Centro Mediterráneo

Enseñar Matemáticas
en el siglo XXI

Geometría sintética

Ceferino Ruiz Garrido
Catedrático de la Univ. de Granada
Dpt. Geometría y Topología

Jueves, 9 de julio de 2009

Geometría

Al buscar **geometría** en el diccionario web de la RAE, encontramos:

(del lat. *geometrĭa*, y este del gr. *γεωμετρία*).

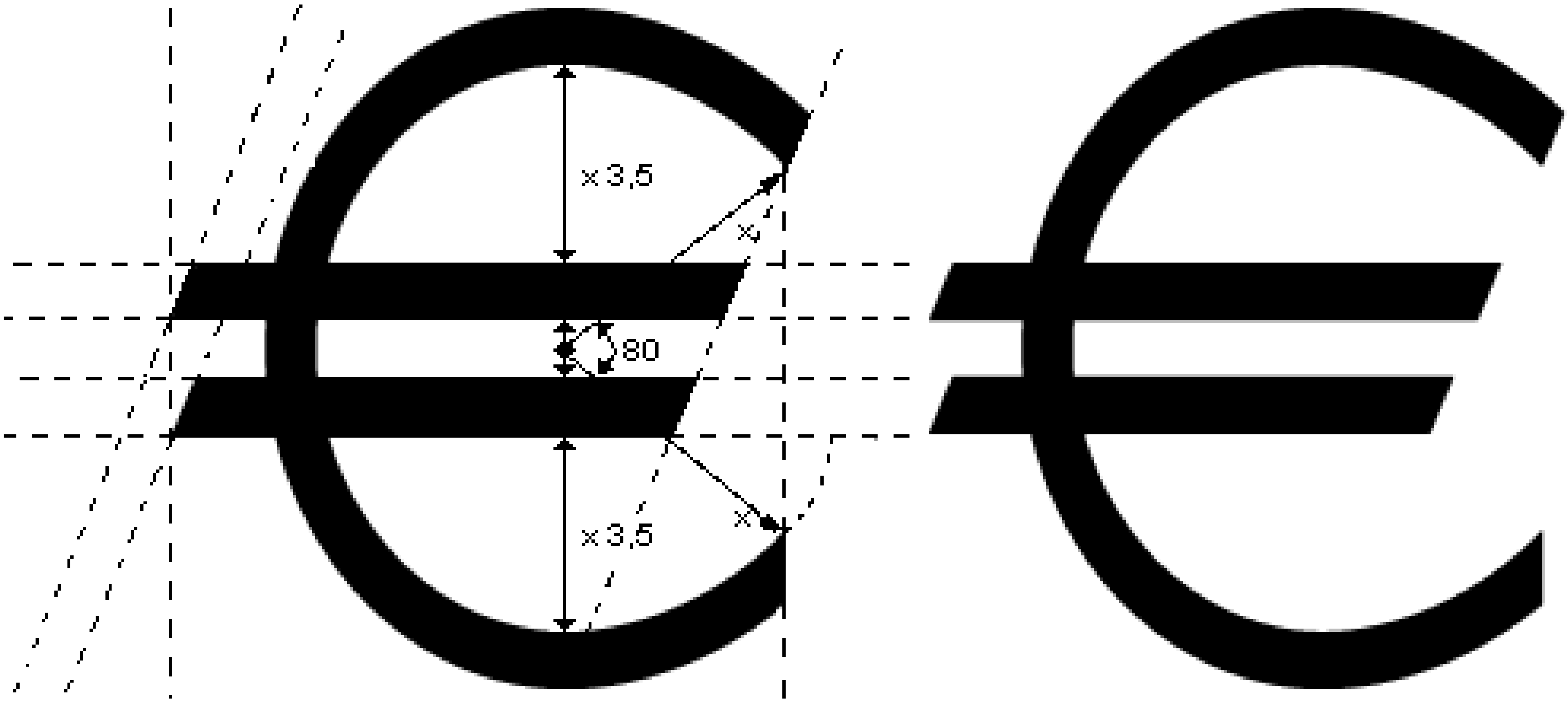
1. f. Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio.

γεωμετρία es una palabra compuesta de *γεω*, *tierra;* y de *μετρ*ὼ, *medida*.

En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área, perímetro y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

Elementos geométricos

- Puntos
- Líneas: segmentos, curvas, ...
- Figuras: polígonos, poliedros, superficies, variedades, ...
- Medidas: longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, curvaturas, ...
- Relaciones: igualdad, similitud, conforme, equivalencia, ...


x 3,5
x
80
x
x 3,5

Materias relacionadas con la Geometría

Geometría Analítica

- Elección de sistema de referencia y de coordenadas.
- Coordenadas euclídeas, baricéntricas, plukerianas, polares, esféricas, cilíndricas, etc.
- Herramientas de cálculo.
- Cálculo vectorial.

Materias relacionadas con la Geometría

Números complejos

- Interpretación geométrica.
- Forma trigonométrica de los números complejos.
- Raíces de la unidad.
- Polígonos regulares.

Materias relacionadas con la Geometría

Desigualdades

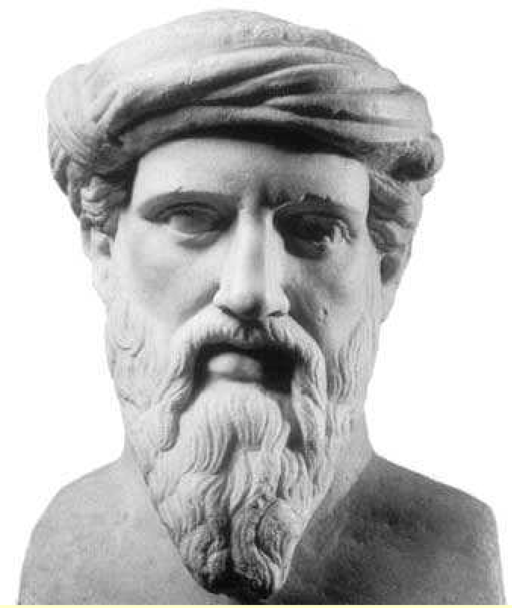
- Numéricas de carácter geométrico:
  - Desigualdad triangular.
  - Desigualdad de Minkowsky.
  - Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdades con las medias.

- Geométricas:
  - Desigualdades con los lados.
  - Desigualdades con los ángulos.
  - Desigualdades con áreas.

Geometría sintética

Los comienzos

En el siglo VI a.c. el matemático **<u>Pitágoras</u>** colocó la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados.



Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios. Los axiomas.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación:

Una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos

Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran:

la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos

o el muy conocido como teorema de **Pitágoras**:

el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

La geometría demostrativa de los griegos se ocupaba de triángulos, polígonos y círculos, con el análisis de sus propiedades principales, así como de sus correspondientes figuras tridimensionales. Esta geometría fue mostrada rigurosamente por el matemático griego <u>**Euclides**</u>**.**

Euclides de Alejandría

(¿365 a.c.- 300 a.c.?)

Euclides es, sin lugar a dudas, el Matemático más famoso de la antigüedad y quizás el más nombrado y conocido de la historia de las Matemáticas.
Se conoce poco de la vida de **Euclides**, sin embargo, su obra sí es ampliamente conocida. Lo que sabemos de su vida nos ha llegado a través de los comentarios del historiador griego **Proclo** (411-485)**.**
La obra más importante de **Euclides** es un tratado de geometría que recibe el título de

Los Elementos

"**Los Elementos**" ha tenido más de 1.000 ediciones desde su primera publicación en imprenta en 1482. Es en este punto editorial donde se la compara a "La Biblia".
Se puede afirmar, por tanto, que **Euclides** es el matemático más leído de la historia.

"**Los Elementos**" consta de trece libros, aunque no todos son de geometría, versan fundamentalmente sobre Geometría y Aritmética.

Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que está constituida.

A lo largo de siglos sólo se pensó en Geometría como la Geometría de los Griegos; o lo que es lo mismo, la geometría de Euclides.

Fue libro de texto durante siglos. Su contenido se ha enseñado (y aún se sigue de alguna manera) hasta el siglo XVIII, cuando aparecen las geometrías no euclídeas.

Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época, que ya eran muchos. Construye su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que él llamó postulados.

Aunque nuestro tema no es el análisis de los postulados de Euclides, podemos recordar los famosos cinco **Postulados de Euclides**, que son los siguientes:

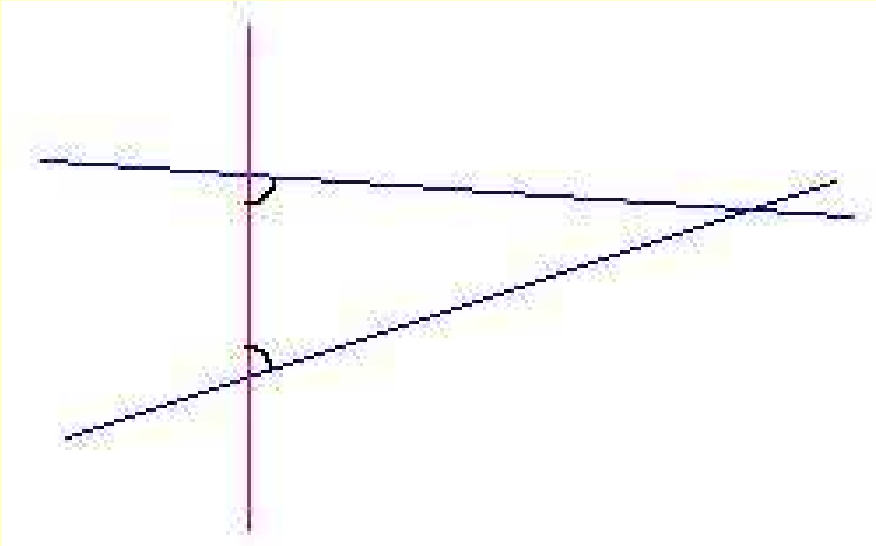
I.- ***Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une*.**

II.- ***Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección*.**

III.- ***Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y con radio cualquiera*.**

IV.- ***Todos los ángulos rectos son iguales*.**

V.- ***Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos*****.**

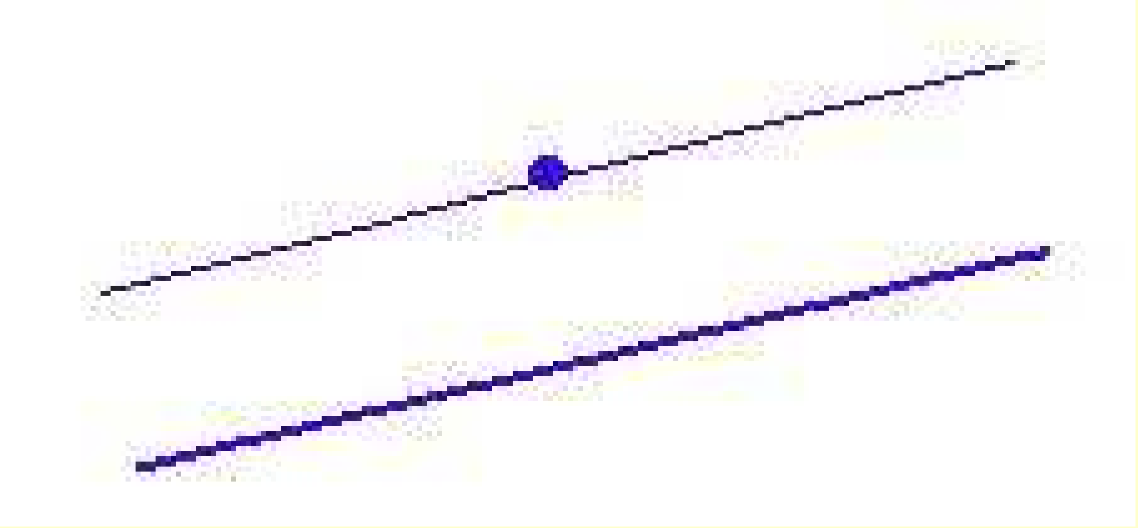


Este axioma es conocido con el nombre de

axioma de las paralelas

y también se enunció más tarde así**:**

V (bis)-. ***Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela*****.**



Contenidos de Geometría

Construcciones con Regla y Compás

- Aritmética con regla y compás.
- Media proporcional.
- Raíz cuadrada.
- Secciones de un segmento:
  - Proporción entre segmentos

    ¡Teorema de THALES!
  - Mediatriz de un segmento.
  - Ecuación de segundo grado.
  - Sección áurea de un segmento.

Contenidos de Geometría

Construcciones con Regla y Compás

- Bisectriz de un ángulo.
- Tangente a una circunferencia pasando por un punto.
- Tangentes comunes a dos circunferencias:
    - Tangente interiores.
    - Tangentes exteriores.
- Polígonos regulares constructibles.

Geometría del Triángulo

Elementos notables en el Triángulo

- Mediatrices: Circuncentro.
- Alturas: Ortocentro. Triángulos órtico.
- Bisectrices: Incentro. Exincentros.
- Medianas: Baricentro.
- Relaciones entre elementos: Recta de Euler.
- Recta de Simson o recta pedal.

Geometría del Triángulo

Propiedades notables del Triángulo

- Cuadrados de los lados de triángulos:
  - Teorema de Pitágoras.
  - Ángulo opuesto agudo.
  - Ángulo opuesto obtuso.
  - Suma y diferencia de los cuadrados de dos lados.
  - Teorema de Stewars.
- Rectas cevianas: Teorema de Ceva.

Geometría del Triángulo

Relaciones métricas del Triángulo

- Circunferencia de los nueve puntos, de Feuerbach o medial.
- Propiedades métricas de las bisectrices:
  - Segmentos determinados en los lados por las circunferencias inscrita y exinscrita.
  - Radios de las circunferencias inscrita y exinscrita.
- Cálculo de las medianas.
- Cálculo de las alturas.

Geometría del Triángulo

Relaciones métricas del Triángulo

- Determinación del área:
  - Fórmula de **Herón** para el área.
  - Otras expresiones del área.
  - Radio de la circunferencia circunscrita.
- Teorema de Euler.
- Desigualdad de Euler.
- Teorema de Morley.
- Punto de Fermat y Teorema de Napoleón.

Geometría de la Circunferencia

Ángulos en la Circunferencia

- Ángulo inscrito y ángulo central.
- Ángulo semi-inscrito y ángulo central.
- Ángulo exterior y ángulos centrales.
- Ángulo interior y ángulos centrales.
- Cuadriláteros inscriptibles.

Geometría de la Circunferencia

Relaciones métricas en la Circunferencia

- Potencia de un punto respecto de una circunferencia.
- Eje radical de dos circunferencias:
  - Construcción.
- Centro radical de tres circunferencias.
- Ángulos entre circunferencias:
  - Circunferencias ortogonales.
- Polígonos y circunferencias.
- Cuadrilátero inscriptible: Teorema de Ptolomeo.
- Cuadrilátero circunscriptible.
- Polígonos regulares.
- Relaciones métricas en los polígonos regulares.

Geometría no-Euclídeas

En el desarrollo conceptual de lo anterior se encuentra, explícita o implícitamente el **Axioma de las Paralelas**.

Este axioma, que al parecer no satisfacía ni al propio Euclides, ha sido el más controvertido de los 5 postulados de Euclídes y dio pie en los siglos XVIII y XIX, por contraposición, al nacimiento de las llamadas **Geometría no-Euclídeas.**

Recordemos el quinto postulado original de Euclides:

V.- ***Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos*****.**

Algunas proposiciones equivalentes al axioma de las paralelas (postulado V) son:

Playfair (1748-1819): ***Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una.***

Proclo: ***Dos rectas paralelas están entre si a una distancia finita.***

Proclo intenta demostrar el quinto postulado como consecuencias de los otros cuatro y descubre que una demostración atribuida a **Ptolomeo** (85-165) era falsa.

Legendre (1752-1833): ***Existe un triángulo en el cual la suma de sus tres ángulos vale dos rectos.***

Saccheri (1667-1733) y **Laplace** (1749-1927):
Existen dos triángulos no congruentes, con los ángulos de uno respectivamente iguales a los del otro.

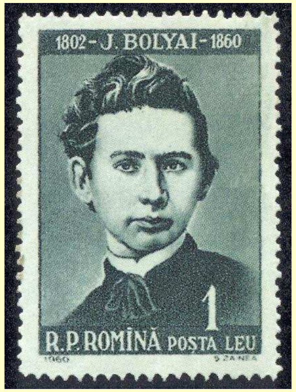
Legendre y **Lorentz** (1852-1928): ***Por un punto cualquiera interior a un ángulo menor que dos tercios de rectos pasa una recta que corta a ambos lados del ángulo.***

Gauss (1777-1855): ***Si k es un entero cualquiera, siempre existe un triángulo cuya área es mayor que k.***

Bolyai (1802-1860): ***Por tres puntos no alineados pasa siempre una única circunferencia.***

etc...

A principios del siglo XIX, el matemático alemán **Carl Friedrich Gauß**, el matemático ruso **Nikolái Ivánovich Lobachevski** (1792-1856) y el húngaro **János Bolyai**



demostraron por separado la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente, en el que el postulado de la paralela única de Euclides se reemplaza por otro que nos dice: ***se puede dibujar un número infinito de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ésta***.

Lobachevski escribe en un librito de 1840 lo que sería el tema crucial de las geometrías no euclídeas, el paralelismo:

"***Todas las rectas de un plano que pasan un un punto dado pueden, con referencia a otra línea recta del mismo plano, clasificarse en dos clases: las que la cortan y las que no la cortan. Las líneas limítrofes de una y otra clase son las que se llaman paralelas a la recta dada***."

Lobachevski sustituye el quinto postulado de Euclides por el siguiente axioma de las paralelas: ***Existen dos rectas paralelas a una recta dada pasando por un punto que no está sobre la recta.***

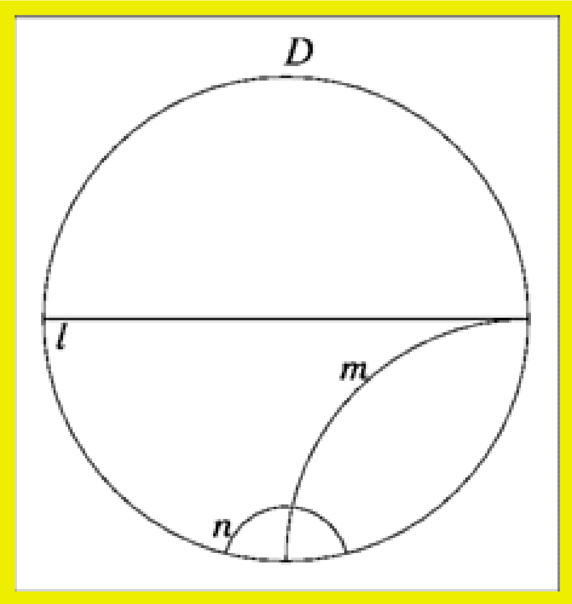
La geometría de **Gauss-Lobachevski-Bolyai** se conoce como

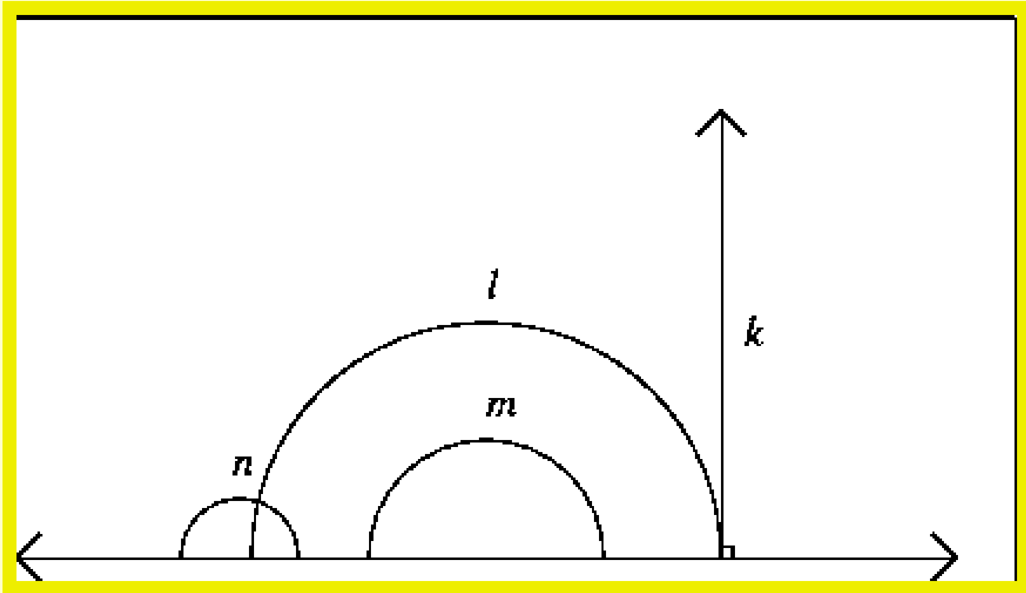
Geometría no euclídea hiperbólica

El modelo de geometría no euclídea hiperbólica que se describe habitualmente se conoce como

Disco de Poincaré,

ya que fue el matemático francés **Henry Jules Poincaré** (1854-1912) quién lo describió, junto con otro modelo equivalente en el semiplano superior.





La equivalencia entre estos modelos viene dada por la trasformación de **Legendre**:

$$(x, y) \to \frac{2}{x^2 + (1 + y)^2} \cdot (x, 1 + y)$$

Pero esta geometría no fue fruto del azar o de la buena suerte. Muchos matemáticos anteriores a **Bolyai** y a **Lobachevski** habían tratado el problema de las paralelas y habían obtenido resultados para geometrías no euclídeas, aunque no contasen con un modelo en el que materializar esos resultados.

En este sentido podemos destacar a **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777), quién escribió en 1766 su "**Theorie der Parallellinien**" y demostró, asumiendo que el postulado de las paralelas es falso, muchos de resultados no euclídeos. Por ejemplo, que en esas geometrías las suma de los ángulos de un triángulo decrece como aumenta su área. Trabajó mucho con cuadriláteros trirectángulos, hoy denominados de **Lambert**.

Algo similar había hecho el ya mencionado **Giovanni Girolamo Saccheri**. Sobre una base construye un cuadrilátero birectángulo con dos lados puestos iguales, y prueba que los ángulos superiores son iguales. Estos cuadriláteros se conocen como actualmente como de Saccheri. La prueba se basa en propiedades de congruencias de triángulos demostradas por Euclides en las Proposiciones 4 y 8, sin utilizar el quinto postulado. Saccheri considera, en 1697, tres posibilidades:

a) ***Los ángulos superiores son* > 90º** (hipótesis del ángulo obtuso).

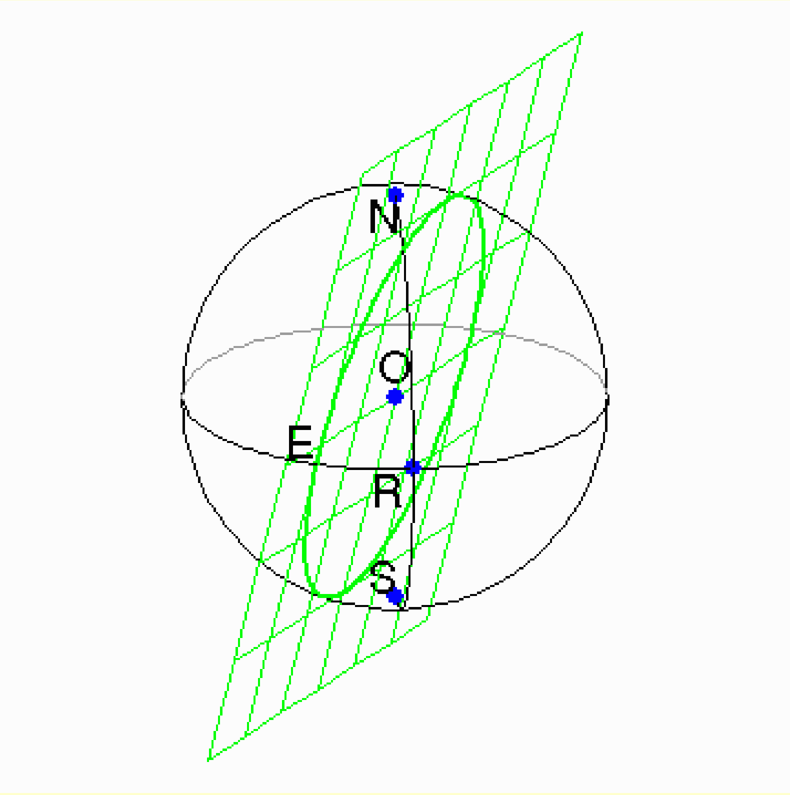
b) ***Los ángulos superiores son* = 90º** (hipótesis del ángulo recto).

c) ***Los ángulos superiores son* < 90º** (hipótesis del ángulo agudo).

Más tarde, alrededor de 1860, el matemático alemán **<u>Bernhard Riemann</u>** (1826-1866) mostró que una geometría en la que no existen líneas paralelas también es posible.

Los detalles de estos dos tipos de geometría no euclídea son complejos, pero ambos se pueden mostrar utilizando modelos sencillos.

La geometría de Riemann o riemanniana o geometría no euclídea elíptica, es la geometría de la superficie de una esfera en la que todas las líneas rectas son los círculos máximos (intersecciones de planos que pasan por el centro O de la esfera). Se comprueba fácilmente la imposibilidad de dibujar un par de líneas paralelas en esta superficie.



Para distancias relativamente pequeñas, la geometría euclídea y las no euclídeas, tanto hiperbólica como elíptica, son esencialmente equivalentes.
Sin embargo, al trabajar con el abiertos grandes, como el espacio astronómico o con problemas de la física moderna como la relatividad o la teoría de propagación de ondas, ciertas las geometrías no euclídeas dan una descripción más precisa que la euclídea de los fenómenos observados.
Por ejemplo, la teoría de la relatividad desarrollada principalmente por **Albert Einstein** (1879-1955) está basada en una geometría riemanniana, semidefinida, de espacio curvo.

Las Transformaciones geométricas

A la vez que se desarrollan nuevas geométrías, como las mencionadas no euclideas o la geometría proyectiva, surge la idea de estudiar las transformaciones de los espacios considerados y las propiedades que quedan invariantes por las mismas.

Según el tipo de geometría considerada aparecen en la literatura múltiples conceptos de transformaciones geométricas.

- Isometrías,
- Homotecias,
- Inversiones,
- Afinidades,
- Congruencias,
- Semejanzas o Conformes,
- Proyectividades,
- Homeomorfismos
- Difeomorfismos,
- de Cayley,
- de Lorentz, ...

Las primeras ideas de Transformaciones Proyectiva aparecieron en la actividad práctica de artistas y arquitectos del Renacimiento. Los pintores **Fra Angelico** (1378-1455) y **Paolo Uccello** (1397-1475) se valieron de la perspectiva para crear impresión de profundidad.

La necesidad de una base matemática para su trabajo era clara para los artistas de la época, y la elaboró el arquitecto **Filippo Brunelleschi** (1377-1446). Después, **Tommaso Masaccio** (1401-1428) y **Andrea Mantenga** (1431-1517) la asumieron definitivamente para la pintura.

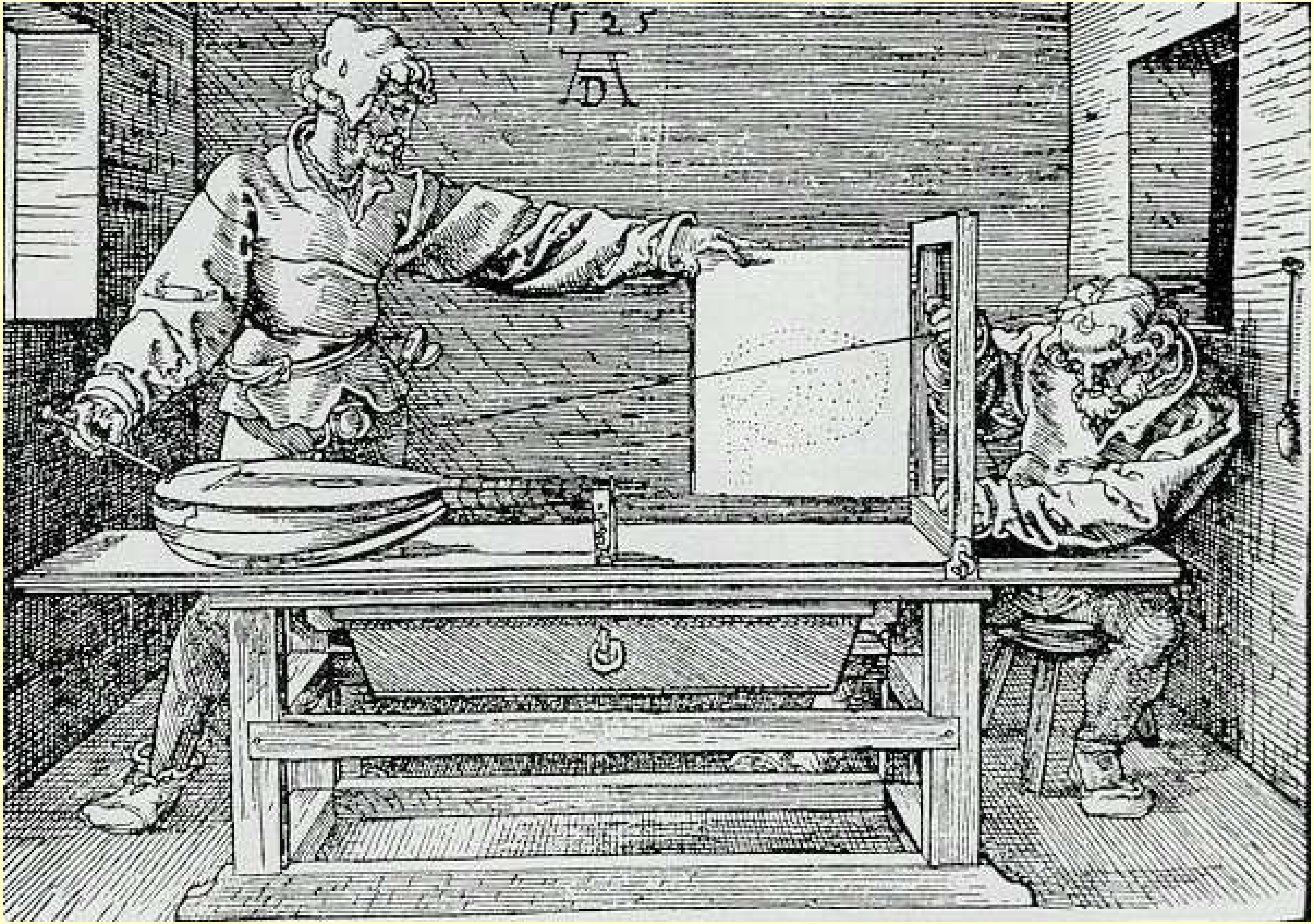
Piero della Francesca (1416-1492),

Leone Battista Alberti (1404-1472)

y **Albrecht Dürer, Durero** (1471-1528)

reflexionaron sobre las nociones de proyección y sección en su afán de entender el problema de la representación plana de un objeto real tridimensional .

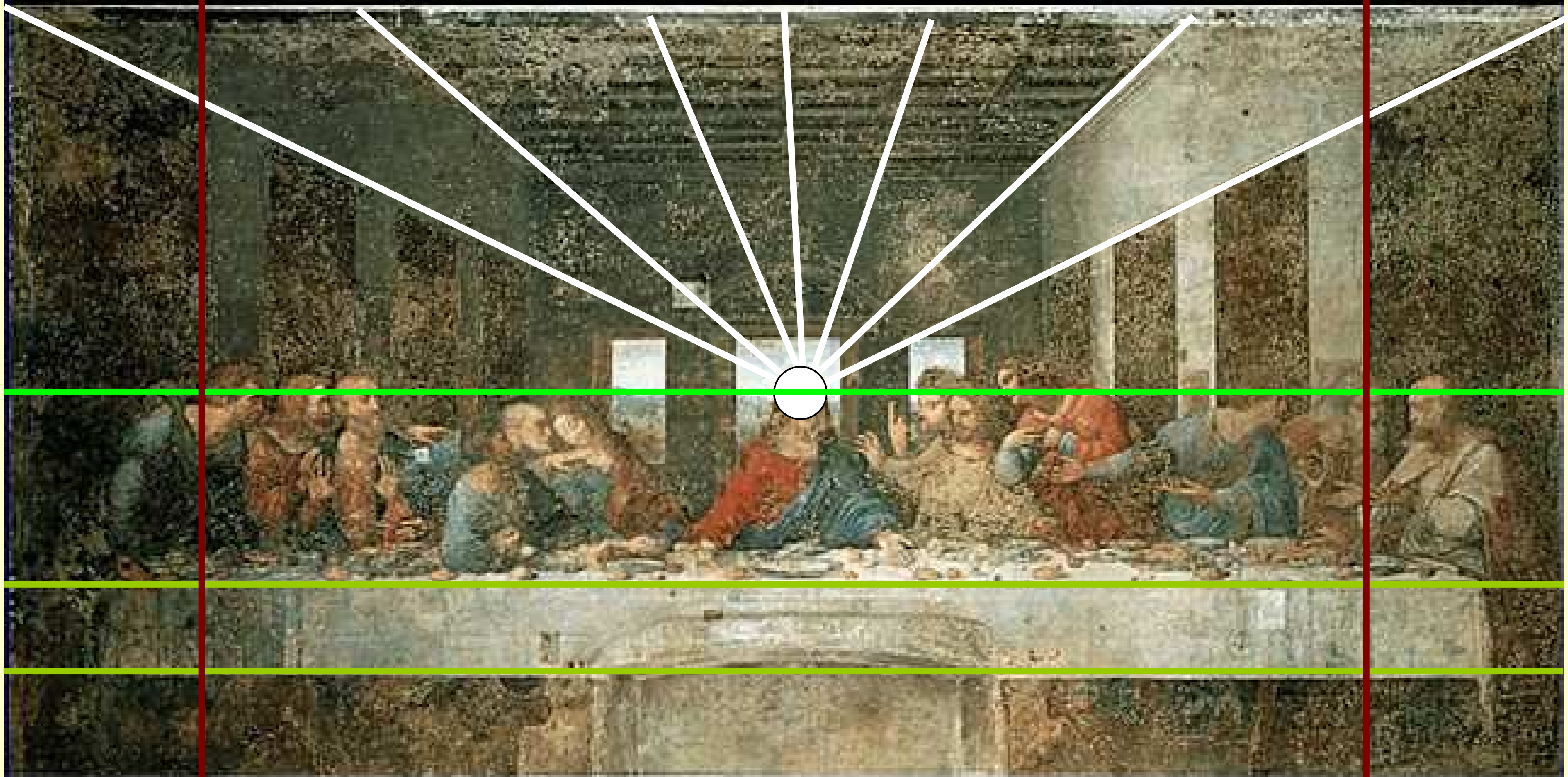
Albrecht Dürer (Durero)



<u>Leonardo da Vinci</u> (1452-1519) trató con rigor el tema de la perspectiva, ideando algunas técnicas como la denominada perspectiva aérea

<u>Hans Holbein el Joven</u> (1497-1543) mostró en alguno de sus cuadros el fenómeno de la anamorfosis, comportamiento paradójico ya descrito por el propio Leonardo.

Leonardo da Vinci: La última Cena



Las transformaciones de Möbius

Pero en el campo de la Geometría, las transformaciones tuvieron su desarrollo en los siglos XVIII y XIX con el avance de la Geometría Proyectiva.

Fue **August Ferdinand Möbius** (1790-1868) quién distinguió cuidadosamente entre los distintos tipos de transformaciones de un plano:

(a) <u>Congruencias:</u> ***cuando las figuras que se corresponden son iguales, es decir, se conservan longitudes y ángulos.***

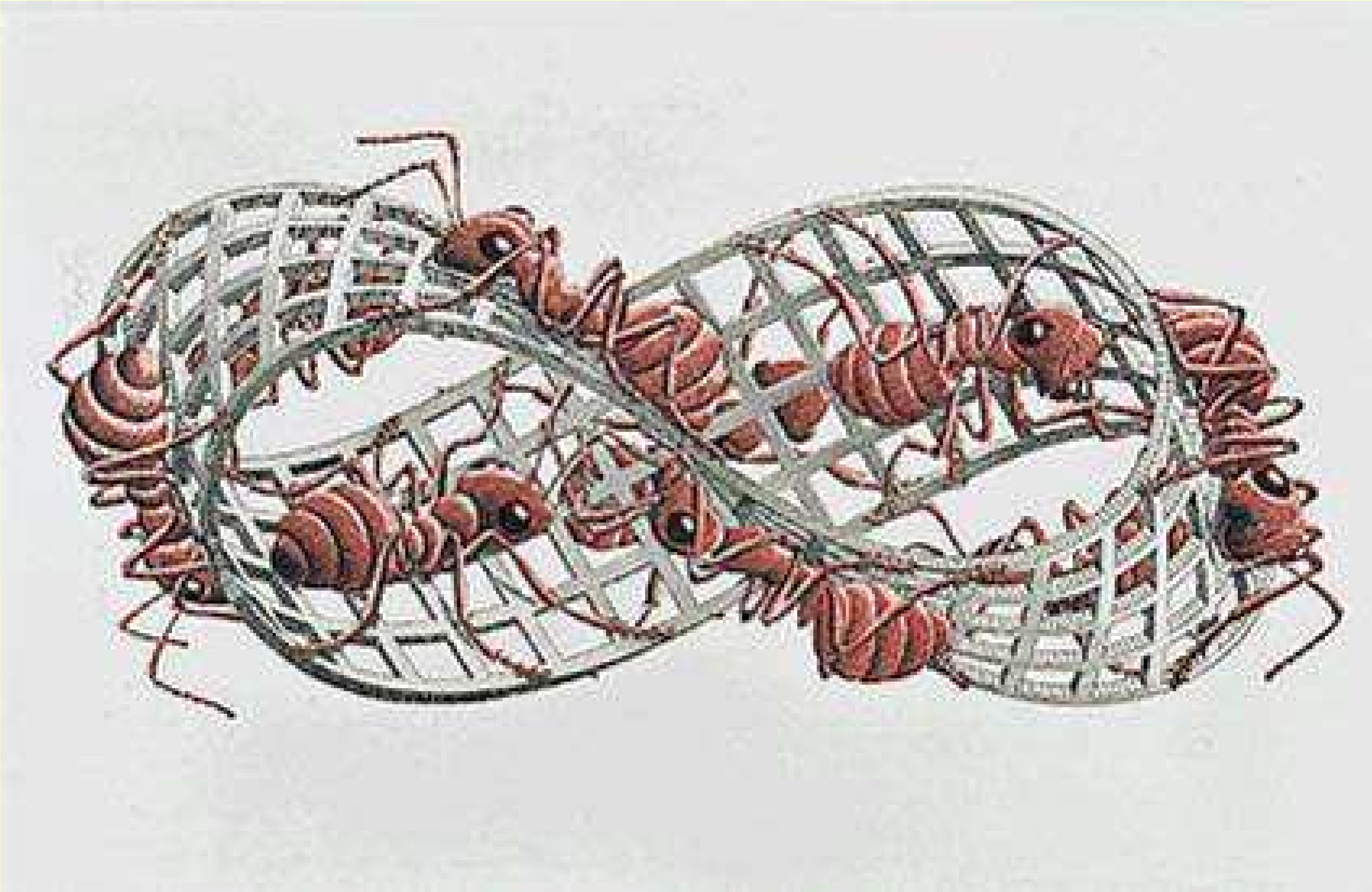
(b) <u>Semejanzas:</u> ***cuando las figuras que se corresponden son semejantes, es decir, se conservan ángulos.***

(c) <u>Afinidades:</u> ***cuando se conserva el paralelismo, pero no necesariamente la longitud ni la forma.***

(d) <u>Colineaciones:</u> ***cuando las rectas se transforman en rectas.***

<u>Möbius</u> se ganó la vida como astrónomo. Utilizó coordenadas para representar las curvas y superficies mediante ecuaciones homogéneas, de ahí el nombre de las coordenadas más usuales de la Geometría Proyectiva.

Fue el creador de la banda que lleva su nombre, pero eso corresponde a otra cuestión.



Robinson:

Immortality

El programa de Erlange o la unificación de las geometrías

<u>**Felix Christian Klein**</u> (1849-1925) unifica las geometrías a través del concepto de Grupo (de transformaciones) y en su **Programa de Erlangen**, escrito en 1872, muestra cómo sirve para caracterizar las diversas geometrías aparecidas durante el siglo XIX. Según ese programa: ***una Geometría es un espacio subyacente sobre el que actúa un grupo de transformaciones.***

Botella de Klein

Pero a este concepto de geometría global, con transformaciones globales, se le escapa la Geometría diferencial de variedades introducida por **Riemann** a través del concepto de

multiplicidad n-dimensional.

Hasta entrado el siglo XX no aparecería el concepto actual de ***variedad diferenciable***, donde las transformaciones son locales y forman un grupoide (categoría con elementos inversos).

Fue **Élie Joseph Cartan** (1869-1951) quien hizo trabajos fundamentales en la teoría de Grupos de Lie y sus usos geométricos.

Por su propio criterio, el tema principal de los 186 trabajos de **Élie Cartan** publicados a través del período 1893-1947, fue la ***Teoría de Grupos de Lie***.

Habían sido introducidos por **Marius Sophus Lie** (1842-1899) y el mencionado **Felix Klein**.

La idea de **Lie** radica en suponer que si se conocen las transformaciones que dejan invariantes las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales), conociendo una solución particular se conocerían todas las demás soluciones.

También **Cartan** introdujo el concepto actual de ***Grupo algebraico***, que no sería desarrollado seriamente antes de 1950. Hasta tan reciente fecha, los grupos eran necesariamente grupos de Transformaciones de algún espacio o conjunto.

Definió la noción general de **forma diferencial exterior**; su enfoque de los grupos de Lie con las ecuaciones de Maurer-Cartan:

$$d\theta + [\theta, \theta] = 0$$

requería 2-formas para su determinación.

La **diferencial exterior** general, inventada o descubierta por **Cartan**, es un operador natural de las variedades diferenciables. Está caracterizado por ser la única antiderivación de grado +1 que generaliza la diferencial de las funciones y tener la propiedad de operador de cohomología: $d \cdot d = 0$.

Sin los trabajos de **Cartan**, en particular la teoría del ***repère mobile*** no se concibe la aparición de la famosa ***Teoría de la Relatividad*** de **Albert Einstein,** quién recibió el Premio Nobel de Física en 1921, aunque no fue por la relatividad, sino por su trabajo de 1905 sobre el efecto fotoeléctrico.