UNIVERSIDAD
DE GRANADA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Problemas de Probabilidad de Olimpiada Matemática

Eduardo Cebrián García

Tutor: Pascual Jara Martínez
Departamento de Álgebra

Curso académico:
2022-2023

Problemas de Probabilidad de Olimpiada Matemática

Eduardo Cebrián García

Eduardo Cebrián García.
Problemas de Probabilidad de Olimpiada Matemática.
Trabajo de fin de Máster. Curso académico 2022-2023.

Responsable de tutorización:
Pascual Jara Martínez
Departamento de Álgebra

Máster en Matemáticas
Escuela Internacional de Posgrado
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

Yo, Eduardo Cebrián García, declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Máster, correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 8 de Septiembre de 2023

Fdo: Eduardo Cebrián García

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competiciones, en el área de las Matemáticas escolares, que buscan difundir y motivar al alumnado a estudiar este área de conocimiento, a través de la resolución de problemas, la cual es una de las competencias a desarrollar en el currículo de Matemáticas de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Hay que notar que este tipo de problemas no son como los ejercicios convencionales tratados en el aula; estos buscan estimular el razonamiento del alumnado.

En este Trabajo Fin de Máster vamos a tratar los problemas de Olimpiada de Probabilidad (una rama de la Matemática que no suele tratarse mucho en la matemática escolar aunque aparezca en el currículo). Estos problemas han sido expuestos a alumnos/as que van a participar en la Olimpiada Matemática tanto a nivel autonómico como estatal. Además discutiremos como los ha resuelto el alumnado y qué problemas o dificultades han encontrado en los distintos problemas planteados en su preparación de cara a las Olimpiadas.

Un poco de historia, las primeras competiciones matemáticas nacionales fueron los concursos Eotvos de Hungría, que se iniciaron en 1894, precisamente durante la efervescencia de fin de siglo, consecuencia de la cual fue también el proceso iniciado por el Barón de Coubertin que desembocó en las Olimpiadas de atletismo de la época moderna (Atenas 1896). A principios del pasado siglo este tipo de competiciones se extendió por el centro y el este de Europa. La forma actual del concurso data de 1938 y fue establecida en las competiciones W. L. Putnam, organizadas en Estados Unidos y Canadá. El nombre de Olimpiadas data de 1958, año de celebración de las primeras Olimpiadas Matemáticas Internacionales por iniciativa de Rumanía.

En España, gracias a la Real Sociedad Matemática Española se viene celebrando a nivel nacional desde 1964, la Olimpiada Matemática Española, dirigida a los alumnos/as de Bachillerato, ha servido de prueba de selección del alumnado español para representar a España en la Olimpiada Matemática Internacional.

El concurso en sí, consta de tres fases con un nivel de dificultad creciente:

-**Fase de Distrito:** Suele celebrarse al final del primer trimestre en cada Distrito Universitario; consta de dos pruebas escritas en las que han de resolverse un total de seis problemas. Los participantes son estudiantes de Enseñanzas Medias menores de 19 años que se presentan voluntariamente sin ningún requisito previo. Los tres alumnos que obtienen mejor puntuación pueden acceder a la fase siguiente.

-**Fase Nacional:** Suele celebrase en Marzo, consta de dos pruebas escritas, de cuatro horas y media de duración cada una, en el transcurso de las cuales, los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal. Los seis mejores clasificados en esta Fase pueden participar en la fase Internacional y los cuatro primeros participan además en la Olimpiada Iberoamericana.

-**Fase Internacional:** Suele celebrase a mediados de Julio; se realizan dos pruebas escritas de cuatro horas y media de duración cada una, en el transcurso de las cuales, los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal.

En este Trabajo de Fin de Máster, he comenzado con combinatoria introduciendo algunos conceptos previos que son necesarios para la resolución de problemas de Olimpiada Matemática de tipo combinatorio y probabilístico. Más adelante, dentro de ese capitulo, hay una recopilación de problemas de este tipo que han sido resueltos en clase, con distintos tipos de resolución y con una discusión de cada uno de ellos de cómo han tratado los alumnos y alumnas los problemas y la dificultades que han tenido.

En el siguiente capítulo, tratamos los problemas de Probabilidad, no sin antes introducir los conocimientos previos que el alumno debe manejar para resolver dichos problemas. Después de estos conocimientos previos nos encontramos con problemas de Probabilidad de Olimpiada expuestos en clase para preparar al alumno de cara a la Fase de distrito y a la Fase Nacional, con distintos tipos de resolución en cada uno de ellos y una discusión sobre que ha realizado el alumno, fallos que hayan cometido a la hora de resolverlo y dificultades con la que se han encontrado.

Antes del último capítulo, tenemos un capítulo en el que se recogen una serie de problemas de combinatoria y probabilidad de olimpiada resueltos que no han sido visto en clase por los alumnos pero que son bastantes interesantes y que pueden ser trabajados por los alumnos que quieran participar en Olimpiadas Matemáticas.

Para terminar el Trabajo Fin de Máster, he realizado una conclusión sobre el trabajo y la experiencia de dar clase a este tipo de alumnos.

Capítulo 2

Combinatoria

En este capítulo abordamos las técnicas básicas para contar elementos de un conjunto. Si el conjunto es pequeño se trata simplemente de enumerarlos, el problema está cuando el conjunto tiene demasiados elementos, ya que es difícil enumerarlos uno a uno, pero si el número de elementos obedece una regla de formación fija, pueden encontrarse métodos indirectos para conocer el número de elementos que tiene dicho conjunto. La parte de la Matemática que se encarga de estudiar y aplicar distintas técnicas para contar los elementos es la **Combinatoria**.

Para este capítulo me he inspirado en [**5**] y en [**4**].

1 Nociones de Combinatoria

El primer resultado que tenemos sobre combinatoria es el **Principio de multiplicación**.

DEFINICIÓN 1. Al elegir r objetos de manera que en la primera elección se escoge un elemento de un subconjunto de n_1 objetos, en la segunda se selecciona otro elemento de un subconjunto de n_2 objetos, y así sucesivamente hasta la r-ésima elección, en la que se dispone de n_r objetos, la elección se puede realizar de $n_1 n_2 \cdots n_r$ formas diferentes.

EJEMPLO 1. Para un viaje tenemos 4 pantalones, 3 zapatillas y 5 camisetas. ¿De cuántas formas distintas nos podemos vestir?

Nos podemos vestir de $4 \times 3 \times 5 = 60$ formas distintas.

1.1. Variaciones sin repetición

DEFINICIÓN 2. Se llaman **variación sin repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos dados, teniendo en cuenta el orden. La fórmula para calcularlo es la siguiente:

$$V_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

EJEMPLO 2. En una clase tenemos 30 estudiantes. ¿De cuántas formas posibles podemos elegir un delegado y un subdelegado?

$$V_{30,2} = \frac{30!}{(30-2)!} = 30 \times 29 = 870.$$

Se puede hacer de 870 formas.

1.2. Variaciones con repetición

DEFINICIÓN 3. Se llama **variación con repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, teniendo en cuenta el orden. La fórmula para calcularlo es la siguiente:

$$VR_{n,m} = n^m.$$

EJEMPLO 3. Se va a realizar una rifa en el que cada boleto tiene 3 dígitos, ¿Cuántos boletos se tienen que imprimir?

Como tenemos 3 dígitos y nuestro sistema de numeración es el sistema decimal necesitamos imprimir $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$ boletos.

1.3. Permutaciones sin repetición

DEFINICIÓN 4. Se llama **permutación sin repetición** de n elementos a las variaciones sin repetición en las que el número de elementos coincide con el número de elementos del conjunto. La fórmula para calcularlo es la siguiente:

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

EJEMPLO 4. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con las cifras 1,3, 4, 8?

$$P_4 = 4! = 24.$$

Se pueden formar 24 números distintos

1.4. Permutaciones con repetición

DEFINICIÓN 5. Se llama **permutación con repetición** de n elementos, de los cuales $n_1, n_2, \dots, n_r$ son iguales entre sí y $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, a cualquier ordenación en fila de estos n elementos. La fórmula para calcularla es la siguiente:

$$PR_{n;n_1,n_2,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

EJEMPLO 5. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar con los dígitos del número 11255?

$$PR_{5;2,1,2} = \frac{5!}{2!1!2!} = \frac{5\times 4\times 3}{2} = 5\times 2\times 3 = 30.$$

Se pueden formar 30 números diferentes.

1.5. Combinaciones sin repetición

DEFINICIÓN 6. Se llama **combinación sin repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, sin tener en cuenta el orden y sin repeticiones. La fórmula para calcularlo es la siguiente:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

EJEMPLO 6. Un capitán militar quiere atacar con su pelotón de 15 soldados al enemigo con un grupo reducido formado por 3 soldados. ¿Cuántos grupos distintos podrá formar?

$$C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 7 \times 13 = 455.$$

Se podrá hacer de 455 formas distintas.

1.6. Combinaciones con repetición

DEFINICIÓN 7. Se llama **combinación con repetición** de n elementos tomados en grupos de m, a cada uno de los subconjuntos de m elementos que se pueden formar con los n elementos, sin tener en cuenta el orden, pero si hay repeticiones. La fórmula para calcularlo es la siguiente:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

EJEMPLO 7. Una frutería prepara centros de frutas compuestos por tres tipos de fruta: peras, plátanos y manzanas. Si en cada cesta se ponen 10 piezas de fruta, ¿cuántas cestas diferentes de fruta pueden hacerse?

Cada una de las cestas está formado por los 3 tipos de frutas, por lo que al menos cada pieza de fruta tiene que estar una vez en cada cesta. De modo que nos queda por incluir 7 piezas de fruta, donde no importa el orden en que elijamos la fruta.

$$CR_{3,7} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 9 \times 4 = 36.$$

Por lo tanto se pueden formar 36 cestas de frutas distintas.

2 Resolución y discusión de problemas de combinatoria

Los problemas de esté capítulo los puedes encontrar en [**5**].

PROBLEMA 1. (Andalucía 1999). En una carrera de cien metros lisos participan cinco atletas y se conceden tres medallas: una de oro, otra de plata y una tercera de bronce para el primero, el segundo y el tercer clasificado, respectivamente. Si no se tiene en cuenta cómo llegan a la meta el resto de participantes, ¿Cuántos resultados distintos puede tener la carrera?

RESOLUCIÓN 1. Numeramos los atletas del 1 al 5.
Medalla de oro: cualquiera de los cinco. Tenemos 5 formas.
Medalla de plata:

1. Si gana el 1 → 2 o 3 o 4 o 5.
2. Si gana el 2 → 1 o 3 o 4 o 5.
3. Si gana el 3 → 1 o 2 o 4 o 5.
4. Si gana el 4 → 1 o 2 o 3 o 5.
5. Si gana el 5 → 1 o 2 o 3 o 4.

Es decir, por cada posición en la medalla de oro tenemos 4 posibilidades, luego tenemos $5 \times 4 = 20$ formas para repartir oro y plata.

Para la medalla de bronce suponemos una de las 20 formas para repartir oro y plata.

En este caso suponemos el primer ejemplo $1,2$, entonces el tercer puesto puede ser para 3, 4 o 5, es decir tenemos tres posibilidades, luego en total tenemos $20 \times 3 = 60$ posibilidades de formar el pódium.

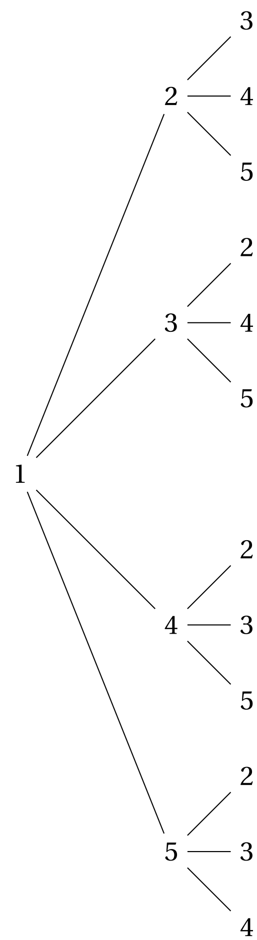
Otra forma es utilizando el calculo combinatorio.

RESOLUCIÓN 2. Este problema se trata de una variación sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Por último se puede realizar con diagrama de árbol.

RESOLUCIÓN 3. Numeramos los atletas del 1 al 5. Y expresamos en diagrama de árbol los casos posibles. Aquí vamos a mostrar el diagrama de árbol cuando el atleta 1 es primero ya que para los casos en el que el primer atleta es el atleta 2, atleta 3, atleta 4 o atleta 5, se hace de forma análoga.



Cuando el atleta 1 llega primero tenemos 12 casos posibles y cuando cualquier otro corredor llega primero también tenemos 12 casos posibles, luego podemos tener $12 \times 5 = 60$ resultados distintos.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 1. El alumnado ante este problema no tuvo grandes dificultades aunque no lo resolvió utilizando la combinatoria, para resolverlo utilizó el diagrama de árbol; con el cuál se encuentra más cómodo, para ello primero numeran a los atletas y hacen el diagrama de árbol para el caso en el que el corredor 1 llega primero como muestro en la resolución 3 y cuenta el número de casos, como el número de casos posibles cuando el atleta 1 llega el primero, es el mismo número de casos que cuando cualquiera de los otros corredores llegan los primeros, multiplican el número de casos cuando él atleta 1 llega el primero por cinco y obtienen el resultado deseado.

PROBLEMA 2. Antonio, Enrique, Luisa, Pedro, Diego, María y Bernardo son amigos y forman la plantilla de un equipo de baloncesto. Para formar un equipo, el entrenador ha de elegir 5 jugadores de la plantilla

1. ¿Cuántos equipos distintos podrá formar si incluye a los dos chicas?
2. ¿Y si incluye solamente a una chica?
3. ¿Y si no incluye a ninguna?
4. Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, di cuántos equipos distintos podría formar el entrenador.

RESOLUCIÓN 1. Primero vamos a considerar que dos equipos son diferentes sólo si cambia algún jugador sin considerar las diferentes alineaciones.

Si las dos chicas forman parte del equipo, sólo tenemos que elegir 3 de entre los 5 chicos. Si los numeramos del 1 al 5, tenemos:

$$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),$$

por lo tanto tenemos 10 equipos.

Representamos a las chicas con A y B. Si la elegida es A, tenemos que elegir 4 de entre los 5 chicos:

$$(1,2,3,4),(1,2,3,5),(1,2,4,5),(1,3,4,5),(2,3,4,5).$$

Luego obtenemos 5 equipos.

Si hacemos lo mismo con B, tenemos otros 5 equipos. En total nos salen 10 equipos.

Si sólo lo forman chicos, solo hay una posibilidad: $(1,2,3,4,5)$.

Por tanto, en total podemos formar $10+10+1=21$ equipos.

Otra forma de resolver el problema es utilizar el cálculo combinatorio.

RESOLUCIÓN 2. Para resolver este problema vamos a seguir cuatro pasos utilizando para ello combinatoria:

1. Para calcular cuando los equipos incluyen a las dos chicas tenemos una combinatoria sin repetición del siguiente modo:

$$C_{5,3}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\times 4}{2}=10.$$

   por lo tanto tenemos 10 equipos.

2. Para calcular cuando los equipos incluyen a una chica tenemos que hacer el siguiente cálculo combinatorio:

$$C_{5,4}=\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!1!}=\frac{5}{1}=5.$$

   y tenemos que multiplicar este resultado obtenido por dos ya que este resultado es referente solamente a una chica y tenemos dos, luego el resultado es 10 equipos.

3. Si no se incluye a ninguna chica el cálculo combinatorio que tendeníamos es $\binom{5}{5} = 1$.
4. Por tanto, en total podemos formar $10 + 10 + 1 = 21$ equipos.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 2. En este ejercicio el alumnado entiende perfectamente el anunciado pero a diferencia del anterior algunos miembros del alumnado saben resolverlo utilizando combinatoria (resolución 2), primero dividen los posibles casos: 2 chicas en el equipo, 1 chica en el equipo y ninguna chica en el equipo.

Calculan cuantos equipos se pueden formar incluyendo a dos chicas, cuantos se pueden formar incluyendo a una chica y cuantos si ninguna chica para ello utilizan combinatoria sin repetición y suman todos los resultados obteniendo el resultado deseado.

Otra parte del alumnado, no saben con que tipo de calculo combinatorio pueden calcular el número de equipos distintos se pueden formar, entonces deciden hacer cada apartado escribiendo todos los equipos que se pueden formar con 2 chicas, 1 chica y ninguna chica en el equipo y para el último apartado simplemente suman todos los resultados obtenidos. Este tipo de resolución fue más costosa que la anterior y observan que es importante tener un cierto dominio del calculo combinatorio de cara a las competiciones de Olimpiada Matemática.

PROBLEMA 3. Ana tiene 6 monedas idénticas y desea poner cada una de ellas en un casilla del tablero de la figura de tal manera que cada fila contenga exactamente una moneda y cada columna contenga exactamente una moneda. ¿De cuántas maneras diferentes puedes hacerlo?

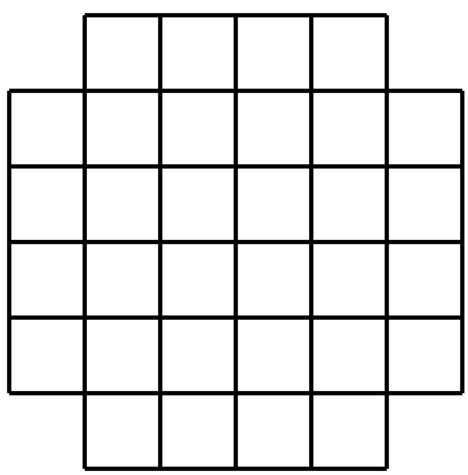


FIGURA 1. Tablero

RESOLUCIÓN 1. Se pude comenzar por poner una moneda en cualquiera de las cuatro casillas de la primera fila. Como no se pueden repetir columnas, en la sexta fila quedarán entonces tres casillas disponibles donde colocar una segunda moneda.

Quedan ahora cuatro columnas libres: dos intermedias, la primera y la sexta.

Luego, en cada fila de la segunda a la cuarta inclusive ambas hay que poner una moneda de modo que quede una en cada una de las cuatro columnas libres, lo cuál se puede hacer de $4! = 24$ maneras, esto se debe a que para la segunda fila podemos escoger una de cuatro columnas, para la tercera fila se puede escoger una de las 3 columnas restantes, para la cuarta fila se puede escoger una de las dos columnas restantes y para la quinta fila se escoge la única opción que queda disponible.

Por lo tanto la solución queda de la siguiente forma $4 \times 3 \times 4! = 12 \times 24 = 288$, es decir, se pude hacer de 288 formas distintas.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 3. Para realizar este problema primeramente el alumnado dibujo el tablero, una vez dibujado empezaron a probar casos particulares y algunos miembros del alumnado observaron que al no tener esquinas el tablero hacia más complejo el problema (si tuviera esquinas la solución seria de 6! formas distinta) ya que limitaba algunas de las colocaciones de la moneda, por ejemplo si empezaba a colocar por filas cuando llegas a la ultima fila podía surgir el problema que es imposible de colocar una moneda en la ultima fila ya que puede ocurrir que alguna moneda ya este colocada en la misma columna, es cuando se le ocurren dos ideas:

1. Hay un tablero dentro de nuestro tablero sin esquinas 4×4 con lo cuál tendremos $4! = 24$ formas de colocar una moneda en cada fila y nos quedara la fila de arriba con dos opciones y la fila de más abajo con una opción por lo tanto hay $2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$ formas distintas de colocar las seis monedas, pero como veremos en la otra idea que tuvieron otros miembros del alumnado esta idea era errónea ya que el número de opciones en la primera fila será cuatro y en la última fila será tres.
2. Esta idea es la que encontramos en la resolución del ejercicio, para salvarnos del problema que cuando lleguemos a la ultima fila no tengamos opción a poder poner una moneda primero ponemos una moneda en la primera fila donde tenemos cuatro opciones, en vez de poner la moneda en la segunda fila la ponemos en la sexta donde tenemos tres opciones y así evitamos el problema que hemos comentado antes, por lo tanto en la segunda fila tenemos 4 opciones, en la tercera 3, así hasta llegar a la quinta, luego hay $4 \times 3 \times 4! = 288$ formas distintas de colocar las 6 monedas en el tablero.

Capítulo 3

Probabilidad

Para realizar este capítulo me he inspirado en [**1**], [**2**], [**4**], [**5**], [**11**] y [**12**].

1 Conceptos Sobre Probabilidad

En este capítulo vamos a definir qué es un experimento aleatorio, un espacio muestral y los distintos tipos de espacios.

DEFINICIÓN 8. Un **experimento aleatorio** es aquel que puede dar lugar a varios resultados sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de estos va a ser observado tras la realización del experimento.

DEFINICIÓN 9. Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar en un experimento aleatorio y lo vamos a denotar como Ω.

Además podemos clasificar los espacios según el número de resultados posibles de un experimento aleatorio.

De este modo podemos clasificar los espacios muéstrales de la siguiente forma:

1. **Espacios muéstrales finitos**: Son aquellos que tiene un número finito de elementos. Por ejemplo la tirada de un dado.
2. **Espacios muéstrales infinitos**: Son aquellos en los que Ω tiene un número infinito de elementos. Dentro de los espacios muéstrales infinitos podemos distinguir dos tipos espacios muéstrales infinitos:
   a) **Espacios muéstrales infinitos numerables**: son aquellos en los que puede ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales. Por ejemplo, lanzar un dado hasta que salga 5.
   b) **Espacios muéstrales infinitos no numerables**: Son aquellos que no pueden ponerse en correspondencia con los números naturales. Por ejemplo la elección al azar de un número real.

Otro concepto importante de la probabilidad son los sucesos aleatorios.

DEFINICIÓN 10. Llamamos **suceso** a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

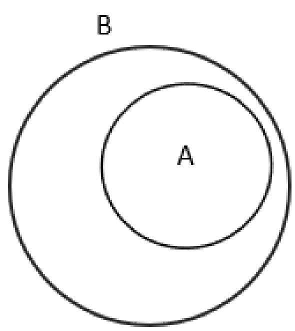
1. **Suceso elemental**, es aquel que está formado por un único resultado del experimento aleatorio.
2. **Suceso compuesto**, es aquel que está formado por más de un resultado del experimento aleatorio.

3. **Suceso seguro**, es aquel que se verifica siempre al realizar el experimento aleatorio. Esta formado por todos los resultados posibles de experimentos y por tanto coincide con el espacio muestral.
4. **Suceso imposible**, es aquel que nunca ocurre. Se representa con el símbolo del conjunto $\emptyset$.
5. **Suceso complementario** o **contrario**, sea A un suceso su complementario está formado por los elementos que no están en A y se denota como $\bar{A}$.
6. **Sucesos compatibles**, dos sucesos se dicen compatibles si tienen algún suceso elemental común. Es decir, $A \cap B \neq \emptyset$.
7. **Sucesos incompatibles**, son aquellos que no se pueden verificar simultáneamente. Es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Vamos ahora las distintas operaciones que se pueden realizar con los sucesos.

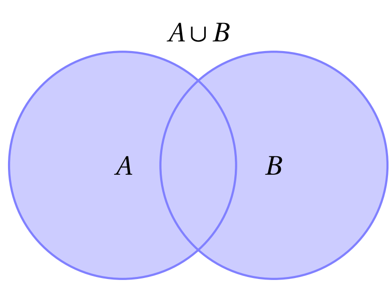
Inclusión

Un suceso A esta **incluido** en otro suceso B si todo suceso elemental de A también pertenece a B y se denota como $A \subseteq B$.



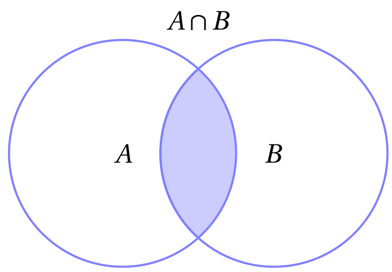
Unión

Dado dos sucesos A y B, el suceso **unión**, $A \cup B$, es aquel que se verifica si lo hacen al menos uno de los dos sucesos A ó B.



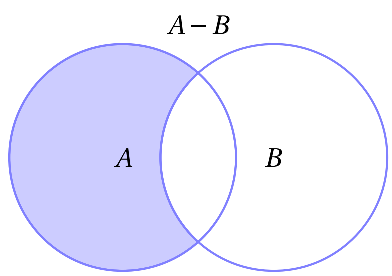
Intersección

Dados dos sucesos A y B, el suceso **intersección**, $A \cap B$, es aquel que se verifica si lo hacen A y B al mismo tiempo.



Diferencia

Llamamos suceso diferencia de A menos B al suceso formado por todo los elementos de A que no están en B y su notación es la siguiente $A \setminus B$ ó $A - B$.



PROPIEDADES 1. Propiedades de las operaciones

1. Asociativa. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup B$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap B$.
2. Conmutativa. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cup B = B \cup A$.
3. Idempotente. $A \cup A = A$. $A \cup A = A$ y
4. Simplificativa. $A \cup (A \cap B) = A$ y $A \cap (A \cup B) = A$.
5. Absorción. $A \cup \Omega = \Omega$ y $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. Elemento Neutro. $A \cup \varnothing = A$ y $A \cap \Omega = A$.
7. Complementación. $A \cup \overline{A} = \Omega$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
8. Distributiva. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
9. Leyes de De Morgan. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2 Definición de probabilidad

La probabilidad es el cálculo matemático que evalúa las posibilidades que existen de que un suceso ocurra cuando interviene el azar.

La definición axiomática de probabilidad es la siguiente.

DEFINICIÓN 11. Consideremos un experimento aleatorio del espacio muestral Ω. Se llama **probabilidad** a una función $P:\Omega \to \mathbb{R}$ y que cumple los siguientes axiomas:

1. $0 \le P(A) \le 1$ para cualquier suceso A.
2. $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = 1$.
3. Si A y B son dos sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ahora vamos a ver algunas de las propiedades que nos da la definición axiomática de probabilidad.

PROPOSICIÓN 1. *Sea P una probabilidad y A un suceso, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \le P(B)$.*
3. *Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

4. *Si A y B son dos sucesos compatibles se tiene:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. *Si A, B y C son sucesos compatibles dos a dos se tiene:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

6. $P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar una por una las propiedades anteriores

1. Se tiene $1 = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, entonces $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $B = A \cup (B - A)$ con $A \cap (B - A) = \varnothing$. Por tanto $P(B) = P(A) + P(B - A)$ con $P(B - A) \ge 0$, con lo cual $P(A) \le P(B)$.

3. Se demuestra por inducción, luego vamos a ver que para el caso $P(A_1 \cup A_2)$ se cumple y así es, ya que por la definición de probabilidad $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, entonces suponemos que es cierto para n y lo demostramos para $n+1$.

   Entonces tenemos que $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1})$.
4. Tenemos $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, y por tanto

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

5. Tenemos $A \cup B \cup C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$, y por tanto

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) \\ &\quad + P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\ &= P(A \cap B \cap C) + (P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &\quad + (P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) + (P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)) \\ &\quad + (P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)) \\ &\quad + (P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)) \\ &\quad + (P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

6. Podemos escribir A como $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, entonces $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, luego nos queda que $P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

□

3 Regla de Laplace

En el caso de que todos los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables, la regla de Laplace nos dice que la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de resultado favorables a que ocurra el suceso A en el experimento y el número de resultados posibles del experimento. Es decir:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a que ocurra A}}{\text{Número total de casos posibles}}.$$

EJEMPLO 8. Si lanzamos un dado y queremos saber la probabilidad de obtener un uno, tenemos que aplicar la regla de Laplace ya que todos los casos posibles tienen la misma probabilidad luego nos queda que la probabilidad de obtener el suceso $A \equiv$ “obtener un uno” es:

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

4 Probabilidad Condicionada

Anteriormente hemos introducido el concepto de probabilidad considerando como única información el espacio muestral. Sin embargo, hay situaciones en las que se incorpora información suplementaria como puede ser que ha ocurrido otro suceso, con lo que puede variar las probabilidades, es aquí donde entra el concepto de probabilidad condicionada.

DEFINICIÓN 12. Probabilidad condicionada Sean A y B dos sucesos, se define la **probabilidad condicionada de B dado A** como

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

NOTA 2. *De la definición anterior obtenemos* $P(B \cap A) = P(A)P(B/A)$.

5 Calculo de probabilidades con sucesos independientes

Dos sucesos aleatorios, con probabilidades no nulas, se dice que son **independientes** si la observación de ocurrencia, o no, de uno de ellos no afecta a la probabilidad del otro. Es decir, sea dos sucesos $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Diremos que A y B son independientes si ocurre $P(A/B) = P(A)$ o, equivalentemente, si $P(B/A) = P(B)$.

Hay que notar que la independencia es una característica recíproca, es decir, si A es independiente de B, entonces B es independiente de A.

Utilizando la definición anterior de Probabilidad Condicionada podemos caracterizar la independencia entre dos sucesos A y B cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, condición necesaria y suficiente para que se dé la independencia entre dos sucesos.

6 Probabilidad Compuesta. Probabilidad Total

Un experimento aleatorio se llama **compuesto** cuando está formado por varios experimentos aleatorios simples.

La expresión de la nota anterior la podemos generalizar

TEOREMA 3 (Teorema de la probabilidad compuesta). *Sea* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *un conjunto de sucesos con* $P[\cap_{i=1}^{n-1} A_i] > 0$*, entonces*

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hace por inducción. Por la nota anterior se tiene para $n = 2$; lo suponemos para n y lo demostramos para $n + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) &= P((A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_n/(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

y ahora se aplica la hipótesis de inducción a la primera probabilidad obteniéndose el resultado deseado. □

Ahora vamos a ver el Teorema de la Probabilidad Total el cuál es muy útil. Pero antes tenemos que ver qué es un sistema completo de sucesos.

DEFINICIÓN 13. Sea Ω el espacio muestral. Se dice que un conjunto de sucesos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ forma un **sistema completo de sucesos** si cumple las dos condiciones siguientes:

1. $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.
2. $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$.

TEOREMA 4 (Teorema de la Probabilidad Total). *Sea* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *un sistema completo de sucesos asociados a un experimento del espacio muestral* Ω*. Para cualquier suceso* B *se cumple la siguiente igualdad:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i).$$

DEMOSTRACIÓN. $B = B \cap \Omega$, y $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$, luego,

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} (B \cap A_i).$$

Como los sucesos $\{A_i\}_i$ son disjuntos, los sucesos $\{B \cup A_i\}_i$ También son disjuntos, por tanto:

$$P(B) = P[B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)] = P[\cup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)] = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Como $P(B/A_i) = \frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)}$, entonces $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P(B/A_i)$ para todo indicie i. Sustituyendo se tiene que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)$$

para todo i. $\square$

7 Probabilidad a Posteriori. Teorema de Bayes

TEOREMA 5. *(Teorema de Bayes)*

Sea $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral Ω. Para cualquier suceso B con probabilidad no nula, se cumple

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\ P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene $P(A_i/A) = \frac{P(A_i\cap A)}{P(A)}$; como $P(A_i \cap A) = P(A/A_i) \cdot P(A_i)$ entonces $P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)P(A_i)}{P(A)}$ y utilizando la ley de la probabilidad total en $P(A)$ se obtiene que $P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)\ P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\times P(B/A_j)}$. $\square$

8 Resolución y discusión de problemas de probabilidad

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**5**].

PROBLEMA 4. (AIME 1983). Veinticinco caballeros están sentados alrededor de la mesa del rey Arturo. Tres de ellos son escogidos al azar, de manera equiprobable, para ir a enfrentarse a un dragón. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de los tres escogidos sean vecinos en la mesa?

RESOLUCIÓN 1. Se pueden escoger 3 de los 25 caballeros de $\binom{25}{3} = \frac{25\times 24\times 23}{6} = 25\times 4\times 23 = 2300$ maneras. Las ternas que cumplen la condición son de dos tipos:

1. Las de 3 caballeros sentados en puestos consecutivos, que son 25.
2. Las compuestas por dos caballeros sentados juntos y un tercero separado de ellos. Luego, las parejas de vecinos se pueden escoger de 25 maneras, y una vez escogidos quedan 21 posibilidades para el tercer caballero. Luego hay $25 \times 21 = 525$ ternas de este tipo.

Luego hay $25 + 25 \times 21$ ternas que cumplen la condición. La probabilidad buscada es $\frac{25\times 22}{25\times 4\times 23} = \frac{11}{46}$.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 4. Este problema le resulto complejo al alumnado al cuál le costo entender el enunciado, viendo que no entendió la situación decido dibujarles la situación y le explico la distintas formas de que al menos dos sean vecinos, una vez hecho esto se dan cuenta que van a tener que utilizar la Regla de LaPlace y buscan calcular el número total de casos posibles para ello utilizan combinatoria y lo calculan de forma correcta y para calcular el número de casos en el que vayan al menos dos soldados que sean vecinos distinguen dos casos:

1. Cuando los tres soldados son consecutivos.
2. Cuando hay dos soldados que son vecinos y el otro no.

Primero calculan cuantos casos se dan de que los tres soldados que vayan sean consecutivos el cual resuelven sin gran dificultad, pero cuando llega el segundo caso el alumnado no consigue resolverlo, tras varios intentos estudiando diversos casos no hayan la forma de conseguir utilizar el número de posibilidades, entonces es cuando intervengo y le explico al alumnado como obtener dicha cantidad, una vez que tienen este resultado lo suma al resultado de cuantos casos se dan de que los tres soldados sean consecutivos y lo dividen por el número total de casos posibles aplicando así la regla de LaPlace y obteniendo el resultado deseado en este problema.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 5. Las calles de una ciudad forman una cuadrícula. Las calles longitudinales se designan con los números 1, 2 y 3, y las transversales con las letras del alfabeto a, b, c, d, e y f, colocadas en orden de aparición. Una persona sale a pasear de la casilla $(1, a)$. Tira un dado con seis caras numeradas del 1 al 6. Si sale múltiplo de 3, recorre un tramo longitudinal, y en caso contrario uno transversal. En cada cruce repite la operación. Diga cuál es la probabilidad de que pase por la casilla $(3, d)$.

RESOLUCIÓN 1. Primero dibujamos la situación

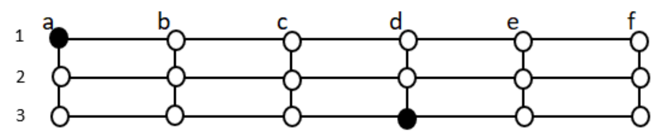


FIGURA 1. Dibujo de las calles longitudinales $1, 2, 3$ y las calles transversales a, b, c, d, e, f.

Para ir desde $(1, a)$ hasta $(3, d)$ debe recorre 3 tramos longitudinales y 2 tramos transversales en cualquier orden.

Sea A el "suceso recorrer un tramo longitudinal" y B "suceso recorrer tramo transversal".

Las probabilidades son

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ y } P(B) = \frac{2}{3}$$

Luego la probabilidad de recorrer 3 tramos longitudinales y 2 transversales es

$$P(3A \cap 2B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3^5}$$

y la forma de reordenarlos es $C_{5,3} = 10$.

Luego la probabilidad pedida es

$$P(T) = 10 \times \frac{4}{3^5} = \frac{40}{243}.$$

Otra forma de resolverlo es utilizando la distribución binomial.

RESOLUCIÓN 2. En este problema podemos utilizar la distribución binomial para calcular la probabilidad de que pase por la casilla $(3, d)$. Tomando como éxitos los movimientos laterales y como fracasos los movimientos verticales (también se puede hacer de forma inversa).

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{4}{3^5} = \frac{40}{243}.$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 5. En este problema alguna parte del alumnado dibuja la situación de forma distinta a la planteada a la resolución pero valida ya que el número que esta más abajo es el uno y a mas altura el número 3, lo único que cambiara es que los movimientos verticales este tipo de alumnado tendrá que hacer los movimientos hacia arriba, entonces el alumnado empieza a probar casos particulares y surge la siguiente cuestión se puede ir ¿hacia arriba y hacia abajo?, ¿y hacia derecha y hacia izquierda? a lo cuál le comento que si te mueves de forma longitudinal solo podrás hacerlo hacía la derecha y si lo haces de forma transversal hacia abajo si el dibujo es como el mostrado en la primera resolución del problema o vertical si lo han dibujado del otro modo.

Una vez visto esto el alumnado distingue dos sucesos un suceso referente a recorrer un tramo longitudinal y otro suceso referente a recorrer un tramo de forma transversal, y calculan la probabilidad de que ocurra cada suceso.

Ayudándose del dibujo y haciendo varios casos de recorridos que van desde $(a, 1)$ hasta $(d, 3)$ observan que todos cumple los mismos movimientos 3 laterales y 2 transversales.

Y calculan la probabilidad de recorrer 3 tramos longitudinales y 2 transversales, es decir $P(3A \cap 2B) = \frac{4}{3^5}$.

Entonces surge un problema algunos miembros del alumnado se cree que está es la solución final, lo cuál es un error ya que es la probabilidad de llegar hasta $(d, 3)$ por un camino, pero falta otros caminos, en cambio otra parte del alumnado observa que esto es solo para un camino y que hay que multiplicar esta probabilidad por el número de caminos, algunos miembros del alumnado no saben como calcularlo, entonces empieza ha realizar los distintos caminos que pueden hacer y los cuenta en cambio otros utilizan el calculo combinatorio y obtienen que son 10 caminos y calcula la probabilidad deseada $10 \times \frac{4}{3^5} = \frac{40}{243}$.

Para terminar aprovechando el calculo de la probabilidad que han hecho les pregunto si no le resulta familiar, a algunos le resulta familiar pero no saben relacionarlo con algo en concreto entonces le digo que es similar al calculo de una probabilidad de una variable que sigue una distribución binomial y le muestro otra forma de resolverlo (segunda resolución del problema).

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 6. En una urna hay b bolas blancas y $b+n$ bolas negras. Calcular todos los valores posibles de b y n para que la probabilidad de obtener una bola blanca sea $\frac{1}{n}$.

RESOLUCIÓN 1. Calculamos primero la probabilidad de sacar una bola blanca. Denotamos B como el suceso de sacar una bola blanca.

$$P(B) = \frac{b}{b+b+n} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{2b+n}{b} \Rightarrow n - \frac{n}{b} = 2 \Rightarrow n\left(1-\frac{1}{b}\right) = 2 \Rightarrow n = \frac{2b}{b-1} = \frac{2b-2}{b-1} + \frac{2}{b-1} = \frac{2(b-1)}{b-1} + \frac{2}{b-1} = 2 + \frac{2}{b-1}$$

Como n es natural, $b-1$ debe valer 1 ó 2.

Si $b-1=1 \Rightarrow b=2$ y $n=4$.

Si $b-1=2 \Rightarrow b=3$ y $n=3$.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 6. En este problema el alumnado comprende perfectamente el enunciado y utilizando la regla de LaPlace sacan la siguiente igualdad $\frac{b}{b+b+n} = \frac{1}{n}$ a partir de aquí haciendo cambios en ambos lados de la igualdad intentan hallar el valor de n dependiendo de los valores de b.

Aunque aquí es donde encontramos ya alguna dificultad por una parte del alumnado que no consigue en su totalidad encontrar el valor de n dependiendo de b y se quedan con la igualdad $n = \frac{2b+n}{b}$, entonces con intuición detectan que el valor de n puede ser 3 y lo fija hallando el valor de $b=2$, lo cuál es cierto pero el problema no estaría resuelto ya que otros valores posibles son $n=4$ y $b=2$.

Otra parte del alumnado halla que $n = 2 + \frac{2}{b-1}$, de donde deducen que como n es natural, $b-1$ debe valer 1 ó 2, de donde deducen dos casos cuando $b=2$ entonces $n=4$ y cuando $b=3$ entonces $n=3$, obteniendo así todos los casos posibles. Para finalizar hay otra parte del alumnado que cometió errores al intentar despejar n y dejarlo en valor de b y obtuvo soluciones erróneas.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 7. Tres ruletas perfectamente horizontales, centradas y equilibradas, contienen sectores circulares, pintados en rojo y en negro, de la siguiente forma:

Ruleta 1: 180º en rojo y 180º en negro.
Ruleta 2: 225º en rojo y 135º en negro.
Ruleta 3: 270º en rojo y 90º en negro.

Calcular la probabilidad de que al tirar simultáneamente con las tres ruletas, resulten dos negros y un rojo.

RESOLUCIÓN 1. Sean $R_i yN_i$ con $i = 1,2,3$, respectivamente, el resultado rojo o negro en la ruleta i.

Ahora escribimos las probabilidad de cada uno de los sucesos N_i y R_i.

$$P(N_1) = \tfrac{1}{2},\ P(R_1) = \tfrac{1}{2}.$$

$$P(N_2) = \tfrac{5}{8},\ P(R_2) = \tfrac{3}{8}.$$

$$P(N_3) = \tfrac{3}{4},\ P(R_3) = \tfrac{1}{4}.$$

Pasamos ahora a calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos que pueden ocurrir en dos ruletas negras y una roja.

$$P(N_1 \cap N_2 \cap R_3) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{8} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{64}.$$

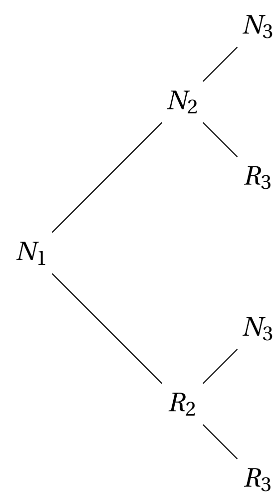
$$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{5}{8} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{64}.$$

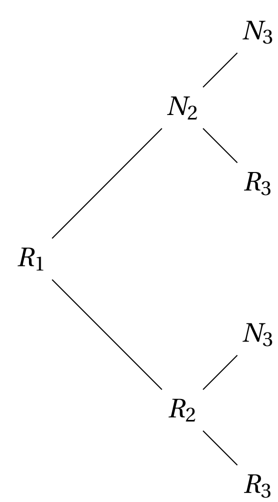
$$P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{8} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{64}.$$

Luego la probabilidad de que al tirar simultáneamente las tres ruletas resulten dos negros y un rojo, es la siguiente:

$$P(T) = \tfrac{9}{64} + \tfrac{5}{64} + \tfrac{3}{64} = \tfrac{17}{64}.$$

RESOLUCIÓN 2. Sean R_i y N_i con $i = 1, 2, 3$, respectivamente, el resultado rojo o negro en la ruleta i. Dibujamos un diagrama de árbol para entender la situación





Ahora que entendemos la situación calculamos las probabilidad de cada uno de los sucesos N_i y R_i.

$$P(N_1) = \tfrac{1}{2},\ P(R_1) = \tfrac{1}{2}.$$

$$P(N_2) = \tfrac{5}{8},\ P(R_2) = \tfrac{3}{8}.$$

$$P(N_3) = \frac{3}{4},\ P(R_3) = \frac{1}{4}.$$

Utilizando el diagrama de árbol y las probabilidades que hemos calculado podemos calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos que pueden ocurrir en dos ruletas negras y una roja.

$$P(N_1 \cap N_2 \cap R_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}.$$

$$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{64}.$$

$$P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$

Luego para calcular la probabilidad de que al tirar simultáneamente las tres ruletas resulten dos negros y un rojo tenemos que sumar las probabilidades que acabamos de calcular:

$$P(T) = \frac{9}{64} + \frac{5}{64} + \frac{3}{64} = \frac{17}{64}.$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 7. En este problema una parte del alumnado cogió rápidamente la idea del problema y detecto que los sucesos eran independientes con lo que calculo la probabilidad de cada uno de los sucesos N_i y R_i, para después calcular todas las probabilidades de cada uno de los sucesos en los que pueden ocurrir que salgan dos ruletas con resultado negro y una ruleta con resultado rojo, para terminar sumándolos y tener la probabilidad deseada por el ejercicio.

Por otro lado, otros miembros del alumnado primero dibujo la situación con un diagrama de árbol. Una vez visto esto calcularon todas las probabilidades para los sucesos N_i y R_i y utilizando el diagrama de árbol y las probabilidades de los sucesos N_i y R_i calculan las probabilidades de cada uno de los sucesos que pueden ocurrir en dos ruletas negras y una roja. Para finalizar sumándolas y obtener la probabilidad deseada.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**] y en [**13**].

PROBLEMA 8. (OME 15). Una urna se llenó con tres bolas por el siguiente procedimiento: se lanzó una moneda tres veces, introduciendo, cada vez que salio cara una bola blanca, y cada vez que salió cruz una bola negra. Extraemos de esta urna, por cuatro veces consecutivas, una bola, la devolvemos a la urna antes de la extracción siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que en las cuatro extracciones se obtenga bola blanca?

RESOLUCIÓN 1. Primero escribimos los distintos sucesos dependiendo del número de bolas blancas que metemos.

Sean U_1, U_2, U_3, U_4 sucesos:

$U_1 \equiv$ “meter tres bolas blancas (salga tres veces cara)”.

$U_2 \equiv$ “meter dos bolas blancas (salga dos veces cara)”.

$U_3 \equiv$ “meter una bola blanca (salga una vez cara)”.

$U_4 \equiv$ “no meter ninguna bola blanca (no sale ninguna vez cara)”.

Calculamos ahora la probabilidad de que ocurra los distintos sucesos, el primer suceso ocurrirá si sacamos tres caras, el segundo suceso ocurrirá si sacamos dos caras, el tercero si sacamos una cara y el último si no sacamos ninguna cara. Con los que obtenemos las siguientes probabilidades:

$$P(U_1) = \frac{1}{8}, P(U_2) = \frac{3}{8}, P(U_3) = \frac{3}{8}, P(U_4) = \frac{1}{8}.$$

Y ahora estudiamos el suceso de sacar una bola blanca el cual esta condicionado por los sucesos anteriores.

Definimos el suceso de sacar cuatro bolas blancas.

$B \equiv$ "Sacar una bolas blancas".

Calculamos ahora las distintas probabilidades de sacar cuatro bolas blancas condicionadas por los distintos sucesos anteriormente descritos, por lógica podemos deducir que la probabilidad de $P(B/U_1)$ es uno ya que la urna solo tiene bolas blancas, también podemos deducir de forma lógica que $P(B/U_4) = 0$ ya que la urna no contendrá ninguna bola blanca.

Ahora solo nos queda calcular la probabilidades $P(B/U_2)$ y $P(B/U_3)$ lo cuál es más difícil de deducir, pero basta con observar que los sucesos B/U_2 y B/U_3 sigue una distribución Binomial en el que el éxito es sacar una bola blanca y el fracaso una bola negra luego nuestras probabilidades quedan de la siguiente forma $P(B/U_2) = (\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^0 = \frac{16}{81}$ y $P(B/U_3) = (\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

En resumen las distintas probabilidades de sacar cuatro bolas blancas condicionadas por los distintos sucesos anteriormente descritos son:

$$P(B/U_1) = 1, P(B/U_2) = \frac{16}{81}, P(B/U_3) = \frac{1}{81}, P(B/U_4) = 0.$$

Utilizamos el Teorema de la Probabilidad Total y calculamos la probabilidad de sacar cuatro bolas blancas en las cuatro extracciones:

$P(B) = P(U_1)\times P(B/U_1)+P(U_2)\times P(B/U_2)+P(U_3)\times P(B/U_3)+P(U_4)\times P(B/U_4) = \frac{1}{8} + \frac{16}{81} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{81} \times \frac{3}{8} + 0 = \frac{11}{54}$.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 8. El alumnado empieza escribiendo todos los resultados posibles de tirar una moneda tres veces, una vez realizado esto, describen los distintos sucesos y los relacionan de forman correspondiente a los distintos sucesos de introducir bolas blancas, para más adelante calcular las distintas probabilidades de los distintos sucesos, el siguiente paso que realizan es definir el sucesos $B \equiv$ “Sacar cuatro bolas blancas”.

Y calculan la probabilidades condicionas de B respectos a los otros sucesos, calculan de forma correcta las probabilidades $P(B/U_1)$ y $P(B/U_4)$ pero se equivocan o no saben calcular las probabilidades de $P(B/U_2)$ y $P(B/U_3)$, esto es debido a que no deducen que sigue una distribución Binomial.

Terminan el problema aplicando el Teorema de la probabilidad total para calcular $P(B)$, debido al error que he descrito anteriormente no obtienen la probabilidad deseada para la resolución de este problema.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 9. Se consideran todos los números naturales desde 1 hasta 10^n. Si se elige uno al azar calcular la probabilidad de que sea múltiplo de 2 ó de 3, en función de n.

RESOLUCIÓN 1. Veamos cuántos números hay desde 1 hasta 10^n múltiplos de 2 ó 3.

Hay $\frac{10^n}{2}$ múltiplos de 2 y $\frac{10^n-1}{3}$ múltiplos de 3 ya que 10^n no es múltiplo de 3 pero el número anterior si lo es, de cuya suma hay que descontar los múltiplos de 6 (ya que van incluidos dos veces).

Hay $\frac{10^n-4}{6}$ múltiplos de 6 ya que el ultimo múltiplo de 6 sería 10^n-4.

Luego el número de casos favorables es:

$$\frac{10^n}{2}+\frac{10^n-1}{3}-\frac{10^n-4}{6}=10^n\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.$$

Como el número de casos posibles es 10^n, utilizando la regla de LaPlace la probabilidad es:

$$\frac{10^n\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{10^n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times 10^n}.$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 9. En este problema los miembros del alumnado observan que van a tener que calcular cuantos divisores de 2 y de 3 hay entre los números naturales 1 y 10^n y para ello obtienen una fórmula para obtener cuantos divisores de 2, de 3 y de 6 (para réstalos a la suma de la cantidad de los divisores de 2 y de 3 ya que los múltiplos de 6 aparecen dos veces) hay en el intervalo $[1,10^n]$ como hemos puesto en la resolución del problema, ya que en una clase anterior de Olimpiada Matemática trabajaron el calculo de divisores en un intervalo, una vez hecho esto se dan cuenta que el problema se resuelve utilizando la regla de LaPlace y dividen el resultado anterior entre 10^n que es el número total de los números naturales del intervalo que nos da el enunciado, así obtienen la probabilidad deseada.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 10. Una urna contiene inicialmente una bola blanca y otra negra. Se extrae al azar una bola y se devuelve acompañada de otra bola de color contrario. Se realiza la operación otras cinco veces más. Al final, la urna contiene ocho bolas. Hallar la probabilidad de que estas sean cuatro bolas blancas y cuatro bolas negras.

RESOLUCIÓN 1. Para que al final la urna contenga 4 blancas y 4 negras es necesario que en las 6 extracciones 3 hayan sido blancas y 3 negras, siendo indiferente el orden.

El número de ordenaciones distintas en que pueden salir las 3 blancas y las 3 negras, quedan definidas por una permutación con repetición de 6 elementos iguales 3 a 3:

$$PR_{6;3,3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20.$$

Hay que calcular la probabilidad de cada una de estas secuencias y sumarlas para obtener la solución del problema.

El siguiente esquema corresponde a la ordenación $BBBNNN$. La expresión (B_i, N_j) indica que la urna contiene i bolas blancas y j bolas negras, y los números colocados sobre las flechas indica la probabilidad de cada una de las seis extracciones:

$$(B_1, N_1) \to (B_1, N_2) \to (B_1, N_3) \to (B_1, N_4) \to (B_2, N_4) \to (B_3, N_4) \to (B_4, N_4)$$

$P(BBBNNN) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{64}{5040}$.

Análogamente se obtienen las demás:

$P(BBNBNN) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{96}{5040}$.

$P(BBNNBN) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{108}{5040}$.

$P(BBNNNB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{108}{5040}$.

$P(BBNNBN) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{108}{5040}$.

$P(BNNNBB) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{128}{5040}$.

$P(BNBNBN) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{144}{5040}$.

$P(BNBNNB) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{144}{5040}$.

$P(BNNBBN) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{144}{5040}$.

$P(BNNBNB) = \frac{144}{5040}$.

Estas diez probabilidades deben multiplicarse por 2, por las secuencias "simétricas" a las indicadas que se obtienen combinando las B y las N y viceversa.

Luego

$$P(T) = \frac{64 \times 2 + 96 \times 2 + 108 \times 4 + 128 \times 4 + 144 \times 8}{5040} = \frac{151}{315}.$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 10. Para resolver el problema el alumnado, empieza dibujando la situación con diagrama de árbol pero no lo terminan ya que se dan cuenta que es bastante largo y requiere bastante tiempo, aunque observando la parte de diagrama de árbol que han dibujado consigue sacar cuantos casos favorables hay (20).

Pero una vez realizado esto no consiguen calcular los sucesos de cada caso, entonces le sugiero que dibujen un caso, calculen su probabilidad y después vayan caso por caso.

Una vez dado estás indicaciones el alumnado sabe seguir y calculan la probabilidad de todos los casos.

Suman la probabilidad de todos los casos y obtienen la probabilidad de que la urna contenga cuatro bolas blancas y cuatro bolas negras. Para finalizar algunos alumnos piensa que debe haber una solución más rápida.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**9**].

PROBLEMA 11. Tenemos 6 bolas con pesos de $101, 102, 103, 104, 105$ y 106 Kg. Si escogemos 3 bolas al azar y los colocamos en un lado de la balanza y las otras tres en el otro lado. ¿Cuál es la probabilidad de que la pelota que pesa 106 Kg esté en el lado más pesado?

RESOLUCIÓN 1. Sea X, Y las bolas que están con la de 106 kg. Sumamos todas las bolas:

$$101 + 102 + 103 + 104 + 105 + 106 = 621$$

Notamos el suceso de que la bola de 106 kg este en el lado más pesado y con la ayuda de la suma anterior, describimos que debe ocurrir para que la bola más pesada este en el lado más pesado, que será que la suma de la bola más pesada más las otras dos bolas supere la mitad del peso de todas las bolas.

$M_p \equiv$ la bola de 106 kg está en el lado más pesado y lo expresamos de la siguiente manera:

$$X+Y+106 \geq \frac{621}{2} = 310{,}5 \Rightarrow X+Y \geq 310{,}5-106 = 204{,}5 \Rightarrow P(M_p) = P(X+Y \geq 204{,}5)$$

Si apartamos la bola 106 kg. entonces X e Y se eligen de las cinco bolas restantes, de lo cuál tenemos $\binom{5}{2} = 10$ posibilidades, $(101, 102)$, $(101, 103)$, $(101, 104)$, $(101, 105)$, $(102, 103)$, $(102, 104)$, $(102, 105)$, $(103, 104)$, $(103, 105)$, $(104, 105)$.

Como tenemos ocho posibilidades de diez, la probabilidad de que la bola pesada esté en el lado más pesado es $\frac{8}{10}$.

RESOLUCIÓN 2. Los pesos se pueden considerar como $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Luego hay $\frac{6!}{3!3!2!} = 10$ maneras de dividir 6 objetos en dos grupos de tres bolas. Una forma bastante rápida de hacerlo es hacer una lista de los 10 pares y ver en cuantos casos seis pertenece al grupo con mayor suma.

Y ahora consideramos la suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Entonces que 6 pertenezca al lado más pesado significa que pesa con otros dos pesos más de $\frac{21}{2} = 10{,}5$ de lo cuál vemos que solo hay dos casos no favorables $(6, 1, 2)$ y $(6, 1, 3)$.

Luego los casos favorables son $10 - 2 = 8$ y el número de casos posibles es 10.

Por tanto la probabilidad de que la bola pesada esté en el lado más pesado es $\frac{8}{10}$.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 11. En este problema el alumnado pasa los pesos $101, 102, 103, 104, 105$ y 106 a $1, 2, 3, 4, 5, 6$ de forma respectiva y los suman.

Una vez que los han sumado y deducen que la bola 6 kg (la bola que pesa 106 kg) pertenezca al lado más pesado significa que con otros dos pesos más de $\frac{21}{2} = 10{,}5$ kg, calculan todas las ternas posibles y encuentra dos ternas que no superan los 10,5 kg.

Entonces calculan la probabilidad de que la bola que pesa 106 kg utilizando la probabilidad complementaria y obtienen que la probabilidad es $\frac{8}{10}$.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 12. Por turnos en orden alfabético tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado. Por cada euro que apueste Carlos, ¿que cantidad han de poner Ana y Blas para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectados por el orden de actuación al lanzar el dado?

RESOLUCIÓN 1. Ana gana si el juego termina en la partida primera, cuarta, séptima, ..., por lo que la probabilidad de que gane Ana es:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \times \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6} \times \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^i = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{36}{91}.$$

Blas gana si el juego termina en la partida segunda, quinta, octava, ..., por lo que la probabilidad de que gane Blas es:

$$P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \times \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^i = \frac{1}{6} \times \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{91}.$$

Y por último el de Carlos es el complementario de las otras dos probabilidades:

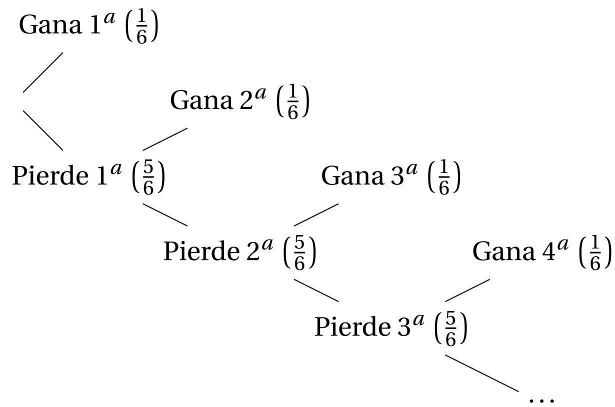
$$P(C) = \frac{25}{91}.$$

Luego para que sea equitativo, Ana debe poner 36€ de cada 91 que haya en juego, mientras que Blas pondrá 30€ y Carlos 25€. Lo que equivale a decir que por cada euro que apueste Calos, Ana debe apostar $\frac{36}{25} = 1{,}44$€ y Blas $\frac{30}{25} = 1{,}2$€.

RESOLUCIÓN 2. Otra forma de resolverlo es utilizando la esperanza matemática de cada jugador e igualándola a 0. Si Ana juega x y Blas y, por cada juego que juega Carlos,

$$\left.\begin{array}{l} E_{Ana} = \frac{36}{91}(1+y) - \frac{55}{91}x = 0 \\ E_{Blas} = \frac{30}{91}(1+x) - \frac{61}{91}y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1,44 euros \\ y = 1,20 euros \end{array}$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 12. En este caso el alumnado empieza planteando el problema dibujando un diagrama de árbol:



Esto les ayuda a plantear y distinguir los casos de Ana y Blas, algunos miembros del alumnado también distingue el caso de que gane Carlos.

Empiezan a sumar las probabilidades de que gane Ana y se dan cuentan que tienen una serie Geométrica y la calculan, hacen lo mismo para calcular la probabilidad de que gane Blas y por último calculan la probabilidad de que gane Carlos, haciendo el complementario de las probabilidades de Blas y Ana.

Como la probabilidad de que gane Ana es $\frac{36}{91}$, la de Blas $\frac{30}{91}$ y el de Carlos $\frac{25}{91}$. Entonces deducen que para que el juego sea equitativo Ana debe poner 36€ de cada 91 que haya en juego, mientras que Blas pondrá 30€ y Carlos 25€.

Para obtener cuando debe poner cada uno por euro apostado por Carlos dividen el dinero que debería apostar Carlos entre los que apuesta Blas, luego Blas deberá apostar $\frac{30}{25} = 1,2€$ y entre los que apuesta Ana, luego Ana deberá apostar $\frac{36}{25} = 1,44€$.

Para finalizar le explico al alumnado que otra forma de resolverlo sería utilizando la Esperanza.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**13**].

PROBLEMA 13. (OME 3 modificado). Nos indican que un matrimonio tiene 5 hijos. Calcular la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos dos varones y por lo menos una mujer. La probabilidad de nacer varón se considera $\frac{1}{3}$.

RESOLUCIÓN 1. Tomamos V como el número de varones que tiene el matrimonio, luego para calcular la probabilidad de tener al menos dos varones y una hija es la suma de $P(V=2)$, $P(V=3)$, $P(V=4)$.

De donde:

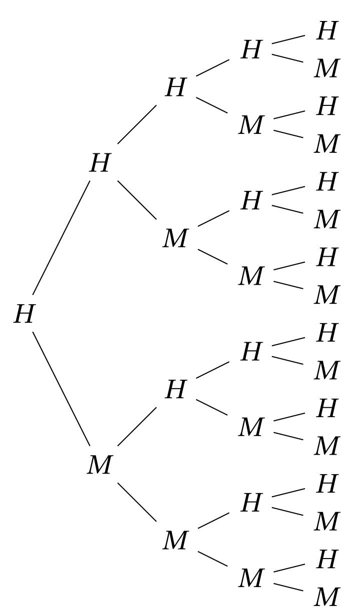
$$P(V=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{3^5}=\frac{80}{243}.$$

$$P(V=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}.$$

$$P(V=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{243}.$$

Luego la probabilidad es $P(V=2)+P(V=3)+P(V=4)=\frac{130}{243}$.

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 13. En este problema el alumnado empieza escribiendo la situación en un diagrama de árbol para el caso en el que el primer hijo sea niño (denotan H a los hijos y M a las hijas):



con el que se dan cuenta que hay casos que aparecen más que otros y comprenden que deben de utilizar combinatoria para calcular el número de casos en el que salen dos hijos y tres hijas, tres hijos y dos hijas y cuatro hijos y una hija.

Una vez que han calculado el número de veces que ocurre cada suceso anteriormente descrito calculan las probabilidades ayudándose del diagrama de árbol, las cuales multiplican cada una por el número de veces que aparece el suceso.

Finalizando el problema sumando todas las probabilidades y obteniendo así la solución del problema.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**1**].

PROBLEMA 14. (OME 17). En una fábrica de pelotas de fútbol hay 4 máquinas m_1, m_2, m_3, m_4, que producen, respectivamente, el 10 %, 20 %, 30 % y 40 % de los balones que salen de la fábrica. La máquina m_1 introduce defectos en un 1 % de las pelotas que fabrica, la máquina m_2 en el 2 %, la m_3 en el 4 % y la m_4 en el 15 %. De las pelotas fabricadas en un día, se elige una al azar y resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que esta pelota haya sido elabora por la máquina m_3?

RESOLUCIÓN 1. Primero designamos los sucesos:

$D \equiv$ “ser defectuosa”.

$M_i \equiv$ “estar fabricada en la máquina i-ésima”.

Del enunciado tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(M_1) = 0{,}1, P(M_2) = 0{,}2, P(M_3) = 0{,}3, P(M_4) = 0{,}4.$$

$$P(D/M_1) = 0{,}01, P(D/M_2) = 0{,}02, P(D/M_3) = 0{,}04, P(D/M_4) = 0{,}15.$$

Y necesitamos calcular $P(M_3/D)$, para ello necesitamos calcular antes la probabilidad $P(D)$.

Utilizando el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P(D) = P(D/M_1)P(M_1)+P(D/M_2)P(M_2)+P(D/M_3)P(M_3)+P(D/M_4)P(M_4) = 0{,}077.$$

Ya que tenemos la probabilidad de $P(D)$ podemos calcular la probabilidad de $P(M_3/D)$ utilizando el Teorema de Bayes.

$$P(M_3/D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/M_3)P(M_3)}{P(D)} = \frac{0{,}04 \times 0{,}3}{0{,}077} = \frac{0{,}012}{0{,}077} = \frac{12}{77}.$$

DISCUSIÓN DEL ALUMNADO PROBLEMA 14. El alumnado para resolver este problema primero escribe los distintos sucesos que tienen y luego las distintas probabilidades que pueden sacar a partir del enunciado, aunque a algunos miembros del alumnado cometen el error de interpretar que las probabilidades de que máquinas m_i introducen unos defectos como $P(M_i/D)$ en vez de $P(D/M_i)$.

Una vez realizado esto intentan calcular la probabilidad de $P(M_3/D)$ y observan dos cosas:

- La primera, que no pueden calcular $P(M_3/D)$.
- La segunda, que le falta $P(D)$.

Entonces deciden primero calcular la probabilidad de que salga una pelota defectuosa con el Teorema de la Probabilidad Total, una vez tiene la probabilidad $P(D)$, una parte del alumnado intenta calcular $P(M_3 \cap D)$ sin éxito, aunque algunos escribiendo la formula de la probabilidad condicionada se dan cuenta que deben utilizar la formula dada por el Teorema de Bayes y la otra parte del alumnado aplica el Teorema de Bayes calculando así la probabilidad deseada.

Capítulo 4

Otros problemas de Olimpiada Matemática de Probabilidad

Este capítulo están recogidos algunos problemas de Olimpiada Matemática que están resueltos y son interesantes para la persona que quiera preparar olimpiada a nivel de Bachillerato pero no se ha llegado a trabajar en clase con los alumnos.

PROBLEMA 15. En un equipo de fútbol donde hay 11 participantes, tienen camisetas de color azul numeradas del 1 al 11. eligiendo al azar 6 de ellos, calcula la probabilidad de que la suma de los números de las camisetas sea impar.

RESOLUCIÓN 1. Tenemos $\binom{11}{6}$ elecciones posibles, lo que nos da $\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!\times 5!} = \frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7}{5\times 4\times 3\times 2} = 462$. Para que la suma de las seis camisetas sea impar, tiene que haber una cantidad impar de camisetas con números impares, hay que tener en cuenta que tenemos cinco números pares y seis impares. Por lo tanto los casos favorables son los siguientes:

1. Un impar y cinco pares. $\binom{6}{1} \times \binom{5}{5} = 6 \times 1 = 6$.
2. Tres impares y tres pares. $\binom{6}{3} \times \binom{5}{3} = 20 \times 10 = 200$.
3. Cinco impares y un par. $\binom{6}{5} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$.

Luego la probabilidad será:

$$\frac{6+200+30}{462} = \frac{236}{462} = 0,51.$$

PROBLEMA 16. (IMO shortlist 2022). El Banco de Oslo usa dos tipos de moneda: las fabricadas con aluminio (A) y de cobre (C). Morgane tiene n monedas de aluminio y n monedas de cobre, esas $2n$ monedas la ordena seguidas de forma arbitraria. Dado un número entero positivo $k \leq 2n$, ella realiza la siguiente operación: identifica la subsecuencia más grande que contiene la k-ésima moneda de la izquierda que consta de monedas consecutivas hechas del mismo metal, y se mueve todas las monedas en esa subsecuencia al extremo izquierdo de la fila. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 4$, el proceso partiendo de $AACCCACA$ sería

$$AACCCACA \to CCCAAACA \to AAACCCCA \to CCCCAAAA \to \cdots.$$

Encontrar todos los pares (n, k) con $1 \leq k \leq 2n$ tal que para cada configuración inicial, en algún momento del proceso habrá como máximo una moneda de aluminio adyacente a una moneda de cobre.

RESOLUCIÓN 1. Define un bloque como una subsecuencia máxima de monedas consecutivas formadas por el mismo metal, y denotaremos M^b como el bloque de b monedas del metal M. La propiedad de que una moneda de aluminio es adyacente a una moneda de cobre es equivalente a la configuración que tiene dos bloques, uno formado por todos los A-s y uno formado por todos los C-s.

Primero, notaremos que si $k < n$, la secuencia $A^{n-1}C^{n-1}AC$, permanece fijo bajo la operación, y por lo tanto siempre tendrá cuatro bloques. Luego, si $k > \frac{3n+1}{2}$, teniendo en cuenta que $a = k - n - 1, b = 2n - k + 1$. Entonces $k > 2a + b$, $k > 2b + a$, como la configuración $A^aC^bA^bC^a$ por lo que siempre tendrá cuatro bloques:

$$A^aC^bA^bC^a \to C^aA^aC^bA^b \to A^bC^aA^aC^b \to C^bA^bC^aA^a \to A^aC^bA^bC^a \to \dots$$

Por tanto un par (n, k) puede tener la propiedad que deseamos si $n \leq k \leq \frac{3n+1}{2}$. Afirmamos que todos los pares tienen la propiedad que deseamos. Claramente, el número de bloques en una configuración no puede aumentar, por lo que cada vez que se aplica la operación, disminuye o permanece constante.

Ahora vamos a mostrar que a menos que solo haya dos bloques, después de una cantidad finita el número de bloques disminuirá.

Consideramos de forma arbitraria una configuración con $c \geq 3$ bloques. Nosotros notamos que $k \geq n$, el bloque que esta más a la izquierda no puede moverse, porque en este caso las n monedas de un tipo de metal están en el bloque que esta más a la izquierda lo que significa que solo hay dos bloques. Si un bloque que no es el que esta más a la derecha o el que está más a la izquierda es movido, sus bloques colindantes se fusionarán, lo cuál disminuirá el número de bloques.

Por lo tanto, el único caso en el que el número de bloques no disminuye es si se mueve el bloque que hay más a la derecha. Si c es impar, los bloques que hay más a la derecha y a la izquierda estarán hechos del mismo material, por lo que esto fusionaría dos bloques. Por lo tanto $c \geq 4$ debe de ser par. Suponemos que hay una configuración de c bloques con el i-ésimo bloque de tamaño a_i para que la operación siempre se mueva el bloque que está más a la derecha:

$$A^{a_1} \dots A^{a_{c-1}} C^{a_c} \to C^{a_c} A^{a_1} \dots A^{a_{c-1}} \to A^{a_{c-1}} C^{a_c} A^{a_1} \dots C^{a_{c-2}} \to \dots$$

Porque el bloque que está más a la derecha siempre sera desplazado, cuando $k \geq 2n+1-a_i$ para todo i. Porque $\sum a_i = 2n$, sumando todo esto para i nosotros obtenemos $ck \geq 2cn + c - \sum a_i = 2cn + c - 2n$, como $k \geq 2n+1-\frac{2n}{c} \geq \frac{3n}{2}+1$. Pero esto es una contradicción ya que $k \leq \frac{3n+1}{2}$. Por lo tanto, en algún momento la operación no moverá el bloque que está más a la derecha, lo que significa que el número de bloques disminuirá según se desee.

Por lo tanto esto ocurre para los pares (n,k) que cumplen $n \leq k \leq \frac{3n+1}{2}$.

PROBLEMA 17. (IMC 2002, 2ª prueba). 200 estudiantes participan en una prueba de las Olimpiadas de Matemáticas. Ellos tienen que resolver 6 problemas. Se sabe que cada problema fue resuelto de forma correcta por al menos 120 estudiantes. Demuestre que debe haber dos estudiantes de modo que cada problema fuera resuelto por al menos uno de estos dos estudiantes.

RESOLUCIÓN 1. Vamos a empezar considerando todas las parejas de estudiantes y el conjunto de problemas que no fue resuelto por ninguno de ellos. De los cuales existe $\binom{200}{2} = 19900$ conjuntos de los cuales tenemos que demostrar que existe al menos uno que es vació.

En cada problema, hay un máximo de 80 estudiantes que no saben resolverlo. Por lo tanto el número máximo de parejas que no saben resolverlo es $\binom{80}{2} =$ 3160 parejas que no sepan hacer el ejercicio, como tenemos seis problemas en la prueba tenemos que el número máximo de parejas que no hayan contestado de forma correcta al menos a un problema de la prueba es $6 \times 3160 = 18960$ conjuntos por lo tanto, hay al menos un conjunto de los anteriores que es vació con lo que queda demostrado que hay al menos una pareja de estudiantes que sabe resolver toda la prueba de forma correcta.

El siguiente problema esta basado en un problema de [**6**].

PROBLEMA 18. Sea $p \in (0,1)$ la probabilidad de que un detective resuelva cualquier misterio determinado. La probabilidad de que el detective resuelva 1800 de 2006 misterios dados es la misma que la probabilidad de que resuelva 1801 de 2006. Encuentra la probabilidad de que el detective resuelva un misterio.

RESOLUCIÓN 1. Como los misterios se resuelven o no se resuelven la probabilidad de resolver k misterios de n misterios esta definida por una distribución binomial, además como la probabilidad de que resuelva 1800 misterios de 2006 es la misma de que resuelva 1801 de 2006 tenemos que:

$$\binom{2006}{1800} p^{1800}(1-p)^{206} = \binom{2006}{1801} p^{1801}(1-p)^{205}$$

y nosotros queremos obtener el valor de p. Luego operamos en la igualdad anterior:

$$\frac{2006! \times p^{1800}(1-p)^{206}}{1800! \times 206!} = \frac{2006! \times p^{1801}(1-p)^{205}}{1801! \times 205!}$$
$$\frac{(1-p)}{206} = \frac{p}{1801}$$
$$1801 - 1801p = 206p$$

despejamos p

$$1801 = 2007p$$
$$p = \frac{1801}{2007}.$$

Por lo tanto la probabilidad de que el detective resuelva un misterio es $\frac{1801}{2007}$.

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**9**].

PROBLEMA 19. Se meten en un saco 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar del saco, para asegurarnos que al menos en tres tarjetas la suma de los dígitos del número escrito es la misma?

RESOLUCIÓN 1. La suma mínima corresponde al número 100 y la máxima al número 999. Por lo tanto, las sumas varían entre 1 y 27 y hacen un total de 27 sumas distintas, pero las sumas 1 y 27 sólo se tiene en las tarjetas correspondientes a 100 y 999, respectivamente. En consecuencia, el mayor número de tarjetas posible sin tener de igual suma es 52 (una por cada tarjeta 100 y 999 y dos que corresponde a cada suma entre 2 y 26). De esto deducimos que si tomamos 53 tarjetas cualesquiera, siempre habrá tres que tenga la misma suma.

PROBLEMA 20. (OJM, 2013). Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número de saltos?

RESOLUCIÓN 1. Ascendiendo sólo llega a los escalones múltiplos de 3. Si desciende una vez sólo llega a los escalones de la forma $3n-4$. Así nunca llegará al 22 pues 22 deja resto 1 al dividirlo entre 3. Usando dos descensos si puede llegar, si asciende 10 veces: $10\times 3-2\times 4 = 22$. Si usa más descensos debe aumentar también el número de ascensos y por lo tanto el número total de pasos.

Ahora se trata de contar las posibles ubicaciones de los dos saltos descendentes, entre los 12 saltos. Como ni el primer salto ni el segundo pueden ser descendentes, los dos descendentes se ubican entre los 10 últimos.

Hay $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{90}{2} = 45$ maneras de escogerlos, pero como el tercer y cuarto salto no pueden ser ambos descendentes quedan $45-1 = 44$ posibilidades. Todas ellas son realizables, ya que hacia arriba se llega a lo sumo al escalón $10\times 3 = 30$, el primer salto descendente está precedido de al menos tres ascendentes.

Luego el número de maneras en los que puede subir es:

$$\binom{10}{2} - 1 = \frac{10!}{2!8!} - 1 = \frac{90}{2} - 1 = 45 - 1 = 44.$$

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**9**].

PROBLEMA 21. Cinco equipos juegan un torneo de béisbol. Cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los demás. Si cada equipo tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar cada juego en el que interviene. ¿Cuál es la probabilidad de que al final del torneo cada equipo haya ganado al menos un juego y perdido al menos un juego?

RESOLUCIÓN 1. Hay $\binom{5}{2} = 10$ juegos. Como en cada juego hay dos posibilidades para el ganador, el espacio muestral Ω (posibles resultados del torneo) tiene $2^{10} = 1024$ elementos. Los torneos en que hay un equipo invicto (suceso I) puede contarse así: el invicto se puede coger de 5 formas y el resto de equipos deben jugar $10-4 = 6$ juegos entre ellos, que pueden resultar de 2^6 formas.

Luego $|I| = 5 \times 2^6 = 320$. Del mismo modo, si F es el evento en el que un equipo pierde todos sus juegos, $|F| = 320$.

Pero I y F no son disjuntos $|I \cap F| \neq 0$. El equipo invicto puede ser cualquiera de los 5, el que pierde todos sus juegos puede ser cualquiera de los 4 restantes, y entre los 3 que quedan se realizan 3 juegos que pueden resultar de $2^3 = 8$ formas. Luego $|I \cap F| = 5 \times 4 \times 8 = 160$.

El evento que nos interesa es $|\Omega \setminus (I \cap \Omega)| = |\Omega| - |I \cup F| = |\Omega| - (|I| + |F| - |I \cap F|) = 1024 - (320 + 320 - 160) = 544$.

Luego la probabilidad pedida es $P(\Omega \setminus (I \cap \Omega)) = \frac{544}{1024} = \frac{17}{32}$.

PROBLEMA 22. (22º Olimpiada mexicana de matemáticas). En un torneo de voleibol durante la copa Europa- África, habían 9 equipos más de Europa que de África. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez, y en total los equipos europeos ganaron 9 veces tantos partidos como ganaron los equipos africanos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que un solo equipo africano pudo haber ganado?

RESOLUCIÓN 1. Sea n el número de equipos africanos. Entonces el número de equipos europeos es $n+9$. Los equipos africanos jugaron $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos, y por lo tanto ganaron en total $\frac{n(n-1)}{2} + k$ partidos, donde k es el número de partidos ganados por los equipos africanos a los equipos europeos.

De forma similar, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \frac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9) - k$ partidos contra equipos africanos, de modo que en total ganaron $\frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$ partidos.

Luego, $9\left(\frac{n(n-1)}{2} + k\right) = \frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$, de donde $3n^2 - 22n + 10k - 36 = 0$.

Como n es un número entero positivo, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser un cuadrado perfecto, es decir, $4 \times (229 - 30k) = m^2$. Como $m^2 \geq 0$, tenemos que $k \leq 7$, por lo tanto las únicas soluciones posibles son $k = 2$ y $k = 6$. Ahora vamos a estudiar ambos casos.

1. Si $k = 2$, entonces $n = 8$ y por tanto el mejor equipo africano sólo pudo haber ganado 7 encuentros con equipos de su mismo continente y 2 contra equipos europeos.
2. Si $k = 6$, entonces $n = 6$ por lo que el mejor equipo africano pudo haber ganado 5 partidos contra equipos africanos y 6 partidos contra equipos europeos.

Por lo tanto, el número máximo de partidos que pudo ganar un equipo africano es 11.

PROBLEMA 23. Sea α y β números en un intervalo de $[0,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que $x^2+\alpha x+\beta^2=0$ sea una solución real?

Este problema lo puedes encontrar en [**9**].

RESOLUCIÓN 1. Para que tenga solución real el discriminante tiene que ser mayor o igual que 0, en nuestro caso tenemos que $\alpha^2-4\beta^2\geq 0$ de lo que deducimos $\alpha^2\geq 4\beta^2$ y haciendo la raíz en ambas partes de la desigualdad obtenemos $\alpha\geq 2\beta$.

Ahora vamos a dibujar el recinto del espacio muestral y del suceso favorable y lo resolveremos utilizando probabilidad geométrica.

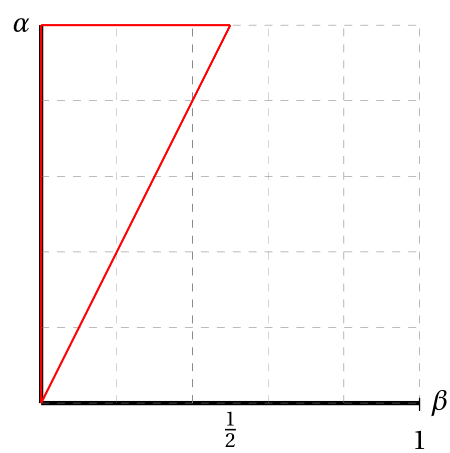


FIGURA 1. Área del suceso favorable (rojo) y del espacio muestral

Luego el área de Ω es 1 y el área del suceso favorable es $|F|=\frac{1}{4}$, luego:

$$P=\frac{|F|}{|\Omega|}=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}.$$

PROBLEMA 24. Por dos calles perpendiculares de 10 m de anchura circulan dos ciclistas de tal forma que sus velocidades son constantes e iguales, sus direcciones son constantemente paralelas a las de las calles respectivas, y la distancia que los separa del cruce de las dos calles en cada momento igual para ambos. Se supone que la longitud de las dos bicicletas es de 2 m y la anchura nula. La distancia constante que los separa de sus aceras respectivas es desconocida y no necesariamente igual para ambos. ¿Cual es la probabilidad de que choquen al atravesar el cruce de las dos calles?

RESOLUCIÓN 1. Según el enunciado, las distancias hasta el cruce son iguales, las velocidades coinciden y lo único que es variable es la distancia de los vehículos a las aceras.

Cuando ambas bicicletas están a la misma distancia de la acera, se chocarán seguro. Cuando las distancias a la acera sean muy distintas, seguro que no chocarán. Y cuando las distancias sean "parecidas", las bicis chocarán.

Teniendo ya una idea de como pueden colisionar las bicicletas entre ellas vamos a calcular la región del espacio muestral y el área donde el suceso es favorable.

El espacio muestral va a ser el cruce ya que es el lugar donde las bicicletas pueden colisionar, pasamos ahora a calcular el área donde pueden colisionar las bicicletas, para ello tendremos en cuenta dos variables (x, y), ya que tenemos una bicicleta que se mueve de forma horizontal y otra que se mueve de forma vertical.

Vamos a empezar estudiando el caso de que $x \geq y$ (el caso $y \geq x$ es similar). Como la velocidad es la misma, vamos a considerar que la velocidad es constantemente igual a 1. El móvil que se desplaza horizontalmente alcanza la diagonal pasadas y unidades de tiempo. En ese momento, la parte de delante del móvil que se desplaza verticalmente se encuentra en el punto (x, y).

Debido a que las bicicletas miden dos metros de largo, hace que la bicicleta que se mueve de forma vertical tarde dos unidades de tiempo en traspasar la altura y, tiempo en el que la bicicleta que se mueve de forma horizontal debe haber llegado a tocarla. Es decir, antes de que la rueda de delante de la bicicleta que va de forma vertical llegue a $(x, y+2)$, la parte de delante del móvil horizontal debe haber alcanzado la abscisa x. Por lo tanto, tenemos que $y+2 \geq x$.

Para el otro caso $y \geq x$, se hace de forma análoga y se obtiene que $x+2 \geq y$.

Luego el área del suceso favorable queda delimitada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \le y+2. \\ y \le x+2. \end{cases}$$

Dibujamos la situación

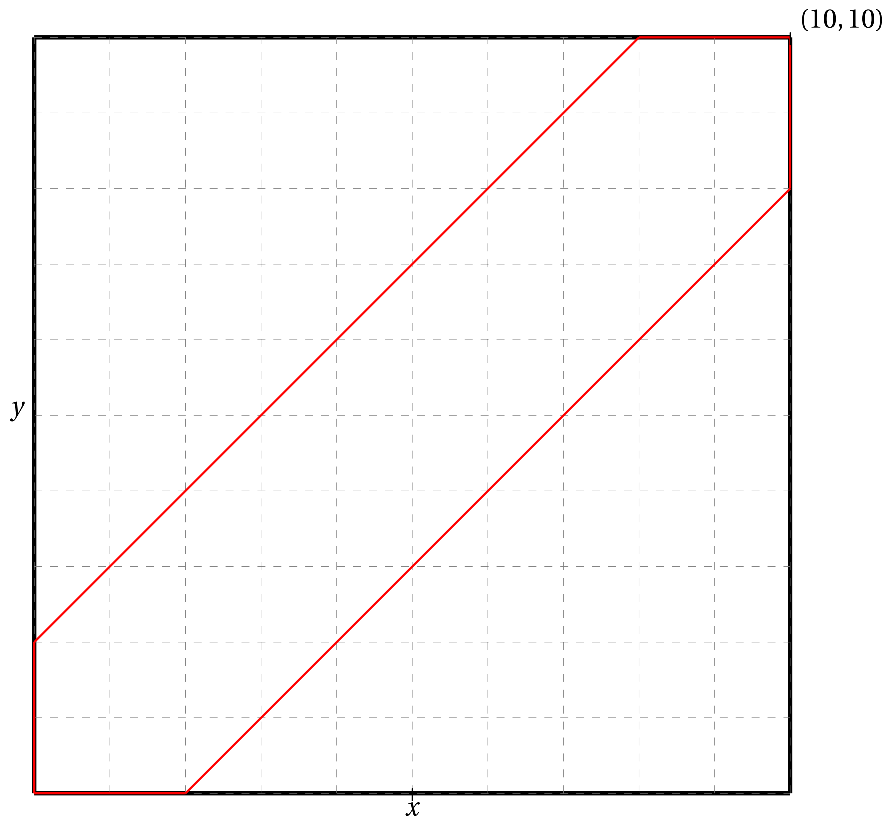


FIGURA 2. Área del suceso favorable (rojo) y del espacio muestral

y vemos que el espacio muestral tiene de área $|\Omega| = 100$, como el área de la región favorable no es una figura sencilla, pero el área del suceso complementario al caso favorable forma dos triángulos de base 8 y altura 8 o lo que es lo mismo un cuadrado de lado 8, calculamos el área del suceso complementario al suceso favorable y calculamos la probabilidad $|\overline{F}| = 8 \times 8 = 64$.

Por lo tanto la probabilidad de que las bicicletas colisionen entre ellas es

$$P = 1 - \frac{|\overline{F}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100}.$$

El siguiente problema lo puedes encontrar en [**9**].

PROBLEMA 25. Sea P un punto elegido al azar en el segmento que une los puntos $(0,1)$ y $(3,4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo con vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y P es mayor que 3?

RESOLUCIÓN 1. Empezamos notando que la base del triángulo va a ser el segmento que va del punto $(0,0)$ al punto $(3,0)$ luego su base sera de longitud 3.

Veamos ahora que puntos P podemos coger, esto viene determinado por la función $y = x+1$ definida en el intervalo $[0,3]$. Luego el área queda definida como $A(X) = \frac{3}{2}(X+1)$, donde X es una variable uniformemente continua definida en $[0,3]$. Luego la probabilidad es:

$$P(A(X) \geq 2) = P\left(X \geq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}.$$

PROBLEMA 26. (HMMT 2006). En una guardería, hay 2006 bebes en circulo, Sucesivamente, cada bebe toca al bebe de su izquierda o de su derecha. ¿Cuál es el número esperado de bebes que no hayan sido tocados?

RESOLUCIÓN 1. Vamos a definir las variables $X_1, \ldots, X_{2006}$ referente a cada bebe y estas variables serán definidas de la siguiente forma:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si un bebe no es tocado} \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Nosotros queremos calcular $E[X_1 + \cdots + X_{2006}]$. Hay que tener en cuenta que la probabilidad de que un bebe sea tocado por otro es $\frac{1}{4}$, luego $E[X_i] = \frac{1}{4}$, para cualquier $i \in 1, \ldots, 2006$ y como cada variable es independiente de la otra tenemos que:

$$E[X_1 + \cdots + X_{2006}] = E[X_1] + \cdots + E[X_{2006}] = \frac{2006}{4} = \frac{1003}{2}.$$

Por lo tanto, el número de bebes que va a ser tocado por otro bebe es 501.

Capítulo 5

Conclusión

Para finalizar este trabajo voy a hacer una reflexión sobre las conclusiones que he alcanzado al finalizar este trabajo Fin de Máster.

Durante la realización de este trabajo fin de máster he tenido la oportunidad de explicar, ayudar y observar a alumnos de bachillerato que le apasiona las matemáticas.

Unas de las conclusiones que he sacado al realizar este trabajo fin de máster es que en la educación escolar se le da muy poca importancia a la probabilidad cuando es una parte de la matemática que tiene una aplicación bastante sencilla y rápida para el alumnado de secundaria, al cuál no le suele atraer las matemáticas, esta dejadez también la he observado en las Olimpiadas Matemáticas, donde cuesta encontrar problemas de probabilidad sobretodo a nivel autonómico y nacional, lo cuál me ha dificultado bastante el trabajo de fin de máster, incluso algunos de los problemas que he encontrado eran demasiados fáciles y carecían de interés para alumnos/as de Bachillerato.

Otro punto que me ha llamado la atención es como el alumnado para resolver los problemas ha seguido distintas estrategias (muchas de ellas no se me habían ocurrido para resolver los problemas y me han parecido bastante interesantes) y algunos de ellos han utilizado con mucha frecuencia el diagrama de árbol, aunque no sabían que esta bastante relacionado con el Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes, lo cuál le han perjudicado para resolver algunos problemas.

Como dificultades más significativas he encontrado en algunas ocasiones entender el enunciado, plantear de forma errónea el problema, no plantear todos los casos y calcular de forma errónea la probabilidad condicionada.

Para terminar, quiero resaltar la gran satisfacción y facilidad que ha sido trabajar con un alumnado que está tan interesado por las matemáticas e intentarles motivarles para que hagan la carrera de matemáticas, a parte de compartir estas sesiones con otros compañeros y compañeras que tienen la misma inquietud por las matemáticas y la educación, enseñando otras ramas de los problemas de Olimpiada Matemáticas.

Bibliografía

[1] M. ANTONIO, L. GONZÁLEZ, A. MOLERO, M. VICENTE. *Problemas resueltos de Olimpiadas Matemáticas de Bachillerato*. Tébar (2007).

[2] A. BOGOMOLNY. *Cut the Knot: Probability Riddles*. STEM Academic Press (2020).ENLACE.

[3] A. ENGEL. *Problem Solving Strategies*. Springer (1998).

[4] L. GONZÁLEZ, Á. VALDÉS. *Apuntes marea verde 2º de Bachillerato Ciencias Sociales*. Textos Marea Verde (2014). ENLACE.

[5] Página web de archivos de texto de Pascual Jara: ENLACE.

[6] Página web Art of Problem Solving: ENLACE.

[7] Página web IMO: ENLACE.

[8] Página web IMO Problemas ENLACE.

[9] Página web Mathematics Stack Exchange: ENLACE.

[10] Página web RSME: ENLACE.

[11] Página web texample: ENLACE.

[12] D. PATRICK. *Introduction to Counting and Probability*. Ops Inc (2007).

[13] Pdf OME 2004: ENLACE.

[14] ROSS. *Sessions de preparació per a l'olimpiada matemàtica*. Institut d'Estudis Catalans (2000).

[15] C. J. RUBIO. *Problemas para la 20ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. ENLACE.

[16] C. SÁNCHEZ-RUBIO, M. RIPOLLÉS. *Manual de matemáticas para preparación olímpica*. Publicacions de la Universitat Jaume I (2000).