ y la matriz $M_{B'B}$ ya están calculadas y debemos despejar $X_{\mathcal{R}}$.

Pasando al miembro de la izquierda todos los términos que tengan el vector $X_{\mathcal{R}}$ se tiene

$$X_{\mathcal{R}} - M_{B'B} \cdot X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}}.$$

Para poder sacar factor común $X_{\mathcal{R}}$, usamos la matriz identidad, I, con lo que tenemos

$$I \cdot X_{\mathcal{R}} - M_{B'B} \cdot X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (I - M_{B'B}) \cdot X_{\mathcal{R}} = O'_{\mathcal{R}},$$

usando la matriz inversa de $(I - M_{B'B})$ podemos despejar $X_{\mathcal{R}}$ y obtenemos

$$X_{\mathcal{R}} = (I - M_{B'B})^{-1} \cdot O'_{\mathcal{R}}$$

Para obtener el resultado con Python sólo necesitamos multiplicar la inversa de una matriz por un vector. Para obtener la matriz identidad, usamos la función `eye`, en este caso `eye(3)` para tener la identidad de orden 3.

La siguiente linea en Python permite calcular el array `igualescoordenadas` que contiene las coordenadas del vector $X_{\mathcal{R}}$ que pide el enunciado.

Ejemplo 9.
```
igualescoordenadas=dot( linalg.inv(eye(3)-MBpaB) , OpenR )
```

Ejercicio 10. *Dados los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ del ejercicio resuelto en esta sección,*

i) halle las coordenadas en $\mathcal{R}$ de $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$.

ii) halle las coordenadas en $\mathcal{R}'$ de $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Ejercicio 11. *Considere los sistemas de referencia* $\mathcal{R} = \{(0,1);\{(1,0),(2,1)\}\}$ *y* $\mathcal{R}' = \{(1,1);\{(1,1),(0,1)\}\}$ *dados por sus orígenes y sus bases asociadas.*

Determine las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ *a* $\mathcal{R}'$.
(Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. *).*

3. Incidencia

4. Ejemplos de cónicas.

En esta sección vamos a representar gráficamente algunas cónicas a modo de ejemplo. Para hacer las gráficas necesitaremos instalar los módulos apropiados. En este caso el módulo matplotlib y también usaremos el módulo sympy que ya hemos empleado anteriormente.

Con las siguientes lineas representamos la elipse $x^2 + 5y^2 = 8$ como una gráfica implícita, que escribimos como una ecuación `Eq` con dos términos, uno es `x**2 + 5*y**2` y el otro es el número `8`.

Ejemplo 12.
```
from sympy import plot_implicit, symbols, Eq
x, y = symbols('x y')
p1 = plot_implicit(Eq(x**2 + 5*y**2 , 8))
```

En el siguiente ejemplo representamos la elipse $x^2+5y^2-4xy = 8$, vemos cómo los ejes de esta elipse no son paralelos a los ejes de coordenadas. El código es similar al anterior, y sólo incluimos `(x,-7.5,7.5)` en la línea del `plot_implicit` para indicar el intervalo de valores en el eje X que se quieren representar.

Ejemplo 13.
```
from sympy import plot_implicit, symbols, Eq
x, y = symbols('x y')
p1 = plot_implicit(Eq(x**2 + 5*y**2 -4*x*y, 8), (x,-7.5,7.5) )
```

Con el siguiente código representamos la gráfica de la hipérbola $2x^2 - 9xy + y^2 = 5$.

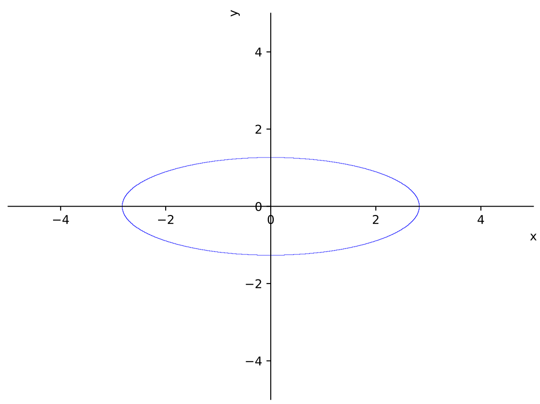

Figura 1: Elipse $x^2 + 5y^2 = 8$.

Ejemplo 14.

```
from sympy import plot_implicit, symbols, Eq
x, y = symbols('x y')
p1 = plot_implicit(Eq(2*x**2 - 9*x*y + y**2, 5))
```

El siguiente código representa la parábola $x^2+y^2-2xy+4x-6y-2=0$.

Ejemplo 15.

```
from sympy import plot_implicit, symbols, Eq
x, y = symbols('x y')
p1 = plot_implicit(
    Eq( x**2 + y**2 - 2*x*y + 4*x - 6*y - 2 , 0  ) ,
    (x,-10,10) )
```

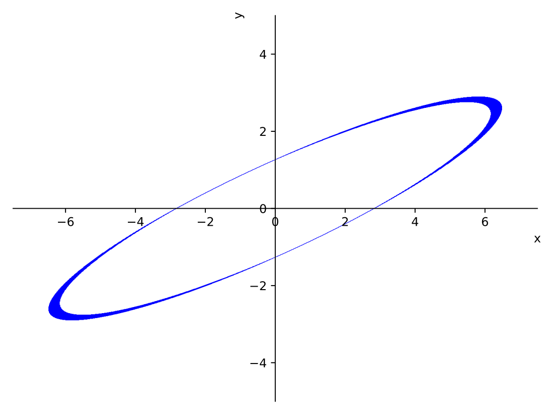

Figura 2: Elipse $x^2 + 5y^2 - 4xy = 8$.

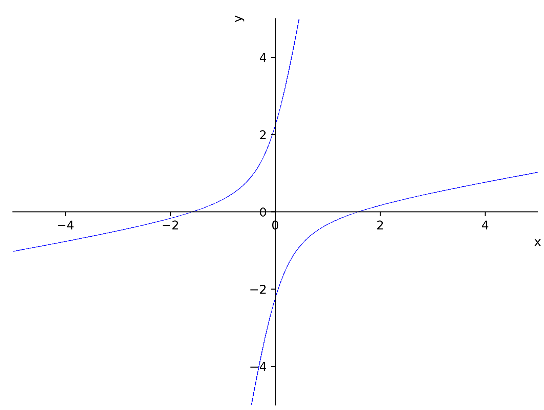

Figura 3: Hipérbola $2x^2 - 9xy + y^2 = 5$

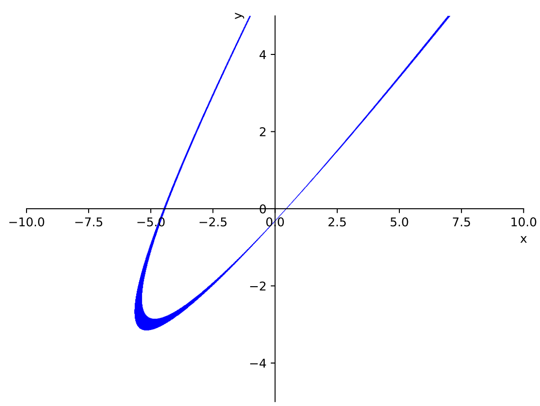

Figura 4: Parábola $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y - 2 = 0$