UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Anillos Conmutativos de Dimensión Cero

Presentado por:
Elisa Álvarez Fernández-Llimós

Tutor:
Pascual Jara Martínez
Departamento de Álgebra

Curso académico 2021-2022

Anillos conmutativos de dimensión cero

Elisa Álvarez Fernández-Llimós

Elisa Álvarez Fernández-Llimós
Anillos conmutativos de dimensión cero.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2021/2022.

Responsable de tutorización:
Pascual Jara Martínez

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Elisa Álvarez Fernández-Llimós

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada, a 16 de junio de 2022

Fdo: Elisa Álvarez Fernández-Llimós

Dedicado a mi familia.

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agredecerle a Pascual Jara toda la dedicación e implicación que ha tenido conmigo desde el principio, ayudándome en la realización de la mejor versión de este trabajo y transmitirme sus grandes y extensos conocimientos. También quería mencionar a Concepción Vidal, excelente docente, matemática y madre, gracias por todos tus consejos y ayuda recibida.

A mis padres, quienes nunca dejaron de animarme y apoyarme, tanto a mí como a mis dos hermanos en cada una de nuestras etapas de la vida.

Finalmente, quiero agradecer a las personas que me han acompañado en esta etapa universitaria, con las cuales he compartido agobios, penas, pero sobre todo, muchas pero que muchas alegrías. Soy quien soy gracias a vosotros.

Abstract

The intent of this project is collecting the maximum amount of zero–dimensional results and characterizations. This type of rings has been the object of studies since the introduction of the *dimension* concept, but it became the norm after the publication of *Stone Representation Theorem*, developed as a desire to generalize geometric ideas. This result called the attention of important mathematicians who started a new research field in both Algebra and Topology, obtaining new topological representation theorems as well as important results related to Boolean algebras and rings.

John von Neumann and Reinhold Baer discoveries in von Neumann regular rings and injective modules, respectively, assured the centrality of zero–dimensional rings. Simultaneously, the case of noetherian rings with zero dimension were understood as artinian rings which origin the formalization of its structure theory. Moreover, James Huckaba's fundamental work and Arapovic's new researches gave the final importance to constitute the centrality of zero–dimensional rings and appeal the object of more studies.

First of all, through this work a ring will be associative, commutative and with an identity. In order to pursue the objectives described before, this work is introduced by some preliminaries related to rings and ideals' description, along with their corresponding properties and characterizations which are used to investigate different classes of zero–dimensional rings, as well as some properties of dimension theory.

The second part of this chapter also includes module theory exposition accompanied with the definition of the tensor product of modules, we will discuss the general and definition properties of this kind of module and the behavior of exact sequences. This theory is essential to introduce flat modules which will play an important role in von Neumann regular ring theory. Furthermore, the localization process is also commented, as it is the technique that allows to obtain the total quotient ring, denoted by $T(A)$ for a ring A, and as we are going to demonstrate, these types of rings have 0 dimension. The localization of a ring can be generalized to the localization of a module which becomes a module as well, the localized ring has the property of being a flat module, which makes it very special for this work. This chapter is ended with noetherian ring and module theories which constitute the basis of the construction of the structure theory for artinian commutative rings.

Following this expository chapter, some aspects of dimension theory are presented, starting with the definition of the term as the supreme of the lengths of proper prime ideals chain. Consequently, zero–dimensional rings are those which each prime ideal is maximal due to the fact that every existent chain is reduced to one element. One of the main examples of this type of rings are fields, because as it is demonstrated only accepts the zero ideal. Nevertheless, non usual examples are presented along this work. With all the proper primaries, artinian rings are introduced as the first example of zero–dimensional ring. This class of rings has an easy and simple structure, an intensive study of its properties and characteristics has been realized in order to demonstrate the main theorem which connect artinian and noetherian rings, a ring is artinian if, and only if, it is noetherian with zero dimension. These recorded results are motivated by the inquiry of analyzing its simple structure and it is resulted that every artinian ring is equal to a local artinian rings product.

Von Neumann regular rings are given as the second main example of zero–dimensional rings. This class of rings was introduced by the important algebraist John von Neumann motivated by the seek of clarification in some aspects of operator algebras. That is the reason why they are highly connected to functional analysis. However, as much as I am concerned, this work only treats introductory theory with the development of basic properties with the use of idempotents in regular rings. Von Neumann regular rings are reduced and every ideal is idempotent and radical, as well as every module is flat. Moreover, another important characteristic property is when the set of prime ideals of the ring is finite, then it is Artinian too.

Finally, zero–dimensional rings are characterized by the Zariski topology, the topology defined in the spectrum of the ring in which $\{D(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subseteq A\}$, where $D(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}\}$, is a system of open sets. As we are going to demonstrate, the Zariski topology on $\mathrm{Spec}(A)$ is Hausdorff if, and only if, A has zero dimension. It is well known that both the finite and infinite products of fields are zero–dimensional rings, in order to generalize this idea, Cartesian products of rings arise in the study of zero–dimensional rings. There is an important result obtained by [Mar74] which gives us the properties that the Cartesian product of zero–dimensional rings has to verify to be zero–dimensional ring. To conclude this work, an exhaustive study is realized about the ring structure of $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ as an example, as well as other derived rings. Due to all this deepening, this work requires a brief introduction of the theory of filters and ultrafilters, and the correspondence between maximal ideals and ultrafilters.

Introducción

Como propone la guía docente, estructuramos esta sección del trabajo en cuatro puntos diferentes:

1. Objetivos previstos e indicar si han sido alcanzados,
2. antecedentes para el desarrollo,
3. resultados obtenidos y las correspondientes fuentes consultadas,
4. una bibliografía final incluyendo todas la referencias.

1. Objetivos previstos

Los objetivos que están previstos para este trabajo han sido los siguientes:

1. Comenzar el trabajo introduciendo teoría básica de la dimensión.
2. Desarrollar resultados elementales sobre los anillos cero–dimensionales.
3. Ejemplificar esta teoría con los anillos artinianos y otros ejemplos.
4. Introducir la teoría de módulos sobre anillos cero–dimensionales.

Todos estos objetivos se han realizado con éxito:

- Para el primer punto, hemos introducido el concepto de dimensión, acompañado por un poco de la historia que conduce a definir este concepto, los resultados más relevantes de ésta y las caracterizaciones correspondientes. Todo ello precedido por resultados de álgebra básica imprescindibles para el estudio de la dimensión de Krull de un anillo.
- El ejemplo de los anillos artinianos se ha incluido dentro del segundo capítulo, ya que como se verá en el trabajo, esta clase de anillos tiene un estructura bastante sencilla y resultados bastante accesibles. De esta forma, se puede constatar que algunas propiedades de los anillos artinianos se corresponden con propiedades de los anillos cero–dimensionales. Para el último punto, los módulos sobre anillos de dimensión cero, nos hemos centrado fundamentalmente en los módulos artinianos.
- Otro ejemplo con el que hemos trabajado y que goza de gran importancia dentro de este campo del álgebra y, en el que se basan muchos resultados de anillos cero–dimensionales, son los anillos regulares von Neumann.
- Para finalizar, en el último capítulo hemos incorporado los resultados de anillos cero–dimensionales, algunos obtenidos directamente de toda la teoría previa y otros más complejos, fundamentalmente topológicos, ya que el espectro primo de un anillo es un espacio topológico que satisface ciertos invariantes en el caso de que el anillo sea cero–dimensional.

2. Antecedentes

Para el desarrollo de este trabajo, en particular, del capítulo uno, han sido necesarios los conocimientos adquiridos en teoría de anillos en la asignatura de Álgebra I y en las otras que la suceden. Los anillos y en particular, los anillos conmutativos, son estructuras consideradas como básicas en Álgebra. El concepto de módulo, sin embargo no ha sido visto con tanta profundidad en ninguna de las asignaturas obligatorias, pero sí en la de Álgebras, Grupos y Representaciones y que he utilizado para consultar y documentarme.

Además, como se explica a lo largo del trabajo, este tipo de estructuras tienen relación con la Geometría Algebraica y por ello, también encontramos antecedentes en la geometría como el concepto de localización o dimensión de una variedad afín.

Finalmente, como se menciona en el último capítulo, hemos estudiado la topología de un espectro primo, de manera muy elemental, y los invariantes topológicos que se cumplen dentro de ésta. Todas estas herramientas se estudiaron en las asignaturas de Topología.

3. Resultados obtenidos y principales fuentes consultadas

(1) Se han presentado un gran número de resultados relativos a algunas estructuras dentro de los anillos, fundamentalmente, los ideales. Entre ellos destacaremos el nilradical y el radical de Jacobson, ya que ambos van a caracterizar a los anillos de dimensión cero.
(2) Sobre el concepto de dimensión, hemos recordado varios resultados que nos ayudan a determinar la dimensión de un anillo. Se continúa con la teoría de anillos artinianos, comenzando con una gran cantidad de resultados y caracterizaciones que forman parte de los preliminares para el teorema que relaciona los anillos noetherianos con los anillos artinianos, así como dos grandes resultados sobre la estructura de este tipo de anillos, uno para en el caso general y otro, para el caso en el que el anillo artiniano sea local.
(3) El capítulo tres del trabajo se centra en la teoría de los anillos regulares von Neumann y sigue la misma línea que el capítulo dos, la presentación de proposiciones y teoremas que caracterizan la estructura de los ideales y anillos regulares von Neumann.
(4) Hemos caracterizado la topología de Zariski, es decir, la topología definida en el espectro primo del anillo, para los anillos cero–dimensionales, y corolarios originarios de las consecuencias de todos los resultados anteriores. Hemos estudiado qué propiedades ha de cumplir un producto finito o infinito de anillos cero–dimensionales para que el anillo resultante sea también cero–dimensional. Lo hemos ejemplificado con el producto infinito numerable de cuerpos, lo que ha motivado la introducción de los conceptos de filtro y ultrafiltro.

Las principales fuentes consultadas son la siguientes:

[AM69] Sobre todo para los conceptos preliminares,

[Goo79] para extraer la máxima información acerca de los anillos regular von Neumann,

[And95] documento en el que incluye gran cantidad de resultados sobre los anillos cero–dimensionales.

Estos tres libros han sido los principales junto con todas las notas y demostraciones que me ha proporcionado mi director de TFG, el profesor Pascual Jara [Mar].

4. Resumen

El objetivo principal de este trabajo ha sido la recopilación y ejemplificación la teoría de anillos cero–dimensionales, tan presentes a lo largo de la carrera. Para ello, comenzamos recordando e indagando en los conceptos básicos de estas estructuras algebraicas, revisamos las clases de ideales presentes y sus propiedades correspondientes, seguidos por la teoría de módulos. Recordamos la clase de anillos y módulos noetherianos junto con sus resultados más importantes. Además, profundizamos en aplicaciones específicas como el producto tensor, que será necesario para introducir el importante concepto de *módulo plano*, presente en la caracterización de los anillos regulares von Neumann. La localización juega un papel importante en este trabajo ya que es el proceso necesario para obtener un anillo de fracciones; es el caso del cuerpo de los racionales que se construye a partir del anillos de los enteros y, como veremos al final del proyecto, todo anillo de fracciones de un anillo regular von Neumann es un anillo cero–dimensional. El proceso de localización también se puede aplicar a los módulos obteniéndose, por ejemplo, que la localización de un anillo es un módulo plano. Asimismo, en Geometría Algebraica, la localización permite estudiar un entorno en una variedad algebraica en lugar de la totalidad de la misma.

Introducimos formalmente la dimensión de Krull de un anillo A, denotada como $\dim A$ y definida como el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos. Consecuentemente, los anillos de dimensión cero son aquellos que verifican que toda cadena suya de ideales primos se reduce a un único elemento, y por tanto, los ideales primos del anillo son ideales maximales. El ejemplo más común de este tipo de anillos son los cuerpos, como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_p$, con p un entero primo, ya que solo posee ideales impropios, el trivial y el total. Otros anillos con esta propiedad son los cocientes propios del anillo de los enteros.

Una vez comentada esta teoría procedemos a la introducción de uno de los ejemplos más importantes de anillos de dimensión cero: los anillos artinianos. Se realiza un estudio de las características principales de sus ideales y como consecuencia se obtiene el teorema que nos dice que todo anillo artiniano es un anillo noetheriano de dimensión cero. También, estos resultados son fundamentales para estudiar la estructura de un anillo artiniano, tanto un anillo semilocal como local, y ver que todo anillo artiniano es igual al producto finito de anillos locales artinianos.

A continuación estudiamos en profundidad los anillos regulares von Neumann, otra clase de anillos cero–dimensionales, quizás un poco más desconocida. Estos anillos son cero–dimensionales y reducidos, es decir, el nilradical es nulo, y todo ideal del anillo es un ideal radical e idempotente. Dentro de este capítulo demostramos que este tipo de anillos se pueden relacionar con los artinianos y por consiguiente, también con los noetherianos, únicamente en el caso de que el número de ideales primos sea finito. Además, se tiene que los anillos regulares Von Neumann son absolutamente planos, esto quiere decir que todo módulo sobre el anillo es un módulo plano.

Y para finalizar este trabajo, caracterizamos los anillos de dimensión cero a través de la topología de Zariski, la definida en el espectro (el conjunto de todos los ideales primos y denotado como $\mathrm{Spec}(A)$) del anillo A cuyo sistema de abiertos es: $\{D(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subseteq A\}$, donde $D(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}\}$. Se demostrará que, con esta topología $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio Hausdorff o T_2 en el caso de que el anillo sea cero–dimensional. Sabemos que el producto tanto finito como infinito de cuerpos resulta un anillo cero–dimensional, pero esto no siempre ocurre en el caso de que los anillos sean cero–dimensionales. El resultado se verifica si el nilradical y el radical de Jacobson coinciden.

Concluimos haciendo un estudio exhaustivo de la estructura del anillo $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ como ejemplo, así como otros anillos derivados, y se realiza una pequeña introducción de la teoría de filtros y ultrafiltros correspondiente para el estudio de este anillo.

1 Anillos y módulos

1.1. Anillos, sus elementos y propiedades generales

Para comenzar este estudio y recopilación de resultados, introducimos una serie de definiciones y caracterizaciones sobre los anillos conmutativos que serán de gran utilidad y constituirán la base de teoremas más complejos y de más información acerca de los anillos cero–dimensionales, sus propiedades y ejemplos.

Primeramente, recordamos la definición de anillo conmutativo:

Un **anillo** A es un grupo abeliano sobre el que existe una aplicación binaria, llamada **multiplicación**, que verifica las siguientes propiedades:

(1) **asociativa**, dados elementos $a, b, c \in A$ se cumple que $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(2) **distributiva** de la multiplicación respecto a la suma, dados elementos $a, b, c \in A$, se cumple: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

(3) existencia de un **elemento identidad**, denotado por 1, de manera que $1 \times a = a \times 1 = a$ para todo $a \in A$

Si además el anillo verifica la propiedad **conmutativa**:

(4) $a \times b = b \times a$,

decimos que se trata de un **anillo conmutativo**.

Dado que todo este estudio se va a realizar sobre anillos conmutativos, supondremos de ahora en adelante esta clase sin especificar. Además, salvo que se mencione expresamente lo contrario, partiremos de que $0 \neq 1$ y por tanto, $A \neq 0$.

Recordamos la definición de ideal y sus caracterizaciones:

Un **ideal** $\mathfrak{a}$ en un anillo A es un subconjunto no vacío del anillo que cumple lo siguiente:

(1) Para todos $a, b \in \mathfrak{a}$ se tiene que $a + b \in \mathfrak{a}$

(2) Si $a \in \mathfrak{a}$ y $r \in A$ entonces $ra \in \mathfrak{a}$

Ejemplo 1.1. Tomamos el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros como ejemplo. En él todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Z}$ es de la forma $n\mathbb{Z} = (n)$ donde $n = \min\{m > 0 \mid m \in \mathfrak{a}\}$.

Un ideal $\mathfrak{a}$ en un anillo A se dice **propio** si se verifica que $\mathfrak{a} \neq A$.

Para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ de un anillo A, en el grupo cociente $A/\mathfrak{a}$ podemos definir una multiplicación a través de los representantes de las clases. Se obtiene un anillo al que llamamos **anillo cociente** de A por $\mathfrak{a}$.

Introducimos ahora alguno de los elementos especiales de un anillo A.

Los **divisores de cero** son los elementos a del anillo A para los cuales existe un elemento $b \in A$ que verifica que su producto es cero, es decir, $ab = 0$. Denotamos $\mathrm{Div}(A)$ al conjunto de los elementos divisores de cero. Aquellos elementos que no forman parte de la clase de divisores de cero se denominan **elementos regulares**. En el caso de que el anillo A solo tenga un divisor cero y ese elemento sea el cero, se habla entonces de un **dominio de integridad**.

Sea A un anillo con divisores de cero. Para todo elemento del anillo $a \in A$, definimos el conjunto **anulador** de a, y lo denotado por $\mathrm{Ann}(a)$, como el conjunto formado por todos los elementos del anillo que anulan a a, esto es:

$$\mathrm{Ann}(a) = \{x \in A \mid \ xa = 0\}.$$

Tenemos que $\mathrm{Ann}(a)$ es un ideal del anillo A.

Decimos que un elemento del anillo $a \in A$ es **nilpotente** si se verifica que para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a^n = 0$. Los elementos nilpotentes son divisores ceros, pero el recíproco no es cierto. El conjunto de todos los elementos nilpotentes de un anillo se llama el **nilradical** del anillo, y se denota como $\mathrm{Nil}(A)$.

Dado un elemento $a \in A$, un **elemento inverso** de a es un elemento $b \in A$ que cumple que $a \times b = 1$ y se denota por a^{-1}. Los elementos del anillo que tienen inverso se dice que son **invertibles** o **unidades**. El conjunto de todos los elementos invertibles del anillo A constituye un grupo abeliano multiplicativo.

Los **cuerpos** son anillos (conmutativos) en los que todo elemento no nulo es invertible. Por consiguiente, todo cuerpo es un dominio de integridad (el recíproco no es siempre cierto; es el caso de $\mathbb{Z}$, que es un dominio de integridad, pero solo tiene como unidades 1 y -1).

Proposición 1.1. *Sea A un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es un cuerpo.

(b) Los únicos ideales de A son 0 y A.

(c) Todo homomorfismo de A en un anillo B es inyectivo.

Dado un subconjunto $\Re$ en A, existe un menor ideal que lo contiene y se representa por $\Re A$ o $(\Re)$. Este ideal es la intersección de todos los ideales que contienen a $\Re$. El ideal recibe el nombre de **ideal generado** por $\Re$, y $\Re$ se llama un **sistema de generadores** de $(\Re)$. En el caso de que este conjunto esté formado por un único elemento x decimos que es el **ideal principal** generado x, y lo denotamos por (x).

Un elemento $x \in A$ es invertible si, y sólo si, $(x) = A = (1)$.

1.2. Ideales y radicales

En esta sección vamos a introducir los ideales característicos de los anillos:

1.2.1. Ideales primos y el nilradical

Dado un ideal $\mathfrak{p}$ en un anillo A se dice que es **primo** si $\mathfrak{p} \neq A$ y dados dos elementos $a, b \in A$ siempre que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p} \text{ es primo si, y sólo si, } A/\mathfrak{p} \text{ es un dominio de integridad.}$$

Ejemplo 1.2. Tomando de nuevo $\mathbb{Z}$ como en el ejemplo anterior, sus ideales primos son el ideal cero y los ideales de la forma $p\mathbb{Z}$, donde p es un primo entero positivo.

Llamamos el **espectro** primo de A al conjunto formado por todos los ideales primos del anillo A, y lo denotado como $\mathrm{Spec}(A)$.

Dentro de este conjunto de ideales primos, distinguimos los **ideales primos minimales**. Sean dos ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{p} \subseteq A$. Decimos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal sobre el ideal $\mathfrak{a}$ si es minimal en el conjunto de los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$, esto es, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ y, si existe un ideal primo $\mathfrak{q} \subseteq A$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, forzosamente se tiene que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Los ideales minimales sobre el ideal 0 son los **ideales primo minimales** del el anillo A.

Cabe destacar que en un dominio de integridad, el único ideal primo minimal es el ideal cero.

Proposición 1.2. *Todo ideal primo minimal de A está formado por divisores de cero.*

Demostración. Definimos $\Sigma = \{st \mid \; s \in A \setminus \mathfrak{p}, t \in \mathrm{Reg}(A)\}$; es claro que Σ es un conjunto multiplicativo y también es claro que $0 \notin \Sigma$, ya que si $0 = st$, con $t \in A$ regular, entonces $s = 0$, y por tanto $s \notin A \setminus \mathfrak{p}$. Como $0 \notin \Sigma$, existe un ideal $\mathfrak{q}$ maximal entre los que verifican $\mathfrak{q} \cap \Sigma = \varnothing$. Por la maximalidad, el ideal $\mathfrak{q}$ es un ideal primo, y verifica:

$$\mathfrak{q} \cap \Sigma = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{q} \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing \Rightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{q} \cap \mathrm{Reg}(A) = \varnothing \Rightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathrm{Div}(A) \end{cases}$$

Por la minimalidad de $\mathfrak{p}$ se tiene $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \subseteq \mathrm{Div}(A)$, y tenemos el resultado. □

Este resultado es de gran interés, ya que estará presente en posteriores demostraciones relacionando los divisores de cero con la dimensión de un anillo.

Proposición 1.3. *Si un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ verifica que para cada $x \in \mathfrak{p}$ existe $y \notin \mathfrak{p}$ tal que $xy = 0$, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal.*

Demostración. Si $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ es un ideal primo, para todo $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$ existe $y \notin \mathfrak{p}$ tal que $xy = 0 \in \mathfrak{q}$, lo que es una contradicción. □

Proposición 1.4. *El nilradical en un anillo A es un ideal y se verifica que* $\mathrm{Nil}(A/\mathrm{Nil}(A)) = 0$.

Demostración. Si $a, b \in \mathrm{Nil}(A)$, por definición se tiene la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $a^n = b^n = 0$; se verifica entonces, por el binomio de Newton, que $(a+b)^{2n} = 0$, ya tenemos que el nilradical es cerrado para la suma. Para cada elemento $c \in A$ se tiene $(ca)^n = 0$ y $ca \in \mathrm{Nil}(A)$.

Sea $x \in A$ y $\overline{x} = x + \mathrm{Nil}(A) \in A/\mathrm{Nil}(A)$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x}^n = x^n + \mathrm{Nil}(A)$; por consiguiente, $\overline{x}^n = 0$, entonces $x^n \in \mathrm{Nil}(A)$ y se tiene $(x^n)^k = 0$ para algún $k > 0$; concluimos entonces que $x \in \mathrm{Nil}(A)$ por lo tanto $\overline{x} = 0$. □

Los anillos A que verifiquen que $\mathrm{Nil}(A) = 0$ se llaman **anillos reducidos** o **semiprimos**.

A continuación introducimos una caracterización del nilradical de especial interés:

Proposición 1.5. *El nilradical de A es la intersección de todos los ideales primos del anillo.*

Demostración. Denotamos por $\mathfrak{R}$ la intersección de todos los ideales primos del anillo. Sea $r \in A$ y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Si r es nilpotente, entonces $r^n = 0 \in \mathfrak{p}$ para algún $n > 0$, por tanto $r \in \mathfrak{p}$, ya que $\mathfrak{p}$ es primo, y por tanto $r \in \mathfrak{R}$.

Supongamos ahora que r no es nilpotente. Definimos:

$$\Gamma = \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \; n \geq 1, r^n \notin \mathfrak{a}\}.$$

Entonces Γ no es vacío ya que $0 \in \Gamma$. El par $(\Gamma, \subseteq)$ es un conjunto ordenado, y además es inductivo, tenemos todas las condiciones para poder aplicar el lema de Zorn a nuestro conjunto Γ, concluimos que este tiene un elemento maximal, $\mathfrak{p}$. Vamos a que ver $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Tomamos $a, b \in A$ de manera que $ab \in \mathfrak{p}$. En el caso de que $a, b \notin \mathfrak{p}$ los ideales $\mathfrak{p} + (a)$ y $\mathfrak{p} + (b)$ contienen propiamente a $\mathfrak{p}$, y por tanto no pertenecen a Γ, lo cual implica que existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$r^m \in \mathfrak{p} + (a), \quad r^n \in \mathfrak{p} + (b).$$

Si tomamos $r^m r^n = r^{m+n} \in \mathfrak{p} + (ab) \subseteq \mathfrak{p}$ esto nos llevaría a una contradicción. De esta manera, se tiene que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. □

1.2.2. Ideales maximales y el radical de Jacobson

Un ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ es un **ideal maximal** si $\mathfrak{m} \neq A$ y para cada ideal propio $\mathfrak{a}$ de A tal que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \subsetneq A$ se tiene que $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$. Esto es equivalente a decir que:

$\mathfrak{m}$ es un ideal maximal si, y sólo si, $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

Se tiene entonces que todo ideal maximal es primo.

Veamos ahora algunos resultados interesantes sobre los ideales maximales:

Teorema 1.6 (Teorema de Krull)**.** *Todo anillo $A \neq 0$ tiene como mínimo un ideal maximal.*

Demostración. Definimos el conjunto $\Gamma = \{\mathfrak{a} \mid \; \mathfrak{a}$ ideal propio de $A\}$. Tenemos que Γ es distinto del vacío ya que el 0 es un elemento de Γ y es un conjunto ordenado por la inclusión. Aplicando el lema de Zorn a este conjunto y considerando una cadena en Γ, ésta está acotada superiormente por la unión de todos los ideales, que necesariamente es un ideal propio. Concluimos entonces que Γ tiene elementos maximales; cada elemento maximal de Γ es un ideal maximal de A. □

Corolario 1.7. *Todo elemento del anillo A que no es invertible pertenece a un ideal maximal.*

En relación con el número de ideales maximales hacemos la siguiente distinción:

Un anillo se dice **local** si tiene un solo ideal maximal; por el contrario, si el número de ideales es superior a uno y es finito, estamos ante un **anillo semilocal**.

El cuerpo $A/\mathfrak{m}$, donde A es un anillo local y $\mathfrak{m}$ su correspondiente ideal maximal, se denomina **cuerpo residual** de A.

De manera paralela a los ideales primos, definimos el **radical de Jacobson** como la intersección de todos los ideales maximales del anillo A, y lo representamos por $\mathrm{Jac}(A)$.

Proposición 1.8. *Un elemento a en A pertenece a* $\mathrm{Jac}(A)$ *si, y sólo si,* $1 - xa$ *es una unidad del anillo para todo* $x \in A$.

Demostración. ($\Rightarrow$). Supongamos que $a \in \mathrm{Jac}(A)$ y $1 - xa$ no es una unidad. Como consecuencia del teorema de Krull, se tiene que este elemento ha de pertenecer a un ideal maximal $\mathfrak{m}$, como $a \in \mathrm{Jac}(A) \subseteq \mathfrak{m}$, entonces $xa \in \mathfrak{m}$ y $1 \in \mathfrak{m}$, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que $1 - xa$ es invertible.

($\Leftarrow$). Si $a \notin \mathrm{Jac}(A)$ entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $a \notin \mathfrak{m}$. La suma de a y $\mathfrak{m}$ da lugar al anillo total; es decir, $m + xa = 1$ para algún $m \in \mathfrak{m}$ y algún $x \in A$. Por tanto, $1 - xa \in \mathfrak{m}$ y se tendría que no es unidad, lo que contradice la hipótesis. □

Gracias a esta caracterización se puede observar que dada una familia de anillos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, se verifica:

$$\mathrm{Jac}\left(\prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Jac}\left(A_\alpha\right).$$

Finalizamos esta sección introduciendo el radical de un ideal y la definición de ideal primario.

Sea A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal, definimos el **radical** de $\mathfrak{a}$ como el conjunto dado por:

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{a \in A \mid \ a^m \in \mathfrak{a} \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

Es fácil deducir que todo ideal está contenido en su radical y además que se tiene $\mathrm{rad}(0) = \mathrm{Nil}(A)$. También se verifica que $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a} = \mathrm{Nil}(A/\mathfrak{a})$.

Un ideal propio $\mathfrak{a}$ en A se dice **primario** si dados dos elementos $a, b \in A$ se cumple que:

$$ab \in \mathfrak{a} \text{ y } a \notin \mathfrak{a}, \text{ entonces existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b^n \in \mathfrak{a}.$$

Podemos deducir que si $\mathfrak{a}$ es un ideal primario, entonces su radical es un ideal primo, por lo que a los ideales primarios $\mathfrak{q}$ con radical $\mathfrak{p} = \mathrm{rad}(\mathfrak{q})$ los llamaremos **$\mathfrak{p}$–primarios**.

Lema 1.1. *Para cada ideal maximal* $\mathfrak{m} \subseteq A$ *se tiene que* $\mathfrak{m}^t \subseteq A$ *es primario para cada* $0 \neq t \in \mathbb{N}$.

1.3. Módulos

Con la introducción del Álgebra Moderna cobró más importancia la teoría de módulos, ya que este tipo de estructuras permite una mayor ampliación del espacio obteniendo así más claridad y simplicidad en la teoría. Además, los módulos permiten generalizar el concepto de espacio vectorial ya que no se requiere que el conjunto de escalares sea un cuerpo. Gracias a la introducción de los módulos se dio pie a una realización y formalización de la teoría general de representaciones.

Sea A un anillo conmutativo. Un A–**módulo** es un par (M, σ) donde M es un grupo abeliano y σ es un homomorfismo de anillos $\sigma : A \longrightarrow \mathrm{End}(M)$. Representamos por am al elemento $\sigma(a)m$, para cada $a \in A$ y $m \in M$.

Para cualesquiera $a, b \in A$ y $m, n \in M$ se verifican las siguientes propiedades:

(I) $a(m+n) = am + an$,

(II) $(a+b)m = am + bm$,

(III) $a(bm) = (ab)m$,

(IV) $1m = m$.

Como comentábamos en la introducción, los módulos son una generalización de algunos conceptos familiares:

Ejemplo 1.3. (1) Todo ideal de un anillo A es un A–modulo. Trivialmente, el propio anillo A es un A–módulo.

(2) Si K es un cuerpo, entonces un K–módulo es un K–espacio vectorial.

(3) Cuando $A = \mathbb{Z}$, se verifica que los $\mathbb{Z}$–módulos son los grupos abelianos, en este caso se tiene que $nx = \sum_{i=1}^{n} x$, si $n \in \mathbb{Z}^+$.

(4) Si $A = K[X]$, donde K es un cuerpo, es el anillo son los polinomios con coeficientes en K, entonces un A-módulo es un par formado por un K–espacio vectorial y una transformación lineal.

En la línea anterior, sea A un anillo y M un A-módulo. Un **submódulo** N de M es un subgrupo de M que es cerrado respecto a la multiplicación por elementos de A, es decir, para cada $a \in A$ y cada $n \in N$ se tiene que $an \in N$.

Lema 1.2. *Sea A un anillo, M un A-módulo y N un subconjunto no vacío de M. Equivalen:*

(a) N es un submódulo de M.

(b) Para todos $a, b \in A$ y $n, m \in N$ se tiene que $am + bn \in N$.

Vamos a introducir la importante propiedad de exactitud dentro de una sucesión de módulos, necesaria para futuras caracterizaciones y resultados dentro de los módulos, especialmente con el producto tensor.

Dada una sucesión de A-módulos y A-homomorfismos:

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$$

se dice **exacta** si se verifica $\mathrm{Im}(\alpha_i) = \mathrm{Ker}(\alpha_{i+1})$ en cada M_i. Particularmente:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ es exacta si, y sólo si, } f \text{ es inyectiva.}$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ es exacta si, y sólo si, } g \text{ es sobreyectiva.}$$

Lema 1.3 (Lema de Nakayama)**.** *[AM69] Sea M un A-modulo finitamente generado y $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo A contenido en el radical de Jacobson de A. Si $\mathfrak{a}M = M$ entonces $M = 0$.*

Demostración. En el caso $M \neq 0$, consideramos un conjunto minimal de generadores

$\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ de M; cada m_i se puede expresar de la forma:

$$m_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} m_j, \text{ con } a_{ij} \in \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(A).$$

En particular $m_t = \sum_{j=1}^{t} a_{tj} m_j$, y se tiene entonces que

$$(1 - a_{tt}) m_t) = \sum_{j=1}^{t-1} a_{tj} mj;$$

como $a_{ij} \in \mathrm{Jac}(A)$, por (1.8), se tiene que $1 - a_{tt}$ es una unidad, lo cual implicaría que el conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_{t-1}\}$ es un sistema de generadores, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Un A-módulo M es **simple** si es no nulo y sus únicos submódulos son el 0 y M.

Un módulo no nulo se dice **indescomponible** si no puede ser descompuesto en la suma directa de dos submódulos no nulos. Todo módulo simple es indescomponible. Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, el grupo aditivo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano indescomponible pero no es simple.

Definimos el **asociado** de un A-módulo M como el conjunto de los ideales primos que son anulador de un elemento no nulo de M:

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \text{ existe } 0 \neq m \in M,\ \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)\}.$$

1.3.1. Producto tensorial de módulos

Aparte de su gran importancia dentro del Álgebra Abstracta, la construcción del producto tensor nos concierne para la definición de módulos planos, que como veremos posteriormente, tienen una fuerte relación con una clase de anillos cero–dimensionales.

Sea A un anillo y M, N, P tres A-módulos. Una aplicación de la forma $f : M \times N \to P$ se dice **A–bilineal** si se verifica que, para $x \in M$ la aplicación dada por $y \mapsto f(x, y)$, con $y \in N$, es A–lineal; y, fijando un $y \in N$, la aplicación $x \mapsto f(x, y)$ también es A–lineal, lo que significa, en particular, que $f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay)$.

A partir de estas nociones, construimos el **producto tensor** de M en N como un A-módulo T, de manera que exista una biyección entre las aplicaciones A–bilineales $M \times N \to P$ y las A–lineales $T \to P$, que se verifica para cada A-módulo P. Formalizamos este concepto:

Proposición 1.9. *Dados dos A-módulos M y N existe un A-módulo T y una aplicación A–bilineal $t : M \times N \to T$ tal que para cada A-módulo X, cada aplicación A–bilineal $f : M \times N \to X$ existe un único homomorfismo de A–módulos $f' : T \to X$ tal que $f = f' \circ t$*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "\exists_1"', "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Hemos dicho antes que al A-módulo T lo denominamos el **producto tensor** de M por N y se denota por $M \otimes_A N$, podemos omitir el subíndice A en el caso de que no exista ambigüedad sobre el anillo. Entonces T está generado por los productos $x \otimes y$ para cada $x \in M$ e $y \in N$. Si estos dos módulos son de generación finita, resulta que T también lo es.

Proposición 1.10. *Sea*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Si tomamos N un A-módulo cualquiera, entonces se tiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes N} M \otimes N \to 0$$

El producto tensor no siempre preserva monomorfismos. Para ello, vamos a estudiar el siguiente ejemplo:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z},$$

donde $f = 3x$ y está definida para todo $x \in \mathbb{Z}$. Supongamos que queremos tensorizarlo con $N = \mathbb{Z}_3$, la sucesión resultante es:

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{f \otimes N} \mathbb{Z} \otimes N,$$

pero esta sucesión no es exacta, ya que si tomamos $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes N$ obtenemos el resultado:

$$(f \otimes N)(x \otimes y) = (3x \otimes y) = (x \otimes 3y) = x \otimes 0 = 0,$$

y por tanto, $\mathrm{Ker}(f \otimes N) = \mathbb{Z} \otimes N \cong \mathbb{Z}$.

Cuando el funtor $T_N : M \to M \otimes_A N$ es exacto, decimos que N es un A–módulo **plano**.

1.4. Anillos Noetherianos

Los anillos noetherianos son una clase muy importante de anillos dentro del Álgebra Conmutativa y también en la no Conmutativa, ya que permite trabajar con herramientas de simplificación de la estructura ideal de un anillo. Ejemplos bastante conocidos que pertenecen al grupo de los anillos noetherianos son los números enteros o el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo. Además, hay numerosos teoremas de gran importancia como el de Lasker–Noether, el teorema de la intersección de Krull y el teorema de la Base de Hilbert de aplicación a los anillos noetherianos.

Un anillo A es **noetheriano** si satisface las tres condiciones equivalentes:

(a) Todo ideal en A está finitamente generado.

(b) Satisface la **condición de cadena ascendente**, esto es, toda cadena de ideales en A se estabiliza:

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{a}_m \subseteq \ldots \text{ existe un } n \text{ tal que } \mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_n \text{ para todo } m \geq n.$$

(c) Todo conjunto no vacío de ideales en A tiene un elemento maximal; es la **condición maximal**.

Proposición 1.11. *Todo anillo cociente de un anillo noetheriano es noetheriano.*

Demostración. Sea A un anillo noetheriano, consideramos el anillo cociente $A/\mathfrak{a}$. Todos los ideales del anillo cociente son de la forma $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ y por ser A noetheriano, los ideales $\mathfrak{b}$ son finitamente generados, y los generadores de $\mathfrak{b}$ son generadores de $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$. □

Los anillos noetherianos tienen unos resultados muy interesantes relacionados con las características de sus ideales.

Comenzamos introduciendo unos resultados generales, los cuales no son específicos de este tipo de anillos:

Lema 1.4. *Sea A un anillo. Consideramos una cadena $\{\mathfrak{p} \mid i \in I\}$ de ideales primos, se verifica que $\cup_i \mathfrak{p}_i$ y $\cap_i \mathfrak{p}_i$ son ideales primos.*

Demostración. (1). Tomamos $a, b \in A$ de manera que $ab \in \cup_i \mathfrak{p}_i$ entonces existe un $j \in I$ tal que $ab \in \mathfrak{p}_j$, por consiguiente como es un ideal primo, se tiene que $a \in \mathfrak{p}_j$ ó $b \in \mathfrak{p}_j$.

(2). Volvemos a tomar dos elementos del anillo $a, b \in A$ con $ab \in \cap_i \mathfrak{p}_i$, en el caso de que $a \notin \cap_i \mathfrak{p}_i$, entonces ha de existir $j \in I$ tal que $a \notin \mathfrak{p}_j$ lo cual supondría que para todo $k \geq j$ $a \notin \mathfrak{p}_k$ y como $ab \in \mathfrak{p}_k$ (el cual es primo), forzosamente se tiene que $b \in \mathfrak{p}_k$. Así que $b \in \cap_i \mathfrak{p}_i$. Concluimos entonces, que la intersección es un ideal primo. □

Lema 1.5. *Para todo anillo A y todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, existe de un ideal primo $\mathfrak{p}$ que es minimal sobre $\mathfrak{a}$*

Damos pie a la introducción de resultados específicos de los anillos noetherianos:

Proposición 1.12. *Si A es un anillo noetheriano, el número de ideales primos minimales es finito.*

Demostración. Consideramos el conjunto

$$\Gamma = \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \ \mathfrak{a} \text{ no tien un número finito de ideales primos minimales}\}.$$

Si Γ es no vacío, existe $\mathfrak{a} \in \Gamma$ maximal en Γ. Entonces el anillo $A/\mathfrak{a}$ no tiene un número finito de ideales primos minimales, per cada ideal no nulo de $A/\mathfrak{a}$ sí tiene sólo un número finito de ideales primos minimales. Si suponemos que A verifica esta condición, entonces A no es un dominio de integridad.

Existen ideales no nulos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de A, se verifica $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0 \subseteq \mathfrak{p}$, y se tiene $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ó $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. En consecuencia ó $\mathfrak{a}$ ó $\mathfrak{b}$ tiene que tener un número infinito de ideales primos minimales, lo que es una contradicción. Tenemos pues que, necesariamente, Γes vacío, y cada ideal de A tiene sólo un número finito de ideales primos minimales. □

Proposición 1.13. *En un anillo noetheriano A, cada ideal contiene una potencia de su radical.*

Demostración. Consideramos un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, y el correspondiente radical $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. Por ser A noetheriano, tenemos que $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ es finitamente generado, sean $x_1, \ldots, x_k$ los generadores. Entonces se tiene que $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Definimos el elemento m dado por $m = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$. Luego $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})^m$ está generado por $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ de manera que $m = \sum_{i=1}^{k} r_i$, por la forma en la que hemos definido m se tiene que $r_i \geq n_i$ en al menos un r_i y n_i. Así que cada uno de estos elementos está dentro del ideal $\mathfrak{a}$ y se concluye que $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}$. □

Corolario 1.14. *En un anillo noetheriano el nilradical es nilpotente*

1.4.1. Módulos en anillos noetherianos

Un A-módulo M es **noetheriano** si todo submódulo tienen un sistema de generadores finito.

Proposición 1.15. *Sea A un anillo. Las siguientes condiciones en el A-módulo M son equivalentes:*

(a) M es noetheriano

(b) Toda cadena ascendente de submódulos $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ es estacionaria

(c) Todo conjunto de submódulos de M tiene un elemento maximal

Proposición 1.16. *Sea A un anillo y consideramos la siguiente sucesión de A-módulos:*

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

(1) Si N, P son submódulos de M tales que $\alpha(M') \cap N = \alpha(M') \cap P$ y $\beta(N) = \beta(P)$, entonces $N = P$

(2) Si M' y M'' son finitamente generados, entonces M también lo es

(3) M es noetheriano si, y sólo si, los módulos M' y M'' son noetherianos.

Demostración. (1). Sean $n \in N$ y $p \in P$ tales que $\beta(n) = \beta(p)$, entonces se tiene que $\beta(p - n) = 0$. Además $p - n$ pertenece a $\alpha(M')$, luego $p - n \in \alpha(M') \cap P$ y por hipótesis $p - n \in \alpha(M') \cap N \subset N$. Entonces $p = (p - n) + n \in N$.

(2). Sea S' un conjunto de generadores finito de M' y S'' un subconjunto finito de M de manera que $\beta(S'')$ es conjunto de generadores de M''. Consideramos el submódulo N de M generado por $\alpha(M') \cup S''$, tal que $\alpha(M') \cap N = \alpha(M')$ y $\beta(N) = M''$, entonces por el apartado anterior concluimos que $N = M$.

(3). Comenzamos demostrando la implicación suficiente. Supongamos M módulo noetheriano. Toda cadena ascendente tanto de M' como de M'' a través de α y β da lugar a una cadena en M, y por ser este noetheriano, se estabiliza, luego las cadenas en M' y M'' también se estabilizan y por tanto, son módulos noetherianos.

Para la condición necesaria, consideramos una cadena de submódulos de M y como M'' es noetheriano dicha cadena, a través de la imagen de β, satisface la condición de cadena ascendente en M''. De igual modo, M' es noetheriano y la intersección de la cadena con $\alpha(M')$ también se vuelve constante, de nuevo, por el primer apartado, concluimos que la cadena cumple la condición de cadena ascendente. □

Como consecuencia, la suma directa, $M = M_1 \oplus M_2$, de A-módulos es noetheriana si, y sólo si, M_1 y M_2 son noetherianos.

Lema 1.6. *Sea A un anillo A, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ideales, con $\mathfrak{a}$ finitamente generado, tales que los anillos cocientes $A/\mathfrak{a}$ y $A/\mathfrak{b}$ son noetherianos, entonces $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ y $A/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ son A–módulos noetherianos.*

Demostración. Como $A/\mathfrak{a}$ es noetheriano, entonces $A/\mathfrak{a}$ es un A-módulo noetheriano y lo mismo ocurre con el anillo $A/\mathfrak{b}$. Para seguir, es sabido que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a} \otimes (A/\mathfrak{b})$ y como $A/\mathfrak{b}$ es un A-módulo noetheriano y $\mathfrak{a}$ es un A-módulo un finitamente generado, se tiene que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ también es un A-módulo noetheriano. Finalmente, tenemos la sucesión

$$0 \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \xrightarrow{\alpha} A/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \xrightarrow{\beta} A/\mathfrak{a} \to 0$$

Y por hipótesis, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ y $A/\mathfrak{a}$ son módulos noetheriano, obtenemos que $A/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ también lo es. $\square$

Proposición 1.17. *Todo módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es noetheriano*

1.5. Localización de un anillo

En el Álgebra Conmutativa cobra especial interés la técnica de la llamada localización, el proceso asociado a la formación del anillo de fracciones. La localización es fundamental sobre todo en el campo de la geometría algebraica, debido a su fuerte vinculación con la *Teoría de haces*. Esto permite estudiar el anillo de funciones de una variedad algebraica en un entorno (local) de ésta.

Como hemos mencionado antes, la localización permite, por ejemplo, obtener **cuerpo de fracciones** a partir de un dominio de integridad A. Éste es el caso del cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, obtenido a partir del anillo de los enteros $\mathbb{Z}$.

Sea A un anillo, un subconjunto $\Sigma \subseteq A$ es un **subconjunto multiplicativamente cerrado** si verifica: $1 \in \Sigma$, $0 \notin \Sigma$ y Σ es cerrado respecto a la multiplicación, es decir, Σ es un semigrupo del semigrupo multiplicativo de A.

Consideramos el producto cartesiano $\Sigma \times A$, y definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(s, a) \equiv (r, b) \Leftrightarrow t(sb - ra) = 0 \text{ para algún } t \in \Sigma$$

denotado por $\Sigma^{-1}A$ al conjunto cociente. La clase de equivalencia de (s, a) la representamos por a/s o por $s^{-1}a$.

El conjunto $\Sigma^{-1}A$ tiene una estructura de anillo con las operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{suma :} & (a/s) + (b/r) = (ar + bs)/sr, \\ \text{producto :} & (a/s)(b/t) = (ab)/(br), \\ \text{elemento uno:} & 1/1. \end{array}$$

El anillo $\Sigma^{-1}A$ se llama el **anillo de fracciones** de A respecto de Σ.

Existe un homomorfismo de anillos $\rho : A \longrightarrow \Sigma^{-1}A$, dado por $\rho(a) = a/1$, que cumple las siguientes propiedades:

(1) Si $s \in \Sigma$, entonces $\rho(s)$ es una unidad en $\Sigma^{-1}A$.

(2) Para cada $a \in A$ se tiene: $\rho(a) = 0$ sí, y sólo si, existe $s \in \Sigma$ tal que $as = 0$.

(3) Cada elemento de $\Sigma^{-1}A$ es de la forma $\rho(s)^{-1}\rho(a)$ para algun $a \in A$ y algún $s \in \Sigma$

De manera recíproca, las tres condiciones anteriores determinan el anillo de fracciones de A salvo isomorfismo.

Los ejemplos más usuales de anillos de fracciones son:

(1) *Cuerpo de fracciones.* Sea D un dominio de integridad. Tomamos $\Sigma = D\backslash\{0\}$, entonces el anillo $\Sigma^{-1}D$ se corresponde con el cuerpo de fracciones de D. El ejemplo más conocido es el del anillo de los enteros como el dominio de integridad, que realizando el proceso de localización da lugar al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

(2) Generalizando el apartado anterior, podemos considerar el anillo A y como grupo multiplicativo $\Sigma = A\backslash\{r \in A \mid r \text{ es divisor de cero}\}$. Entonces $\Sigma^{-1}A$ es lo que se conoce como *el anillo total de fracciones de A*.

(3) *Anillo de polinomios de Laurent.* Sea $a \in A$ un elemento no nilpotente. Consideramos el grupo multiplicativo $\Sigma = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$; esto da lugar a $\Sigma^{-1}A = \{\frac{x}{a^n} \mid x \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si tomamos $A = K[X]$, siendo K un cuerpo y X una indeterminada, siguiendo la línea anterior:

$$\Sigma^{-1}A = \left\{\frac{f(X)}{a^n} \mid f \in K[X],\, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\sum_{i=-t}^{s} a_i X^i \mid a_i \in K\right\}.$$

Lo que se conoce como el *anillo de polinomios de Laurent*.

(4) *Localización en $\mathfrak{p}$.* Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A. Es fácil ver que $\Sigma = A\backslash\mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado, por la consecuencia lógica obtenida de la negación de la definición de ideal primo: si $a \notin \mathfrak{p}, b \notin \mathfrak{p}$ entonces $ab \notin \mathfrak{p}$. En este caso $\Sigma^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$ y se denomina como el *localizado de A en $\mathfrak{p}$*. El conjunto $\Sigma^{-1}\mathfrak{p}$ constituye un ideal $\mathfrak{m}$ en $A_{\mathfrak{p}}$, que podemos representar como $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. De esto se sigue que si un elemento $s^{-1}b \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, entonces $b \notin \mathfrak{p}$ y por lo tanto $b \in \Sigma$ y $s^{-1}b$ es una unidad de $A_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en $A_{\mathfrak{p}}$ de manera que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ entonces $\mathfrak{a}$ contiene una unidad y por tanto es todo $A_{\mathfrak{p}}$. Concluimos entonces que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es el único ideal maximal en $A_{\mathfrak{p}}$, es decir, que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local.

Como caso particular de este último punto estudiamos el localizado de un anillo de polinomios. Tomamos $A = K[X_1, \ldots, X_n]$, con K un cuerpo de característica algebraicamente cerrado, y $X_1, \ldots, X_n$, un conjunto de indeterminadas independientes, escogemos $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. El anillo de fracciones de funciones de racionales tales que el denominador no pertenece al ideal $\mathfrak{p}$ es $A_{\mathfrak{p}}$. Si tomamos la variedad afín V definida por el ideal $\mathfrak{p}$, esto es, todos los $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ de manera que para todo $f \in \mathfrak{p}$ se tiene que $f(x) = 0$. Por ejemplo tomamos $V = \{x\}$. El localizado de A en $\mathfrak{p}$ se corresponde con el anillo de las funciones racionales en K^n definidas en un entorno de x; o sea, *es el anillo local a lo largo de la variedad V* en el punto x. En la Geometría Algebraica se trabaja mucho con este tipo de anillos.

De manera equivalente, también podemos construir el módulo $\Sigma^{-1}M$ sobre un

A-modulo, M. El proceso es el mismo que con los anillos; definimos la relación de equivalencia en $\Sigma \times M$:

$$(s, m) \equiv (s', m') \text{ si, y sólo si, existe } t \in \Sigma \text{ tal que } t(sm' - s'm) = 0.$$

La clase de equivalencia para cada par (s, m) se indica por $s^{-1}m$ ó por m/s. El conjunto de todas las clases de equivalencia es $\Sigma^{-1}M$. Este conjunto es un $\Sigma^{-1}A$-módulo con las correspondientes definiciones de las operaciones suma y multiplicación. Entonces, si $\varphi : M \to N$ es un homomorfismo de A-módulos, se obtiene un homomorfismo de $\Sigma^{-1}A$-módulos $\Sigma^{-1}\varphi : \Sigma^{-1}M \to \Sigma^{-1}N$.

Proposición 1.18. *Si tenemos una sucesión $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$, exacta de A–módulos, entonces $\Sigma^{-1}M' \xrightarrow{\Sigma^{-1}\alpha} \Sigma^{-1}M \xrightarrow{\Sigma^{-1}\beta} \Sigma^{-1}M''$ es una sucesión exacta de $\Sigma^{-1}A$–módulos.*

Teniendo en cuenta este resultado, podemos estudiar las distintas operaciones de submódulos de un A-módulo M:

Corolario 1.19. *Sean N, P dos submódulos de un A-módulo M, entonces:*

(1) $\Sigma^{-1}(N + P) = \Sigma^{-1}N + \Sigma^{-1}P$,

(2) $\Sigma^{-1}(N \cap P) = \Sigma^{-1}N \cap \Sigma^{-1}P$,

(3) los $\Sigma^{-1}A$–módulos, $\Sigma^{-1}(M/N)$ y $(\Sigma^{-1}M)/(\Sigma^{-1}N)$, son isomorfos.

Demostración. El primer resultado, es trivial ya que se deduce de la propia definición.

Para (2), si dos pares $n/s = p/t$ con $n \in N$, $p \in P$ y $s, t \in \Sigma$ entonces existe $r \in \Sigma$ tal que $r(nt - sp) = 0$, llamando $w = rnt = rsp \in N \cap P$ y por tanto, $y/s = w/stu \in \Sigma^{-1}(N \cap P)$. Se deduce entonces que $\Sigma^{-1}N \cap \Sigma^{-1}P \subseteq \Sigma^{-1}(N \cap P)$. Y es trivial que $\Sigma^{-1}(N \cap P) \subseteq \Sigma^{-1}N \cap \Sigma^{-1}P$.

Finalmente, en el punto (3) aplicamos Σ^{-1} a la sucesión exacta de A–módulos $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ y por (1.18) tenemos que es una sucesión exacta. □

Proposición 1.20. *Sea M un A–módulo. Por las propiedades universales, del producto tensor y el módulo de fracciones, existe un único isomorfismo entre los $\Sigma^{-1}A$ módulo $\Sigma^{-1}M$ y $\Sigma^{-1}A \otimes_A M$, dado por:*

$$f((a/s) \otimes m) = (am)/s \text{ donde } a \in A,\ s \in \Sigma,\ m \in M.$$

Como consecuencia de este resultado y de (1.18) sea tiene que $\Sigma^{-1}A$ es un A-módulo plano.

Una vez introducida la localización de módulos, definimos el conjunto **soporte** de un módulo M como

$$\operatorname{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(M) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Al contrario que con el conjunto de ideales primos asociados, para cada sucesión exacta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$, se tiene que $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N)$.

2 Anillos de dimensión cero

2.1. Dimensión

El concepto de dimensión es ubicuo en muchos campos de las Matemáticas; en particular, en Geometría Algebraica, ya que la dimensión es uno de los principales invariantes de las variedades algebraicas. Una de las primeras definiciones de dimensión de anillos apareció a mediados del siglo XX; hoy la conocemos como la *dimensión de Krull*. Los dos conceptos de dimensión, en variedades algebraicas y en anillos, verifican que la dimensión de una variedad algebraica coincide con la dimensión de su anillo de coordenadas.

Sea A un anillo conmutativo. Una **cadena** de ideales primos es una sucesión (ascendente o descendente) estricta finita de ideales primos:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

Esta cadena se dice que tiene **longitud** n.

La **altura** de un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos con $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$, y se representa por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

Para un ideal cualquiera $\mathfrak{a}$ de A, definimos la **altura** de $\mathfrak{a}$ como el mínimo de las alturas de los ideales primos que son minimales sobre $\mathfrak{a}$, también se representa por $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$

La **dimensión** de un anillo A, denotada como $\dim A$ ó $\dim(A)$, y también se llama la **dimensión de Krull**, es el supremo de las longitudes de las cadenas de los ideales primos de A.

$$\dim(A) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) | \, \mathfrak{p} \subseteq A, \text{ primo } \}.$$

En el caso de que existan cadenas de ideales primos de longitud arbitraria, diremos que A es un anillo infinito–dimensional y escribimos $\dim A = \infty$.

En los anillos cero–dimensionales, dado que toda cadena suya de ideales se reduce a un solo elemento, se deduce que todo ideal primo es maximal.

Además, la dimensión se preserva mediante extensiones enteras, luego toda extensión entera de un anillo de dimensión cero es también de dimensión cero.

Observa que todo cuerpo K es un anillo de dimensión cero, ya que la única cadena de ideales primos es la cadena 0. En consecuencia, los cuerpos son los dominios de integridad de dimensión cero.

En Geometría Algebraica los anillos de dimensión cero están asociados a conjuntos finitos de puntos, lo que los hace interesantes. Además, tal y como se muestra en los trabajos de Seidenberg [Sei53] los anillos cero–dimensionales verifican la siguiente propiedad:

$$\dim(A[X_1, \ldots, X_n]) = \dim A + n = n$$

para todo conjunto finito de indeterminadas $\{X_1, \dots, X_n\}$.

El ejemplo típico de esta clase de anillos es el anillo $A = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de los polinomios sobre un cuerpo K

Es bien conocido que si A un anillo local noetheriano, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y $F = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual, entonces el módulo $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es un F-espacio vectorial de dimensión finita. Los anillos locales noetherianos para los que se verifica la igualdad

$$\dim_F(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim A$$

son los anillos **regulares**.

Proposición 2.1. *Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A se verifica la relación:*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim\left(A_{\mathfrak{p}}\right).$$

Demostración. Dado un anillo A y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, el localizado $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Por consiguiente, $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. □

Aplicando la definición de dimensión, se tiene que:

$$\dim A = \sup\{\dim(A_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

2.2. Anillos artinianos

En el capítulo anterior, habíamos introducido los anillos noetherianos, sus propiedades y señalado el gran protagonismo que tienen en Álgebra. Otra clase de anillos muy significativa la forman los **anillos artinianos**; son los anillos que verifican la *condición de cadena descendente (c.c.d.)*, esto es, para toda cadena de ideales de la forma

$$\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \dots$$

existe un índice n tal que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_m$, para cada $m \geq n$. Estas cadenas se llaman **estacionarias**.

Aunque la posible simetría con los anillos de noetherianos se pierde rápidamente, sí se observa una dualidad entre estas dos clases de anillos y módulos. Conviene destacar que todo anillo artiniano es un anillo noetheriano y que los anillos artinianos son particularmente sencillos, pues son los anillos noetherianos de dimensión cero.

El primer punto será estudiar los ideales primos de los anillos artinianos.

Proposición 2.2. *Si A es un anillo artiniano, para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ se tiene que el anillo cociente $A/\mathfrak{a}$ es un anillo artiniano.*

Demostración. La demostración es análoga a (1.16), solo que sustituimos la condición de cadena ascendente por descendente, y submódulos por ideales. □

Proposición 2.3. *En un anillo artiniano A todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ es un ideal maximal.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo en A anillo artiniano. Entonces $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad y también es un anillo artiniano. Tomamos $x \in A/\mathfrak{p}$ no nulo. Como se satisface la c.c.d., obtenemos que $(x^n) = (x^{n+1})$ para algún n y por tanto, $x^n = x^{n+1}y$ con $y \in A/\mathfrak{p}$. Como $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad y $x \neq 0$, simplificamos x^n de manera que resulta $xy = 1$. Deducimos entonces que x tiene inverso en $A/\mathfrak{p}$ y por tanto $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo, lo cual implica que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal. □

Corolario 2.4. *En los anillos artinianos, el nilradical y el radical de Jacobson coinciden.*

Demostración. Basta tener en cuenta que los ideales primos en un anillo artiniano son maximales, aplicando las definiciones de nilradical y radical de Jacobson obtendríamos el resultado. □

Proposición 2.5. *Un anillo artiniano contiene sólo un número finito de ideales maximales.*

Demostración. Sea F el conjunto de todas las intersecciones finitas $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_t$ de ideales maximales. Este conjunto tiene un elemento minimal, el cual sería de la forma $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$. Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ se tiene que $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$, lo cual implica que $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$. De esto se deduce que $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$ para algún $1 \leq i \leq k$, pero como $\mathfrak{m}$ es maximal, tenemos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$ □

Corolario 2.6. *El nilradical de un anillo artiniano es el producto finito de los ideales maximales.*

Corolario 2.7. *Sea A un anillo artiniano, se tiene que el cociente $A/\operatorname{Jac}(A)$ es isomorfo a un producto finito de cuerpos.*

Demostración. Si A es un anillo artiniano, entonces por todos los resultados anteriores sabemos que el número de ideales maximales es finito y todos ellos son primos, sean $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ dichos ideales. Por definición del radical de Jacobson, $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$, entonces por el Teorema Chino del Resto se tiene que:

$$A/\operatorname{Jac}(A) \cong A/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times A/\mathfrak{m}_n.$$

□

Proposición 2.8. *En un anillo artiniano A, el nilradical es nilpotente.*

Demostración. Denotamos el nilradical del anillo como $\operatorname{Nil}(A)$. Como todo anillo artiniano verifica la condición de cadena descendente, se tiene entonces que $\operatorname{Nil}(A)^k = \operatorname{Nil}(A)^{k+1} = \ldots = \mathfrak{a}$ para algún $k \geq 1$. Supongamos que $\operatorname{Nil}(A)^k \neq 0$. Definimos el conjunto Γ formado por los ideales $\mathfrak{b}$ en A tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. Claramente, $\Gamma \neq \emptyset$ ya que $\mathfrak{a} \in \Gamma$. Tomamos $\mathfrak{c}$ un elemento minimal de Γ, entonces existe $c \in \mathfrak{c}$ de manera que $c\mathfrak{a} \neq 0$, por tanto $(c) \subseteq \mathfrak{c}$ y por la minimalidad de $\mathfrak{c}$ se tiene que $\mathfrak{c} = (c)$. Sin embargo $(c\mathfrak{a})\mathfrak{a} = c\mathfrak{a}^2 = c\mathfrak{a} \neq 0$, y $c\mathfrak{a} \subseteq (c)$, por tanto $c\mathfrak{a} = (c)$, de nuevo por la minimalidad del ideal. Entonces, $c = cy$ para algún $y \in \mathfrak{a}$, y $c = cy = cy^2 = \ldots = cy^n = \ldots$ Pero $y \in \mathfrak{a} = \operatorname{Nil}(A)^k \subseteq \operatorname{Nil}(A)$, entonces y es nilpotente y por tanto $c = cy^n = 0$. Esto contradice la elección de c y por tanto $\mathfrak{a} = 0$. □

A continuación vamos a introducir un teorema que relaciona los anillos artinianos con los noetherianos y cuya demostración requiere la presentación de un resultado previo sobre las condiciones de cadena y el producto de ideales maximales.

Lema 2.1. *Si A es un anillo y el producto de sus ideales maximales $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ (no necesariamente distintos) es igual a cero, entonces A es noetheriano si, y sólo si, es artiniano.*

Demostración. Considérese la cadena $A \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$. Entonces cada extension $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $A/\mathfrak{m}_i$. La condición de cadena ascendente (c.c.a.) se verifica si, y sólo si, se verifica la de descendente para cada factor. Pero en virtud de los resultados (1.16) y (2.2), si se verifica c.c.a. (respectivamente c.c.d.) para cada factor significa que se cumple c.c.a. para cada A. Por tanto, en A, se cumple la c.c.a. si, y sólo si, se cumple la c.c.d. □

Teorema 2.9. *Un anillo A es artiniano si, y sólo si, es un anillo noetheriano de dimensión cero.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Por (2.3) deducimos que $\dim A = 0$ y por (2.5) tomamos $\mathfrak{m}_i$ con $1 \leq i \leq n$ los distintos ideales maximales finitos del anillo. Entonces $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k \subseteq (\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i)^k = \mathrm{Nil}(A)^k = 0$. Y por el lema anterior, tenemos que A es noetheriano.

($\Leftarrow$). Como A es noetheriano, el ideal cero puede descomponerse y el conjunto de ideales primos minimales es finito, además estos ideales son maximales ya que A es un anillo cero–dimensional. Entonces $\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$; se tiene entonces que $\mathrm{Nil}(A)^k = 0$ por (1.14), entonces $\prod_{i=1}^k \mathfrak{m}_i = 0$ como en la parte previa de la demostración. Entonces A es un anillo artiniano. □

Si A es un anillo local artiniano con ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces se tiene que $\mathfrak{m}$ es además el único ideal primo del anillo y por tanto, también es el nilradical. Aplicando lo demostrado anteriormente, $\mathfrak{m}$ es nilpotente y todo elemento suyo también lo es. Se deduce que todo elemento del anillo o es una unidad o es nilpotente.

Proposición 2.10. *Sea A un anillo local noetheriano y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Entonces se cumple sólo una de estas dos proposiciones:*

(1) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ para todo n;

(2) $\mathfrak{m}^n \neq 0$ para algún n, y en este caso, estaríamos ante un anillo local artiniano.

Demostración. Vamos a suponer que $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ para algún n. Por el lema (1.3) (lema de Nakayama) se tiene que $\mathfrak{m}^n = 0$. Si tomamos $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo como $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$ tenemos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Entonces $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo de A y por tanto es un anillo artiniano. □

Teorema 2.11 (Teorema de estructura para anillos artinianos)**.** *Todo anillo artiniano es un producto directo finito de anillos locales artinianos.*

Demostración. Sea A un anillo artiniano y $\mathfrak{m}_i$, $1 \leq i \leq n$ los ideales maximales de A. En la demostración de (2.9) hemos visto que para algún producto de ideales maximales se verifica que $\mathfrak{m}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{r_k} = 0$. Para algunos $i \neq j$, el ideal $\mathfrak{m}_i^{n_i} + \mathfrak{m}_j^{n_j}$ no está contenido en ningún ideal maximal y por tanto, la suma es igual al anillo total. Aplicando el teorema chino del resto se tiene que :

$$A \cong A/\mathfrak{m}_1^{r_1} \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_k^{r_k},$$

y claramente cada $A/\mathfrak{m_i}^{r_i}$ es un anillo local y su ideal maximal es $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_i^{r_i}$. □

En la anterior demostración hemos visto cómo se puede expresar un anillo artiniano, teniendo en cuenta que los ideales maximales son comaximales, es decir, primos dos a dos y que el nilradical es la intersección de todos ellos, se tiene que:

$$A \cong \frac{A}{\mathrm{Nil}(A)^n} \cong \frac{A}{\mathfrak{m}_1^n} \times \cdots \times \frac{A}{\mathfrak{m}_k^n}.$$

Recordemos que A es un **anillo local** si únicamente tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. El anillo cociente $k = A/\mathfrak{m}$ se llama el **cuerpo residual** y el A-módulo $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es anulado por $\mathfrak{m}$, es decir, para todo $x \in \mathfrak{m}$ se tiene que $x(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$, y por tanto este ideal tiene estructura de un k-espacio vectorial. En el caso de que $\mathfrak{m}$ este finitamente generado, por ejemplo, si A es noetheriano, las imágenes de un conjunto de generadores de $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ van a generar el espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ luego $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ es finita.

Teniendo en cuenta estos resultados, procedemos a introducir una caracterización de gran utilidad.

Teorema 2.12 (Teorema de estructura para anillos locales artinianos). *Sea A un anillo local noetheriano. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) A es un anillo artiniano.

(b) El ideal maximal es nilpotente.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Si A es un anillo artiniano, todo ideal maximal es primo, luego el único ideal maximal $\mathfrak{m}$ es el nilradical. Hemos visto que en todo anillo noetheriano, el nilradical es nilpotente, por tanto, $\mathfrak{m}$ es nilpotente.

(b) $\Rightarrow$ (a). Si el único ideal maximal $\mathfrak{m}$ es nilpotente, entonces existe un n natural tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$ para cada ideal primo $\mathfrak{p}$. Entonces se tiene que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$, pero $\mathfrak{m}$ es maximal, luego $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Hemos demostrado que todo ideal primo es maximal, luego A es artiniano. □

Proposición 2.13 ([AM69]). *Sea A un anillo local artiniano. Equivalen:*

(a) todo ideal en A es principal.

(b) el ideal maximal $\mathfrak{m}$ es principal.

(c) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) es trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$, entonces se tiene que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ y por tanto, $\mathfrak{m} = 0$ lo cual implicaría que A es un cuerpo.

En el caso de que $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$, entonces se tiene que $\mathfrak{m}$ es un ideal principal. Sea $\mathfrak{m} = (x)$, y $\mathfrak{a}$ un ideal en A tal que $\mathfrak{a} \neq 0, 1$. Entonces $\mathfrak{m}$ coincide con el nilradical del anillo y además es nilpotente. Teniendo en cuenta esto, existe un entero r tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^r$ y $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$. Deducimos entonces que existe un $y \in \mathfrak{a}$ que cumple que $y = ax^r$ y que $y \notin (x^{r+1})$, entonces se concluye que $a \notin (x)$, y por tanto a es una unidad del anillo. Luego, $x^r \in \mathfrak{a}$, por lo tanto $\mathfrak{m}^r = (x^r) \subseteq \mathfrak{a}$; concluimos entonces que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r = (x^r)$. Entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal principal. □

En otras palabras, con la proposición anterior podemos deducir que si A es un anillo local artiniano con $\mathfrak{m}$ su ideal maximal principal, entonces $\mathfrak{m}$ es de la forma (x), y por consiguiente todo ideal en A es igual a (x^r) para algún $r \geq 0$.

Cabe destacar que un subanillo de un anillo artiniano no necesariamente ha de ser artiniano o noetheriano. Un ejemplo de este caso lo observamos en el clásico anillo de polinomios de infinitas variables $S = K[X_1, X_2, \ldots]$, donde K es un cuerpo. S es un dominio de integridad, y podemos definir un embebimiento de S en K', su cuerpo de fracciones. El cuerpo K' claramente es noetheriano y artiniano, ya que su único ideal es el trivial. Sin embargo, el subanillo S no cumple ninguna de estas condiciones ya que si tomamos las cadenas:

$$(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \ldots,$$

ésta no está acotada superiormente, y

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots) \supset (X_2, X_3, \ldots) \supset \ldots$$

y esta segunda tampoco tiene una cota superior.

Otro ejemplo son los anillos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, ya que $\mathbb{Z}$ no es artiniano.

2.2.1. Módulos artinianos

Sea A un anillo. Un A-módulo M se dice **artiniano** si satisface la condición de cadena descendente (la definición es equivalente a la de los anillos), es decir, toda cadena descendente de submódulos de M es estacionaria o equivalentemente, cada conjunto no vacío de submódulos contiene un elemento minimal.

Consideramos la cadena descendente de submódulos del A-modulo M:

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

Entonces existe un número natural m tal que: $N_m = N_{m+1} = \ldots$

Proposición 2.14. *Sea N un submódulo de un A-módulo M. Entonces M es artiniano si, y sólo si, N y M/N son módulos artinianos.*

Demostración. Si M es un módulo artiniano claramente se obtiene que el submódulo N es artiniano. Lo mismo ocurre para el módulo cociente M/N, ya que:

$$N_1/N \supseteq N_2/N \supseteq N_3/N \supseteq \ldots$$

Relacionando cada submódulo N_i de M con N_i/N a través de la proyección canónica de M.

Recíprocamente, supongamos que M y M/N son artinianos.

Sea $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ una cadena descendente de submódulos de M.

Consideramos la proyección canónica $\pi : M \to M/N$, entonces :

$$N_1 \cap N \supseteq A_2 \cap N \supseteq \dots \quad \text{y } \pi(N_1) \supseteq \pi(N_2) \supseteq \dots$$

Por hipótesis, existe un numero natural n tal que:

$$N_i \cap N = N_n \cap N$$
$$\pi(N_i) = \pi(N_n),$$

que se verifica para todo $i \geq n$. Vamos a demostrar que $N_i = N_n$ para todo índice $i \geq n$. Basta con demostrar la inclusión contraria. Tomamos un elemento $a \in N_n$. Entonces se sabe que existe un elemento $x_i \in N_i$ de manera que $a - x_i \in N$. Luego,

$$a - x_i \in N_n \cap N = N_i \cap N \subseteq N_i$$

Esto implica que $a \in N_i$, lo que completaría nuestra demostración. □

De manera análoga a los módulos noetherianos, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.15. *Sea M un A-módulo suma de un número finito de submódulos artinianos, entonces M es artiniano.*

Demostración. Consideramos un A-módulo M que verifica que: $M = \sum_{i=1}^{n} N_i$. Para demostrar que M es un módulo artiniano haremos inducción en n.

Para $n = 1$, se tiene que $M = N_1$, lo cual es trivialmente cierto.

Suponemos cierto para $n - 1$, entonces tenemos que $H = \sum_{i=1}^{n-1} N_i$ es un módulo artiniano. Esto da lugar a la sucesión:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow M = \sum_{i=1}^{n} N_i \longrightarrow \frac{M}{H} \longrightarrow 0,$$

y por tanto,

$$\frac{M}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{\sum_{i=1}^{n-1} N_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} N_i + N_n}{\sum_{i=1}^{n-1} N_i} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n-1} N_i}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} N_i\right) \cap N_n}$$

es artiniano, ya que $\sum_{i=1}^{n-1} N_i = H$ lo es.

□

Corolario 2.16. *Si A es un anillo artiniano, todo A–módulo finitamente generado es artiniano.*

Teorema 2.17. *Todo A-módulo artiniano M es la suma directa de un número finito de submódulos indescomponibles.*

Demostración. Demostraremos este teorema por inducción. Tomamos un submódulo arbitrario N de M y suponemos que el teorema se cumple para todos los submódulos propios de N; vamos a probar que entonces N es una suma directa de un número finito de submódulos indescomponibles. Si N es indescomponible (por ejemplo, si N es simple) es trivial puesto que no hay nada que demostrar.

Si N no es indescomponible, existe una descomposición: $N = N_1 \oplus N_2$. Por hipótesis, sabemos que a su vez los submódulos N_1 y N_2 descomponen de la siguiente manera:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{k_1} N_{1i}, \quad N_2 = \sum_{j=1}^{k_2} N_{2j},$$

siendo los N_{1i} y N_{2j} submódulos indescomponibles. Esto da lugar a la descomposición de N:

$$N = \sum_{i=1}^{k_1} N_{1i} \oplus \sum_{j=1}^{k_2} N_{2j}.$$

□

2.2.2. Ejemplos de anillos artinianos

(1) En conclusión de todos los resultados teóricos anteriores, uno de los mayores ejemplos de anillos artinianos, y también noetherianos, son los anillos finitos.

(2) Otro de los ejemplos más comunes es el anillo $\mathbb{Z}_n$ para cada n natural. Éste es un ejemplo de anillo finito y por lo tanto artiniano y noetheriano. En el caso de que n no sea primo, entonces los ideales primos del anillo son de la forma $p_i\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con p_i divisor primo de n. Si la factorización de n es $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$, entonces el anillo total podría descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{r_1}\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{r_t}\mathbb{Z}},$$

donde cada uno de los $\frac{\mathbb{Z}}{p_i^{r_i}\mathbb{Z}}$, para $1 \leq i \leq t$ son anillos locales artinianos.

Entonces, el nilradical del anillo es igual a:

$$\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_n) = \frac{p_1 \cdots p_t\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \frac{p_1\mathbb{Z}}{p_1^{r_1}\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{p_t\mathbb{Z}}{p_t^{r_t}\mathbb{Z}},$$

y se tiene que $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_n)^r = 0$ donde $r = \max\{r_1, \ldots, r_t\}$.

Por el teorema de estructura de anillos artinianos, el anillo $\mathbb{Z}_n$ se puede expresar de la forma:

$$\mathbb{Z}_n \cong \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{p_1^r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{p_t^r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{r_1}\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{p_t^{r_t}\mathbb{Z}}.$$

(3) Consideramos ahora el anillo cociente $K[X]/(f^n)$, para un polinomio irreducible $f \in K[X]$. Tenemos que $K[X]/(f^n)$ es un anillo con un único ideal maximal (todos los ideales forman una cadena de longitud n).

Si el polinomio f es reducible, por ejemplo: $f = f_1^{r_1} \cdots f_n^{r_n}$, donde cada f_i es un polinomio irreducible; el anillo $K[X]/(f)$ descompone como sigue:

$$K[X]/(f) \cong \frac{K[X]}{(f_1^{r_1})} \times \cdots \times \frac{K[X]}{(f_n^{r_n})}.$$

Se podría pensar que un anillo con un único ideal primo es un anillo noetheriano; sin embargo, no necesariamente es cierto — por tanto, tampoco es un anillo artiniano. Tomamos de nuevo el anillo de polinomios sobre un cuerpo K en un número infinito numerable de indeterminadas X_i, y definimos $A = K[X_1, X_2, \ldots]$; hemos visto anteriormente que este anillo no es noetheriano, por consiguiente, tampoco es artiniano.

Consideramos el anillo $A = K[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$, el ideal $\mathfrak{a} = (X_1, X_2^2, \ldots, X_n^n, \ldots)$ y el anillo cociente correspondiente $B = A/\mathfrak{a}$; resulta que el anillo B tiene sólo un ideal primo: la imagen de $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$; por lo tanto $B = A/\mathfrak{a}$ es un anillo local de dimension 0. No obstante, $B = A/\mathfrak{a}$ no es un anillo noetheriano ya que su único ideal maximal no finitamente generado.

3 Anillos regulares von Neumann

Los anillos regulares von Neumann fueron introducidos por el matemático de renombre John von Neumann para clarificar ciertos aspectos de la teoría de las álgebras de von Neumann, vinculada fuertemente con los espacios de Hilbert y operadores autoadjuntos. En lo que concierne a este trabajo, esta clase de anillos son objeto de estudio ya que, junto con los artinianos, son ejemplos de anillos cero–dimensionales.

Un anillo A es **regular von Neumann** si para cada elemento $a \in A$ existe un elemento $b \in A$ de manera que $aba = a$.

Proposición 3.1. *Sea A un anillo conmutativo, se tiene:*

(1) Sean $a, b \in A$ si $aba = a$, entonces el elemento ab es idempotente

(2) Un anillo A es regular von Neumann si, y sólo si, cada ideal principal está generado por un elemento idempotente.

Demostración. (1). Basta recordar la definición de idempotencia y ver que $ab = abab$.

(2). Si A es regular von Neumann, por definición, para cada elemento $a \in A$, existe un $b \in A$ de manera que $a = aba$. Entonces se tiene que $aA = abA$ cada ideal principal está generado por un idempotente.

Recíprocamente, sea $a \in A$, se tiene un $e \in A$ idempotente tal que $aA = eA$, luego podemos afirmar la existencia de un elemento $b \in A$ de forma que se verifica $e = ab$, $a = ea = aba$. □

Proposición 3.2. *Para un anillo A, equivalen:*

(a) A es regular von Neumann

(b) A es reducido y cada ideal primo es minimal

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Tomamos $a \in A$ de manera que $a^2 = 0$. Se tiene que existe un $e \in A$ idempotente de manera que $aA = eA$, luego $0 = a^2A = e^2A = eA = aA$ y se tiene que $a = 0$.

Sea ahora $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, entonces $A/\mathfrak{p}$ es un anillo regular y un dominio, por lo tanto, los únicos elementos idempotentes del anillo cociente son 0 y 1. Vamos a tomar $x \in A/\mathfrak{p}$ no nulo, entonces existe $y \in A/\mathfrak{p}$ de manera que $x = xyx$, por tanto $y \neq 0$ y el elemento $xy = e$ es idempotente, lo cual nos deja ante los casos:

- $xy = 0$, esto implicaría que $x = 0$, lo que es una contradicción.
- $xy = 1$, por tanto x es invertible y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal.

(b) $\Rightarrow$ (a). Dado un elemento $x \in A$ consideramos $\mathrm{Ann}(x)$. Por ser A un anillo reducido, obtenemos que $xA \cap \mathrm{Ann}(x) = 0$. Si $xA + \mathrm{Ann}(x) \neq A$, entonces existe un ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ tal que $xA + \mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{p}$. Por la Proposición (1.2) tenemos que todo elemento de $\mathfrak{p}$ es un divisor de cero. Si $\mathrm{Ann}(x) = 0$, entonces x es regular, lo que es una contradicción; si $\operatorname{Ann}(x) \neq 0$, como $xA + \operatorname{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{p}$ y $A_\mathfrak{p}$ es un cuerpo, resulta $(xA + \operatorname{Ann}(x))A_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = 0$. Existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $xs = 0$, lo que es una contradicción, ya que $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{p}$. En consecuencia, $xA + \operatorname{Ann}(x) = A$; existen $a \in A$, $y \in \operatorname{Ann}(x)$ tales que $1 = xa + y$, y se tiene $x = xax$.

Otra prueba. Como A es reducido, entonces $A_\mathfrak{p}$ es reducido; en efecto, si $(a/1)^2 = 0$, existen $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $a^2 s = 0$, se tiene $(as)^2 = 0$, y por tanto $as = 0$, luego $a/1 = 0$. Si A es reducido y cero–dimensional, entonces $A_\mathfrak{p}$ es un cuerpo, ya que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es el único ideal primo.

Para cada $x \in A$ se tiene $xA/x^2A = 0$ si, y sólo si, $(xA/x^2A)_\mathfrak{p} = 0$ para cada ideal primo; como, por hipótesis, $A_\mathfrak{p}$ es un cuerpo, resulta $aA_\mathfrak{p} = a^2A_\mathfrak{p}$, y por tanto $xA = x^2A$. En consecuencia, existe $a \in A$ tal que $x = x^2a$. □

Lema 3.1. *Si A es un anillo regular von Neumann, para todo $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que $a = aba$ y $bab = b$.*

Denominamos a b como el **inverso débil** de a, y está determinado de manera única.

Demostración. Tomamos $a \in A$, por hipótesis existe un elemento $x \in A$ tal que $a = axa$; si definimos el elemento $b = x^2a$, se tiene:

$$a = axa = axaxa = ax^2aa = aba,$$
$$b = x^2a = x^2ax^2a = bab.$$

Hemos demostrado la existencia de al menos un inverso débil. Supongamos $b, c \in A$ son inversos débiles de a:

$$b = bab = bacab = bcaba = bca,$$

de la misma manera:

$$c = cac = cabac = cbaca = cba,$$

lo cual nos lleva a concluir que $b = c$. □

Lema 3.2. *Sea A un anillo y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto de elementos idempotentes ortogonales, esto es, $e_1 + \cdots + e_n = 1$ y se verifica que $e_ie_j = 0$ si $i \neq j$. Entonces equivalen:*

(a) A es regular von Neumann.

(b) Para cada $a \in e_iAe_j$ existe $b \in e_jAe_i$ tales que $a = aba$.

Demostración. La demostración la hayamos en el Lema [Goo79, Lemma 1.6] □

Teorema 3.3. *Sea A un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es un anillo regular von Neumann.

(b) Todo ideal principal de A está generado por un elemento idempotente.

(c) Todo ideal finitamente generado de A está generado por un elemento idempotente.

(d) Todo ideal principal de A es un sumando directo.

(e) Todo ideal finitamente generado de A es un sumando directo.

Demostración. La demostración de (a) $\Rightarrow$ (b) la tenemos gracias a la Proposición (3.1).

(b) $\Rightarrow$ (c). Supongamos $e, f \in A$ dos elementos idempotentes, se tiene que $(e, f)A$ está generado por un idempotente. Se observa que $(e, f)A = (e, f - ef)A$, luego existe un $x \in A$ tal que $f - ef = (f - ef)x(e - ef)$, entonces se tiene $g = (f - ef)x$ es idempotente, y se verifica que $eg = 0$, entonces $(e, f)A = (e, g)A = (e + g - eg)A$, ya que $e = (e + g - ge)e$ y $g = (e + g - ge)g$ luego $(e, f)A$ es un ideal principal.

Claramente, observamos que (b) $\Leftrightarrow$ (d) y (c) $\Leftarrow$ (e) es una trivialidad. □

Antes de introducir el siguiente teorema de caracterización de anillos regulares von Neumann, precisamos de dos importantes definiciones.

Un anillo A se dice **absolutamente plano** si todo A-módulo es plano.

Dada una sucesión de A-módulos:

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

decimos que es una sucesión **exacta corta** si f_0 es inyectiva, f_1 es sobreyectiva y se verifica: $\mathrm{Im}(f_0) = \mathrm{Ker}(f_1)$.

Teorema 3.4. *Sea A un anillo, entonces equivalen:*

(a) A es un anillo regular von Neumann.

(b) Todo módulo es plano (A es un anillo absolutamente plano).

(c) Todo módulo cíclico es plano.

(d) Toda sucesión exacta corta de módulos es exacta.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Tomamos un ideal $\mathfrak{a}$ de A finitamente generado y sabemos que es un sumando directo, luego para cada A-módulo derecha se tiene el monomorfismo $M \otimes \mathfrak{a} \to M \otimes A$.

(b) $\Rightarrow$ (c) es trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a). Consideramos la sucesión $0 \to aA \to A \to A/aA$, como A y A/aA son planos se tiene que $aA \cap Aa \subseteq aAa$. Concluimos entonces que $a \in aAa$ por tanto existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

Finalmente, la equivalencia entre (b) y (c) también es evidente. □

A continuación introducimos un teorema que nos permite caracterizar los anillos regulares von Neumann:

Teorema 3.5. *Las siguientes condiciones en un anillo A son equivalentes:*

(a) A es un anillo regular von Neumann.

(b) A tiene dimensión de Krull igual a cero y además es un anillo reducido.

(c) Para cada ideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ se tiene que $A_\mathfrak{p}$, el localizado en $\mathfrak{p}$, es un cuerpo.

(d) Todo ideal de A es un ideal radical.

(e) Todo ideal de A es idempotente.

(f) Para cada elemento a del anillo existe un único $b \in A$ tal que $a = aba$ y $b = bab$ (inverso débil).

(g) Cada elemento del anillo es el producto de un elemento invertible y otro idempotente.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Si A es regular von Neumann, por la Proposición (3.2) sabemos que es reducido. Veamos que es de dimensión cero: Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, tomamos $a \in A \backslash \mathfrak{p}$ sabemos que existe un $x \in A$ de manera que $a = axa$, esto es, $a(1-xa) = 0 \in \mathfrak{p}$ y por lo tanto $(1-xa) \in \mathfrak{p}$, y es invertible luego $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo, entonces $\mathfrak{p}$ es maximal.

(b) $\Rightarrow$ (c). Suponemos que A es cero–dimensional, luego $A_\mathfrak{p}$ también lo es, para cada $\mathfrak{p}$ ideal primo en A. Entonces $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es un ideal maximal del localizado. Sea $x/s \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ donde $x \in \mathfrak{p}$ y $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Además tenemos que $x/s \in \text{Nil}(A)$, luego es nilpotente. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x/s)^n = 0$. Sin embargo, A es reducido, lo cual implica que $x/s = 0$ en $A_\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} =< 0 >$, esto significa que $A_\mathfrak{p}$ es un cuerpo.

(c) $\Rightarrow$ (d). Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo A y sea $x \in \text{rad}(\mathfrak{p})$. Claramente se tiene que $x \in \mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, de aquí se obtiene que $x^k \in \mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ ya que cada ideal en el cuerpo $A_\mathfrak{p}$ es un ideal radical.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sea $a \in A$ y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal en A se tiene:

$$\left(\frac{aA}{a^2A}\right)_\mathfrak{m} \cong \frac{(aA)_\mathfrak{m}}{(a^2A)_\mathfrak{m}} = \frac{aA_\mathfrak{m}}{a^2A_\mathfrak{m}} = 0$$

Es decir, que $aA = a^2A$, y por tanto existe un $x^2 \in A$ de manera que $a = a^2x = axa$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ se tiene que $\mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a}^2)$

(e) $\Rightarrow$ (f) es evidente.

(a) $\Rightarrow$ (g). Suponemos A regular von Neumann, entonces dado $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = aba$ y el elemento $e = ab$ es idempotente.

Sea $u = ae + (1-e)$ y $v = be + (1-e)$, obtenemos lo siguiente:

$$uv = (ae + (1-e))(be + (1-e)) = abe + 1 - e = 1,$$
$$ue = (ae + (1-e))e = aee = a.$$

(g) $\Rightarrow$ (b). Si todo elemento del anillo es producto de un elemento invertible y un elemento idempotente, claramente el $\text{Nil}(A) = 0$. Tomamos un ideal primo $\mathfrak{p}$ que verifica que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Tomamos $a \in \mathfrak{m}$, luego $a = ue$, siendo u un elemento invertible y e, idempotente; por tanto, $e \in \mathfrak{m}$. Notamos que $e(1-e) = 0 \in \mathfrak{p}$, luego si $1 - e \in \mathfrak{p}$, $1 = e + (1-e)\mathfrak{m}$, lo cual es una contradicción. Entonces, concluimos que $e \in \mathfrak{p}$ y por consiguiente, $a \in \mathfrak{p}$. Lo cual implica que todo ideal primo, es maximal y $\dim(A) = 0$. $\square$

Con respecto al último punto del teorema anterior, podemos decir que la factorización de todo elemento de un anillo regular von Neumann A es única. Vamos a demostrar este resultado: supongamos que un elemento $a \in A$ admite las factorizaciones $a = u_1e_1 = u_2e_2$. Haciendo una serie de modificaciones $u_1e_1 = a = ae_2 = u_1e_1e_2$, por ser u_2 invertible, se tiene que $e_1 = e_1e_2$. Realizando el mismo procedimiento con u_2e_2, llegamos al mismo resultado obteniendo así la unicidad del elemento idempotente. Para cada elemento a del anillo, se descompone de la forma $a = ue$ y el elemento $u_a = a + (1-e)$ es invertible, donde su inverso $u_a^{-1} = u^{-1}e + (1-e)$ (esto se comprueba con una simple operación matemática). Entonces se concluye que el elemento u está determinado de forma única por el elemento a.

De todos estos resultados se sacan una serie de conclusiones:

(1) La imágenes homomorfas de anillos regulares von Neumann, también son anillos regulares von Neumann. Esto se deduce del apartado (e) de (3.5), ya que esta característica se preserva por homomorfismos.

(2) El producto de anillos regulares von Neumann es también un anillo regular von Neumann. Si para cada α en Δ existe un a_α y b_α tal que $a_\alpha = a_\alpha b_\alpha a_\alpha$ también se cumple en $A = \prod_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$

(3) Las localizaciones de anillos regulares von Neumann son también anillos regulares von Neumann.

(4) Los anillos regulares von Neumann también se preservan por extensiones enteras.

Un ideal $\mathfrak{a}$ en un anillo A se dice **regular v. N.** si para cada $a \in \mathfrak{a}$ existe un $x \in \mathfrak{a}$ tal que $a = aba$.

Lema 3.3. *Sea A un anillo, y $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ dos ideales de A. Entonces $\mathfrak{b}$ es regular v. N. si, y sólo si, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ son regulares v. N.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Si $\mathfrak{b}$ es regular v. N. entonces $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ es también un ideal regular. Para $\mathfrak{a}$; dado $a \in \mathfrak{a}$, se tiene que existe $b \in \mathfrak{b}$ tal que $a = aba$. Definimos $x = bab$ que es un elemento de $\mathfrak{a}$ y verifica $axa = a$, se obtiene por tanto que $\mathfrak{a}$ es regular v. N.

($\Leftarrow$). Suponemos ahora que $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ son ambos regulares v. N.. Dado un $x \in \mathfrak{b}$, por la regularidad v. N. de $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, existe $y \in \mathfrak{b}$ tal que $x - xyx \in \mathfrak{a}$. Por consiguiente, $x - xyx = (x - xyx)z(x - xyx)$ para algún $z \in \mathfrak{a}$, lo cual concluye que $x = xwx$ para algún $w \in \mathfrak{b}$ y por tanto $\mathfrak{b}$ es regular v. N. $\square$

Corolario 3.6. *Todo ideal primario en un anillo regular von Neumann A es maximal.*

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario. Si A es un anillo regular von Neumann, entonces $A/\mathrm{Nil}(A)$ también lo es y por tanto, todo ideal primo es maximal. Además, se tiene que $A_\mathfrak{p}$ es un cuerpo, luego el ideal trivial es el único ideal primario, es decir, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ por la correspondencia entre ideales $\mathfrak{p}$-primarios de A y $A_\mathfrak{p}$ $\square$

Proposición 3.7. *Si A es un anillo regular von Neumann, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{Spec}(A)$ *es finito.*

(b) A es artiniano.

(c) A es un producto finito de cuerpos.

(d) A es noetheriano.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). A un anillo regular von Neumann, por tanto es un anillo cero–dimensional y reducido. Suponemos que el conjunto de los ideales primos, y por tanto maximales, es finito. Denotamos por $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ estos ideales maximales. Entonces $\mathrm{Nil}(A) = \cap_i \mathfrak{m}_i = \prod_i \mathfrak{m}_i$, luego la proyección $A \longrightarrow \prod_i A/\mathfrak{m}_i$ establece una correspondencia. Es decir que A se puede expresar como el producto finito de cuerpos y por tanto A es un anillo artiniano.

El resto de implicaciones han sido demostradas en los capítulos anteriores. $\square$

Al principio, hemos caracterizado los anillos regulares von Neumann como anillos absolutamente planos, siendo ésta una condición necesaria y suficiente. En particular, todo ideal de un anillo regular von Neumann es idempotente.

Lema 3.4. *Si A es un anillo absolutamente plano y $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, se verifica que $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.*

Demostración. Consideramos la sucesión exacta $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$, como $A/\mathfrak{a}$ es plano se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow A \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{a}} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$$

es también un sucesión exacta, además de que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} &= \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}, \\ A \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} &= \frac{A}{\mathfrak{a}}, \\ \frac{A}{\mathfrak{a}} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} &= \frac{A}{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.8. *Sea A un anillo conmutativo, y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. En el caso de que el anillo cociente $A/\mathfrak{a}$ sea plano, se tiene que para todo ideal $\mathfrak{b} \subseteq A$ se verifica que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$*

Demostración. De manera similar a la demostración anterior, consideramos la situación exacta con el ideal $\mathfrak{b}$:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{b}} \longrightarrow 0$$

por hipótesis, $A/\mathfrak{a}$ es plano, luego la sucesión resultante:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow A \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{b}} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$$

Comenzamos estudiando $\mathfrak{b} \otimes_A A/\mathfrak{a}$:

Sea $\mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$, y aplicamos el functor $\mathfrak{b}\otimes_A$:

$$\mathfrak{b} \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{b} \otimes_A A \longrightarrow \mathfrak{b} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}}$$

Los elementos de $\mathfrak{b} \otimes_A \mathfrak{a}$ son de la forma $\sum_i b_i \otimes a_i = \sum_i b_i a_i$, es decir, de manera equivalente podríamos convertir la sucesión anterior a:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$$

Y el conjunto $\mathfrak{b} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}}$ es isomorfo a $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathfrak{b} \otimes_A \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}.$$

Claramente, se da la siguiente igualdad: $A \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}} = \frac{A}{\mathfrak{a}}$.

Finalmente, estudiamos el conjunto $A/\mathfrak{b} \otimes_A A/\mathfrak{a}$: consideramos el homomorfismo

$$\gamma : A/\mathfrak{a} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{b}} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}},$$

definida $\gamma(a+\mathfrak{a}) = \gamma(1 \otimes a + \mathfrak{a}) = (1+\mathfrak{b}) \otimes (1+\mathfrak{a})$, donde el núcleo del homomorfismo es

$$\mathrm{Ker}(\gamma) = \{b + \mathfrak{a} \mid \ b \in \mathfrak{b}\} = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}.$$

Aplicando el primer teorema de isomorfía se tiene que:

$$\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}} \cong \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}} \cong \frac{A}{\mathfrak{b}} \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{a}}.$$

Dado que la aplicación $\frac{A}{\mathfrak{a}} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}}$ tiene como núcleo la intersección $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}$, concluimos que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. □

Otra demostración de que todo anillo regular von Neumann es reducido es la siguiente.

Proposición 3.9. *Sea A un anillo absolutamente plano, entonces se verifica que* $\mathrm{Jac}(A) = \mathrm{Nil}(A) = 0$

Demostración. Comenzamos estudiando el radical de Jacobson de un anillo absolutamente plano:

Sea $a \in \mathrm{Jac}(A)$, entonces $1 - xa$ es un elemento invertible para cada $x \in A$. Paralelamente, por ser A absolutamente plano se tiene que $(a)^2 = (a)$, es decir, $a = xa^2$ para algún $x \in A$, lo que se traduce a $a(1 - xa) = 0$ y nos lleva a concluir que $a = 0$. Luego $\mathrm{Jac}(A) = 0$.

Veamos que ocurre con el nilradical: Supongamos que $\mathrm{Nil}(A) \neq 0$, sea $a \in \mathrm{Nil}(A)$ y $n \in \mathbb{N}$ el mínimo natural para el cual se tiene que $a^n = 0$, con $n \geq 2$. Como $(a)^2 = (a)$, existe un $x \in A$ para el cual se verifica $a = xa^2$, esto nos lleva a deducir que $a^{n-1} = xa^n = 0$ (contradicción). Así que se tiene que $\mathrm{Nil}(A) = \mathrm{Jac}(A) = 0$. □

4 Anillos cero–dimensionales

Hasta ahora en este trabajo hemos hablado de los anillos cero–dimensionales más estudiados en el Álgebra, los anillos artinianos y los anillos regulares von Neumann. Hemos demostrado que los artinianos son los anillos noetherianos de dimensión cero y los regulares von Neumann son artinianos únicamente cuando el número de ideales primos es finito. Esto nos lleva a preguntarnos si existen otros ejemplos de anillos cero–dimensionales que se relacionen, o bien con los anillos noetherianos o bien con los regulares von Neumann que no son noetherianos y a través de qué resultados. También en este capítulo se comentarán algunos ejemplos de anillos cero–dimensionales para visualizar toda esta densa teoría y conseguir una mayor compresión, a parte de una colección básica de teoría de anillos de dimensión cero.

4.1. Topologías

Comenzamos este capítulo introduciendo la **topología de Zariski** que es la topología en $\operatorname{Spec}(A)$ definida por:

$$D(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}\}$$
$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$$

Siendo $\{D(\mathfrak{a}) \mid \ \mathfrak{a}$ es un ideal de $A\}$ el conjunto de abiertos del espacio topológico $\operatorname{Spec}(A)$.

Proposición 4.1. *Sea A un anillo, entonces* $\operatorname{Spec}(A)$ *es un espacio topológico casi–compacto.*

Demostración. Dado $\operatorname{Spec}(A) = \cup_{i\in I} O_i = \cup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) = D\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$, un recubrimiento por abiertos de $\operatorname{Spec}(A)$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ contenido en el anillo y que $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A) = D\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$, se tiene que $\mathfrak{m} \not\supseteq \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$. Como todo ideal está contenido en un ideal maximal, concluimos que la sumatoria de estos ideales es el anillo total, es decir, $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = A$, entonces existe un subconjunto finito $J \subseteq I$, de manera que $A = \sum_{j\in J} \mathfrak{a}_j$ y $\operatorname{Spec}(A) = D\left(\sum_{j\in J} \mathfrak{a}_j\right) = \cap_{j\in J} \tau(\mathfrak{a}_j)$, es decir, un subrecubrimiento finito del recubrimiento O. $\square$

Además de la vista, podemos definir una nueva topología para cada anillo A, llamada **topología constructible** en $\operatorname{Spec}(A)$.

En el caso de que el anillo A sea regular von Neumann, hemos visto que todo elemento suyo puede factorizarse como un elemento invertible y un elemento idempotente, construimos la base de la topología constructible:

$$\{D(a) \mid \ a \in A\} = \{D(e) \mid \ e \in A \text{ idempotente}\}.$$

Teorema 4.2. *Sea A un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A/\mathrm{Nil}(A)$ *es regular von Neumann.*

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ *es Hausdorff*

(c) La topología Zariski y la constructible coinciden.

Teorema 4.3. *Sea A un anillo. Equivalen:*

(a) A es cero–dimensional.

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ *es compacto.*

(c) $\mathrm{Spec}(A)$ *es Hausdorff.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Tomamos O una familia de conjuntos abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ que es recubrimiento finito. Vamos a ver que O admite un subrecubrimiento finito, consideramos $O = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$. Definimos $\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. Entonces como O es un recubrimiento para el $\mathrm{Spec}(A)$, se tiene que para cada $i \in I$, $\mathfrak{a}_i \nsubseteq \mathfrak{m}$ para cada ideal maximal del anillo. Entonces $\mathfrak{a} = A$, y existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ de manera que $A = \sum_{j \in J} \mathfrak{a}_j$ y no hay ningún ideal primo que lo contenga. De esta manera, hemos demostrado que $\sum_{j \in J} \mathfrak{a}_j$ es un subrecubrmiento finito.

(a) $\Rightarrow$ (c). Suponemos $\dim(A) = 0$. Sean $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ dos elementos de $\mathrm{Spec}(A)$, es decir, dos ideales primos. Entonces se tiene $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = A$, luego $p + q = 1$ para algún $p \in \mathfrak{p}$ y $q \in \mathfrak{q}$. Entonces, como todo ideal primo es maximal, se tiene que $D(pA)$ y $D(qA)$ son conjuntos de abiertos disjuntos para los ideales pA y qA, respectivamente en el conjunto de $\mathrm{Spec}(A)$. Así pues, demostramos que $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico $\mathcal{T}_2$ o Hausdorff.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\dim(A) \neq 0$, esto supondría que dados dos ideales $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Esta condición implica que para todo conjunto de abiertos $D(\mathfrak{a})$ para un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ que contiene a $\mathfrak{q}$, contendría también a $\mathfrak{p}$, entonces el espacio $\mathrm{Spec}(A)$ no es Hausdorff, lo cual es un absurdo. □

A raíz de estos dos resultados anteriores, se extrae una útil consecuencia de gran interés.

Corolario 4.4. *Sea A un anillo. Se verifica la equivalencia entre la siguientes condiciones:*

(a) La dimensión A es cero.

(b) $A/\mathrm{Nil}(A)$ *es regular von Neumann.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que A es cero–dimensional, por consiguiente el anillo cociente $A/\mathrm{Nil}(A)$ también lo es y por (1.4) sabemos que es reducido. Vamos a ver que es regular von Neumann. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A es un anillo reducido. Sea $a \in A$ un elemento regular, definimos el subconjunto multiplicativo $\Sigma = \{a^n(1 - xa) \mid n \in \mathbb{N}, x \in A\}$. Este conjunto contiene al uno $(1 = a^0(1 - 0a))$, y vamos a demostrar que el 0 está contenido en el conjunto a través de una reducción al absurdo. Si $0 \notin \Sigma$, entonces para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ se tiene que $\mathfrak{p} \cap \Sigma = 0$, pero como $\dim(A) = 0$, todo ideal primo es maximal y por consiguiente, todo elemento del anillo ha de estar en algún ideal maximal, lo cual es una contradicción. De esta manera, se demuestra que $0 \in \Sigma$ y por tanto, para algún $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a^n(1 - xa) = 0$, es decir, que es nilpotente y por tanto $a = axa$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Todo ideal primo de un anillo regular von Neumann es un ideal maximal. Tomando la proyección canónica $A \longrightarrow A/\text{Nil}(A)$, las preimágenes de los ideales primos, siguen siendo ideales maximales. Luego A es un anillo de dimensión cero. $\square$

Como consecuencia los anillos regulares von Neumann son los anillos reducidos y cero–dimensionales.

4.2. Producto de anillos conmutativos

Sabemos que tanto el producto finito como infinito de cuerpos es un anillo cero–dimensional. Pero en el caso de que tengamos una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de anillos conmutativos cero–dimensionales pero no necesariamente cuerpos, ¿bajo qué condiciones podríamos garantizar que el producto de todos estos resulta un anillo cero–dimensional? De manera intuitiva podríamos hacer una caracterización con el nilradical y el radical de Jacobson, ya que en el caso de los anillos cero–dimensionales, todo ideal primo ha de ser maximal. Hemos visto en el capítulo anterior que dada una familia de anillos cero–dimensionales $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ se tiene que:

$$\text{Jac}\left(\prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Jac}(A_\alpha).$$

Sin embargo, la situación no es la misma en el nilradical y solo se puede asegurar la inclusión:

$$\text{Nil}\left(\prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subseteq \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Nil}(A_\alpha).$$

Entonces $\dim(A)$ es cero si, y sólo si, $\text{Jac}(A) = \text{Nil}(A)$.

Por ejemplo, tomemos $A = \prod_{n=1}^{\infty}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, entonces $\text{Jac}(A) = \prod_{n=1}^{\infty}(p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ y $p \in \text{Jac}(A)$. Sin embargo, $p \notin \text{Nil}(A)$, luego $\text{Jac}(A) \neq \text{Nil}(A)$ y concluimos que $\dim(A) \neq 0$.

Vamos a extender este resultado y formalizarlo.

Teorema 4.5. *[Mar74] Si $\{A_{\alpha\in\Delta}\}$ es una familia de anillos cero–dimensionales y llamamos $A = \prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es cero–dimensional.

(b) El nilradical y el radical de Jacobson coinciden.

(c) $\text{Nil}(A) = \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Nil}(A_\alpha)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Si $\dim(A) = 0$, los ideales primos son maximales, luego $\text{Nil}(A) = \text{Jac}(A)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Dado que $\text{Jac}(A) = \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Jac}(A_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Nil}(A_\alpha) = \text{Nil}(A)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\text{Nil}(A) = \prod_{\alpha\in\Delta} \text{Nil}(A)$. Entonces:

$$\frac{A}{\text{Nil}(A)} = \frac{\prod A_\alpha}{\prod \text{Nil}(A_\alpha)} \cong \prod_\alpha \frac{A_\alpha}{\text{Nil}(A_\alpha)}$$

Cada $A_\alpha/\mathrm{Nil}(A_\alpha)$ es regular von Neumann, luego su producto hemos visto que también es regular von Neumann. Por tanto, por (4.4) se tiene que $A = \prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es de dimensión cero. □

4.3. Resultados y ejemplos

En la sección de localización de un anillo hemos introducido lo que se conoce como **anillo total de fracciones** de un anillo A y se representa por $T(A)$ ó $Q_{tot}(A)$. Para obtener este anillo resultante tomamos como subconjunto multiplicativo $\Sigma = \mathrm{Reg}(A)$, es decir, los elementos regulares del anillo A. Además se verifica que este subconjunto es saturado, dados dos elementos $a, b \in A$ tales que $ab \in \Sigma$, entonces $a \in \Sigma$ ó $b \in \Sigma$. El anillo $\Sigma^{-1}A$ está formado por elementos los cuales son divisores de cero o invertibles.

Confirmamos la existencia de una biyección entre los ideales primos de $T(A)$ y los ideales primos de A que no cortan a Σ, es decir, los ideales de A formado por divisores de cero. Es de interés caracterizar cuando el anillo total de fracciones es un anillo cero–dimensional, es decir, el ideal formado por los divisores de cero es minimal. A continuación, introducimos resultado:

Teorema 4.6. *Si A un anillo noetheriano reducido, $T(A)$ es un anillo cero–dimensional.*

Demostración. Es claro que si A es un anillo noetheriano reducido, entonces su anillo total de fracciones $T(A)$ también va a ser un anillo noetheriano y reducido. Como $T(A)$ es noetheriano, entonces por (1.12) sus ideales primos son finitos y sean $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ los cuales verifican que $\cap_{i=1}^{t}\mathfrak{p}_i = 0$. Vamos a suponer que el ideal $\mathfrak{p}_1$ no es maximal, entonces ha de existir un segundo ideal $\mathfrak{a}$ que verifica $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq T(A)$. Tomamos $a \in \mathfrak{a}$ no nulo y se tiene que este a es un divisor de cero (porque no es invertible), entonces existe $0 \neq b \in A$ tal que $ab = 0$. Dado que $\cap_{i=1}^{t}\mathfrak{p}_i = 0$, existe un $\mathfrak{p}_i$ tal que $b \notin \mathfrak{p}_i$ y por lo tanto, $a \in \mathfrak{p}_i \subseteq \cup_{i=1}^{t}\mathfrak{p}_i$. Por consiguiente, $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{t}\mathfrak{p}_i$ entonces existe un índice i tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$. Y llegamos a la siguiente contradicción, $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ □

Proposición 4.7. *Todo anillo A cero–dimensional es un anillo de fracciones.*

Demostración. Sea A un anillo conmutativo de dimensión cero. Consideramos el localizado $A_\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, y como A es cero–dimensional se tiene que todo ideal primo es maximal, de forma que este anillo lo denotamos como $A_\mathfrak{m}$. Hemos visto en el capítulo I que $A_\mathfrak{m}$ es un anillo local con $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ ideal maximal. Tomamos $a \in \mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Nil}(A)$, esta propiedad se extiende al localizado ya que $a/1 \in A_\mathfrak{m}$ y por lo tanto también es nilpotente. Es sabido que todo elemento nilpotente es divisor de cero. En consecuencia se tiene que $\cup\mathfrak{m}$ es la unión de los divisores de cero. Sea n el mínimo natural que verifica que $s^{-1}a^n = 0$ donde $s \in A\backslash\mathfrak{m}$, entonces $s^{-1}a^{n-1} \neq 0$. Concluimos entonces que los elementos regulares, no pertenecen a $\cup\mathfrak{m}$ y por lo tanto forman el anillo de fracciones. □

Proposición 4.8. *[Huc88] Todo anillo A cero–dimensional tiene un ideal $\mathfrak{a}$ finitamente generado contenido en* $\mathrm{Div}(A)$ *de manera que* $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) \neq 0$.

Demostración. Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ finitamente generado y $\mathfrak{p}$ el ideal primo minimal sobre $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Nil}(A)$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$; por tanto, $\mathfrak{a}^{n-1} \subseteq \mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) \neq 0$. Supongamos ahora que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathrm{Nil}(A)$. Consideramos la proyección canónica dada por $\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{Nil}(A)$, se tiene que $\pi(\mathfrak{a}) \subseteq \pi(\mathfrak{p})$. Tomamos $x \in A/\mathrm{Nil}(A)$ tal que $\pi(x)\pi(\mathfrak{a}) = \pi(0)$, lo que significa que $x\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. Entonces $x^n\mathfrak{a}^{n-1} \subseteq \mathrm{Nil}(A) \neq 0$, como queríamos demostrar. □

4.3.1. Cuerpos finitos

Uno de los anillos cero–dimensionales que no pertenece a la clase de anillos artinianos ni regulares von Neumann es el producto infinito numerable de cuerpos finitos, es decir, $\mathbb{F}_n^{\mathbb{N}}$. Por simplicidad y para mayor compresión, tomaremos el anillo $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$.

Comenzamos describiendo su estructura. Es sabido que:

$$\mathbb{F}_2 \cong \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{\langle X+1 \rangle} = \mathbb{Z}_2.$$

Por lo tanto, el anillo $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ está formado por las n-uplas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n \in \mathbb{F}_2$:

$$\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \ a_n \in \mathbb{F}_2\}$$

Definimos los elementos $e_i = (\delta_{in})_i$ siendo δ la función dada por:

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

Y consideramos los ideales primos generados por $(1-e_i)\mathbb{F}_n^{\mathbb{N}}$ que tienen la forma:

$$\mathfrak{p}_i = (1-e_i)\mathbb{F}_n^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \ a_n = 0 \text{ si } n = i,\, a_n \in \mathbb{F}_2 \text{ si } n \neq i\}$$

es decir, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene: $\mathfrak{p}_i = \mathbb{F}_2 \times \cdots \times \overbrace{\ 0\ }^{i} \times \mathbb{F}_2 \times \ldots$

Estudiando el anillo cociente para cada uno de estos ideales y se verifica que:

$$\mathbb{F}_n^{\mathbb{N}}/\mathfrak{p}_i \cong \mathbb{F}_2$$

El anillo cociente es un cuerpo y por tanto, estos ideales son maximales, por simplicidad, denotaremos estos ideales $\mathfrak{m}_i$. Deducimos entonces que $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ es un anillo cero–dimensional.

Consideramos ahora el ideal $\mathfrak{a} = \mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$ el cual está formado por las sucesiones de elementos de $\mathbb{F}_2$ casi nulas. Este ideal $\mathfrak{a}$ no está contenido en ninguno de los ideales maximales anteriores $\mathfrak{m}_i$, de manera que dentro del anillo total ha de existir otra clase de ideales maximales. La descripción de estos nuevos ideales es un problema complejo, el cual se puede clasificar dentro de la teoría de **filtros y ultrafiltros**.

Antes de continuar con el desarrollo de problema, introducimos brevemente las nociones de filtros, ideales y ultrafiltros.

Sea X un conjunto.

(1) Un **filtro** en X es un subconjunto $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que verifica las condiciones siguientes:
   (I) $X \in \mathfrak{F}$.
   (II) Si $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{F}$.
   (III) Si $A \in \mathfrak{F}$, e $Y \in \mathcal{P}(X)$ verifica $A \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathfrak{F}$.
(2) Un **ideal** en X es un subconjunto $\mathfrak{I} \subseteq (X)$ verificando las proposiciones duales de (I), (II) y (III) anteriores.
(3) Un **ultrafiltro** en X es un filtro $\mathfrak{F}$ maximal, es decir:
   (I) $\mathfrak{F} \neq \mathcal{P}(X)$.
   (II) $\mathfrak{F}$ verifica:
      (1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
      (2) $\mathfrak{F}$ es un filtro.
      (3) Para cada $Y \subseteq X$ se tiene que $Y \in \mathfrak{F}$ ó $\overline{Y} \in \mathfrak{F}$

Teorema 4.9. *Los ideales maximales del anillo $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ están en correspondencia con los ultrafiltros del mismo.*

Para cada elemento $x = (x_n)_n \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ definimos el conjunto dado por:

$$N_x = \{n \in \mathbb{N} \mid \ x_n = 0\}.$$

Este conjunto verifica las siguientes condiciones:

(1) Dados $x, y \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ se tiene que $N_{x+y} = (\overline{N_x} \cap \overline{N_y}) \cup (N_x \cap N_y) = \overline{N_x \cup N_y} \cup (N_x \cap N_y)$, luego $N_x \cap N_y \subseteq N_{x+y}$.
(2) Para $x, y \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ se tiene que $N_{xy} = N_x \cup N_y$, y por tanto, $N_x \subseteq N_{xy}$.

Tomamos ahora un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A = \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, y definimos el filtro:

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}} = \{H \subseteq \mathbb{N} \mid \ \text{existe } x \in \mathfrak{a} \text{ tal que } N_x \subseteq H\}.$$

Podemos hacer la siguiente caracterización: Si $\mathfrak{m} \subseteq A = \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ es un ideal maximal, entonces se tiene que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ es un ultrafiltro. Vamos a comprobarlo:

(1). Se verifica que $\emptyset \notin \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ ya que $1 \notin \mathfrak{m}$.
(2). Es claro.
(3). Dado un $Y \subseteq \mathbb{N}$ definimos $y = (y_n)$ mediante $y_n = 0$ sólo si $n \in Y$, y definimos $z = 1 - y$. Tenemos $N_y = Y$ y $N_z = \mathbb{N} \setminus Y$. Como $yz = y(1 - y) = 0$, se tiene que $y \in \mathfrak{m}$ ó $z \in \mathfrak{m}$; por lo tanto $Y \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ ó $\mathbb{N} \setminus Y \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$.

Por consiguiente, a cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ le podemos asociar un ultrafiltro

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}} = \{H \subseteq \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathfrak{m} \text{ tal que } N_x \subseteq H\}$$

Dado un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ de $\mathbb{N}$ definimos un ideal

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \ N_x \in \mathfrak{F}\}.$$

Vamos a comprobar que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$ es un ideal maximal.

(1). Es cerrado para la suma, ya que dados $x, y \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$, por definición se tiene que $N_x, N_y \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto $N_x \cap N_y \in \mathfrak{F}$. Por otra parte, $N_{x+y} = \overline{N_x \cup N_y} \cup (N_x \cap N_y) \in \mathfrak{F}$ y tenemos que $x + y \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$

(2). Es cerrado para la multiplicación, ya que dados $x = (x_n)_n \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$ y $z = (z_n)_n \in A$, tenemos que:

$$N_{xz} = N_x \cup N_y \in \mathfrak{F}, \text{ y por lo tanto } xz \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}.$$

(3). $\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}} \neq A$, ya que al ser $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro $\emptyset \neq \mathfrak{F}$.

(4). $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}$.
La inclusión $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}}$ es clara. Vamos a ver $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}} \subseteq \mathfrak{F}$. Sea $H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}}$ entonces existe $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$ tal que $N_x \in H$, de manera que podemos garantizar la existencia de un elemento y definido como $y_n = 0$ si $n \notin H$, y se verifica que $y = xz$ para algún $z \in A$ entonces $y \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}$ y por lo tanto $H = N_y \in \mathfrak{F}$.

(5). Finalmente, vamos a ver que si existe un ideal $\mathfrak{a}$ que verifique $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq A$, se tiene que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}$. Para cada $H \in \mathfrak{F}$ existe un elemento $(x_n)_n$ tal que $x_n = 0$ si $n \in H$ y $x_n = 1$ en caso contrario. Entonces si $x \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$, se obtiene $N_x \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}$ pero no que $N_x \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro, concluimos que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathfrak{a} = A$

De esta manera, hemos demostrado y descrito la correspondencia existente entre los ideales maximales del anillo con los ultrafiltros presentes.

Como hemos mencionado al principio del capítulo, este ejemplo es válido para cualquier cuerpo finito $\mathbb{F}_n$ y las componentes de las n-uplas serían la única variable. En general, todo producto infinito numerable de cuerpo es un anillo cero–dimensional.

Otro ejemplo de anillo de dimensión cero que se obtiene a través del cuerpo $\mathbb{F}_2$ es $B = \mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})} + 1\mathbb{F}_2$ donde sus elementos son n–uplas que forman sucesiones de elementos de $\mathbb{F}_2$ convergentes a 1.

Claramente, se tiene que el ideal $\mathfrak{a} = \mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$ es un ideal del anillo B. Además, si consideramos el anillo cociente $B/\mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$, se tiene que es isomorfo a $\mathbb{F}_2$ (un cuerpo), y por tanto $\mathfrak{a}$ es maximal.

Consideramos ahora el conjunto $\mathbb{N}$ con la topología discreta τ_D. Definimos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto de acumulación.

Consideramos el espacio topológico $(\mathbb{N}^*, \tau)$ con β base de entornos de τ definida como:

$$\beta = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_{\infty,n} | n \in \mathbb{N}\}.$$

donde $V_{\infty,n}$ es el entorno de ∞ definido como $V_{\infty,n} = \{m \mid m \geq n \text{ para } n \text{ dado}\}$.

Vamos a comprobar que es una topología:

(1). En primer lugar, se tiene que tanto $\emptyset$ como $\mathbb{N}^*$ pertenecen a τ.

(2). La unión de todos los abiertos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n \in \tau$, y cualquier $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tau$.

(3). Finalmente, para todo $O_n = \{\{n\} | \ n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $O_n \cap O_m = \emptyset \in \tau$ y para la intersección con el entorno $V_{\infty,n}$ distinguimos dos casos:
   (I) Si $m \geq n$, entonces $O_m \cap V_{\infty,n} = V_{\infty,m} \in \tau$,
   (II) si $m < n$ entonces $O_m \cap V_{\infty,n} = \emptyset \in \tau$.

Por lo tanto, se tiene que $(\mathbb{N}^*, \tau)$ es un espacio topológico.

Construimos el anillo $A = C(\mathbb{N}^*, \mathbb{F}_2)$, es decir, las funciones continuas entre los dos espacios. Por tanto, dado $f \in A$, se tiene que $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son abiertos en $(\mathbb{N}^*, \tau)$. Consideramos el punto de acumulación $\{\infty\}$ y distinguimos los siguientes casos:

(I) Si $\infty \in f^{-1}(1)$, se tiene que $f(m) = 1$ para todo $m \geq n$ para un n dado, luego la función f es igual a la función constantemente 1 a partir de m,

(II) en el caso de que $\infty \in f^{-1}(0)$, entonces $f(m) = 0$, lo que supone que $f(m)$ es constantemente 0 a partir de un $m \geq n$ para un n dado.

Entonces el anillo A se corresponde con el anillo $B = \mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})} + \mathbb{F}_2$

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

[AM69] Michael Francis Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley-Longman, 1969.

[And95] David F. Anderson. *Zero-Dimensional Commutative Rings: 171 (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics).* CRC Press, 1995.

[AP19] Daniel D. Anderson and Ira J. Papick, editors. *Ideal Theoretic Methods in Commutative Algebra.* CRC Press, May 2019.

[FKOS11] Marco Fontana, Salah-Eddine Kabbaj, Bruce Olberding, and Irena Swanson. *Commutative Algebra: Noetherian and Non-Noetherian Perspectives.* Springer, 01 2011.

[Gil95a] R. Gilmer. Background and Preliminaries on Zero–Dimensional rings. *Zero–dimensional commutative rings. LNPAM,*, 171:1–13, 1995.

[Gil95b] R. Gilmer. Zero–Dimensional extension rings and subrings. *Zero–dimensional commutative rings. LNPAM,*, 171:27–39, 1995.

[Gil95c] R. Gilmer. Zero–Dimensionality and products of commutative rings. *Zero–dimensional commutative rings. LNPAM,*, 171:15–25, 1995.

[Goo79] K.R. Goodearl. *Von Neumann Regular Rings (Monographs and studies in mathematics).* Pitman Publishing, 1979.

[Huc88] J. A. Huckaba. *Commutative rings with zero divisors.* Marcel Dekker, 1988.

[Kap74] I. Kaplansky. *Commutative rings.* The Univ. Chicago Press, 1974.

[Kar04] D. Karim. Zero–dimensionality and Serre rings. *Serdica Math. J.*, 30:87–94, 2004.

[MA83] Sarajevo M. Arapovic. Characterizations of the 0-dimensional rings. *GLASNIK MATEMATICKI*, 18(38):39–46, 1983.

[Mar] Pascual Jara Martinez. *AC-Básica.*

[Mar74] Paolo Maroscia. Sur les anneaux de dimension zéro. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 56(4):451–459, 4 1974.

[Mil20] James S. Milne. *A Primer of Commutative Algebra*, 2020.

[Olb06] J. Brewer; S. Glaz; W. J. Heinzer; B. M. Olberding. *Multiplicative ideal theory in comutative algebra.* Springer, 2006.

[Pie67] R.S. Pierce. *Modules over Commutative Regular Rings.* American Mathematical Society: Memoirs. American Mathematical Society, 1967.

[Sei53] Abraham Seidenberg. A note on the dimension theory of rings. *Pacific Journal of Mathematics*, 3:505–512, 1953.