Problemas de olimpiadas sobre números complejos

Paola Posadas Prados

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Universidad de Granada

Granada. 2017

Trabajo Fin de Máster

Problemas de olimpiadas sobre números complejos.

Paola Posadas Prados

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster Interuniversitario de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2017

Índice general

Introducción

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es el conjunto de números más extenso que conocemos (a nivel elemental), y surge por la necesidad de resolver determinadas ecuaciones. Pues, en el conjunto de los números reales nos encontramos con que ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ no tienen solución. La solución se encuentra al ampliar el conjunto de los números reales, de manera que esta y otras ecuaciones tengan solución. La principal propiedad es que todo polinomio no constante en una variable con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, y por tanto descompone.

Cardano fue el primero en manipular $\sqrt{-1}$ como si fuera un número, y Euler propuso el símbolo i para denotarlo, el cual se consideraba un número ficticio o imaginario. Pero fue en el siglo XIX cuando, gracias tanto a Gauss como a Hamilton, se definió de una forma más precisa el conjunto de los números complejos como pares ordenados de números reales $(a, b) = a + bi$ con una serie de propiedades, que pasan por la distributividad del producto respecto a la suma.

El presente trabajo está pensado para orientar a los alumnos interesados en participar en la Olimpíada Matemática al final de la enseñanza secundaria, suministrándoles los conceptos necesarios para poder abordar algunos problemas ya propuestos en ediciones anteriores de la Olimpíada y discutiendo algunos de ellos así como otros nuevos que se han considerado de interés.

Comenzaremos el texto con la construcción del cuerpo de los números complejos a partir de los números reales, considerando el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Definiremos los números complejos y las operaciones con números complejos. En una segunda fase estudiaremos algunas de las aplicaciones más destacables de los números complejos, que radican en el estudio de ciertas transformaciones geométricas, como pueden ser traslaciones, giros, etc. En el tercer apartado veremos una interpretación de propiedades de la geometría métrica del plano en términos de números complejos.

La segunda parte del texto está dedicada a analizar y estudiar algunos problemas elegidos de entre los propuestos en diferentes olimpiadas. Hemos dividido esta parte en tres apartados según la dificultad que estimamos tiene cada uno de los problemas tratados. El primer apartado trata de ejercicios sencillos, en el segundo de mayor dificultad y en el tercero de dificultad aún mayor. Aprovechamos las distintas fases de la Olimpíada para organizar estos problemas según las mismas: fase local, nacional e internacional.

Capítulo I

Números complejos

1. El cuerpo de los números complejos

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las operaciones:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Se puede comprobar que las operaciones así definidas verifican las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. El elemento neutro para la suma es $(0,0)$ y el elemento unidad para el producto es $(1,0)$. El elemento opuesto de (a,b) es $(-a,-b)$ y todo elemento $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso, pues:

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

En virtud de estas propiedades podemos afirmar que el conjunto $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ es un cuerpo, el cual se denota por $\mathbb{C}$ y a sus elementos se les llama **números complejos**.
Cada par ordenado $z=(a,b)$ denomina un número complejo que suele denotarse por

$$z=a+bi,$$

expresión que se conoce como **forma binómica** del número complejo z, donde $i=(0,1)$ designa el número complejo que verifica:

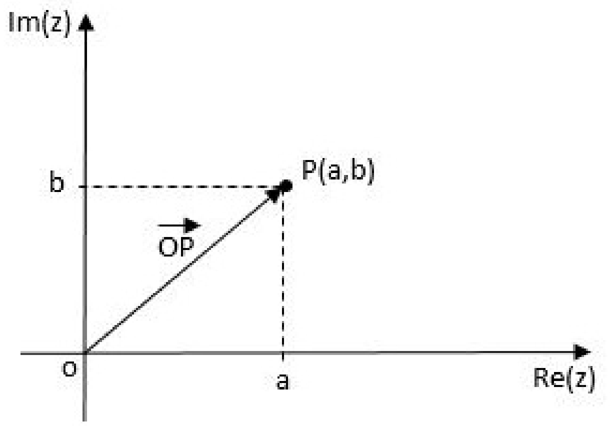
$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Dado un número complejo $z=a+bi$, se dice que a es la **parte real** y que b es la **parte imaginaria** de z. Simbólicamente escribiremos:

$$a=\mathrm{Re}(z)\text{ y }b=\mathrm{Im}(z).$$

Notemos que podemos identificar el número real a con el número complejo: $a=a+0i=(a,0)$. De ahí que podamos considerar $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$.

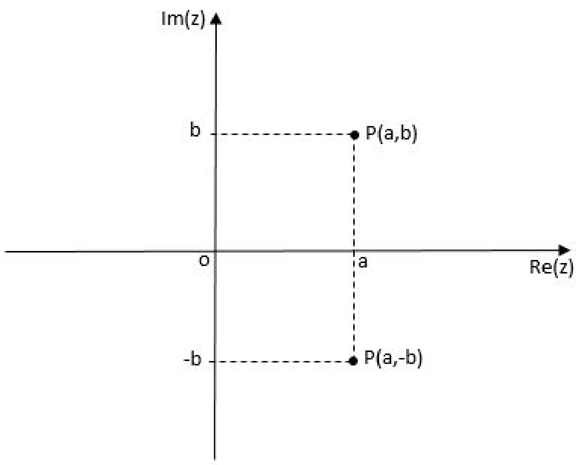
Por otro lado, un conjunto destacable de números complejos son aquellos de la forma: $bi = 0 + bi = (0, b)$; a estos números se les denomina **imaginarios puros**. Es por ello que, en el **plano complejo** o **diagrama de Argand**, llamamos **eje real** al eje de abscisas y **eje imaginario** al eje de ordenadas. A cada número complejo $z = a + bi$ se le asigna el punto P de coordenadas (a, b) en el plano complejo. De P se dice que es el **afijo** del número complejo z, también se le puede asignar el vector libre $\overrightarrow{0P}$, definido entre el origen O y el afijo de z, P. Veámoslo gráficamente:



2. Elementos de los números complejos

Conjugado

Dado un número complejo $z = a + bi$, definimos su **conjugado** como el número complejo $\overline{z} = a - bi$. Geométricamente, el conjugado de un número complejo es el simétrico del punto $P(a, b)$ respecto del eje real, mientras que el **opuesto** de un número complejo es el simétrico del punto $P(a, b)$ respecto del origen.

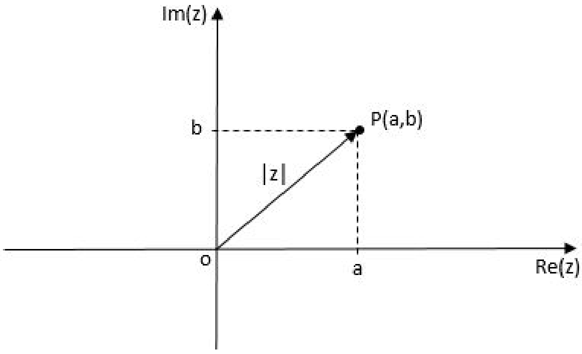


Lema. 2.1.
Para cada $z, \omega \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes propiedades:

(1) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.
(2) $\overline{\overline{z}} = z$.
(3) $\overline{(z + \omega)} = \overline{z} + \overline{\omega}$.
(4) $\overline{(z - \omega)} = \overline{z} - \overline{\omega}$.
(5) $\overline{(z \cdot \omega)} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}$.
(6) $\overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{\omega}}$.
(7) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Módulo

Llamamos **módulo** del número complejo $z = a + bi$ a la distancia entre el origen O y el punto $P(a, b)$, o lo que es lo mismo, la longitud del vector $\vec{OP}$, se designa por $|z|$, y es un número real positivo.



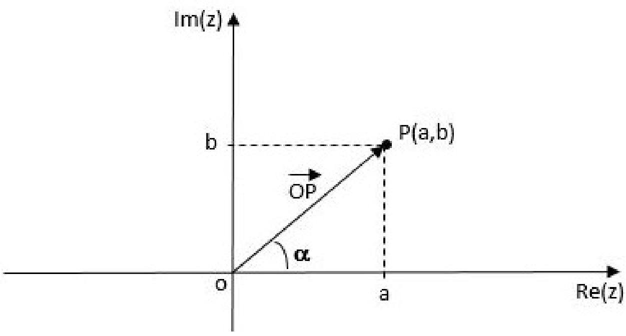
Por el **teorema de Pitágoras** se tiene lo siguiente:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Lema. 2.2.
Para cada $z, \omega \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes propiedades:
(1) $|\bar{z}| = |z|$.
(2) $|z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega|$.

Argumento

El **argumento** de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ es el ángulo que forma el vector $\vec{OP}$ con el eje real positivo, y se denota por α ó $\arg(z)$. Veámoslo gráficamente:



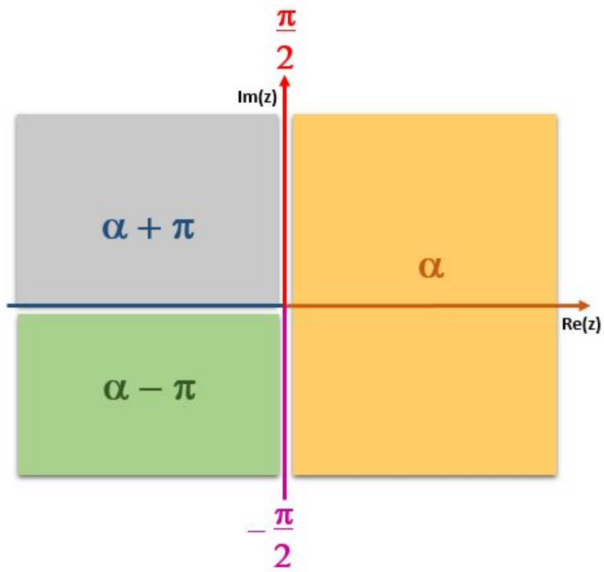
A partir de la trigonometría se deduce lo siguiente:

$$z = a + bi = |z|(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)) \text{ con } \alpha = \mathrm{arc\,tg}(b/a).$$

Esta expresión recibe el nombre de **forma trigonométrica** del complejo z.
También es muy común expresar un número complejo como sigue: $z = (\rho, \alpha)$ ó $z = \rho_\alpha$ donde ρ es el módulo de z, es decir, $\rho = |z|$. Esta expresión se conoce como **forma polar** del número complejo z.
Alternativamente la forma forma polar del número complejo $z = (\rho, \alpha)$ se representa también como $z = \rho e^{i\alpha}$.
Es claro que hay infinitos ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad:

$$z = a + bi = |z|(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)).$$

De ahí que dos números complejos no nulos sean iguales si tienen el mismo módulo y el mismo argumento módulo 360, si trabajamos en grados, ó 2π, si trabajamos en radiales.
De entre todos los argumentos de un número complejo, hay uno único que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$, el cual se denomina **argumento principal** y se denota por $\arg(z)$. Veamos gráficamente como se obtiene el argumento principal de un número complejo:



Lema. 2.3.
Para cada $z, \omega \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes propiedades:

(1) $arg(z \cdot \omega) = arg(z) + arg(\omega)$.
(2) $arg(\overline{z}) = -arg(z)$.
(3) $arg(\frac{z}{\omega}) = arg(z) - arg(\omega)$.

3. Operaciones con números complejos

Ya habíamos definido en el primer apartado la suma y el producto de números complejos dados en forma cartesiana. Ahora veremos el producto de dos números dados en forma polar, lo que nos facilitará el cálculo del cociente, la potencia y la raíz n-ésima de números complejos.

Producto

Sean $z_1 = (\rho_1, \alpha_1), z_2 = (\rho_2, \alpha_2) \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [\rho_1(\cos(\alpha_1) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_1))] \cdot [\rho_2(\cos(\alpha_2) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_1))] = \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)) + i(\cos(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2) + \mathrm{sen}(\alpha_1)\cos(\alpha_2))] = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)). \end{aligned}$$

Por tanto, $z_1 z_2 = (\rho_1\rho_2, \alpha_1 + \alpha_2)$, de donde deducimos que para multiplicar números complejos en forma polar, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Cociente

Sean $z_1 = (\rho_1, \alpha_1), z_2 = (\rho_2, \alpha_2), z = (\rho, \alpha) \in \mathbb{C}$, no nulos, se tiene:

$$\frac{z_1}{z_2} = z \Longleftrightarrow z_1 = z z_2 \Longleftrightarrow \rho_1(\cos(\alpha_1) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_1)) = \rho\rho_2(\cos(\alpha + \alpha_2) + i\,\mathrm{sen}(\alpha + \alpha_2)).$$

Así $\rho_1 = \rho\rho_2$ y $\alpha_1 = \alpha + \alpha_2$, esto es, $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ y $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.
Luego, $\dfrac{z_1}{z_2} = (\rho_1\rho_2, \alpha_1 - \alpha_2)$ y deducimos que para dividir números complejos en forma polar, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Potencia

Si multiplicamos n veces un número complejo, por la expresión anterior del producto de dos números complejos podemos deducir que:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)).$$

Puesto que $z = \rho(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, la igualdad anterior puede escribirse como sigue:

$$[\rho(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))]^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)),$$

expresión que se conoce como **fórmula de de Moivre**, y cuya aplicación práctica fundamental es el cálculo de $\mathrm{sen}(n\alpha)$ y $\cos(n\alpha)$ en función de $\mathrm{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$.

Raíces n-ésimas. Fórmula de de Moivre

Sean $z_1 = (\rho_1, \alpha_1), z_2 = (\rho_2, \alpha_2), z = (\rho, \alpha) \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\sqrt[n]{z_1} = z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2^n \Longleftrightarrow \rho_1(\cos(\alpha_1) + i\,\mathrm{sen}(\alpha_1)) = \rho_2^n(\cos(n\alpha_2) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha_2)).$$

Así, $\rho_1 = \rho_2^n$, y $\alpha_1 = n\alpha_2$; esto es, $\rho_2 = \sqrt[n]{\rho_1}$ y $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_1 + 2k\pi}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Luego, $\sqrt[n]{z_1} = (\sqrt[n]{\rho_1}, \dfrac{\alpha_1 + 2k\pi}{n})$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Si representamos las n raíces de un número complejo $z = \rho_\alpha$ y unimos los afijos de cada una de las n raíces, obtenemos un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$.

Capítulo II

Movimientos

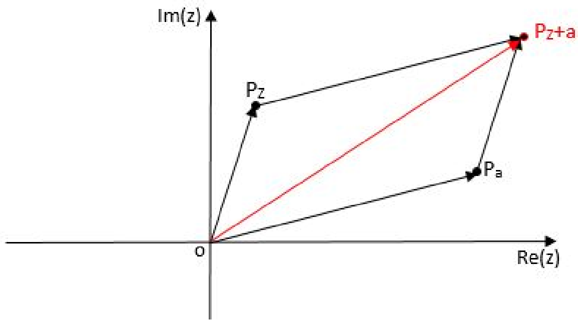
Las aplicaciones más notables de los números complejos radican fundamentalmente en el estudio de ciertas transformaciones geométricas en el plano, como pueden ser traslaciones, giros, etc. Pasemos a estudiarlas.

4. Traslaciones

Sea a un número complejo, la aplicación:

$$t_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } t_a(z) = z + a,$$

se llama **traslación** definida por el complejo a.
Llamamos P_z al afijo del complejo z, P_a al afijo del complejo a y P_{z+a} al afijo de la traslación de z definida por a. Veamos como obtener P_{z+a}:



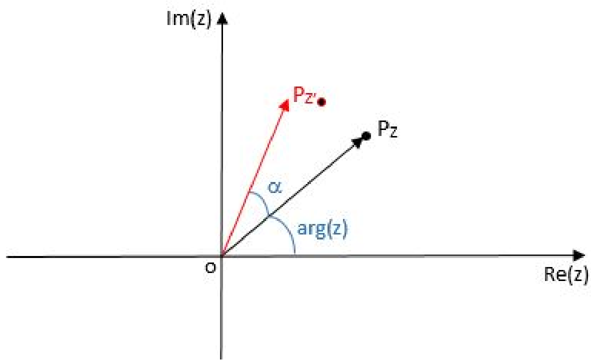
Si sumamos los vectores libres $\overrightarrow{OP}_z$ y $\overrightarrow{OP}_a$, por la **ley del paralelogramo**, obtenemos el vector $\overrightarrow{OP}_{z+a}$, definido entre el origen O y el afijo de $z + a$.

5. Giros

Sea $a = e^{\lambda i} = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$ un número complejo con $|a| = 1$. La siguiente transformación se denomina **giro** de **centro** O y **ángulo** α:

$$g_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } g_a(z) = z' := az.$$

Se llama así por su significado geométrico. Llamamos P_z al afijo del complejo z, $P_{z'}$ al afijo del complejo z'. Veamos como obtener $P_{z'}$ a partir de P_z:



Por un lado: $|z'| = |az| = |a| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z|$. Luego, $P_{z'}$ dista del origen lo mismo que P_z. Por otro lado: $\arg(z') = \arg(az) = \arg(a) + \arg(z) = \alpha + \arg(z)$. Así, el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{OP}_{z'}$ y $\overrightarrow{OP}_z$ es α.

En resumen, $P_{z'}$ es el punto que se obtiene girando el punto P_z mediante un giro de centro O y ángulo α.

Observación:

Si $\alpha = \pi$, entonces $g_a(z) = -z$, es decir se obtiene la **simetría central** como caso particular de un giro.

6. Homotecia

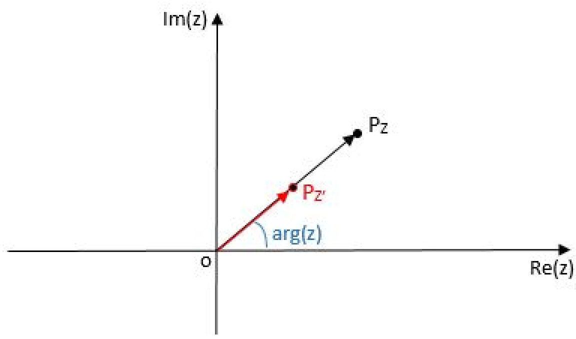
Fijado un número real no nulo $r \in \mathbb{R}^*$, denominamos **homotecia** de centro O y razón r a la aplicación:

$$h_r : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } h_r(z) = z' := rz.$$

Sabemos que $|z'| = |rz| = |r| \cdot |z|$ y que $\arg(z') = \arg(rz) = \arg(r) + \arg(z)$.

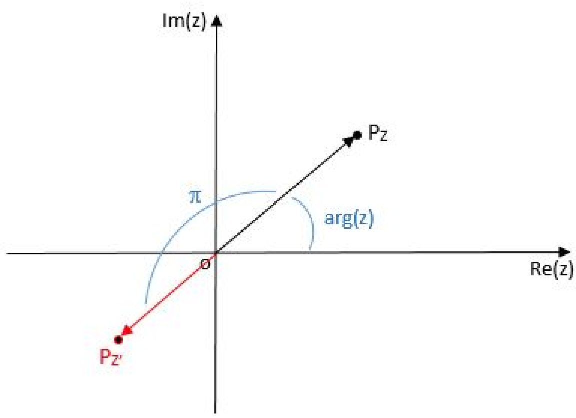
(1) Si $r > 0$:

- $|z'| = |rz| = r \cdot |z|$, y
- $\arg(z') = \arg(z)$, entonces el ángulo $\angle(\overrightarrow{OP}_{z'}, \overrightarrow{OP}_z)$ es cero.
  Luego, los afijos $P_{z'}$ y P_z están alineados en la misma semirrecta que pasa por O.



(2) Si $r < 0$:

- $|z'| = |rz| = |r| \cdot |z|$, y
- $\arg(z') = \pi + \arg(z)$, entonces el ángulo $\angle(\overrightarrow{OP}_{z'}, \overrightarrow{OP}_z)$ igual a π.
  Luego, los afijos $P_{z'}$ y P_z están alineados, pero en distinto lado de O.



7. Semejanza

Dados dos números complejos a y b, llamamos **semejanza** a la aplicación dada por:

$$s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } s(s) = z' := az + b.$$

Como a puede expresarse de la forma $a = re^{i\alpha}$, el paso de z a z' puede hacerse como sigue:

$$z \longmapsto e^{i\alpha}z \longmapsto re^{i\alpha}z \longmapsto re^{i\alpha}z + b.$$

Es decir, es la composición de un giro de centro O y ángulo α, seguido de una homotecia de centro O y razón r, y por último de una traslación definida por el número complejo b.

Capítulo III

Teoremas y fórmulas.

Cuando no somos capaces de resolver un problema de geometría plana, se recomienda tratar usar el cálculo. Existen varias técnicas para hacer cálculos en lugar de la geometría. Para ello, usaremos los números complejos.

El plano será el plano complejo y cada uno de los puntos tiene su representación como número complejo. Estos puntos se suelen denotar por letras minúsculas a, b, c, d, ..., que serán los correspondientes números complejos. Podemos escribir en términos de operaciones de números complejos los resultados sobre geometría analítica y métrica.

Teorema. 7.1.
(1) El segmento ab es paralelo al segmento cd (representado $ab||cd$) si, y sólo si,

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

(2) a, b, c son colineales si, y sólo si,

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}.$$

(3) El segmento ab es perpendicular al segmento cd (representado $ab \perp cd$) si, y sólo si,

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

(4) φ es el ángulo $\angle acb$ (de a hacia b en dirección positiva) si, y sólo si,

$$\frac{c-b}{|\overline{c}-\overline{b}|} = e^{i\varphi}\frac{c-a}{|\overline{c}-\overline{a}|}.$$

Las propiedades de la circunferencia unidad se recogen en el siguiente resultado.

Teorema. 7.2.
(1) Para una cuerda ab se tiene $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-ab$.
(2) Si c pertenece a la cuerda ab, entonces $\overline{c}=\dfrac{a+b-c}{ab}$.
(3) La intersección de las tangentes de a y b es el punto $\dfrac{2ab}{a+b}$.
(4) El pie de la perpendicular de un punto arbitrario c a la cuerda ab es el punto

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c}).$$

(5) La intersección de las cuerdas ab y cd es el punto $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Tres puntos siempre están en una circunferencia; para cuatro puntos tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 7.3.
Los puntos a,b,c,d pertenecen a una circunferencia si, y sólo si, $\dfrac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}\in\mathbb{R}$.

Para triángulo tenemos:

Teorema. 7.4.
Los triángulos abc y pqr son semejantes si, y sólo si, $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{p-r}{q-r}$.

Siguiendo con triángulos, podemos calcular el área.

Teorema. 7.5.
*El **área** del triángulo abc es*

$$p=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1\\ b & \overline{b} & 1\\ c & \overline{c} & 1\end{vmatrix}=\frac{i}{4}(a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}-\overline{a}b-\overline{b}c-\overline{c}a).$$

Para los diversos centros de un triángulo también tenemos relaciones especialmente útiles.

Teorema. 7.6.
(1) El punto c divide el segmento ab en la proporción λ si, y sólo si, $c = \dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.
(2) El punto g es el ***baricentro*** *del triángulo abc si, y sólo si,* $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.
(3) Para el ***ortocentro*** *h y el* ***circuncentro*** *o del triángulo abc se tiene la relación:* $h+2o = a+b+c$.

Teorema. 7.7.
Supongamos que la circunferencia unidad está inscrita en un triángulo abc y que toca a los lados bc, ca, ab respectivamente en p, q, r. Entonces:
(1) Se cumple $a = \dfrac{2qr}{q+r}$, $b = \dfrac{2rp}{r+p}$, $c = \dfrac{2pq}{p+q}$.
(2) Para el ***ortocentro*** *h del triángulo abc se cumple*

$$h = \frac{2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

(3) Para el ***circuncentro*** *o del triángulo abc se cumple*

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Teorema. 7.8.
Dado el triángulo $\triangle$ uno de cuyos vértices es 0, y los dos restantes son x e y.
(1) Si h es el ***ortocentro****, entonces*

$$h = \frac{(\overline{x}y+x\overline{y})(x-y)}{x\overline{y}-\overline{x}y}.$$

(2) Si o es el ***circuncentro****, entonces*

$$h = \frac{xy(\overline{x}-\overline{y})}{x\overline{y}-\overline{x}y}.$$

Capítulo IV

Problemas de olimpiadas. Fase Local

8. Problemas

Ejercicio. 8.1.
Sea $\alpha = z + z^2 + z^4$ y $\beta = z^3 + z^5 + z^6$, donde z es un número complejo tal que $z^7 = 1$ y $z \neq 1$. Entonces, α y β son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ para algunos p y q números enteros. Encuentra el par ordenado (p,q).

SOLUCIÓN.
Tenemos que $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$. Como $z \neq 1$, se verifica que $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Por las fórmulas de Vieta, si α y β son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ obtenemos:

$$-p = \alpha + \beta = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z = -1,$$

$$q = \alpha \cdot \beta = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10} =$$

$$= z^4 + z^6 + 1 + z^5 + 1 + z + 1 + z^2 + z^3 = 1 + 1 + 1 + z + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Obtenemos que $p = 1$ y $q = 2$, por tanto la ecuación buscada es $x^2 + x + 2 = 0$. □

Ejercicio. 8.2.
En el plano complejo $2+i$ *es el centro de un cuadrado y* $5+5i$ *uno de sus vértices. Halla los otros vértices del cuadrado.*

SOLUCIÓN.
Sea Q el centro del cuadrado y A el vértice dado, si giramos el vector $\overrightarrow{QA}$ un ángulo de 90 grados, obtenemos el vector $\overrightarrow{QB}$, siendo B el siguiente vértice del cuadrado. Repitiendo este proceso sobre el vector $\overrightarrow{QB}$ obtenemos el vector $\overrightarrow{QC}$ y aplicando a este el giro de 90 grados nos lleva al vector $\overrightarrow{QD}$. Hemos de recordar que podemos identificar cualquier punto del plano (a,b) con el número complejo $a+bi$ y que si multiplicamos cualquier número complejo por $e^{it}=\cos(t)+i\operatorname{sen}(t)$, su vector de posición experimentará un giro de t grados con centro en el origen O.
En nuestro caso, basta con tomar $t=90^{\circ}$, es decir $\frac{\pi}{2}$ radianes; en ese caso:

$$e^{i\pi/2}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})=i.$$

Así se tiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OA} = 3+4i\\
\overrightarrow{OB} &= i\overrightarrow{OA} = -4+3i\\
\overrightarrow{OC} &= i\overrightarrow{OB} = -3-4i\\
\overrightarrow{OD} &= i\overrightarrow{OC} = 4-3i
\end{aligned}$$

Por último, no debemos olvidar que nuestro procedimiento nos llevará a obtener las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}$ y $\overrightarrow{QD}$, pero en realidad queremos obtener las coordenadas de los puntos B, C y D, por tanto tenemos que sumar a las coordenadas de los vectores obtenidos las coordenadas del centro.

$$\begin{aligned}
A &= Q+\overrightarrow{OA} = (2+i)+(3+4i) = 5+5i\\
B &= Q+\overrightarrow{OB} = (2+i)+(-4+3i) = -2+4i\\
C &= Q+\overrightarrow{OC} = (2+i)+(-3-4i) = -1-3i\\
D &= Q+\overrightarrow{OD} = (2+i)+(4-3i) = 6-2i
\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 8.3.
Resuelve la ecuación compleja $iz^4\,\overline{z}+1=0$.

SOLUCIÓN. [1].
Considerando la forma trigonométrica de un número complejo:

$$i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z^4=\rho^4(\cos(4\theta)+i\,\mathrm{sen}(4\theta))$$
$$\overline{z}=\rho(\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

donde ρ y θ son, respectivamente, el módulo y el argumento de z. La ecuación dada puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\rho^4\,(\cos(4\theta)+i\,\mathrm{sen}(4\theta))\;\rho\,(\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\theta))+1=0.$$

Sabemos que para multiplicar números complejos en forma trigonométrica, se multiplican los módulos y se suman los argumentos, así nos queda:

$$\rho^5\left(\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-1,$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases}\rho^5=1\\ 3\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi=-\pi,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{IV.1}$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{cases}\rho=1\\ 3\theta=-\pi-\frac{\pi}{2}-2k\pi\end{cases}$$

La ecuación

$$3\theta=-\pi-\frac{\pi}{2}-2k\pi=-\frac{3+4k}{2}\pi=\frac{1-4(k+1)}{2}\pi=\left(\frac{1}{2}-2(k+1)\right)\pi,$$

o equivalentemente

$$3\theta=\left(\frac{1}{2}+2h\right)\pi\Longleftrightarrow\theta=\left(\frac{1}{6}+\frac{2h}{3}\right)\pi\Longleftrightarrow\theta=\left(\frac{1}{6}+2t\right)\pi,$$

tiene soluciones:

$$\theta=\left(\frac{1}{6}+2t\right)\pi,\quad\left(\frac{5}{6}+2t\right)\pi,\quad \text{y}\quad\left(\frac{9}{6}+2t\right)\pi.$$

con $t\in\mathbb{Z}$. □

SOLUCIÓN. [2]
Resolver la ecuación $iz^4\overline{z}+1=0$ es equivalente a resolver la ecuación $z^4\overline{z}=i$. Considerando la forma exponencial $z=\rho e^{i\theta}$, donde ρ y θ son, respectivamente, el módulo y el argumento de z se obtiene

$$z^4=\rho^4 e^{4\theta i}$$
$$\overline{z}=\rho e^{-\theta i}$$

Así,

$$\rho^4 e^{4\theta i}\cdot\rho e^{-\theta i}=e^{\frac{\pi}{2}i}\Longleftrightarrow\rho^5 e^{3\theta i}=e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

De donde se obtiene

$$\rho^5=1\Longleftrightarrow\rho=1.$$

Por otro lado,

$$3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{4k+1}{6}\pi.$$

Luego, $z=e^{\frac{4k+1}{6}\pi}$ con $k\in\mathbb{Z}$. Tiene esencialmente tres soluciones. $\square$

Ejercicio. 8.4.
Determina el lugar geométrico de los números complejos z que verifican:

$$|z-2i| = 2|z+3|$$

SOLUCIÓN. [1]
Considerando la forma binómica de un número complejo $z = x + yi$, de la igualdad dada se obtiene

$$\begin{aligned}
&|z-2i| = 2|z+3| \\
\Longleftrightarrow\ &|x+yi-2i| = 2|x+yi+3| \\
\Longleftrightarrow\ &|x+(y-2)i| = 2|(x+3)+yi| \\
\Longleftrightarrow\ &|x+(y-2)i|^2 = 4|(x+3)+yi|^2 \\
\Longleftrightarrow\ &x^2+(y-2)^2 = 4[(x+3)^2+y^2] \\
\Longleftrightarrow\ &x^2+y^2-4y+4 = 4(x^2+6x+9+y^2) \\
\Longleftrightarrow\ &x^2+y^2-4y+4 = 4x^2+24x+36+4y^2 \\
\Longleftrightarrow\ &3x^2+24x+3y^2+2y+32 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &x^2+8x+y^2+\tfrac{4}{3}y+\tfrac{32}{3} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(x+4)^2+(y+\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{52}{9}.
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos que el lugar geométrico pedido es la circunferencia de centro $(-4, -\frac{2}{3})$ y radio $\frac{2\sqrt{13}}{3}$. □

SOLUCIÓN. [2]
El problema es equivalente a resolver la siguiente igualdad:

$$|z-2i|^2 = 4|z+3|^2$$

Usando que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$(z-2i)(\overline{z}+2i) = 4(z+3)(\overline{z}+3),$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
&z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4 = 4(z\overline{z}+3z+3\overline{z}+9) \\
\Longleftrightarrow\ &z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4 = 4z\overline{z}+12z+12\overline{z}+36 \\
\Longleftrightarrow\ &3z\overline{z}+12(z+\overline{z})-2i(z-\overline{z})+32 = 0.
\end{aligned}$$

Sea $z = x + yi$ se tiene que $z\overline{z} = x^2 + y^2$, $z + \overline{z} = 2x$ y $z - \overline{z} = 2yi$, por tanto

$$3(x^2+y^2)+24x+4y+32 = 0, \Longleftrightarrow x^2+y^2+8x+\frac{4}{3}y+\frac{32}{3} = 0, \Longleftrightarrow (x+4)^2+(y+\frac{2}{3})^2 = \frac{52}{9},$$

que representa la circunferencia de centro $(-4, -\frac{2}{3})$ y radio $\frac{2\sqrt{13}}{3}$. □

Ejercicio. 8.5.
Calcula el lugar geométrico de los números complejos z que satisfacen la ecuación

$$|z-3|+|z+3|=12$$

SOLUCIÓN.
Si $z=x+yi$ con $x,y\in\mathbb{R}$, la desigualdad dada puede escribirse como sigue:

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12 \Longleftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+y^2}=12-\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(x+3)^2+y^2=144+(x-3)^2+y^2-24\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$

Aislando el radical y simplificando:

$$(x+3)^2-144-(x-3)^2=-24\sqrt{(x-3)^2+y^2} \Longleftrightarrow$$

$$x^2+6x+9-144-x^2+6x-9=-24\sqrt{(x-3)^2+y^2} \Longleftrightarrow$$

$$12x-144=-24\sqrt{(x-3)^2+y^2} \Longleftrightarrow$$

$$x-12=-2\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(x-12)^2=4[(x-3)^2+y^2] \Longleftrightarrow x^2-24x+144=4(x^2-6x+9+y^2) \Longleftrightarrow$$

$$x^2-24x+144=4x^2-24x+36+4y^2 \Longleftrightarrow 3x^2+4y^2=108 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Por tanto, el lugar geométrico de los puntos del plano, afijos del números complejo z, cuya suma de las distancias a los puntos fijos 3 y -3 es 12, es una elipse de centro $(0,0)$, radio mayor 6 y radio menor $3\sqrt{3}$. □

Ejercicio. 8.6. (Caso general del ejercicio anterior)
Demuestra que el lugar geométrico de los números complejos z que satisfacen la ecuación

$$|z-b|+|z+b|=2a,$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, es una elipse.

SOLUCIÓN.
Si $z = x + yi$, la desigualdad dada puede escribirse como sigue:

$$\sqrt{(x-b)^2+y^2}+\sqrt{(x+b)^2+y^2}=2a \iff \sqrt{(x+b)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(x+b)^2+y^2=4a^2+(x-b)^2+y^2-4a\sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

Aislando el radical y simplificando se tiene:

$$(x+b)^2-4a^2-(x-b)^2=-4a\sqrt{(x-b)^2+y^2} \iff$$

$$x^2+b^2+2bx-4a^2-x^2-b^2+2bx=-4a\sqrt{(x-b)^2+y^2} \iff$$
$$-4a^2+4bx=-4a\sqrt{(x-b)^2+y^2} \iff$$
$$a^2-bx=a\sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

De nuevo, elevando al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$a^4-2a^2bx+b^2x^2=a^2[(x-b)^2+y^2] \iff$$

$$a^4-2a^2bx+b^2x^2=a^2[x^2+b^2-2bx+y^2] \iff$$
$$a^4+b^2x^2=a^2x^2+a^2b^2+a^2y^2 \iff$$
$$a^4-a^2b^2=-b^2x^2+a^2x^2+a^2y^2 \iff$$
$$a^2(a^2-b^2)=(a^2-b^2)x^2+a^2y^2.$$

Para $a \neq b$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1.$$

□

Ejercicio. 8.7.
Calcula $|z|$*, siendo* z *un número complejo tal que arg*$(z^{1/3}) = \frac{1}{2}$*arg*$(z^2 + \overline{z}z^{1/3})$*.*

SOLUCIÓN.
Tenemos que la expresión $z^2 + \overline{z}z^{1/3}$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$z^2 + \overline{z}z^{1/3} = z^{2/3}(z^{4/3} + \overline{z}z^{-1/3}).$$

Así, la igualdad dada queda:

$$\arg(z^{1/3}) = \frac{1}{2}\arg(z^{2/3}(z^{4/3} + \overline{z}z^{-1/3})) \Longleftrightarrow$$

$$\arg(z^{1/3}) = \frac{1}{2}\arg(z^{2/3}) + \frac{1}{2}\arg(z^{4/3} + \overline{z}z^{-1/3}) \Longleftrightarrow$$

$$\arg(z^{1/3}) = \arg(z^{1/3}) + \frac{1}{2}\arg(z^{4/3} + \overline{z}z^{-1/3}).$$

Simplificando:

$$0 = \arg(z^{4/3} + \overline{z}z^{-1/3}).$$

Como $|z|^2 = z\overline{z}$ obtenemos:

$$0 = \arg(z^{4/3} + |z|^2 \cdot z^{-4/3}).$$

Luego, el número complejo $z^{4/3} + |z|^2 \cdot z^{-4/3}$ se encuentra a lo largo del eje real positivo, lo que requiere que $|z| = 1$, ya que $\arg(z^{4/3}) = \frac{4}{3}\arg(z)$, y $\arg(|z|^2 z^{-4/3}) = -\frac{4}{3}\arg(z)$. □

Ejercicio. 8.8.
Sea $z \neq 2$ un número complejo que satisface la ecuación

$$z^2 = 4z + |z|^2 + \frac{15}{|z|^3}.$$

Determina cual es el valor de $|z|^4$.

SOLUCIÓN.
Supongamos $z = x + yi$, donde x e y son números reales. La ecuación dada puede escribirse como sigue:

$$(x+yi)^2 - 4(x+yi) = |x+yi|^2 + \frac{16}{|x+yi|^3} \iff$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy - 4x - 4iy = x^2 + y^2 + \frac{16}{(\sqrt{|x^2+y^2|})^3}$$

Tomando los términos complejos a un lado obtenemos:

$$2iy(x-2) = 2y^2 + 4x + \frac{16}{(\sqrt{|x^2+y^2|})^3}$$

Pero si x e y son números reales, como el miembro izquierdo de la igualdad es un número complejo y el derecho es un número real, significa que el miembro izquierdo debe ser cero, es decir $y = 0$ o $x = 2$.

- Si $y = 0$ la ecuación queda $4x + \frac{16}{|x|^3} = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{2} \Longrightarrow z = -\sqrt{2} \Longrightarrow |z|^4 = 4$.
- Si $x = 2$ la ecuación se reduce a $2y^2 + 8 + \frac{16}{(\sqrt{4+y^2})^3} = 0$, donde todos los términos son positivos, por tanto la suma no puede ser cero, por tanto ha de ser $z \neq 2$.

Luego, concluimos que $z = -\sqrt{2}$ y $|z|^4 = 4$. □

Veamos algunos ejercicios sobre raíces de la unidad.

Ejercicio. 8.9.
Demuestra que $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ *es una raíz cúbica de la unidad.*

SOLUCIÓN.
Dada una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, con raíces x_1 y x_2, sabemos que se verifican las fórmulas de Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Por otro lado, por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que si α es una raíz compleja de una ecuación, entonces $\overline{\alpha}$ también es una raíz de dicha ecuación.
Así, en nuestro caso tenemos que $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $\overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ y se verifica:

$$\alpha + \overline{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -1 \Longrightarrow -1 = -\frac{b}{a} \Longrightarrow a = b,$$

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+3}{4} = 1 \Longrightarrow 1 = \frac{c}{a} \Longrightarrow a = c.$$

De donde se sigue que $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ es una raíz de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.
Como $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, obtenemos que $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ es una raíz cúbica de la unidad. □

Ejercicio. 8.10.
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ los vértices de un polígono regular de 11 lados inscrito en una circunferencia de radio 2. Sea P un punto tal que la distancia de P al centro del círculo es 3. Calcula el valor de la suma

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_{11}|^2$$

SOLUCIÓN.
Sea p el número complejo asociado al punto P y $w = e^{i\frac{2\pi}{11}}$ una raíz undécima de la unidad. Podemos suponer que el polígono de 11 lados esta inscrito en una circunferencia centrada en el origen. Como el radio de la circunferencia es 2 tenemos que

$$A_k = 2e^{i\frac{2\pi k}{11}} = 2(e^{i\frac{2\pi}{11}})^k = 2w^k \text{ con } k = 1, 2, \ldots, 11.$$

Entonces, la suma que se desea calcular puede escribirse como sigue:

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_{11}|^2 = \sum_{k=1}^{11} |p - 2w^k|^2.$$

Como $|z|^2 = z\overline{z}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{11} |p - 2w^k|^2 = \sum_{k=1}^{11} (p - 2w^k)\overline{(p - 2w^k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{11} (p - 2w^k)(\overline{p} - 2\overline{w}^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{11} (p\overline{p} - 2\overline{w}^k p - 2w^k\overline{p} + 4w^k\overline{w}^k) =$$

$$= 11\underbrace{p\overline{p}}_{(1)} - 2\overline{p}\underbrace{\sum_{k=1}^{11} w^k}_{(2)} - 2p\underbrace{\sum_{k=1}^{11} \overline{w}^k}_{(3)} + 4\underbrace{\sum_{k=1}^{11} w^k\overline{w}^k}_{(4)}.$$

La distancia de P al origen es 3, luego $|P|^2 = 3^2 = 9$, así:

$$(1) = p\overline{p} = |P|^2 = 9.$$

Como w es una raíz undécima de la unidad, se verifica que $w^{11} - 1 = 0$, por tanto

$$(w - 1)(w^{10} + w^9 + \ldots + w + 1) = 0.$$

Puesto que $w \neq 1$, tenemos que $w^{10} + w^9 + \ldots + w + 1 = 0$. Así:

$$(2) = \sum_{k=1}^{11} w^k = 0.$$

Por otro lado, $\overline{w} = e^{-i\frac{2k\pi}{11}} = \frac{1}{w}$, luego:

$$(3) = \sum_{k=1}^{11} \overline{w}^k = 1 + \frac{1}{w} + \ldots + \frac{1}{w^9} + \frac{1}{w^{10}} = \frac{w^{10} + w^9 + \ldots + w + 1}{w^{10}} = 0.$$

Finalmente, $w^k \overline{w}^k = \frac{w^k}{w^k} = 1$. Por tanto:

$$(4) = \sum_{k=1}^{11} w^k \overline{w}^k = 11.$$

Luego, obtenemos que

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_{11}|^2 = 11 \cdot 9 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 11 = 99 + 44 = 143$$

□

Ejercicio. 8.11. (Caso general del ejercicio anterior)
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $n \in \mathbb{N}$ los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en un circunferencia de radio 2. Sea P un punto tal que la distancia de P al centro del círculo es 3. Calcula el valor de la suma

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \cdots + |PA_n|^2$$

SOLUCIÓN.
Sea p el número complejo asociado al punto P y $w = e^{i\frac{2\pi}{11}}$ una raíz n-ésima de la unidad. Podemos suponer que el polígono de n lados esta inscrito en una circunferencia centrada en el origen. Como el radio de la circunferencia es 2 tenemos que

$$A_k = 2e^{i\frac{2\pi k}{n}} = 2(e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = 2w^k \text{ con } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces, la suma que se desea calcular puede escribirse como sigue:

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |p - 2w^k|^2.$$

Como $|z|^2 = z\overline{z}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} |p - 2w^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (p - 2w^k)\overline{(p - 2w^k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (p - 2w^k)(\overline{p} - 2\overline{w}^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (p\overline{p} - 2\overline{w}^k p - 2w^k \overline{p} + 4w\overline{w}) =$$

$$= n \underbrace{p\overline{p}}_{(1)} - 2\overline{p} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w^k}_{(2)} - 2p \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overline{w}^k}_{(3)} + 4 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w^k \overline{w}^k}_{(4)}.$$

La distancia de P al origen es 3, luego $|P|^2 = 3^2 = 9$, así:

$$(1) = p\overline{p} = |P|^2 = 9.$$

Como w es una raíz n-ésima de la unidad, se verifica que $w^n - 1 = 0$, por tanto

$$(w-1)(w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + w + 1) = 0.$$

Puesto que $w \neq 1$, tenemos que $w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + w + 1 = 0$. Así:

$$(2) = \sum_{k=1}^{n} w^k = 0.$$

Por otro lado, $\overline{w} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{1}{w}$, luego:

$$(3) = \sum_{k=1}^{n} \overline{w}^k = 1 + \frac{1}{w} + \ldots + \frac{1}{w^{n-2}} + \frac{1}{w^{n-1}} = \frac{w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + w + 1}{w^{n-1}} = 0.$$

Finalmente, $w^k \overline{w}^k = \frac{w^k}{w^k} = 1$. Por tanto:

$$(4) = \sum_{k=1}^{n} w^k \overline{w}^k = n.$$

Luego, obtenemos que

$$|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_n|^2 = n \cdot 9 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot n = 9n + 4n = 13n$$

□

Capítulo V

Problemas de olimpiadas. Fase Nacional

9. Problemas

Ejercicio. 9.1.
Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los afijos de las soluciones de la ecuación

$$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0.$$

SOLUCIÓN.
Observamos que $z = -i$ es una solución de la ecuación, en efecto se cumple la igualdad:

$$(-i)^3 + (-1+i)(-i)^2 + (1-i)(-i) + i = i - (-1+i) - i(1-i) + i = i + 1 - i - i - 1 + i = 0.$$

Como

$$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = (z+i)(z^2 - z + 1),$$

y las raíces de $z^2 - z + 1$ son

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Las tres raíces tienen módulo 1, y es inmediato que la circunferencia pedida es la circunferencia unidad en el plano complejo, de ecuación $|z| = 1$. $\square$

Ejercicio. 9.2.
Si z_1 , z_2 son las raíces de la ecuación con coeficientes reales $z^2 + az + b = 0$, probar que ${z_1}^n + {z_2}^n$ es un número real para cualquier valor natural de n. En el caso particular de la ecuación $z^2-2z+2 = 0$, expresar, en función de n, dicha suma.

SOLUCIÓN.
Por ser la ecuación de coeficientes reales, las soluciones serán, o ambas reales, o complejas conjugadas. Si las dos son reales, ${z_1}^n + {z_2}^n$ es un número real; si son complejas conjugadas, expresadas en forma trigonométrica serán de la forma

$$z_1 = \rho(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)), \quad z_2 = \rho(\cos(\alpha) - i \operatorname{sen}(\alpha)).$$

Usando la fórmula de de Moivre se tiene

$${z_1}^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)), \quad {z_2}^n = \rho^n(\cos(n\alpha) - i \operatorname{sen}(n\alpha)).$$

Por lo tanto

$${z_1}^n + {z_2}^n = 2\rho^n \cos(n\alpha),$$

lo que prueba ${z_1}^n + {z_2}^n$ es un número real. Las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$ son

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i,$$

es decir

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{y} \quad z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

En consecuencia,

$${z_1}^n + {z_2}^n = 2\sqrt{2^n} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

□

Ejercicio. 9.3.
Demostrar que cualquiera que sea el número complejo z, se cumple

$$(1+z^{2^n})(1-z^{2^n}) = 1-z^{2^{n+1}}.$$

Escribiendo las igualdades que resultan al dar a n los valores $0,1,2,\dots$ y multiplicándolas, demostrar que para $|z|<1$ se cumple

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{k\longrightarrow\infty}(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})...(1+z^{2^k}).$$

SOLUCIÓN.

- Por el producto notable de suma por diferencia y por las propiedades de las potencias, tenemos que
$$(1+z^{2^n})(1-z^{2^n}) = 1-(z^{2^n})^2 = 1-z^{2^n\cdot 2} = 1-z^{2^{n+1}} \text{para todo valor de n.}$$

- Entonces, si $|z|\neq 1$, de la expresión anterior se tiene que
$$1+z^{2^n} = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z^{2^n}}.$$
Así
$$(1+z^2)(1+z^{2^2})\cdots(1+z^{2^k}) = \frac{1-z^{2^2}}{1-z^2}\cdot\frac{1-z^{2^3}}{1-z^{2^2}}\cdots\frac{1-z^{2^{k+1}}}{1-z^{2^k}} = \frac{1-z^{2^{k+1}}}{1-z^2}.$$
De donde se deduce que
$$\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-z^{2^{k+1}}) = 1 \text{ cuando } |z|<1.$$
Por lo tanto, considerando las dos expresiones mencionadas anteriormente y teniendo en cuenta las operaciones algebraicas con límites, nos queda:
$$\lim_{k\longrightarrow\infty}(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})\dots(1+z^{2^k}) = \lim_{k\longrightarrow\infty}(1+z)\frac{1-z^{2^{k+1}}}{1-z^2} =$$
$$= \frac{1+z}{1-z^2}\lim_{k\longrightarrow\infty}(1-z^{2^{k+1}}) = \frac{1}{1-z}.$$

□

Ejercicio. 9.4.
Demostrar que la ecuación $z^4+4(i+1)z+1=0$ tiene una raíz en cada cuadrante del plano complejo.

SOLUCIÓN.
Realizando el cambio de variable $z=(1-i)t$ nos queda la ecuación $-4t^4+8t+1=0$ con coeficientes reales. Consideremos la función $f(t)=-4t^4+8t+1$ y notemos que

$$f(-\frac{1}{8})=-\frac{1}{1024}<0 \text{ y } f(0)=1>0,$$

$$f(1)=5>0 \text{ y } f(\sqrt{2})=-15+8\sqrt{2}<0.$$

Luego, la función f cambia de signo en los intervalos $(-\frac{1}{8},0)$ y $(1,\sqrt{2})$ y su derivada $f'(x)=8(-2t^3+1)$ mantiene signo constante en dichos intervalos, así que la ecuación tiene dos raíces reales, $x\in(-\frac{1}{8},0)$ e $y\in(1,\sqrt{2})$.
La regla de los signos de Descartes nos dice que el número de raíces reales positivas de un polinomio $f(x)=0$ es igual al número de cambios de signo de término a término (variaciones) de $f(x)$ o es menor que este en un numero par, y que el número de raíces negativas es igual al número de variaciones de $f(-x)$ o es menor que este en un numero par.
Por tanto, en nuestro caso tenemos, además de las dos raíces reales mencionadas (una negativa y otra positiva), tenemos dos raíces complejas conjugadas que designaremos por α y $\overline{\alpha}$. Por las relaciones de Cardano

$$x\cdot y\cdot\alpha\cdot\overline{\alpha}=xy|\alpha|^2=(-1)^4\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow|\alpha|^2=-\frac{1}{4xy}$$

$$x+y+\alpha+\overline{\alpha}=x+y+2Re(\alpha)=-\frac{0}{-4}=0\Rightarrow Re(\alpha)=-\frac{x+y}{2}.$$

En particular, $Re(\alpha)<0$, es decir α y $\overline{\alpha}$ están en el segundo y tercer cuadrante. Ahora bien,

$$|Re(\alpha)|=\mid\frac{x+y}{2}\mid<\frac{\sqrt{2}+0}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|\alpha|^2=\frac{1}{4|x|y}=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>1\Rightarrow|\alpha|>1.$$

De ambas desigualdades podemos deducir que

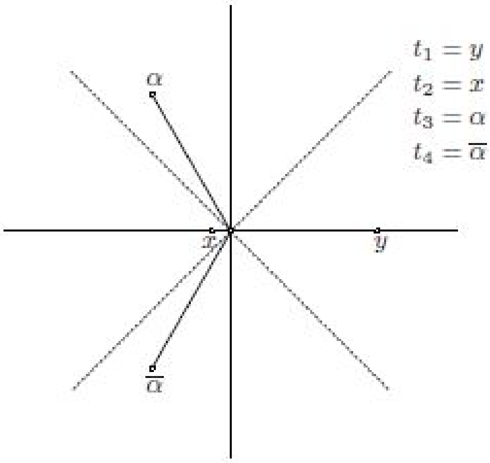
$$|cos(\arg(\alpha))|=\frac{|Re(\alpha)|}{|\alpha|}<\frac{\sqrt{2}/2}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces

$$\frac{\pi}{2}<\arg(\alpha)<\frac{3\pi}{4}\quad\text{o bien}\quad\frac{5\pi}{4}<\arg(\alpha)<\frac{8\pi}{4}$$

Luego los afijos de las soluciones en t están en el eje OX, en el segundo y en el tercer cuadrante. Y por tanto los afijos de las soluciones de la ecuación en z están cada uno en un cuadrante, pues se tiene que

$$\arg(z_j) = \arg((1-i)t_j) = \arg(1-i) + \arg(t_j) = \arg(t_j) - \frac{\pi}{4}$$



□

Ejercicio. 9.5.
Sea D el conjunto de los números complejos que se pueden escribir en la forma $a+b\sqrt{-13}$, con a,b enteros. El número $14 = 14+0\sqrt{-13}$ puede escribirse como producto de dos elementos de D: $14 = 2\cdot 7$. Expresar 14 como producto de dos elementos de D de todas las formas posibles.

SOLUCIÓN.
Si $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, entonces

$$14 = (a+b\sqrt{-13})(c+d\sqrt{-13}) = (ac-13bd)+(bc+ad)\sqrt{-13}.$$

Luego, hay que resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} ac-13bd = 14 \\ bc+ad = 0 \end{cases} \tag{V.1}$$

- Si $b = 0 \Longrightarrow d = 0$, $a = 14,7,2,1$ y $c = 1,2,7,14$, así las soluciones son:

$$(14+0\cdot\sqrt{-13})(1+0\cdot\sqrt{-13}) \quad \text{y} \quad (7+0\cdot\sqrt{-13})(2+0\cdot\sqrt{-13}).$$

- Si $b \neq 0 \Longrightarrow c = \dfrac{-ad}{b}$ y también, sustituyendo esta igualdad en la primera ecuación nos queda $-(a^2+13b^2)\frac{d}{b} = 14$. Entonces el valor de b solamente puede ser 1 o -1 y las soluciones son:

$$(1+\sqrt{-13})(1-\sqrt{-13}) \quad \text{y} \quad (-1+\sqrt{-13})(-1-\sqrt{-13}).$$

$\square$

Ejercicio. 9.6.
Determinar una condición necesaria y suficiente para que los afijos de tres números complejos z_1 , z_2 *y* z_3 *sean los vértices de un triángulo equilátero.*

SOLUCIÓN.

- Supongamos en primer lugar que el triángulo es equilátero. Poniendo
$$\alpha = z_1 - z_2, \beta = z_2 - z_3, \gamma = z_3 - z_1.$$
El hecho de ser equilátero se traduce en
$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|,$$
es decir,
$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \Longleftrightarrow \alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = \gamma\overline{\gamma}.$$
Pero $\alpha + \beta + \gamma = 0$, así que $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 0$, lo cual se escribe como sigue
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0,$$
y desarrollando nos queda la condición siguiente
$${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$
- Veamos que la condición anterior es también suficiente. En efecto, consideremos que se trata de una ecuación cuadrática en z_3 y resolvamos la ecuación
$${z_3}^2 - z_3(z_1 + z_2) + {z_1}^2 + {z_2}^2 - z_1 z_2 = 0.$$
Entonces
$$2z_3 = z_1 + z_2 \pm \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4({z_1}^2 + {z_2}^2 - z_1 z_2)} \Longleftrightarrow 2z_3 = z_1 + z_2 \pm \sqrt{-3(z_1 - z_2)^2} \Longleftrightarrow$$
$$2z_3 = z_1 + z_2 \pm i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \Longleftrightarrow 2(z_3 - z_2) = z_1 - z_2 \pm i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \Longleftrightarrow$$
$$2(z_3 - z_2) = (z_1 - z_2)(1 \pm i\sqrt{3}).$$
Como $|1 \pm i\sqrt{3}| = 2$ y $\arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm i\pi/3$, se tiene que
$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{\pm i\pi/3},$$
de donde
$$|z_3 - z_2| = |z_1 - z_2| \text{ y } \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) = \pm\frac{\pi}{3}.$$
Por tanto, el triángulo es equilátero.

□

Ejercicio. 9.7.
Determinar un polinomio de coeficientes reales no negativos que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$p(0)=0, \quad p(|z|)\leq x^4+y^4,$$

siendo $|z|$ el módulo del número complejo $z=x+iy$.

SOLUCIÓN.
Puesto que $p(0)=0$, podemos poner

$$p(\epsilon)=a_1\epsilon+a_2\epsilon^2+\ldots+a_n\epsilon^n, \text{ con que } a_i\geq 0 \text{ para } i=1,\ldots,n.$$

Ya que debe ser

$$p(\sqrt{x^2+y^2})\leq x^4+y^4 \text{ para todos los } x \text{ e } y \text{ reales,}$$

en particular tomando aquí $y=0$, para todo $x>0$ debe ser

$$a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\leq x^4,$$

o bien

$$\frac{a_1}{x^3}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x}+a_4+a_5x+\ldots+a_nx^{n-4}\leq 1.$$

Luego, $a_1=a_2=a_3=0$, pues de lo contrario sería $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{p(x)}{x^4}=+\infty$, y existiría un $\epsilon_0>0$ tal que $p(\epsilon_0)>\epsilon_0^4$. También $a_5=\ldots=a_n=0$, pues de lo contrario sería $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{p(x)}{x^4}=+\infty$, y existiría un $\epsilon_1>0$ tal que $p(\epsilon_1)>\epsilon_1^4$. Entonces la inecuación queda

$$a_4\leq 1,$$

por tanto

$$p(\epsilon)=a\epsilon^4 \text{ con } 0\leq a\leq 1.$$

Luego, la desigualdad anterior se reduce a

$$a(x^2+y^2)^2\leq x^4+y^4 \text{ para todos los } x \text{ e } y \text{ reales,}$$

o equivalentemente

$$a(s+t)^2\leq s^2+t^2 \text{ para todos los } s \text{ y } t \text{ reales positivos.}$$

Añadiendo a ambos lados de esta desigualdad el término $2st$, reescribámosla como

$$a(s+t)^2+2st\leq (s+t)^2,$$

o bien

$$2st \leq (1-a)(s+t)^2,$$

finalmemte

$$st \leq 2(1-a)(\frac{s+t}{2})^2.$$

La desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos, $st \leq (\frac{s+t}{2})^2$ (con igualdad si y sólo si $s = t$), da que la desigualdad anterior se cumple cuando $1 \leq 2(1-a)$, esto es, cuando $a \leq 1/2$. Y que no se cumple cuando $a > 1/2$, pues en este caso, al tomar $s = t$ resulta

$$2(1-a)(\frac{s+t}{2})^2 = 2(1-a)s^2 < s^2 = st.$$

Luego, las (únicas) soluciones para el problema son pues los polinomios de la forma

$$p(s) = as^4 \text{ con } 0 \leq a \leq 1/2.$$

□

Ejercicio. 9.8.
Se consideran en el plano los siguientes conjuntos de puntos:

$$A = \{\text{afijos de los complejos } z \text{ tales que } \arg(z-(2+3i)) = \pi/4\},$$

$$B = \{\text{afijos de los complejos } z \text{ tales que } |z-(2+i)| < 2\}.$$

Determinar la proyección ortogonal sobre el eje X de $A \cap B$.

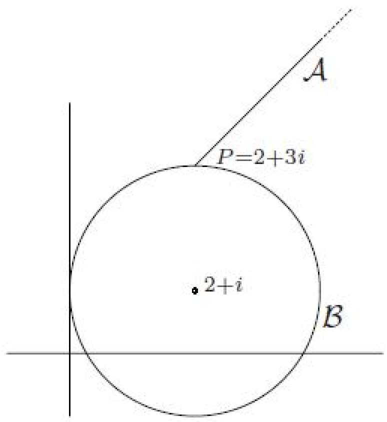
SOLUCIÓN.
Por un lado, $\arg(z-(2+3i)) = \pi/4$ implica que $z-(2+3i)$ se encuentra en la bisectriz del primer cuadrante, es decir

$$z-(2+3i) = \lambda(1+i) \Longleftrightarrow z = (2+\lambda)+i(3+\lambda),$$

por tanto A es una semirrecta de origen $P = 2+3i$. Pongamos $z = x+iy$, entonces

$$|z-(2+i)|^2 < 4 \Longleftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 < 4,$$

luego B es el interior del círculo de centro $2+i$ y radio 2, excluida la circunferencia. Notemos que el punto $(2,3) \notin B$. Por tanto $A \cap B = \emptyset$ y consecuentemente la proyección será $\emptyset$.



□

Ejercicio. 9.9.
Hallar el lugar geométrico del afijo M, del número complejo z, para que esté alineado con los afijos de i y de iz.

SOLUCIÓN. [1]

Si $z = a + ib$, entonces $iz = -b + ia$. Los puntos (a, b) , $(-b, a)$ y $(0, 1)$ deben estar alineados, lo cual significa que

$$\frac{0-a}{-b-a} = \frac{1-b}{a-b};$$

haciendo operaciones y simplificando, resulta

$$a^2 + b^2 - a - b = 0 \Longleftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

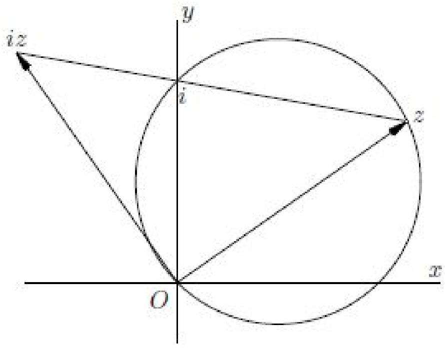
que es la ecuación de una circunferencia de centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, el lugar pedido es la circunferencia circunscrita al cuadrado unidad, de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
□

SOLUCIÓN. [2]

Basta observar que el triángulo que tiene vértices en O y en los afijos de z e iz es rectángulo en O y además isósceles. Si z está en el primer cuadrante iz está en el segundo e i está entre z e iz por lo que el ángulo de vértice z mide constantemente 45º y sus lados pasan por dos puntos fijos: $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Por tanto el lugar pedido es una parte del arco capaz de 45º construido sobre el segmento que une esos puntos, es decir el arco contenido en el primer cuadrante de la circunferencia de la figura.

Si z está en el segundo cuadrante se puede hacer un razonamiento parecido, y desde z se ve el segmento de extremos 0 e i bajo un ángulo de 135º, de forma que el lugar es el arco de la misma circunferencia de antes, pero contenido esta vez en el segundo cuadrante.

El complejo z no puede estar en el tercer cuadrante, y si está en el cuarto, se ve fácilmente que ve los puntos 0 e i bajo ángulo de 45º, de forma que se trata del arco del cuarto cuadrante de la circunferencia de siempre. En conclusión, el lugar geométrico buscado es dicha circunferencia.



□

Ejercicio. 9.10.
Dada la ecuación $x^2 + ax + 1 = 0$, determinar:

a) *El intervalo en que debe mantenerse el número real a para que las raíces de esa ecuación sean imaginarias.*

b) *El lugar geométrico de los puntos representativos de esas raíces en la representación gráfica habitual de los números complejos, cuando a recorre el intervalo anterior.*

SOLUCIÓN.
El discriminante de la ecuación es $a^2 - 4$, que tiene que ser estrictamente menor que cero; por lo tanto el intervalo pedido para a es $-2 < a < 2$. En esas condiciones, las raíces de la ecuación son

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{i\sqrt{4-a^2}}{2}.$$

Así que las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico buscado, tomando como parámetro a, son

$$x = -\frac{a}{2}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}.$$

Eliminando el parámetro resulta

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Cuando $-2 < a < 2$ resulta $-1 < x < 1$, así que el lugar geométrico es la circunferencia unidad, de ecuación compleja $|z| = 1$, de la que se han eliminado los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. □

Ejercicio. 9.11.
Dado un pentágono regular se considera el pentágono convexo limitado por sus diagonales. Se pide calcular:

a) La relación de semejanza entre los dos pentágonos convexos.

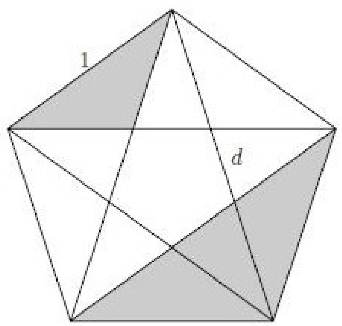
b) La relación de sus áreas.

c) La razón de la homotecia que transforma el primero en el segundo.

SOLUCIÓN.

a) Podemos considerar sin pérdida de generalidad que el lado mide 1, con lo que la diagonal d se calcula mediante la semejanza entre los triángulos sombreados:

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \text{ (como } d \geq 1) \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Este número es el llamado número áureo y se suele designar por Φ. Cumple $\Phi^2 = \Phi + 1$. La relación r de semejanza del pentágono grande al pequeño es:

$$r = \frac{l_{ext}}{l_{int}} = \frac{1}{d-2(d-1)} = \frac{1}{2-d} = \frac{1}{2-\Phi} = \frac{2}{3-\sqrt{5}}.$$

b) Como $A_{ext} = \frac{5l_{ext} \cdot ap_{ext}}{2}$ y $A_{int} = \frac{5l_{int} \cdot ap_{int}}{2}$, se tiene que la relación de las áreas es

$$r^2 = \frac{2}{7-3\sqrt{5}}.$$

c) Los dos pentágonos son homotéticos en una homotecia cuyo centro es el centro del pentágono y la razón es $-\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$.

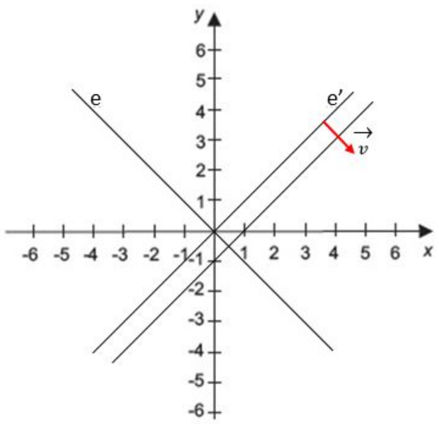
□

Ejercicio. 9.12.
Demostrar que la transformación producto de la simetría de centro $(0,0)$ por la simetría de eje la recta de ecuación $x = y + 1$, puede expresarse como producto de una simetría de eje la recta e por una traslación de vector $\overrightarrow{v}$, con e paralela a $\overrightarrow{v}$. Determinar una recta e y un vector $\overrightarrow{v}$ que cumplan las condiciones indicadas. ¿Han de ser únicos e y $\overrightarrow{v}$?

Solución.
Sabemos que todo giro de centro C y ángulo α se puede descomponer como producto de dos simetrías axiales (dos rectas que pasan por el centro de giro, y forman un ángulo $\alpha/2$). Por tanto, la simetría de centro $(0,0)$ equivale a un giro de 180^o que se puede descomponer en producto de dos simetrías de ejes e y e' (de ecuaciones $x+y=0$ y $x-y=0$ respectivamente) concurrentes en $(0,0)$ y formando entre sí un ángulo de 90^o.
Por otra parte, el producto de dos simetrías es una traslación cuando los ejes de simetría son paralelos y el vector de la traslación producto es perpendicular a ambos ejes y de módulo doble que la distancia entre los ejes paralelos.
Llamando g a la simetría central dada, s a la simetría axial de eje $x = y+1$, resulta:

$$s \circ g = s \circ (e' \circ e) = (s \circ e') \circ e = t \circ e,$$

siendo e y e' las simetrías axiales y t la traslación de vector $\overrightarrow{v} = (1,-1)$. En definitiva, el resultado final es el producto de tres simetrías axiales respecto a ejes que no se cortan en un mismo punto, que es una simetría axial con deslizamiento (traslación) a lo largo de su eje.



La recta e' está unívocamente determinada pues ha de ser paralela a s y pasar por el origen; e también lo está por pasar por el origen y ser perpendicular a s.

Finalmente $\overrightarrow{v}$ está unívocamente determinado por los datos que fijan su dirección (perpendicular a s), sentido (de e' a s) y módulo (doble de la distancia entre las paralelas e' y s). Por tanto e y $\overrightarrow{v}$ son únicos. □

Ejercicio. 9.13.
Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado ABCD, sabiendo que A está sobre la recta $y-2x-6=0$, C en $x=0$ y B es el punto (a, 0) , siendo $a=log_{2/3}(16/81)$.

SOLUCIÓN.
Por las propiedades de las potencias y de los logaritmos, se tiene que

$$a=log_{2/3}(16/81)=log_{2/3}(2^4/3^4)=log_{2/3}((2/3)^4)=4log_{2/3}(2/3)=4\cdot\frac{log(2/3)}{log(2/3)}=4.$$

Luego, las coordenadas de B son $(4,0)$.
Sabemos que el vértice A puede obtenerse a través del giro de 90º del vértice C con centro en B. Sea $z=bi$ un punto de la recta $x=0$ y $z'=a'+b'i$ el giro de z de centro B y ángulo 90º tenemos que

$$z'-4=(z-4)e^{\pm i\pi/2}\iff a'+b'i-4=\pm i(bi-4)\iff a'-4+b'i=\pm(-b-4i)\iff$$

$$a'-4+b'i=\pm(b+4i)\iff a'=4\pm b \text{ y } b'=\pm 4.$$

Por tanto, si aplicamos a la recta $x=0$ un giro de centro B y ángulo 90º ($\frac{\pi}{2}$ radianes); dicha recta se transforma, dependiendo del sentido de giro, en $y=4$ o en $y=-4$. Así, las posibles posiciones de A están dadas por la intersección de estas dos rectas con $y=2x+6$.
En el primer caso se trata del punto A_1(-1, 4). La recta que pasa por $B(4,0)$ y es perpendicular a $A_1B=(5,-4)$ tiene como ecuación vectorial la siguiente

$$(x,y)=(4,0)+\lambda(4,5),$$

y como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=4+\lambda 4\Longrightarrow\lambda=\frac{x-4}{4}\\ y=\lambda 5\Longrightarrow\lambda=\frac{y}{5}\end{cases}\tag{V.2}$$

pasando a ecuación general se obtiene

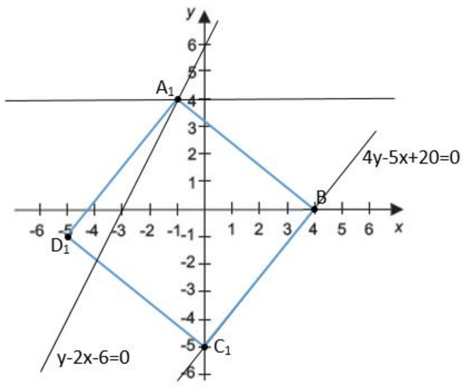
$$\frac{x-4}{4}=\frac{y}{5}\iff 4y-5x+20=0$$

Esta recta corta al eje $x=0$ en el punto $(0,-5)$, que es C_1. Ahora calculamos el cuarto vértice, $D_1(x,y)$, mediante el giro de centro C_1 y ángulo 90º del vértice B, esto es

$$d_1-c_1=(b-c_1)e^{i\pi/2}\iff x+yi-(-5i)=(4-(-5i))i\iff x+(y+5)i=-5+4i$$

$$\iff x = -5 \text{ e } y = -1.$$

Luego, tenemos que el cuarto vértice tiene como coordenadas $D_1(-5, -1)$.



En el segundo caso, la intersección de $y = 2x + 6$ con $y = -4$ es A_2(-5,-4). El punto C_2 se calcula de la misma manera que antes, la recta que pasa por B y es perpendicular a a_2B tiene por ecuación $4y + 9x - 36 = 0$, que corta al eje $x = 0$ en el punto $C_2(0,\ 9)$, y finalmente $d_2 = (c_2 - b)i + c_2 = (9i - 4)i + 9i = -9 + 5i$, es decir el cuarto vértice es $D_2(-9, 5)$. □

Capítulo VI

Problemas de olimpiadas. Fase Internacional

10. Problemas

Veamos un ejercicio de distancias en polígonos regulares.

Ejercicio. 10.1.
Si $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ es un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r. Prueba que para cualquier punto P de la circunferencia y para $m<n$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^{2m} = \binom{2m}{m} nr^{2m}.$$

SOLUCIÓN.
Pongamos el centro del polígono es el origen del complejo y que $z=e^{\frac{i\pi}{n}}$, así $A_k=z^{2k}$. Sea p el afijo de P (donde $|P|=1$). Denotaremos el lado izquierdo de la igualdad por S. Tenemos que demostrar que $S=\binom{2m}{m}\cdot n$. Tenemos que

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^{2m} = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^{2k}-p\right|^{2m}.$$

Notemos que los argumentos de los números complejos $(z^{2k}-p)\cdot z^{-k}$ (donde $k\in 0,1,2,\ldots,n-1$) son igual al argumento del número complejo $(1-p)$, por lo tanto $\frac{(z^{2k}-p)\cdot z^{-k}}{1-p}$ es un número real positivo. Como $|z^{-k}|=1$ obtenemos

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^{2k}-p\right|^{2m} = |1-p|^{2m}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{z^{2k}-p}{1-p})^{2m} = |1-p|^{2m}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(z^{2k}-p)^{2m}}{(1-p)^{2m}}.$$

Como S es un número real positivo:

$$S = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z^{2k} - p)^{2m} \right|.$$

Ahora bien, por la fórmula del binomio de Newton nos queda

$$S = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot z^{2ki} \cdot (-p)^{2m-i} \right] \cdot z^{-2mk} \right|.$$

Equivalentemente

$$S = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot z^{2k(i-m)} \cdot (-p)^{2m-i} \right| = \left| \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot (-P)^{2m-i} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} \right|.$$

- Si $i \neq m$ obtenemos
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = \frac{z^{2n(i-m)} - 1}{z^{2(i-m)} - 1},$$
para $z^{2n(i-m)} - 1 = 0$ y $z^{2(i-m)} - 1 \neq 0$, nos queda
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = 0.$$

- Si $i = m$ obtenemos
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Luego, podemos concluir que

$$S = \left| \binom{2m}{m} \cdot (-p)^m \cdot n \right| = \binom{2m}{m} \cdot n \cdot |(-p)^m|.$$

Como $|p| = 1$ obtenemos

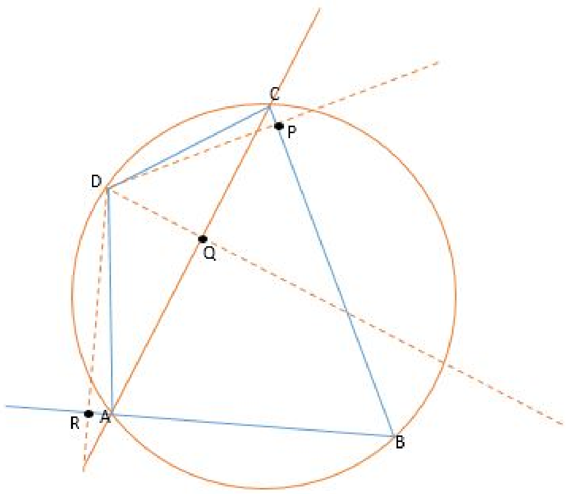
$$S = \binom{2m}{m} \cdot n$$

□

A continuación, veremos tres ejercicios en los que intervienen polígonos inscritos en una circunferecia.

Ejercicio. 10.2.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares de D a las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Demuestre que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ADC$ son concurrentes en AC.

SOLUCIÓN.



Un cuadrilátero cíclico es aquel cuyos vértices se encuentran en una misma circunferencia. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el cuadrilátero $ABCD$ se encuentra en la circunferencia unidad del plano complejo. Por el teorema de la bisectriz, que las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se intersecan en AC es equivalente a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Longleftrightarrow AB^2CD^2 = BC^2AD^2 \Longleftrightarrow |a-b|^2 \cdot |c-d|^2 = |b-c|^2 \cdot |d-a|^2.$$

Como $\overline{z} = \frac{1}{z}$, observando que

$$|a-b|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (a-b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) = -\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Por tanto, nos queda

$$\frac{(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{(c-d)^2}{cd} = \frac{(b-c)^2}{bc} \cdot \frac{(d-a)^2}{da} \Longleftrightarrow (a-b)^2 \cdot (c-d)^2 = (b-c)^2 \cdot (d-a)^2.$$

Consideremos ahora la otra condición $PQ = QR$. Sabemos que P, Q y R, por ser los pies de las perpediculares de D a as líneas BC, CA y AB respectivamente, son los puntos

$$p = \frac{b+c+d-\frac{bc}{d}}{2}, q = \frac{a+c+d-\frac{ac}{d}}{2}, r = \frac{a+b+d-\frac{ab}{d}}{2}.$$

Por tanto,

$$p-q = \frac{b-a-\frac{bc}{d}+\frac{ac}{d}}{2} = \frac{(c-d)(a-b)}{2d}, \overline{p}-\overline{q} = \frac{(\frac{1}{c}-\frac{1}{d})(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}{\frac{2}{d}} = \frac{(c-d)(a-b)}{2abc}.$$

Así,

$$|p-q|^2 = (p-q)(\overline{p}-\overline{q}) = \frac{(c-d)^2(a-b)^2}{4abcd}.$$

Similarmente, tenemos

$$r-q = \frac{b-c-\frac{ab}{d}+\frac{ac}{d}}{2} = \frac{(d-a)(b-c)}{2d}, \overline{r}-\overline{q} = \frac{(\frac{1}{d}-\frac{1}{a})(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})}{\frac{2}{d}} = \frac{(d-a)(b-c)}{2abc}.$$

Así,

$$|p-q|^2 = (p-q)(\overline{p}-\overline{q}) = \frac{(d-a)^2(b-c)^2}{4abcd}.$$

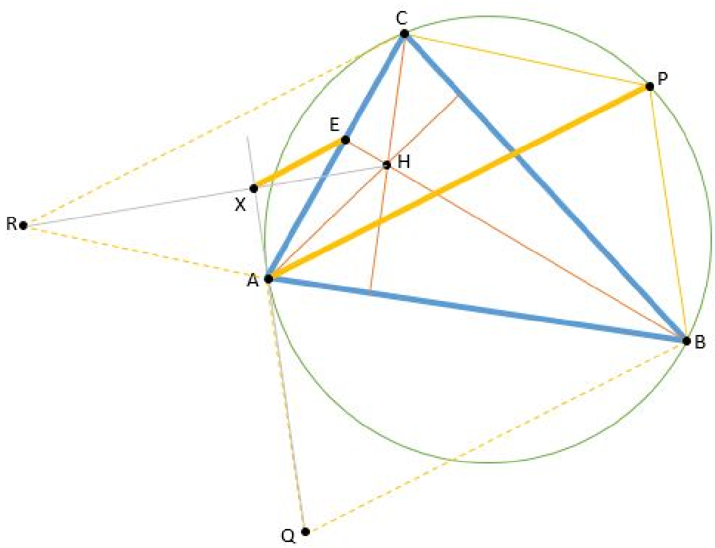
Como $PQ^2 = QR^2$, esto da

$$\frac{(c-d)^2(a-b)^2}{4abcd} = \frac{(d-a)^2(b-c)^2}{4abcd} \Longleftrightarrow (c-d)^2(a-b)^2 = (d-a)^2(b-c)^2.$$

Por lo tanto, $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices del ángulo $\angle ABC$ y $\angle ADC$ son concurrentes en AC. $\square$

Ejercicio. 10.3.
Sea H el ortocentro del triángulo ABC y P un punto arbitrario de su circunferencia circunscrita. Sea E el pie de la perpendicular BH y sean $PAQB$ y $PARC$ dos paralelogramos. Si AQ y HR se intersecan en X, prueba que $EX||AP$.

SOLUCIÓN.



Supongamos que el triángulo ABC esta inscrito en la circunferencia unidad. Usando el Teorema 7.6.3 tenemos

$$h = a + b + c,$$

y usando el Teorema 7.2.4 tenemos

$$e = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ac}{b}).$$

Puesto que $PAQB$ es un paralelogramo, los puntos medios de PQ y AB coinciden, y según el Teorema 7.6.1

$$q = a + b - p$$

y análogamente

$$r = a + c - p.$$

Puesto que los puntos X, A y Q son colineales, usando el Teorema 7.1.2 tenemos

$$\frac{x-a}{\overline{x}-\overline{a}} = \frac{a-q}{\overline{a}-\overline{q}} = \frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}} = -pb,$$

O, de forma equivalente

$$\overline{x} = \frac{pb + a^2 - ax}{abp}.$$

Puesto que los puntos H, R y X son colineales también, usando el mismo teorema obtenemos

$$\frac{x-h}{\overline{x}-\overline{h}} = \frac{h-r}{\overline{h}-\overline{r}} = \frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}}$$

es decir

$$\overline{x} = \frac{x - a - b - c + p + \frac{bp}{a} + \frac{bp}{c}}{bp}.$$

Igualando las expresiones obtenidas para $\overline{X}$ nos queda

$$x = \frac{1}{2}(2a + b + c - p - \frac{bp}{c}).$$

Por el Teorema 7.1.1, es suficiente probar que

$$\frac{e-x}{\overline{e}-\overline{x}} = \frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}} = -ap.$$

Por un lado,

$$e - x = \frac{1}{2}(p + \frac{bp}{c} - a - \frac{ac}{b}) = \frac{bcp + b^2p - abc - ac^2}{2bc} = \frac{(b+c)(bp-ac)}{2bc},$$

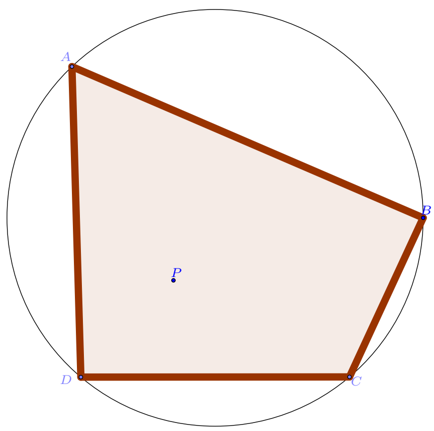
y por conjugación

$$\overline{e} - \overline{x} = \frac{(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})(\frac{1}{bp} - \frac{1}{ac})}{2\frac{1}{bc}} = -\frac{(b+c)(bp-ac)}{2abcp}.$$

$\square$

Ejercicio. 10.4.
En el cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz de ninguno de los ángulos los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CDA$. Sea P un punto en el interior de $ABCD$ de tal manera que $\angle PBC = \angle DBA$ y $\angle PDC = \angle BDA$. Demostrar que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico si y sólo si $AP = CP$.

SOLUCIÓN.



Supongamos primero que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y que esta inscrito en la circunferencia unidad. Si $\angle ABD = \varphi$ y $\angle BDA = \theta$, por T1.4 (después de elevar al cuadrado) se tiene que

$$\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}} = e^{i2\varphi}\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}, \quad \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} = e^{i2\varphi}\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}},$$

$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} = e^{i2\theta}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}}, \quad \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}} = e^{i2\theta}\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}}.$$

Usando que si z pertenece a la circunferencia unidad, se tiene que $\overline{z} = \frac{1}{z}$, a partir de la primera de estas igualdades obtenemos

$$\frac{d-b}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} = e^{i2\varphi}\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \iff \frac{db(d-b)}{b-d} = e^{i2\varphi}\frac{ab(a-b)}{b-a} \iff e^{i2\varphi} = \frac{d}{a}.$$

De forma similar, de la cuarta igualdad se tiene $e^{i2\theta} = \frac{b}{a}$.
A partir de la segunda igualdad obtenemos

$$-cd = \frac{d}{a}\cdot\frac{b(p-b)}{\overline{bp}-1} \iff -abc\overline{p}+ac = d(p-b) \iff \overline{p} = \frac{ac+bd-pd}{abc},$$

y desde la tercera

$$\overline{p} = \frac{ac + bd - pb}{acd}.$$

Ahora, considerando las dos últimas expresiones, se deduce que

$$p = \frac{ac + bd}{b + d}.$$

Tenemos que probar que

$$|a - p|^2 = |c - p|^2 \Longleftrightarrow (a - p)(\overline{a} - \overline{p}) = (c - p)(\overline{c} - \overline{p}),$$

lo que se sigue de lo siguiente

$$a - p = \frac{ab + ad - ac - bd}{b + d}, \quad \overline{a} - \overline{p} = \frac{cd + ga - bd - ac}{ac(b + d)}$$

$$c - p = \frac{bc + cd - ac - bd}{b + d}, \quad \overline{c} - \overline{p} = \frac{ad + ab - bd - ac}{ac(b + d)}.$$

Supongamos ahora que $AP = CP$, o lo que es lo mismo $|a-p| = |c-p|$. Supongamos también que la circunferencia circunscrita del triángulo ABC es la unidad. Elevando al cuadratura la última igualdad nos queda

$$a\overline{p} + \frac{p}{a} = c\overline{p} + \frac{p}{c}, \Longleftrightarrow (a - c)(\overline{p} - \frac{p}{ac}) = 0.$$

Esto significa que $\overline{p} = \frac{p}{ac}$. Sea D perteneciente a la cuerda del $D'C$. Entonces por Teorema 7.2.2

$$\overline{d} = \frac{c + d' - d}{cd'}.$$

Por las condiciones del problema que tenemos $\angle DBA = \angle CBP = \varphi$ y $\angle ADB = \angle PDC = \theta$, y elevando al cuadrado en el Teorema 7.1.4

$$\frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} = e^{i2\varphi}\frac{d - b}{\overline{d} - \overline{b}}, \quad \frac{p - b}{\overline{p} - \overline{b}} = e^{i2\varphi}\frac{c - b}{\overline{c} - \overline{b}},$$

$$\frac{b - d}{\overline{b} - \overline{d}} = e^{i2\theta}\frac{a - d}{\overline{a} - \overline{d}}, \quad \frac{c - d}{\overline{c} - \overline{d}} = e^{i2\theta}\frac{p - d}{\overline{p} - \overline{d}}.$$

Multiplicando las dos primeras igualdades nos queda

$$\frac{p - b}{\overline{p} - \overline{b}} \cdot \frac{d - b}{\overline{d} - \overline{b}} = \frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} \cdot \frac{c - b}{\overline{c} - \overline{b}} = ab^2c.$$

De donde se obtiene

$$\frac{p - b}{\overline{p} - \overline{b}} \cdot \frac{d - b}{\overline{d} - \overline{b}} = ab^2c \Longleftrightarrow \frac{p - b}{\frac{p}{ac} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{d - b}{\overline{d} - \frac{1}{b}} = ab^2c \Longleftrightarrow \frac{abc(p - b)}{bp - ac} \cdot \frac{b(d - b)}{b\overline{d} - 1} = ab^2c \Longleftrightarrow$$

$$(p-b)(d-b)=(bp-ac)(b\overline{d}-1) \Longleftrightarrow (d-b^2\overline{d})p = bd-b^2-abc\overline{d}+ac \Longleftrightarrow$$

$$p=\frac{ac+bd-b^2-abc\overline{d}}{d-b^2\overline{d}} \Longleftrightarrow p=\frac{c[acd'+bdd'-b^2d'-abc-abd'+abd]}{cdd'-b^2c-b^2d'+b^2d}.$$

Como los puntos d, c, d' son colineales, por el Teorema 7.1.2 obtenemos

$$\frac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}}=\frac{c-d'}{\overline{c}-\overline{d'}}=-cd',$$

Multiplicando la tercera y la cuarta igualdad nos queda

$$(b-d)(p-d)(\overline{a}-\overline{d})-(\overline{b}-\overline{d})(\overline{p}-\overline{d})(a-d)(-cd')=0.$$

Sustituyendo los valores para p nos da un polinomio en d, que a lo sumo es de cuarto grado. Observando el coeficiente de d^4 del sumando de la izquierda y de la derecha obtenemos que el polinomio es de grado a lo sumo 3. Se puede observar que a y b son dos de las raíces. Ahora vamos a probar que d' es la tercera raíz, lo que implicaría $d=d'$. Para $d=d'$ obtenemos

$$p=\frac{c[acd'+bd'^2-b^2d'-abc]}{cd'^2-b^2c} \Longleftrightarrow p=\frac{c[d'(ac+bd')-b(bd'+ac)]}{c(d'^2-b^2)} \Longleftrightarrow$$

$$p=\frac{d'(ac+bd')-b(ac+bd')}{d'^2-b^2} \Longleftrightarrow p=\frac{(d'-b)(ac+bd')}{d'^2-b^2} \Longleftrightarrow p=\frac{ac+bd'}{d'+b},$$

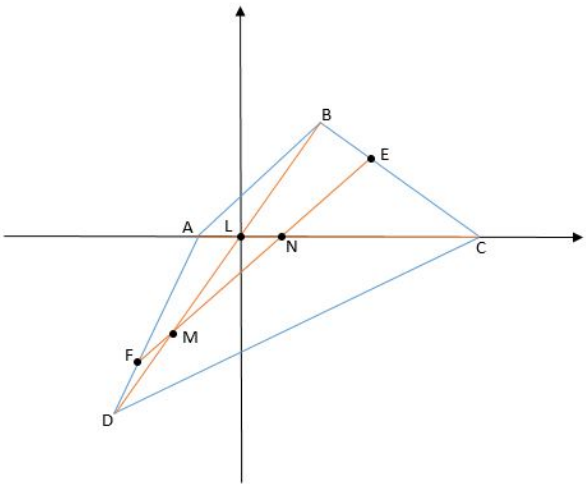
$$d-p=\frac{d'^2-ac}{b+d'}, \qquad \overline{d}-\overline{p}=-bd'\frac{d'^2-ac}{ac(b+d')},$$

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}}=-d'a, \qquad \frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}=-d'b.$$

Por lo tanto $d=d'$, de ahí se obtiene que el cuadrilátero $ABCD'$ es cíclico. □

Ejercicio. 10.5.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos lados BC y AD son de igual longitud pero no paralelos. Sea E y F puntos interiores de los lados BC y AD respectivamente, tales que $BE = DF$. Las líneas AC y BD se intersecan en L, las líneas BD y EF se intersecan en M, y las líneas EF y AC se intersecan en N. Consideremos que todos estos triángulos LMN como E y F varían. Demuestre que las circunferencias de estos triángulos tienen un punto común distinto de L.

SOLUCIÓN.



Supongamos que el punto L es el origen y que AC esta en el eje real. Llamemos $\angle CLD = \varphi$ y $e^{i\varphi} = \theta$. Entonces $a = r$, $b = u\theta$, $c = s$, $d = v\theta$, donde $r, s, u, v \in \mathbb{R}$.
Como $AD = BC$ y $DF = BE$, entonces se tiene que $AF = \epsilon AD$ y $CE = \epsilon BC$. O lo que es lo mismo

$$|a - f| = \epsilon |a - d| \text{ y } |c - e| = \epsilon |b - c|.$$

Del Teorema 7.6.1 se sigue que

$$a - f = \epsilon(a - d) \text{ y } c - e = \epsilon(b - c).$$

De donde se obtiene

$$f = a - \epsilon(a - d) = (1 - \epsilon)a + \epsilon d = (1 - \epsilon)r + \epsilon v\theta,$$

$$e = c - \epsilon(b - c) = (1 - \epsilon)c + \epsilon b = (1 - \epsilon)s + \epsilon u\theta.$$

Como M pertenece a LD tenemos que $m = t\theta$ donde $t \in \mathbb{R}$ y dado que M también pertenece a EF, por el Teorema 7.1.2 tenemos que

$$\frac{f - m}{\overline{f} - \overline{m}} = \frac{e - f}{\overline{e} - \overline{f}},$$

por lo tanto

$$\frac{(1-\epsilon)r+\epsilon v\theta-t\theta}{(1-\epsilon)r+\epsilon v\frac{1}{\theta}-t\frac{1}{\theta}}=\frac{(1-\epsilon)s+\epsilon u\theta-[(1-\epsilon)r+\epsilon v\theta]}{(1-\epsilon)s+\epsilon u\frac{1}{\theta}-[(1-\epsilon)r+\epsilon v\frac{1}{\theta}]}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{(1-\epsilon)r+(\epsilon v-t)\theta}{(1-\epsilon)r+(\epsilon v-t)\frac{1}{\theta}}=\frac{(1-\epsilon)(s-r)+\epsilon(u-v)\theta}{(1-\epsilon)(s-r)+\epsilon(u-v)\frac{1}{\theta}]}\Longleftrightarrow$$

$$[(1-\epsilon)r+(\epsilon v-t)\theta][(1-\epsilon)(s-r)+\epsilon(u-v)\theta][(1-\epsilon)(s-r)+\epsilon(u-v)\frac{1}{\theta}]=$$

$$=[(1-\epsilon)(s-r)+\epsilon(u-v)\theta][(1-\epsilon)r+(\epsilon v-t)\frac{1}{\theta}]\Longleftrightarrow$$

$$(1-\epsilon)^2(s-r)r+\epsilon(1-\epsilon)(u-v)r\frac{1}{\theta}+(1-\epsilon)(\epsilon v-t)(s-r)\theta+\epsilon(\epsilon v-t)(u-v)\frac{1}{\theta}=$$

$$=(1-\epsilon)^2(s-r)r+(1-\epsilon)(\epsilon v-t)(s-r)\frac{1}{\theta}+\epsilon(1-\epsilon)(u-v)r\theta+\epsilon(\epsilon v-t)(u-v)\frac{1}{\theta}\Longleftrightarrow$$

$$\epsilon(1-\epsilon)(\frac{1}{\theta}-\theta)(u-v)r-(1-\epsilon)(\frac{1}{\theta}-\theta)(\epsilon v-t)(s-r)=0.$$

Puesto que $\theta\neq\pm1$ (porque $\angle CLD<180^{\circ}$) y $\epsilon\neq1$ obtenemos

$$t=\epsilon(v-\frac{(u-v)r}{s-r}).$$

Del mismo modo, si $n=w$, se tiene que

$$w=(1-\epsilon)[r-\frac{(r-s)v}{v-u}].$$

Por el Teorema 7.8.2 tenemos

$$o_1=\frac{nm(\overline{n}-\overline{m})}{\overline{n}m-n\overline{m}}=\frac{wt\theta(w-t\frac{1}{\theta})}{wt\theta-wt\frac{1}{\theta}}=\frac{wt\theta(\theta w-t)}{wt\theta^2-wt}=\frac{\theta w-t}{\theta^2-1}\theta=$$

$$=\frac{\theta(1-\epsilon)[r-\frac{(r-s)v}{v-u}]-\epsilon[v-\frac{(u-v)r}{s-r}]}{\theta^2-1}\theta.$$

Para cualquier otra posición del punto F en la línea AD tal que $AE=\lambda AD$, el centro correspondiente del círculo tiene la coordenada

$$o_2=\frac{\theta(1-\lambda)[r-\frac{(r-s)v}{v-u}]-\lambda[v-\frac{(u-v)r}{s-r}]}{\theta^2-1}\theta.$$

Observemos que la dirección de la línea o_1o_2 no depende de ϵ ni de λ. A saber, si denotamos

$$A=r-\frac{(r-s)v}{v-u}\text{ y }B=v-\frac{(u-v)r}{s-r},$$

tenemos que

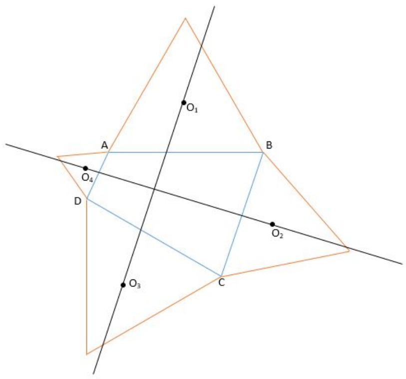
$$\frac{o_1-o_2}{\overline{o_1}-\overline{o_2}}=\frac{\theta A+B}{A+\theta B}\theta.$$

Así pues, para cada tres centros o_1, o_2, o_3, se verifica que $o_1o_2||o_2o_3$; por lo tanto, todos los centros son colineales. Puesto que todos los círculos tienen un punto común, los círculos tienen otro punto común. □

Ahora se muestran algunos ejercicios donde aparecen cuadriláteros y se hace uso de la rotación de números complejos en forma de vectores.

Ejercicio. 10.6.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo para el cual $AC = BD$. En los lados del cuadrilátero se construyen triángulos equiláteros. Sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de los triángulos construidos sobre AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestre que las líneas O_1O_3 y O_2O_4 son perpendiculares.

SOLUCIÓN.



Puesto que el punto A se obtiene por la rotación de B alrededor de o_1 para el ángulo $\frac{2\pi}{3}$ en la dirección positiva. Sea $e^{\frac{i2\pi}{3}} = \varepsilon$ el Teorema 7.1.4 implica

$$(o_1 - b)\epsilon = o_1 - a \Longrightarrow o_1 = \frac{a - b\epsilon}{1-\epsilon},$$

Análogamente

$$o_2 = \frac{b - c\epsilon}{1-\epsilon}, \quad o_3 = \frac{c - d\epsilon}{1-\epsilon}, \quad o_4 = \frac{d - a\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Puesto que $o_1o_3 \perp o_2o_4$ es equivalente a

$$\frac{o_1 - o_3}{\overline{o_1} - \overline{o_3}} = \frac{o_2 - o_4}{\overline{o_2} - \overline{o_4}},$$

es suficiente demostrar que

$$\frac{a - c - (b-d)\epsilon}{\overline{a-c} - \overline{(b-d)\epsilon}} = \frac{b - d - (c-a)\epsilon}{\overline{b-d} - \overline{(c-a)\epsilon}}.$$

Esto es

$$(a-c)\overline{(b-d)} - (b-d)\overline{(b-d)}\epsilon + (a-c)\overline{(a-c)}\overline{\epsilon} - (b-d)\overline{(a-c)}\epsilon\overline{\epsilon}$$

$$= -\overline{(a-c)}(b-d) + \overline{(b-d)}(b-d)\epsilon - \overline{(a-c)}(a-c)\epsilon + \overline{(a-c)}(b-d)\epsilon\overline{\epsilon}.$$

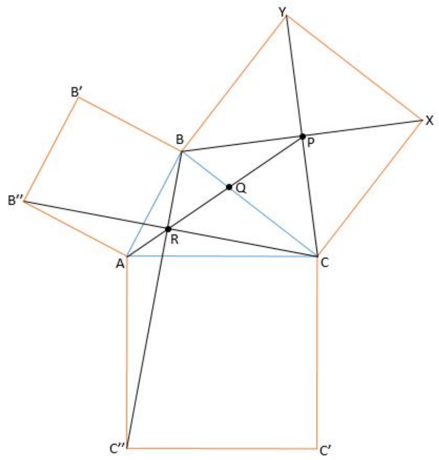
De donde se obtiene

$$\overline{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \text{ y } |a-c|^2 = (a-c)\overline{(a-c)} = (b-d)\overline{(b-d)} = |b-d|^2.$$

□

Ejercicio. 10.7.
Los cuadrados $ABB'B''$, $ACC'C''$ y $BCXY$ están construidos en el exterior del triángulo ABC. Sea P el centro del cuadrado $BCXY$, demostrar que las líneas CB'', BC'', AP se cortan en un punto.

SOLUCIÓN.



Supongamos que a es el origen de nuestro sistema de coordenadas. Según el Teorema 7.1.4 tenemos que $c'' - a = e^{i\pi/2}(C-a)$, es decir,

$$c'' = -ic.$$

Del mismo modo tenemos que

$$b'' = ib.$$

Usando el mismo teorema obtenemos $x - c = e^{i\pi/2}(b-c)$, es decir,

$$x = (1-i)c + ib.$$

Como P es el punto medio de las diagonales del cuadrado $BCXY$, el Teorema 7.6.1 nos da

$$p = \frac{x+b}{2} \iff p = \frac{(1-i)c+ib+b}{2} \iff p = \frac{1+i}{2}b + \frac{1-i}{2}c \iff p = \frac{1}{2}[(1+i)b+(1-i)c].$$

Denotemos por Q la intersección de la líneas BC y AP. Entonces, los puntos A, P y Q son colineales así como los puntos B, C'' y Q. Usando el Teorema 7.1.2 obtenemos

- $\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}} = \frac{a-q}{\overline{a}-\overline{q}} \Longleftrightarrow \frac{p}{\overline{p}} = \frac{q}{\overline{q}} \Longleftrightarrow \overline{q} = q\frac{\overline{p}}{p} \Longleftrightarrow \overline{q} = q\frac{(1-i)\overline{b}+(i+1)\overline{c}}{(1+i)b+(1-i)c}$.
- $\frac{b-c''}{\overline{b}-\overline{c''}} = \frac{q-b}{\overline{q}-\overline{b}} \Longleftrightarrow \frac{b-ic}{\overline{b}+i\overline{c}} = \frac{q-b}{\overline{q}-\overline{b}} \Longleftrightarrow \overline{q} = \frac{(q-b)(\overline{b}+i\overline{c})}{b-ic} + \overline{b}$
  $\Longleftrightarrow \overline{q} = \frac{(q-b)(\overline{b}+i\overline{c})+\overline{b}(b-ic)}{b-ic} \Longleftrightarrow \overline{q} = \frac{q(\overline{b}+i\overline{c})+ib\overline{c}-\overline{b}c}{b-ic} \Longleftrightarrow \overline{q} = \frac{(\overline{b}+i\overline{c})q-(\overline{b}c+b\overline{c})i}{b-ic}$.

Estos dos igualdades implican

$$q\frac{(1-i)\overline{b}+(i+1)\overline{c}}{(1+i)b+(1-i)c} = \frac{(\overline{b}+i\overline{c})q-(\overline{b}c+b\overline{c})i}{b-ic} \Longleftrightarrow$$

$$q\frac{[(1-i)\overline{b}+(i+1)\overline{c}](b-ic)}{(1+i)b+(1-i)c} = (\overline{b}+i\overline{c})q-(\overline{b}c+b\overline{c})i \Longleftrightarrow$$

$$q\frac{[(1-i)\overline{b}+(i+1)\overline{c}](b-ic)-[(1+i)b+(1-i)c]((\overline{b}+i\overline{c}))}{(1+i)b+(1-i)c} = -(\overline{b}c+b\overline{c})i \Longleftrightarrow$$

$$q\frac{2(ib\overline{b}-b\overline{c}+\overline{b}c+ic\overline{c})}{(1+i)b+(1-i)c} = -(\overline{b}c+b\overline{c})i \Longleftrightarrow$$

$$q = \frac{(\overline{b}c+b\overline{c})[(1+i)b+(1-i)c]}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})}.$$

Representemos por Q' la intersección de AP y CB''. Los puntos A, P y Q' son colineales, así como los puntos B'' C y Q'. Por lo tanto, por el Teorema 7.1.2 nos queda

- $\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}} = \frac{a-q'}{\overline{a}-\overline{q'}} \Longleftrightarrow \frac{p}{\overline{p}} = \frac{q'}{\overline{q'}} \Longleftrightarrow \overline{q'} = q'\frac{(1-i)\overline{b}+(1+i)\overline{c}}{(1+i)b+(1-i)c}$.
- $\frac{b-c''}{\overline{b}-\overline{c''}} = \frac{q'-c}{\overline{q'}-\overline{c}} \Longleftrightarrow \frac{b-ic}{\overline{b}+i\overline{c}} = \frac{q'-c}{\overline{q'}-\overline{c}} \Longleftrightarrow \overline{q'} = \frac{(q'-b)(\overline{b}+i\overline{c})+\overline{b}(b-ic)}{b-ic} \Longleftrightarrow$
  $\overline{q'} = \frac{q'(\overline{b}+i\overline{c})-b(\overline{b}+i\overline{c})+\overline{b}(b-ic)}{b-ic} \Longleftrightarrow \overline{q'} = \frac{q'(\overline{b}+i\overline{c})-i(b\overline{c}+\overline{b}c)}{b-ic}$.

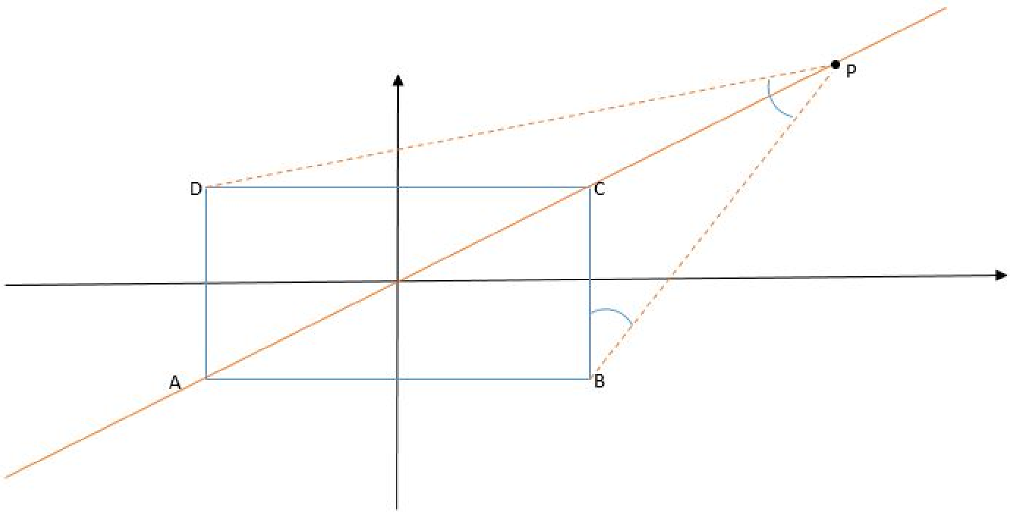
Comparando estas dos igualdades obtenemos

$$q' = \frac{(\overline{b}c+b\overline{c})[(1+i)b+(1-i)c]}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})}.$$

Por lo tanto $Q = Q'$. □

Ejercicio. 10.8.
Sea P un punto de la extensión de la diagonal AC del rectángulo $ABCD$ sobre el punto C. De tal manera que $\angle BPD = \angle CBP$. Determinar la relación $PB : PC$.

SOLUCIÓN.



Supongamos que la intersección de las diagonales del rectángulo es el origen de nuestro sistema de coordenadas y que línea le AB es paralelo al eje real. Tenemos por el Teorema 7.6.1

$$c + a = 0, b + d = 0, c = \overline{b}, \text{ y } d = \overline{a}.$$

Puesto que los puntos P, A y O son colineales, el Teorema 7.1.2 implica que

$$\frac{p}{\overline{p}} = \frac{a}{\overline{a}} \Longrightarrow \overline{p} = -\frac{b}{a}p.$$

Como $\angle DPB = \angle PBC = \varphi$, por el Teorema 1.4 tenemos que

$$\frac{p-d}{|p-d|} = e^{i\varphi}\frac{p-b}{|p-b|}, \quad \frac{b-p}{|b-p|} = e^{i\varphi}\frac{b-c}{|b-c|}.$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}} = e^{i2\varphi}\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}, \quad \frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}} = e^{i2\varphi}\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}.$$

Multiplicando estas igualdades y expresando en términos de a, b y p nos queda

$$\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}}\cdot\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}=\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}\cdot\frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p+b}{-\frac{b}{a}p-a}\cdot\frac{b+a}{-a-b}=\frac{p-b}{-\frac{b}{a}p+a}\cdot\frac{b-p}{-a+\frac{b}{a}p}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a(p+b)}{bp+a^2}=\frac{a^2(p-b)^2}{(bp-a)^2}.$$

En la forma polinómica en p, esto puede escribirse como sigue

$$(p+b)(bp-a^2)^2=a(p-b)^2(bp+a^2)$$

$$\Longleftrightarrow (p+b)(b^2p^2+a^4-2a^2bp)=a(p^2+b^2-2bp)(bp+a^2)$$

$$\Longleftrightarrow b^2p^3+a^4p-2a^2bp^2+b^3p^2+a^4b-2a^2b^2p=abp^3+ab^3p-2ab^2p^2+a^3p^2+a^3b^2-2a^3bp$$

$$\Longleftrightarrow (b^2-ab)p^3+(b^3-a^3-2a^2b+2ab^2)p^2-(a^4-2a^2b^2-ab^3+2a^3b)p+a^4b-a^3b^2=0.$$

$$\Longleftrightarrow (b-a)[bp^3+(a^2+b^2+3ab)p^2-(a^2+b^2+3ab)ap-a^3b]=0$$

Tengamos en cuenta que a es uno de esos puntos que satisfacen la condición del ángulo. Por tanto, tenemos que a es uno de los ceros del polinomio. Eso significa que p es la raíz del polinomio que se obtiene de dividir por $p-a$ el polinomio anterior, es decir

$$bp^2+(a^2+b^2+4ab)p+a^2b=0.$$

Ahora vamos a determinar la relación $|p-b|:|P-c|$. De la ecuación anterior obtenemos

$$bp^2+a^2b+=-(a^2+4ab+b^2),$$

por lo tanto

$$\frac{PB^2}{PC^2}=\frac{(P-b)(\overline{p}-\overline{b})}{(P-c)(\overline{p}-\overline{c})}=\frac{(P-b)(-\frac{b}{a}p+a)}{(P-c)(-\frac{b}{a}p-b)}=\frac{(P-b)(-bp+a^2)}{(P-c)(-bp-ab)}=$$

$$=\frac{-bp^2+a^2p+b^2p-a^2b}{-bp^2-abp-abp-a^2b}=\frac{-bp^2+(a^2+b^2)p-a^2b}{-bp^2-2abp-a^2b}=\frac{-(bp^2+a^2b)+(a^2+b^2)p}{-(bp^2+a^2b)-2abp}=$$

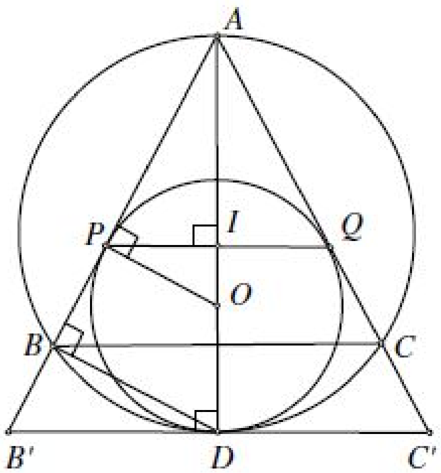
$$=\frac{a^2+4ab+b^2+(a^2+b^2)p}{a^2+4ab+b^2-2abp}=\frac{2(a^2+b^2+2ab)}{a^2+b^2+2ab}=2.$$

Luego, la relación pedida es $\sqrt{2}:1$. □

A continuación, veremos algunos ejercicios de homotecias.

Ejercicio. 10.9.
En en triángulo ABC tal que $AB = AC$, se encuentra un círculo tangente internamente a la circunferencia circunscrita de ABC y también a los lados AB y AC en P y Q, respectivamente. Probar que el punto medio del segmento PQ es el centro de la circunferencia inscrita de ABC.

SOLUCIÓN.



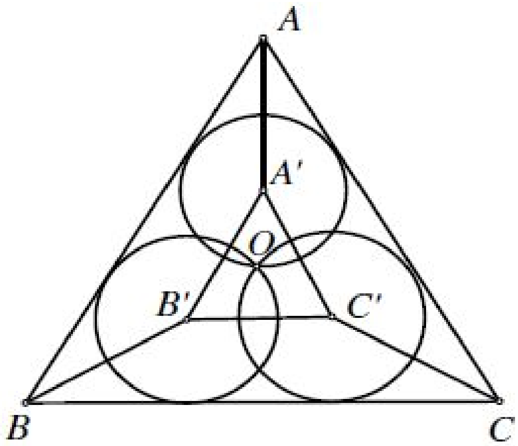
Sean O el centro del círculo, D el punto de tangencia del círculo y la circunferencia circunscrita de ABC e I el punto medio del segmento PQ. Entonces, por simetría, los puntos A, I, O y D son colineales. Consideremos la homotecia con centro A que lleva el triángulo ABC al $AB'C'$ tal que D está en $B'C'$. Así, la razón de la homotecia es $r = \frac{AB'}{AB}$. Como los triángulos rectos AIP, ADB', ABD y APO son semejantes, tenemos

$$\frac{AI}{AO} = \frac{AI}{AP}\frac{AP}{AO} = \frac{AD}{AB'}\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AB'} = \frac{1}{r}.$$

Por lo tanto la homotecia envía I a O. Como O es el incentro del triángulo $AB'C'$, implica que I es el incentro del triángulo ABC. $\square$

Ejercicio. 10.10.
Tres círculos congruentes tienen un punto común O y se encuentran dentro de un triángulo dado. Cada círculo toca un par de lados del triángulo. Probar que el incentro y el circuncentro del triángulo y el punto O son colineales.

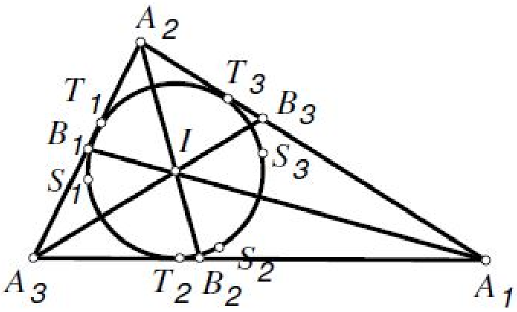
SOLUCIÓN.



Sean A', B' y C' los centros de los círculos. Puesto que los radios son los mismos, se tiene que $A'B'$ es paralelo a AB; $B'C'$ es paralelo a BC y $C'A'$ es paralelo a CA. Dado que AA', BB' y CC' bisecan los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente, coinciden en el incentro I del triángulo ABC.
Notemos que O es el circuncentro de $A'B'C'$, ya que es equidistante de A', B' y C'. Entonces la homotecia de centro I lleva el triángulo $A'B'C'$ en ABC y lleva O al circuncentro P de ABC. Por lo tanto, I, O y P son colineales. □

Ejercicio. 10.11.
Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo no isósceles de lados a_1, a_2 y a_3 (siendo a_i el lado opuesto a A_i). Para todo $i = 1,2,3$, M_i es el punto medio del lado a_i, y T_i el punto donde la circunferencia inscrita toca el lado a_i. Se denota por S_i el reflejo de T_i respecto de la bisectriz del ángulo A_i. Demuestra que las líneas M_1S_1, M_2S_2 y M_3S_3 son concurrentes.

SOLUCIÓN.



Sea I el incentro del triángulo $A_1A_2A_3$. Sea B_1, B_2 y B_3 los puntos donde las bisectrices de los ángulos interno $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ se encuentran con a_1, a_2, a_3 respectivamente. Mostraremos que S_iS_j es paralelo a M_iM_j.
Con respecto a A_1B_1, la reflexión de T_1 es S_1 y la reflexión de T_2 es T_3, así que

$$\angle T_3IS_1 = \angle T_2IT_1.$$

Con respecto a A_2B_2, la reflexión de T_2 es S_2 y la reflexión de T_1 es T_3, así que

$$\angle T_3IS_2 = \angle T_1IT_2.$$

Entonces

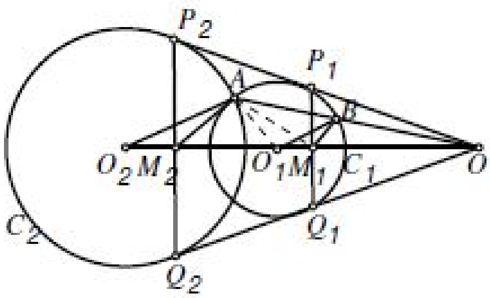
$$\angle T_3IS_1 = \angle T_3IS_2.$$

Como IT_3 es perpendicular a A_1A_2, obtenemos que S_2S_1 es paralelo a A_1A_2. Dado que A_1A_2 es paralelo a M_2M_1, obtenemos que S_2S_1 es paralelo a M_2M_1. Similarmente, S_3S_2 es paralelo a M_3M_2 y S_1S_3 es paralelo a M_1M_3. Ahora bien, la circunferencia circunscrita en el triángulo $S_1S_2S_3$ es la circunferencia inscrita en el triángulo $A_1A_2A_3$ y la circunferencia de $M_1M_2M_3$ es el círculo de nueve puntos del triángulo $A_1A_2A_3$.
Dado que el triángulo $A_1A_2A_3$ no es equilátero, estos círculos tienen radios diferentes. Por lo tanto el triángulo $S_1S_2S_3$ no es congruente al triángulo $M_1M_2M_3$ y hay una homotecia que lleva $\triangle S_1S_2S_3$ a $\triangle M_1M_2M_3$. Entonces M_1S_1, M_2S_2 y M_3S_3 concurren en el centro de la homotecia. □

Ejercicio. 10.12.
Sean C_1 y C_2 dos círculos coplanarios distintos con centros O_1 y O_2, respectivamente, y A uno de los dos puntos de intersección de ambos círculos. Una de las tangentes comunes a los círculos toca a C_1 en P_1 y a C_2 en P_2, mientras que la otra toca a C_1 en Q_1 y a C_2 en Q_2. Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2, demuestra que se verifica

$$\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2.$$

SOLUCIÓN.



Por simetría, las líneas O_2O_1, P_2P_1 y Q_2Q_1 coinciden en un punto O. Consideremos la homotecia con centro O que lleva C_1 en C_2. Pongamos que la línea OA corta a C_1 en B, entonces A es la imagen de B bajo la homotecia. Dado que $\triangle BM_1O_1$ se envía a $\triangle AM_2O_2$, tenemos que

$$\angle M_1BO_1 = \angle M_2AO_2.$$

Como $\triangle OP_1O_1$ es semejante a $\triangle OM_1P_1$ (por ser dos triángulos rectángulos), implica que

$$\frac{OO_1}{OP_1} = \frac{OP_1}{OM_1}.$$

Entonces

$$OO_1 \cdot OM_1 = OP_1^2 = OA \cdot OB,$$

lo que implica que los puntos A, B, M_1 y O_1 son concíclicos (es decir, pertenecen a una misma circunferencia). Entonces

$$\angle M_1BO_1 = \angle M_1AO_1.$$

Por lo tanto

$$\angle M_1AO_1 = \angle M_2AO_2.$$

Añadiendo $\angle O_1AM_2$ a ambos lados, tenemos

$$\angle M_1AM_2 = \angle O_1AO_2.$$

□

Bibliografía

[1] Derek Holton, A second step to mathematical olympiad problems. World Scientific, 2011.

[2] Olimpiada Matemática Española. Real Sociedad Matemática Española, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 2004.

[3] F. Rivero Mendoza, Una introducción a los números complejos. Universidad de los Andes, 2001.

[4] Sánchez Rubio, Cristóbal; Ripollés Amela, Manuel, Manual de matemáticas para preparación olímpica. Universidad Jaime I, Castellón de la plana, 2000.

[5] I. M. Yaglon, Números complejos y sus aplicaciones a la geometría. Urss, 2011.

Enlaces a páginas Web:

1. Olimpiada matemática
2. IMO
3. excalibur
4. Geometría de números complejos
5. Problemas de matemáticas. Análisis y resolución. UGR

Índice alfabético