Estudio y discusión sobre problemas de Olimpíada. Aritmética

Inmaculada Perálvarez Bermúdez

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Universidad de Granada

Granada. 2017

Trabajo Fin de Máster

Estudio y discusión sobre problemas de Olimpíada. Aritmética

Inmaculada Perálvarez Bermúdez

Dirección: Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster Interuniversitario de Matemáticas
Universidad de Granada
Granada, 2017

Introducción

En el presente Trabajo Fin de Máster en el Máster Interuniversitario en Matemáticas se discuten y analizan problemas sobre aritmética, parecidos o semejantes a los que aparecen en las competiciones de Olimpíadas Matemáticas. Analizando estos problemas aritméticos pretendemos fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas en los alumnos de eso y bachillerato, para aquellos que quieren aprender matemáticas para prepararse para las olimpíadas o los que simplemente quieren practicar con conceptos relativos a números.

Las Olimpíadas Matemáticas son competiciones entre estudiantes en las que deben resolver una serie de problemas. El principal objetivo de las Olimpiadas es promover el uso de las Matemáticas y colaborar en la detección y formación de jóvenes talentos en ellas. Nosotros nos centramos en problemas relativos a la etapa final de la enseñanza secundaria: alumnos de dieciséis a dieciocho años.

Anualmente la Real Sociedad Matemática Española, en colaboración con el Ministerio de Educación y Ciencia, organiza la Olimpíada Matemática Española (OME), dirigida a alumnos en ese segmento de edad.

Hemos estructurado este texto en cuatro apartados: el primero trata de recoger los contenidos teóricos necesarios para abordar los problemas propuestos, y los tres restantes tratan, cada uno de ellos, de estudiar y analizar problemas de dificultad creciente. Para esto, utilizando el calendario de las Olimpíada, distinguimos tres niveles que corresponden a las fases de la Olimpíada:

1. *Fase Local*: Consta de dos pruebas escritas en las que se han de resolver un total de seis problemas. Los participantes son estudiantes de Enseñanzas Medias menores de dieciocho años que se presentan voluntariamente sin ningún requisito previo. Los tres alumnos con mejor puntuación en cada distrito pueden acceder a la fase siguiente.

2. *Fase Nacional*: Consta de dos pruebas escritas de tres horas y media de duración cada una, en ellas los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal. Los seis mejores clasificados en esta fase podrán participar en la siguiente fase y los cuatro primeros pueden participar además en la Olimpíada Iberoamericana.

3. *Fase Internacional*: Consta de dos pruebas escritas de cuatro horas y media de duración cada una, donde los participantes deben enfrentarse a un total de seis problemas propuestos por un tribunal.

Índice general

Introducción 5

I Resultados previos 1
1 Números naturales 1
2 Números enteros 3
3 Números racionales 9
4 Números reales 9

II Primer nivel. Olimpíadas Locales 11
5 Problemas 11

III Segundo nivel. Olimpíadas Nacionales 23
6 Problemas 23

IV Tercer nivel. Olimpíadas Internacionales 35
7 Problemas 35

Bibliografía 49

Bibliografía. Referencias Web 49

Índice alfabético 53

Capítulo I

Resultados previos

1. Números naturales

La aritmética se basa en los **números naturales**. El conjunto de los números naturales se representa por $\mathbb{N}$, y sus elementos son: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Se obtienen todos a partir de uno, fijado de antemano, en este caso el 0, haciendo "*siguientes*". Por ejemplo, el 1 es el siguiente a 0; el 2 es el siguiente a 1, etc.

Para la construcción y determinación del conjunto $\mathbb{N}$ necesitamos imponerle una propiedad que lo defina de forma unívoca: el **principio de inducción**. Éste nos dice que si $A \subseteq \mathbb{N}$ es el subconjunto de números naturales que cumple que
(1) A contiene al cero.
(2) Si A contiene a $n \in \mathbb{N}$, entonces también contiene al siguiente a n.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

En $\mathbb{N}$ tenemos dos operaciones: suma y producto. Las operaciones suma y producto verifican propiedades de interés

(1) Son **asociativas**.

(2) Son **conmutativas**.

(3) La suma tiene **elemento neutro**. Es 0, y lo llamamos **cero**.

(4) El producto tiene **elemento neutro**. Es 1, y lo llamamos **uno**.

(5) El producto tiene un **elemento cero**: $0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(6) El producto es **distributivo** respecto a la suma. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{N}$.

En $\mathbb{N}$ existe una **relación de orden**, definida: $a \leq b$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + c$. Con esta relación de orden $\mathbb{N}$ es un conjunto **bien ordenado**. Además, la relación $\leq$ es **compatible** con las operaciones suma y producto, esto es, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{N}$ se tiene: Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ y $ac \leq bc$.

Podemos definir otra relación de orden en $\mathbb{N}$ mediante $a|b$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$; la llamamos **relación de divisibilidad**.
Dados $a, b \in \mathbb{N}$ observa que el supremo de $\{a, b\}$ es el **mínimo común múltiplo**, al que representamos por $[a, b]$ ó m. c. m.$\{a, b\}$.
Dados $a, b \in \mathbb{N}$ observa que el ínfimo de $\{a, b\}$ es el **máximo común divisor**, al que representamos por (a, b) ó m. c. d.$\{a, b\}$.

2. Números enteros

Existen unas ecuaciones que podemos resolver en $\mathbb{N}$, por ejemplo:

$$x + 2 = 5 \text{ ó } 2x = 10,$$

y otras que no, por ejemplo:

$$x + 5 = 2 \text{ ó } 10x = 2.$$

Para dar solución a algunas de ellas tenemos que ampliar el conjunto de los números naturales, incluyendo, por ejemplo, las soluciones de todas las ecuaciones del tipo $x + a = b$, con $a, b \in \mathbb{N}$. De esta forma obtenemos el conjunto de los **números enteros**, que se representa por $\mathbb{Z}$, cuyos elementos son:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

En $\mathbb{Z}$ se identifica $\{0, 1, 2, \ldots\}$ con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.
Tenemos en $\mathbb{Z}$ dos operaciones: suma y producto, que extienden las operaciones en $\mathbb{N}$, y todas las ecuaciones del tipo $x + a = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ tienen solución.

Desde el punto de vista de estructuras $\mathbb{Z}$ con la suma, el producto y el elemento 1 es un **anillo conmutativo**.

La relación de orden "$\leq$" en $\mathbb{N}$ se extiende a una relación de orden en $\mathbb{Z}$ definiendo, para $a, b \in \mathbb{Z}$ la relación: $a \leq b$ si existe $c \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que $b = a + c$. Ahora $\mathbb{Z}$, junto con esta relación es un conjunto ordenado, pero no un conjunto bien ordenado; por ejemplo $\mathbb{Z}$ no tiene un elemento mínimo. La relación "leq" es compatible con la suma: si $a \leq b$, entonces $a+c \leq b + c$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$, pero no es compatible con el producto; se verifica:

$$\text{Si } a \leq b \text{ entonces } \begin{cases} ac \leq bc \text{ si } 0 \leq c \\ ac \geq bc \text{ si } c \leq 0. \end{cases}$$

Divisibilidad

La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ se extiende a $\mathbb{Z}$ definiendo $a|b$ si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$; decimos que a **divide** a b. Observa que todo número entero divide a 0. Por otro lado, la relación de divisibilidad verifica las propiedades reflexiva y transitiva, pero no la propiedad antisimétrica, ya que $2|-2$ y $-2|2$, pero $2 \neq -2$.
Para solventar este inconveniente se puede definir una relación de equivalencia para juntar en una misma clase los elementos como el 2 y el -2. Definimos

$$a \sim b \text{ si } a|b \text{ y } b|a.$$

Si $a \sim b$, decimos que a es **asociado** a b. Tenemos que "$\sim$" es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, y en $\mathbb{Z}/\sim$ podemos definir una relación de orden: la divisibilidad, mediante $[a]|[b]$ si $a|b$. Esta definición está bien hecha, y es una relación de orden. Para el estudio de la divisibilidad debemos trabajar en $\mathbb{Z}/\sim$, pero por simplicidad tratamos con elementos de $\mathbb{Z}$ y no con sus clases. Por ejemplo, el máximo común divisor de 6 y 10 es la clase $[2] = \{2, -2\}$; pero podemos decir que es 2, ó -2, entendiendo que basta con dar un elemento de la clase de asociados de 2.
Observa que dados $a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene
(1) $d = \text{m.c.d.}\{a, b\}$ si, y sólo si, $[d]$ es el ínfimo de $\{[a], [b]\}$ en $\mathbb{Z}/\sim$.
(2) $m = \text{m.c.m.}\{a, b\}$ si, y sólo si, $[m]$ es el supremo de $\{[a], [b]\}$ en $\mathbb{Z}/\sim$.

Números primos

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a es un **divisor** de b si $a|b$, y es un **divisor propio** si $a|b$ y $a \nmid b$. Tenemos una serie de propiedades que vamos a destacar:

(1) Todo número entero divide a 0.
(2) A los divisores de 1 los llamamos **elementos invertibles**.
(3) Un elemento invertible divide a todo número entero.
(4) Tenemos tres tipos de elementos: el **elemento nulo**, que es el 0; los **elementos invertibles**, que son 1 y -1; y el resto que son los elementos no nulos y no invertibles.

A la vista de estos resultados, si $a \in \mathbb{Z}$ es no nulo y no invertible, todo elemento invertible es un divisor propio. Si éstos son los únicos divisores propios, decimos que a es un **elemento irreducible**: para cualquier descomposición de la forma $a = a_1 a_2$, se tiene que a_1 ó a_2 es invertible.

Un número entero $p \in \mathbb{Z}$ se llama **primo** si es irreducible.

Como basta considera un representante de cada clase de equivalencia para la relación de asociado, podemos restringirnos a considerar sólo los enteros primos positivos. La sucesión de los primeros números primos positivos comienza así:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$$

Los números $a \in \mathbb{Z}$ no nulos, no invertibles y no primos se llaman **compuestos**.

Teorema. 2.1. (teorema fundamental de la aritmética)
Cada número entero $a \in \mathbb{Z}$, no nulo y no invertible, se expresa de forma única, salvo el orden, en la forma

$$a = (-1)^{e_0} p_1^{e_1} \cdots p_t{}^{e_t},$$

siendo:

- $e_0 = 0, 1$.
- $t \geq 1$ *y* $p_1, \ldots, p_t$, *enteros primos positivos distintos dos a dos.*
- $e_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *para* $i = 1, \ldots, t$.

Una consecuencia del Teorema fundamental de la aritmética es que un número entero positivo es un **cuadrado perfecto** si, y sólo si, todos sus factores primos (diferentes dos a dos) aparecen elevados a exponentes pares. Más en general, un número entero no nulo y no invertible a es una potencia k–sima si, y sólo, en la factorización del teorema se verifica:

(1) e_0 y k tienen la misma paridad.
(2) $k|e_i$ para todo $i = 1, \ldots, t$.

Algunas aplicaciones de la factorización

Ejercicio. 2.2.
Vamos a usar la descomposición de un número en factores primos para calcular el número de divisores de un número y la suma de éstos.

Supongamos que n es un número entero positivo, y lo descomponemos en factores primos, según el teorema, como $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$. Entonces, si d es un divisor (positivo) de n, se cumplirá que $n = d \cdot d'$ para cierto $d' \in \mathbb{Z}$ (que también es un divisor positivo de n).

Factorizando d y d', y multiplicando sus factorizaciones, llegamos a que d y d' tienen que tener los mismos factores primos que n; es decir, que si
$d = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$ y $d' = p_1^{f_1'} p_2^{f_2'} \cdots p_r{}^{f_r'}$, donde cada $f_k, f_k' \in \mathbb{N}$ y $f_k + f_k' = e_k$, para todo $k = 1, \ldots, r$.

Por tanto, los divisores de n son los números de la forma

$$p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r{}^{f_r},$$

donde $0 \leq f_k \leq e_k$.
De aquí podemos sacar algunas conclusiones.

(1) Si tenemos factorizado $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, cada divisor de n se corresponde con elegir $f_1, \ldots, f_r$ tales que $0 \leq f_k \leq e_k$, para $k = 1, \ldots, r$. Por lo tanto, f_1 puede tomar los valores $0, 1, \ldots, e_1$ (en un total de $e_1 + 1$ posibilidades), f_2 puede tomar los valores $0, 1, \ldots, e_2$ (en un total de $e_2 + 1$ posibilidades), y así con todos los f_k.
En consecuencia, el <u>número total de divisores</u> de n (que es el número total de posibilidades) es

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_r + 1).$$

(2) Otra forma, más ingeniosa, de ver los divisores de n es ver que cada divisor de n es uno de los monomios que surgen al desarrollar el siguiente producto:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{e_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{e_2}) \ldots (1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{e_r}).$$

Recordemos que el producto de los paréntesis se puede hacer como la suma de los productos de elegir en cada uno de los paréntesis uno de los sumandos. Esta forma de ver los sumandos tiene la ventaja de que el valor de la expresión anterior es realmente la suma de todos los divisores de n y que cada paréntesis es la suma de los términos de una progresión geométrica.
Por tanto, usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, podemos expresa la <u>suma de los divisores</u> de n como

$$\frac{p_1^{e_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{e_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{e_r} - 1}{p_r - 1}.$$

Lema. 2.3.
Si un número entero positivo $n \in \mathbb{Z}$ *es compuesto, entonces tiene un divisor* d *tal que* $1 < d \leq \sqrt{n}$.

Lema. 2.4.
Si $p \in \mathbb{Z}$ *es un número entero primo positivo y* $a, b \in \mathbb{Z}$ *cumplen que* $p|ab$, *entonces* $p|a$ *ó* $p|b$.

División Entera

El **algoritmo de la división** en $\mathbb{Z}$ nos dice que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ entonces existen números enteros únicos q y r tales que

$$a = qb + r \text{ y } 0 \leq r < |b|.$$

A q y a r se les llama, respectivamente, **cociente** y **resto** de la división entera de a entre b. El resto es 0 si, y sólo si, a es múltiplo de b.

Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo

El **máximo común divisor** de dos números enteros positivos a y b es el mayor de sus divisores comunes y se denota $\text{m.c.d.}\{a, b\} = (a, b)$.

Lema. 2.5.
El máximo común divisor verifica las propiedades:
(1) $\text{m.c.d.}\{a, 1\} = 1$.
(2) $\text{m.c.d.}\{a, b\} = \text{m.c.d.}\{b, a\}$.
(3) $\text{m.c.d.}\{a, b\} = a$ *si, y sólo si,* $a|b$.
(4) *Si* $a > b$, *entonces* $\text{m.c.d.}\{a, b\} = \text{m.c.d.}\{a - b, b\}$.
(5) *Si* $a = qb + r$, *entonces* $\text{m.c.d.}\{a, b\} = \text{m.c.d.}\{b, r\}$.

El **mínimo común múltiplo** de a y b es el menor de sus múltiplos comunes y se denota $\text{m.c.m.}\{a, b\}$.

El $\text{m.c.m.}\{a, b\}$ es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor de los exponentes con que aparecen en a y b. De aquí se deduce que $\text{m.c.m.}\{a, b\}$ no sólo es el menor múltiplo común sino que además divide a cualquier otro múltiplo común de a y b. El $\text{m.c.d.}\{a, b\}$ es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor de los exponentes.

Lema. 2.6. (Relación entre mcd y mcm)
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, enteros positivos. El $\text{m. c. d.}\{a, b\}$ *y el* $\text{m. c. m.}\{a, b\}$ *satisfacen la siguiente relación:*

$$\text{m. c. d.}\{a, b\} \cdot \text{m. c. m.}\{a, b\} = ab.$$

Dos números enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son **primos entre sí** ó **primos relativos** cuando $\text{m. c. d.}\{a, b\} = 1$, es decir, cuando no tienen divisores primos comunes.

Congruencias

La noción de congruencia fue introducida por Gauss (1777-1855).
Se dice que dos números enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son **congruentes** modulo $m \in \mathbb{Z}$, si $m|(a-b)$; en este caso se escribe:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Las congruencias modulo m tienen las siguientes propiedades:

(1) $a \equiv a \pmod{m}$.
(2) Si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces $b \equiv a \pmod{m}$.
(3) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{m}$.)

Por tanto "$\equiv$" es una relación de equivalencia. El conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ se representa por $\mathbb{Z}_n$.
También se pueden sumar, restar o multiplicar congruencias (del mismo modulo) miembro a miembro:

Lema. 2.7.
Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, se verifica:

(1) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
(2) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.
(3) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $ac \equiv bd \pmod{m}$.

La compatibilidad de la relación $\equiv$ con la suma y el producto hace que $\mathbb{Z}_m$ sea un anillo y que la proyección $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ sea un homomorfismo de anillos. Dado $a \in \mathbb{Z}$, representamos por $\overline{a}$ a su clase en $\mathbb{Z}_m$.
Un número entero $a \in \mathbb{Z}$ tiene **inverso modulo** m si $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ es invertible.

Lema. 2.8.
Dados $a, m \in \mathbb{Z}$, son equivalentes:

(a) a tiene un inverso modulo m.
(b) $\text{m. c. d.}\{a, m\} = 1$.

Esto nos permitirá dar una versión del Teorema Pequeño de Fermat para cuando m. c. d.$\{a,p\}=1$, es decir, cuando a no es múltiplo de p.

Si p es un número entero primo positivo, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo. En este caso $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ es un grupo multiplicativo de orden $p-1$, y cada elemento $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ verifica $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$; esto es $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, que es el Pequeño Teorema de Fermat (PTF).

Si p no es primo, por ejemplo $p=4$, entonces puede no verificarse este resultado, por lo que el PTF puede considerarse como un test de primalidad. En efecto, se tiene $2^3 = 8 \equiv 0 \pmod{4}$.

Teorema. 2.9. (Teorema Pequeño de Fermat)
Sea p un número entero primo positivo y a un número entero que no es múltiplo de p, se verifica:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Teorema. 2.10. (Teorema Pequeño de Fermat)
Sea p un número entero primo positivo y a un número entero cualquiera, se verifica:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

3. Números racionales

Aún nos quedan por resolver algunas ecuaciones, tenemos que ampliar el conjunto de números incluyendo las soluciones de todas las ecuaciones del tipo $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. De esta forma obtenemos el conjunto de los **números racionales** que se representa por $\mathbb{Q}$, cuyos elementos son: $\ldots, -3/2, -2/4, 1/5, \ldots$.

En $\mathbb{Q}$ tenemos dos operaciones suma y producto y una estructura de **cuerpo**; cada elemento no nulo tiene un inverso, esto es, para cada $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ la ecuación $ax = 1$ tiene solución. Tenemos que en $\mathbb{Q}$ toda ecuación del tipo $ax + b = 0$ tiene solución si $a \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{Q}$.

Sin embargo la ecuación $x^2 + a = 0$ no tiene solución, cuando $a = 2$. Para incluir las soluciones de todos los polinomios $F(x) \in Q[x]$ construimos un nuevo cuerpo, el cuerpo $\mathbb{C}$ de los **números complejos**.

Un subcuerpo de $\mathbb{C}$, que contiene $\mathbb{Q}$, es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los **números reales** cuyos elementos, en una aproximación analítico-geométrica se identifica con puntos de una recta y entonces los elementos de $\mathbb{C}$ se identifican con puntos de un plano.

Tenemos entonces que los sistemas de números están contenidos entre sí:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

4. Números reales

Todo número real admite una expresión decimal, por ejemplo $\sqrt{2}$ se escribe 1,4142... y $\frac{4}{3}$ se escribe como 1,33... El segundo es un número racional (es una fracción entre dos números enteros) y el primero no lo es, ya que no existen enteros n y m tales que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. Otros números reales no racionales son $\sqrt{3}$, π y e.

Los números reales no racionales se llaman **números irracionales**, se representa por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, existe una operación suma y una operación producto de forma que $\mathbb{R}$ es un cuerpo como ya hemos señalado. En $\mathbb{R}$ existe un conjunto de elementos, llamados **positivos**, y representados por $\mathbb{R}^+$ de forma que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^-$ es el conjunto de los elementos opuestos a los elementos de $\mathbb{R}^+$, y se llaman **negativos**.

Este conjunto permite definir una relación de orden $a \leq b$ si existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $b = a + r$ que es compatible con las operaciones suma y producto y la **ley de tricotomía**.

Las operaciones suma y producto verifican propiedades de interés

(1) Son **asociativas**.
(2) Son **conmutativas**.
(3) La suma tiene **elemento neutro**. Es 0, y lo llamamos **cero**.
(4) El producto tiene **elemento neutro**. Es 1, y lo llamamos **uno**.
(5) La suma tiene **elemento opuesto**: Para cada número real x hay un número real llamado **opuesto de x**, representamos por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

(6) El producto tiene un **elemento inverso**: Para cada número real x distinto de cero, hay un número real llamado **inverso de x**, representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.
(7) El producto es **distributivo** respecto a la suma. $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$, para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(8) **Ley de tricotomía**. Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones:

$$x = 0, \quad x \text{ es positivo}, \quad x \text{ es negativo}.$$

(9) **Estabilidad**. La suma y el producto de números reales positivos son también números positivos:

$$\text{Si } x, y \in \mathbb{R}^+, \text{ entonces } x + y, xy \in \mathbb{R}^+.$$

Deducimos inmediatamente que la suma de dos números negativos es un número negativo, el producto de dos números negativos es positivo y el producto de un número positivo por un número negativo es negativo. Observamos que para $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene obligadamente $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$. En particular $1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$.

Comparación de números reales

Para $x, y \in \mathbb{R}$, cuando $y - x \in \mathbb{R}^+$ decimos que x **es menor que** y o que y **es mayor que** x y escribimos $x < y$ o $y > x$. Observamos que un número real x es positivo precisamente cuando $x0$ y negativo cuando $x < 0$.

Si se verifica que $y - x \in \mathbb{R}_0^+$, decimos que x **es menor o igual que** y o que y **es mayor o igual que** x, y escribimos $x \leq y$ ó $y \geq x$.

Las expresiones del tipo $x \leq y$ ó $y \geq x$ reciben el nombre de **desigualdades** y las del tipo $x < y$ o $y > x$ **desigualdades estrictas**.

Reglas básicas para operar con desigualdades

Estas reglas se deducen con facilidad de los axiomas anteriores. Utilizamos la relación binaria $\leq$, que es una **relación de orden**, es decir, tiene las tres propiedades siguientes:

(1) **Reflexiva**: $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) **Antisimétrica**: Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, y $y \leq x$, entonces $x = y$.
(3) **Transitiva**: Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Se dice que $\leq$ es una **relación de orden total** en $\mathbb{R}$, lo cual significa que entre dos números reales cualesquiera siempre se verifica alguna desigualdad: para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \leq y$, o bien, $y \leq x$.

Dos reglas importantes para trabajar con desigualdades son las siguientes que representan el hecho de que la relación de orden es compatible con la suma y el producto.
(1) Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.
(2) Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, y $0 \leq z$, entonces $xz \leq yz$.

Capítulo II

Primer nivel. Olimpíadas Locales

5. Problemas

Ejercicio. 5.1.
Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

Libro de la Olimpíada Matemática Española, año 2004. [5, pág. 28].

SOLUCIÓN. Supongamos que $n = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t} 83^e$, siendo $p_1, \ldots, p_t$ números naturales primos distintos de 83. Entonces se tiene $n^2 = p_1^{2e_1} \cdots 2p_t^{e_t} 83^{2e}$, y por tanto el número divisores de n^2 es

$$(2e_1 + 1) \cdots (2e_t + 1)(2e + 1) = 63.$$

Ésta es la condición que tenemos que analizar, teniendo en cuenta que $e \geq 1$
Las posibles factorizaciones no triviales de 63 son:

(1) $63 = 63$. En este caso se tiene $2e + 1 = 63$, luego $e = 31$, y $n = 83^{31}$.
(2) $63 = 7 \times 9$. En este caso $t = 1$, y se tienen dos posibilidades:

(2.1) $7 = 2e_1 + 1$, $9 = 2e + 1$. Se tiene $e_1 = 3$, $e = 4$, el valor menor de n es $n = 2^3 \times 83^4$.
(2.2) $7 = 2e + 1$, $9 = 2e_1 + 1$. Se tiene $e = 3$, $e_1 = 4$, el valor menor de n es $n = 2^4 \times 83^3$.

(3) $63 = 21 \times 3$. En este caso $t = 1$, y se tienen dos posibilidades:

(3.1) $21 = 2e_1 + 1$, $3 = 2e + 1$. Se tiene $e_1 = 10$, $e = 1$, el valor menor de n es $n = 2^{10} \times 83^1$.
(3.2) $21 = 2e + 1$, $3 = 2e_1 + 1$. Se tiene $e = 10$, $e_1 = 1$, el valor menor de n es $n = 2^1 \times 83^{10}$.

(4) $63 = 7 \times 3 \times 3$. En este caso $t = 2$, y se tienen tres posibilidades:

(4.1) $7 = 2e_1 + 1$, $3 = 2e_2 + 1$, $3 = 2e + 1$. Se tiene $e_1 = 3$, $e_2 = 1$ y $e = 1$, el valor menor de n es $n = 2^3 \times 3^1 \times 83^1$.

(4.2) $7 = 2e_2 + 1$, $3 = 2e_1 + 1$, $3 = 2e + 1$. Se tiene $e_2 = 3$, $e_1 = 1$ y $e = 1$, el valor menor de n es $n = 2^1 \times 3^3 \times 83^1$.

(4.3) $7 = 2e + 1$, $3 = 2e_1 + 1$, $3 = 2e_2 + 1$. Se tiene $e = 3$, $e_1 = e_2 = 1$, el valor menor de n es $n = 2^1 \times 3^1 \times 83^3$.

Para cada uno de los cuatro casos tenemos los siguientes números (de menor valor):

$$83^{31}; \qquad 2^4 \times 83^3; \qquad 2^{10} \times 83; \qquad 2^3 \times 3 \times 83,$$

y de éstos, el menor es $n = 2^3 \times 3 \times 83$. □

Posibles variaciones de este enunciado.

(1) Estudiar el menor entero positivo n que es múltiplo de $m = 30$ y que tiene $d = 11$ divisores positivos.

(2) Estudiar el menor entero positivo n que es múltiplo de $m = 30$ y que su cuadrado tiene $d = 111$ divisores positivos.

(3) Estudiar el menor entero positivo n que es múltiplo de $m = 30$ y que su cubo tiene $d = 180$ divisores positivos.

Ejercicio. 5.2.
Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

Olimpíada Matemática Española, año 2011. Referencia web.

SOLUCIÓN. Distinguimos dos casos:

1. Supongamos que $a = b$.

   Como a y b no tiene factores en común ,debe ser $a = b = 1$. Como c divide a $a + b = 2$, esto da lugar a las ternas (1, 1, 1) y (1, 1, 2).

2. Supongamos que $a < b$.

   Como c divide a $a + b < c + c = 2c$, debe ser $a + b = c$. Pero entonces, como b divide a $a + c = 2a + b$, se sigue que b divide a $2a$, y como b no tiene factores comunes con a pues b divide a 2. Como b no puede ser 1 ya que es mayor que a, luego la única terna posible en este caso es (1, 2, 3).

□

Ejercicio. 5.3.
Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Olimpíada Matemática Española, año 2012. Referencia web.

SOLUCIÓN. Describimos los siguientes conjuntos:

(1) El conjunto de los números enteros positivos inferiores a $10n$.

$$A = \{1, 2, \ldots, 10n\}$$

(2) El conjunto de los números enteros positivos múltiplos de 2 e inferiores a $10n$.

$$B = \{2, 4, \ldots, 2(5n)\}$$

(3) El conjunto de los números enteros positivos múltiplos de 5 e inferiores a $10n$.

$$C = \{5, 10, \ldots, 5(2n)\}$$

(4) Y por último el conjunto de los enteros positivos múltiplos de 2 y de 5 e inferiores a $10n$.

$$B \cap C = \{10, 20, \ldots, 10n\}$$

Para empezar vamos a calcular la suma de los elementos de cada uno de los conjuntos y obtenemos lo siguiente:

(1.1) La suma del conjunto A:

$$\Sigma A = \frac{10n(10n+1)}{2}$$

(2.2) La suma del conjunto B:

$$\Sigma B = 2\frac{5n(5n+1)}{2}$$

(3.3) La suma del conjunto C:

$$\Sigma C = 5\frac{2n(2n+1)}{2}$$

(4.4) La suma del conjunto $B \cap C$:

$$\Sigma(B \cap C) = \frac{10n(10n+1)}{2}$$

Por tanto, a la suma del conjunto A le restamos las sumas de los conjuntos B y C sin olvidar que tenemos que sumar la suma de la intersección para no quitar algunos enteros positivos dos veces. La suma de los enteros positivos inferiores a $10n$ y que no son múltiplos de 2 ni de 5 es:

$$\Sigma A - \Sigma B - \Sigma C + \Sigma(B \cap C) = 20n^2$$

□

Ejercicio. 5.4.
Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demuestra que, si la suma de estos números es mayor que la suma de sus inversos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Olimpíada Matemática Española, año 2012. Referencia web.

SOLUCIÓN.
Puestos que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, tenemos que

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ca + ca + a + b + c - 1 = a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0.$$

Entonces

$$a + b + c > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

La desigualdad anterior se cumple cuando uno de los factores del número

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

es positivo o los tres factores son positivos.

(1) Si fuese positivo solo uno de los factores ya hemos acabado, puesto que, solo uno de los números es mayor que 1. Lo vemos, si elegimos $a > 1$, tenemos que el factor $a-1 > 0$ y por tanto, $b < 1$ y $c < 1$. Concluimos que exactamente uno de los números es mayor que 1.

   Lo mismo si elegimos $b > 1$ o $c > 1$

(2) Si fuesen positivos los tres factores, tendríamos que $a > 1$, $b > 1$ y $c > 1$, cosa que no es posible ya que $abc = 1$. Por tanto, sólo uno de los factores es positivo, y por tanto solo uno de los números es mayor que uno.

□

Ejercicio. 5.5.
Consideremos el número entero positivo $n = 2^r - 16^s$ donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

Olimpíada Matemática Española, año 2012. Referencia web.

SOLUCIÓN. Nos damos cuenta que los restos obtenidos al dividir las potencias de 2 por 7 son $\{1, 2, 4, 1, 2, 4, \dots\}$, repitiéndose con periodo 3.

Comprobamos que estos mismos restos se obtienen al dividir 16 por 7.

Luego la única posibilidad para obtener resto 5 al restar es que $r = \dot{3} + 1$ y $s = \dot{3} + 2$. Estas son las condiciones pedidas.

Para hallar el mínimo positivo n escribimos

$$n = 2^{3k+1} - 16^{3h+2} = 2^{3k+1} - 2^{12h+8}$$

No olvidemos que 2^x es creciente, por tanto tendremos q $3k + 1 > 12h + 8$, equivalente a $3k - 12h - 7 > 0$.
El mínimo se obtendrá cuando $3k - 12h - 7$ sea mínimo
Tenemos que la función 2^x es convexa, y se ve fácilmente que este mínimo se obtiene para $k = 3$ y $h = 0$, por tanto tenemos

$$n = 2^{10} - 2^8 = 768.$$

□

Ejercicio. 5.6.
Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.

Olimpíada Matemática Española, año 2013. Referencia web.
Libro de la Olimpíada Matemática Española, año 2004. [6, pág. 28].

SOLUCIÓN. Sea A el número formado por las tres últimas cifras de n y B el número formado por las cifras anteriores.
Entonces

$$n = 1000B + A$$
y
$$k = A - B.$$

Tenemos que $n - k = 1001B = 7 \cdot 11 \cdot 13B$. Por tanto, n y k son congruentes modulo 7, 11 y 13.

□

Ejercicio. 5.7.
Probar que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ *es múltiplo de* $2014^3 - 1013^3 - 1001^3$.

Olimpíada Matemática Española, año 2014. Referencia web.

SOLUCIÓN. Se tiene que $2014 = 1013 + 1001$.

Sea $a = 2014$ y $b = 1013$, entonces deberemos probar que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013}$$

es múltiplo de

$$a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab(a-b).$$

Ahora bien, por el binomio de Newton, se obtiene

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n} b^n \tag{II.1}$$

y agrupando por parejas simétricas resulta $a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} =$

$$\sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n} b^n - a^n b^{2013-n} = \tag{II.2}$$

$$\sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^n b^n \left(a^{2013-2n} - b^{2013-2n}\right) \tag{II.3}$$

Teniendo en cuenta que $a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right) = (a-b)\,p_k(a,b)$, podemos escribir

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = ab(a-b) \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{n-1} b^{n-1} p_n(a,b) \tag{II.4}$$

.

Finalmente, observamos que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ es múltiplo de 3, pero ni $a = 2014$ ni $b = 1013$ ni $a - b = 1001$, de donde concluimos que

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013} \text{ es múltiplo de } 3ab(a-b)$$

□

Posibles variaciones de este enunciado.

(1) Probar que $2020^{2019} - 1019^{2019} - 1001^{2019}$ es múltiplo de $2020^3 - 1019^3 - 1001^3$.

(2) Para un nivel del dificultad mayor podríamos pedir que se busque una terna de números que cumpliese el enunciado.

Ejercicio. 5.8.
Sean a, b números positivos. Probar que $a + b \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Olimpíada Matemática Española, año 2014. Referencia web.

SOLUCIÓN. La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica al miembro de la izquierda obtenemos

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{ab+\frac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}$$

Una segunda forma de resolver el problema es:
Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2\,(0 \leqslant s,t)$ obtenemos la desigualdad que es equivalente a la dada

$$st+\sqrt{\frac{s^4+t^4}{2}} \leqslant s^2+t^2$$

Aislamos la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado, nos queda un resultado equivalente

$$\frac{s^4+t^4}{2} \leqslant s^4+t^4+s^2t^2+2s^2t^2-2s^3t-2t^3s.$$

A continuación multiplicamos por 2 e igualamos a cero el miembro de la izquierda, es equivalente probar que

$$s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s = (t-s)^4 \geqslant 0.$$

Una tercera forma de resolver el problema es:
Vamos a utilizar la Media Aritmética, la denotamos A, Media Geométrica, G y la Media Cuadrática, Q.
Definimos cada una para los números a y b.
$A = \frac{a+b}{2}$
$G = \sqrt{ab}$
$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
Con esta notación debemos probar que

$$G+Q \leq 2A$$

O lo que es equivalente

$$Q-A \leq A-G$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2-A^2}{Q+A} \leq \frac{A^2-G^2}{A+G}$$

Puesto que $Q \geq G$, se tiene que $Q + A \geq A + G > 0$.
Como $Q \geq A$, tenemos $Q^2 - A^2 \geq 0$.
Puesto que $A \geq G$, tenemos que $A^2 - G^2 \geq 0$.
Así pues, basta probar que

$$Q^2 - A^2 \leq A^2 - G^2$$

que equivale a

$$Q^2 + G^2 \leq 2A^2$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad. □

Ejercicio. 5.9.
Encontrar las tres últimas cifras de 7^{2014}

Olimpíada Matemática Española, año 2014. Referencia web.

SOLUCIÓN. Usamos el teorema de Euler-Fermat. En nuestro caso, queremos calcular $7^{2014} (\text{mod } 1000)$.

Por ser 1000= $2^3 5^3$, se tiene que $\varphi(1000) = 2^2(2-1) \cdot 5^2(5-1) = 400$.

Entonces, $7^{2014} = 7^{5\times400+14} = (7^{400})^5 \cdot 7^{14} \equiv 1^5 \cdot 7^{14} \equiv 849 \ (\text{mod } 1000)$.

En consecuencia, podemos decir que las tres últimas cifras de 7^{2014} son 849.

Otra forma de resolver el ejercicio:
Observamos que las tres últimas cifras de 7^4 son 401.
Por tanto, multiplicamos sucesivamente por 7^4, resulta que
Puesto que

$$7^{2014} = 7^2 \cdot 7^{2012} = 7^2 \cdot 7^{503\times4}$$

resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 deja resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el periodo de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla).

Así pues , las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto 49×201, es decir, 849. □

Potencia	últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

Ejercicio. 5.10.
Demuestra

$$(ax+by)^2 \leqslant ax^2+by^2$$

para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera a, $b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1$, $a, b \geqslant 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

Olimpíada Matemática Española, año 2015. Referencia web

SOLUCIÓN. Vemos que

$$ax^2+by^2-(ax+by)^2 = a(1-a)x^2+b(1-b)y^2-2abxy = ab(x-y)^2$$

donde hemos usado que $1-a=b$ y $1-b=a$.
Esta expresión es claramente no negativa, siendo nula si y sólo si bien ab=0 (es decir, uno de entre a, b es 0 y el otro es 1), bien $x=y$

Otra forma de resolver el ejercicio:
Podemos considerar los vectores $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ y $(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)$, cuyo producto escalar es $ax+by$.
Sus módulos que son respectivamente $\sqrt{a+b}$ que vale uno por las condiciones del ejercicio y $\sqrt{ax^2+by^2}$.

Observamos que la desigualdad propuesta es equivalente a la desigualdad del producto escalar aplicada a estos vectores, y por lo tanto es cierta, dándose la igualdad si y sólo si ambos vectores son proporcionales, cosa que puede pasar bien si una de sus coordenadas es nula, es decir, si $a=0$ o $b=0$, bien si ambas coordenadas son proporcionales cuando no son nulas, es decir, $x=y$.

□

Ejercicio. 5.11.
Encuentra todos los enteros positivos n, que verifican

$$n = 2^{2x-1}-5x-3 = \left(2^{x-1}-1\right)(2^x+1)$$

para algún entero positivo x.

Olimpíada Matemática Española, año 2015. Referencia web.

SOLUCIÓN. Realizando el producto del miembro de la derecha y reorganizando términos, la igualdad entre los miembros segundo y tercero se puede escribir como

$$2^{x-1} = 5x + 2$$

se comprueba fácilmente que ni $x = 1$ ni $x = 2$ son soluciones, mientras que si $x \geqslant 3$, entonces $5x + 2$ ha de ser múltiplo de 4, luego x es par pero no múltiplo de 4, es decir, $x \geqslant 6$.

(1) $x = 6$: se comprueba que $2^{x-1} = 5x + 2 = 32$, con lo que sería una posible solución.
(2) $x \geqslant 6$: se tiene que $2^{x-1} > 5x$ (cosa que es cierta para $x = 6$), entonces $2^x > 10x > 5(x+1)+2$, es decir, por inducción 2^{x-1} siempre será mayor que $5x + 2$ para todo $x \geqslant 7$.

Luego el único valor que puede tomar el entero positivo x es 6, que a su vez resulta en

$$n = 2^{11} - 30 - 3 = 2048 - 33 = 2015$$

□

Ejercicio. 5.12.
Con baldosas cuadradas de lado un número exacto de unidades se ha podido embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: El primer día se puso una baldosa, el segundo, dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Olimpíada Matemática Española, año 2016. Referencia web.

SOLUCIÓN. Supongamos que fueron necesarias n baldosas y que su tamaño es $k \times k$.
Entonces $nk^2 = 18144 = 2^5 \times 3^4 \times 7$.

Hay por tanto nueve casos posibles para n: 2×7,
$2^3 \times 7$,
$2^5 \times 7$,
$2 \times 3^2 \times 7$,
$2^3 \times 3^2 \times 7$,
$2^5 \times 3^2 \times 7$,
$2 \times 3^4 \times 7$,
$2^3 \times 3^4 \times 7$,
$2^5 \times 3^4 \times 7$.

Además este número tiene que poder expresarse de la forma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Esto solo es posible en el caso $2^5 \times 3^2 \times 7 = 63 \times \frac{64}{2} = 2016$.

Para descartar los otros caso rápidamente observamos que N y N +1 son números primos entre sí.
Si por ejemplo $\frac{N(N+1)}{2} = 2^3 \times 7$, tendría que ser $N+1 = 2^4$ y $N = 7$, que es imposible.

Así por tanto concluimos que se necesitan 2016 baldosas. □

Ejercicio. 5.13.
Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo, si $p = 13$, es $999999 = 13 \cdot 76923$

Libro de la Olimpíada Matemática Española, año 2004. [5, pág. 39].

SOLUCIÓN. Sea a_i el número compuesto por i nueves $a_i = \overbrace{99\cdots9}^{i}$.

Supongamos que existe p tal que p no divide a_i para todo $i \in \mathbb{N}$, para probar por contradicción el enunciado.

Consideramos en dicho caso los números $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. En este conjunto sabemos por hipótesis que no hay ningún $a_i \equiv 0 \pmod p$. Por tanto al haber p números y sólo $p-1$ restos posibles módulo p, se sabe que existen

$$m, n \text{ tales que } a_m - a_n \equiv 0 \pmod p.$$

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $m > n$ y tenemos

$$p|(a_m - a_n) = \overbrace{99\cdots9}^{m} - \overbrace{99\cdots9}^{n} = \overbrace{99\cdots9}^{m-n}\overbrace{00\cdots0}^{n} = a_{m-n} \cdot 10^n.$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5$ resulta que p no divide $10^n = 2^n \cdot 5^n$, es decir que $p|a_{m-n}$ y como pertenece al conjunto escogido por ser $m-n < n$ y $m-n \geq 1$, hemos llegado a una contradicción. Por tanto:

$$\text{para todo entero primo positivo } p \neq 2, 5, \text{ existe } a_i \text{ tal que } p|a_i.$$

□

Algunas reformulaciones de este ejercicio serían:

Ejercicio. 5.14.
Sea p un entero primo positivo distinto de 2 y 5. Prueba que existe un múltiplo n de p que se escribe en la forma $n = 1010\cdots101$, con un número impar de cifras, todas ellas, alternativamente, $1's$ y $0's$.

Ejercicio. 5.15.
Sea p un entero primo positivo. Prueba que para cada entero primo positivo q, distinto de p, existe un múltiplo n de p que se escribe en la forma $n = \dfrac{q^{2(t+1)}-1}{q^2-1}$.

Capítulo III

Segundo nivel. Olimpíadas Nacionales

6. Problemas

Ejercicio. 6.1.
Halla dos números enteros positivos a y b conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea 3972 y el mínimo común múltiplo 985928.

Olimpíada Matemática Española, año 2017. Referencia web

SOLUCIÓN. Sea p un entero primo positivo que divide a la suma $a+b$ y a su mínimo común múltiplo $[a,b]$. Como $p|[a,b]$ al menos divide a uno de los dos enteros.

Si $p|a$, al dividir p a la suma $a+b$, también $p|b$. (Es el mismo razonamiento si hubiéramos supuesto que $p|b$).

Por tanto podemos dividir los dos números a y b por p y también su mínimo común múltiplo $[a,b]$, para obtener dos enteros a_1 y b_1 tales que $a_1 = \frac{a}{p}$, $b_1 = \frac{b}{p}$ y $[a_1, b_1] = \frac{[a,b]}{p}$.

Sea $d = (a,b)$ el máximo común divisor de a y b. Repitiendo el proceso anterior llegaremos a obtener dos enteros A y B tales que $a = dA$, $b = dB$ y $(A,B) = 1$. Entonces $[A,B] = AB$.

Ahora es fácil determinar A y B a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B = \dfrac{a+b}{d} \\[2ex] AB = \dfrac{[a,b]}{d} \end{cases}$$

Es decir, A y B son las raíces de la ecuación de segundo grado en t:

$$dt^2 - (a+b)t + [a,b] = 0$$

Observamos el discriminante de esta ecuación es no negativo. En efecto:

$$\triangle = (a+b)^2 - 4d[a,b] = (a+b)^2 - 4ab = (a+b)^2 \geq 0$$

Si a y b son distintos, la ecuación anterior tiene por soluciones los dos enteros positivos $A = \frac{a}{d}$ y $B = \frac{b}{d}$.
Para el caso particular en el que $a+b = 3972$ y $[a,b] = 985928$, tenemos que $d = (3972, 985928) = 4$.

Por tanto, $a = 4A$ y $b = 4B$ siendo A y B las raíces de la ecuación $4t^2 - 3972t + 985928 = 0$
Es decir $A = 491$ y $B = 502$ y los números buscados son $a = 1964$ y $b = 2008$.

Otras reformulaciones de este ejercicio:

- Aplícalo en el caso de que la suma sea 3981 y el mínimo común múltiplo 3961388.
- Aplícalo en el caso de que la suma sea 2000 y el mínimo común múltiplo 999999.

□

Ejercicio. 6.2.
Determina, justificadamente, todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.

Olimpíada Matemática Española, año 2009. Referencia web.

SOLUCIÓN. Dada una solución (x, y) cualquiera, es claro que también son soluciones $(x, -y)$, $(-x, y)$ y $(-x, -y)$, con lo que se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x, y \geq 0$.

Es claro que $(x - y^2)(x + y^2) = 7^2 \cdot 41$.

Si $x - y^2$ y $x + y^2$ no son primos entre sí, su máximo común divisor al cuadrado divide a $2009 = 7^2 \cdot 41$, luego es 7 y divide a $(x+y^2)+(x-y^2) = 2x$ y a $(x+y^2)-(x-y^2) = 2y^2$, con lo que existen enteros no negativos u y v tales que:

$$\begin{array}{l} x = 7u \\ y = 7v \\ (u+7v^2)(u-7v^2) = 41 \end{array}$$

Como ambos factores han de ser enteros, se tiene que

$$u + 7v^2 = 41 \quad \text{y} \quad u - 7v^2 = 1,$$

con lo que $u = 21$ y $v^2 = \frac{10}{7}$.

No existes soluciones enteras en este caso.

Si $x-y^2$ y $x+y^2$ son primos entre sí, un posible caso es que $x-y^2=1$ y $x+y^2=2009$, con lo que $y^2=1004$, absurdo pues $31^2=961<10004<32^2$.

Tan sólo nos queda el caso en que

$$x-y^2=41 \quad \text{y} \quad x+y^2=49,$$

que resulta que $x=45$, $y^2=4$.

Con lo que llegamos a que la única solución con enteros no negativos es $x=45$ e $y=2$.
Por tanto, las únicas soluciones en enteros son:

$$(x,y)=(\pm 45,\pm 2).$$

□

Ejercicio. 6.3.
Sean a, b, c tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geqslant\frac{15}{8}.$$

Olimpíada Matemática Española, año 2010. Referencia web.

SOLUCIÓN. Haciendo $a=x_1, b=x_2, c=x_3$ y llamando $s=x_1+x_2+x_3$, resulta que el lado izquierdo de la desigualdad se escribe como

$$S=\frac{s+2x_1}{3s+x_1}+\frac{s+2x_2}{3s+x_2}+\frac{s+2x_3}{3s-x_3}$$

Por otro lado,

$$S+6=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{s+2x_k}{3s-x_k}+2\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{7s}{3s-x_k} \tag{III.1}$$

con lo que

$$\begin{aligned} S+6 &= \frac{7s}{3s-x_1}+\frac{7s}{3s-x_2}+\frac{7s}{3s-x_3}= \\ &= 7s\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{3s-x_k} \end{aligned} \tag{III.2}$$

Dado que $\Sigma_{k=1}^{3}(3s-x_k)=8s$, entonces

$$s=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{3}(3s-x_k) \tag{III.3}$$

y

$$S+6=\frac{7}{8}\sum_{k=1}^{3}(3s-x_k)\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{3s-x_k}\geqslant\frac{63}{8} \tag{III.4}$$

de donde resulta que

$$S=\frac{s+2x_1}{3s+x_1}+\frac{s+2x_2}{3s+x_2}+\frac{s+2x_3}{3s-x_3}\geqslant\frac{63}{8}-6=\frac{15}{8}$$

La igualdad tiene lugar cuando $x_1=x_2=x_3$, es decir, cuando $a=b=c$. □

Ejercicio. 6.4.
Sean $a,\ b,\ c$ números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{5}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Olimpíada Matemática Española, año 2011. Referencia web.

SOLUCIÓN. Vemos en primer lugar que, en virtud de la desigualdad entre la media aritmética y geométrica, se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

dándose la igualdad si y sólo si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, o equivalentemente,

si y sólo si $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, es decir, si y sólo si $a=b=c$.

Para concluir comentar que este ejercicios se puede hacer de forma directa sin conocer la media aritmética ni la geométrica. Basta con demostrar que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 1+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

□

Ejercicio. 6.5.
Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que

$$(n+1)^n=2n^k+3n+1$$

Olimpíada Matemática Española, año 2012. Referencia web.

SOLUCIÓN. Distinguimos entre:

(1) $n = 1$, la ecuación que resulta es $2 = 6$, claramente falsa.

(2) $n \geqslant 2$, por la fórmula del binomio de Newton:

$(n+1)^n - 1 = n^2 + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \cdots$ es múltiplo de n^2. Tenemos entonces dos casos a analizar:

- $k = 1$. Entonces, n^2 divide a $2n^1 + 3n = 5n$, es decir, n divide a 5. Por tanto tenemos para $n = 5$ la ecuación es falsa ya que la ecuación nos da $6^5 = 26$.
- $k \geqslant 2$. Tenemos que n^2 divide a $2n^k + 3n$, pero como divide a $2n^k$, también divide a $3n$, es decir, n divide a 3 con lo que $n = 3$.
  Comprobamos que la ecuación que nos da para $n = 3$ es
  $$4^3 = 2 \cdot 3^k + 10$$
  $$64 - 10 = 2 \cdot 3^k$$
  luego en $3^k = 27 = 3^3$, que es cierta si y sólo si $k = 3$.

□

Ejercicio. 6.6.
Sean a, b y n enteros positivos tales que $a > b$ y $ab - 1 = n^2$. Prueba que
$$a - b \geqslant \sqrt{4n-3}$$
Indica justificadamente cuándo se alcanza la igualdad.

Olimpíada Matemática Española, año 2013. Referencia web.

SOLUCIÓN. Supongamos que el resultado a demostrar fuera falso.
Entonces
$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab < 4n - 3 + 4(n^2+1) = (2n+1)^2.$$
Pero como $a + b$ es entero y $a + b < 2n + 1$,
entonces
$$a + b \leqslant 2n$$
y por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica
$$n^2 + 1 = ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = n^2$$

Hemos llegado a una contradicción. Luego el resultado a demostrar es cierto.

En caso de la igualdad requiere que

$$(a+b)^2 = 4n-3+(n^2+1) = (2n+1)^2$$

debido a la identidad

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

Por tanto $a+b = 2n+1$.
La igualdad $a-b = \sqrt{4n-3}$ se alcanza cuando el radicando sea necesariamente un cuadrado perfecto impar, es decir

$$4n-3 = (2u+1)^2$$

para algún entero no negativo u, con lo que

$$n = u^2+u+1 \text{ y } a-b = 2u+1$$

Además, $b = n-u = u^2+1$, luego $a = b+2u+1 = u^2+2u+2$.
Se comprueba que en efecto

$$ab = u^4+2u^3+2u+2 = (u^2+u+1)^2+1 = n^2+1$$

Luego hay igualdad si y sólo si

$$\begin{gathered} a = u^2+2u+2 \\ b = u^2+1 \\ n = u^2+u+1 \end{gathered}$$

con $a-b = 2u+1$, para todo entero no negativo u. □

Ejercicio. 6.7.
¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma $a^3+b^5+c^7+d^9+e^{11}$, donde a, b, c, d, e son enteros positivos?
Razona tu respuesta.

Olimpíada Matemática Española, año 2013. Referencia web.

SOLUCIÓN. Como $5\times 7\times 9\times 11 = 3465$, vemos cuántos enteros podemos obtener que sean menores o iguales que N^{3465}.
Al ser $a^3, b^5, c^7, d^9, e^{11}$ positivo, cada uno de ellos es menor que N^{3465}, y tenemos que

$$a < N^{1155},\ b < N^{693},\ c < N^{495},\ d < N^{385},\ e < N^{315}$$

Luego al ser $1155 + 693 + 495 + 385 + 315 = 3043$, hay menos de N^{3043} tales números que se pueden poner en la forma indicada, y hay más de N^{3464} números entre los N^{3465} primeros que no se pueden representar en la forma propuesta.

Al crecer N arbitrariamente, también aumenta el número de enteros positivos que no pueden representarse en la forma indicada y por lo tanto si existen infinitos enteros que no se pueden representar de la manera propuesta. □

Ejercicio. 6.8.
Dados los números racionales r, q y n, tales que $\dfrac{1}{r+qn} + \dfrac{1}{q+rn} = \dfrac{1}{r+q}$, *probar que* $\sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}$ *es un número racional*

Olimpíada Matemática Española, año 2014. Referencia web.

SOLUCIÓN. Racionalizando, tenemos

$$\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} = \sqrt{\frac{(n-3)(n+1)}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{(n-1)^2-4}}{n+1}$$

Por tanto, podemos probar el enunciado si vemos que $(n-1)^2-4$ es el cuadrado de un número racional. Para ello, vamos a escribir la condición y la escribimos en forma equivalente

$$(r+qn)(r+q)+(q+rn)(r+q) = (r+qn)(q+rn) \Longleftrightarrow (r+q)^2 = rq(n-1)^2$$

de donde resulta $(n-1)^2 = \dfrac{(r+q)^2}{rq}$.

Entonces, se tiene que

$$(n-1)^2-4 = \frac{(r+q)^2}{rq} - 4 = \frac{(r-q)^2}{rq} = \frac{(r+q)^2(n-1)^2}{(r+q)^2} = \left(\frac{(r-q)(n-1)}{(r+q)}\right)^2$$

En la penúltima igualdad he utilizado que $rq = \dfrac{(r+q)^2}{(n-1)^2}$.

Por tanto, $(n-1)^2-4$ es el cuadrado de un número racional. □

Ejercicio. 6.9.
Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geqslant p$, y $1+np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

Olimpíada Matemática Española, año 2015. Referencia web.

SOLUCIÓN. Sea $1+np = k^2$, con k entero positivo.
Entonces $np = k^2-1 = (k+1)(k-1)$.
Considero dos casos:

(1) Si el primo p divide a $k-1$, entonces $k-1=ph$ y $k=ph+1$, con h entero positivo.

Por tanto

$$\begin{aligned} & 1+np=k^2=(ph+1)^2=p^2h^2+2ph+1 \\ \Leftrightarrow\ & np=p^2h^2+2ph \\ \Leftrightarrow\ & n=ph^2+2h. \end{aligned}$$

Entonces,

$$n+1=ph^2+2h+1=(p-1)h^2+(h+1)^2$$

como queríamos demostrar.

(2) Si el primo p divide a $k+1$, entonces $k+1=p\cdot h$ y $k=ph-1$, con $h>1$ entero. (Si $h=1$ se corresponde con el caso $n=p-2$, que no es posible)

Por tanto

$$\begin{aligned} & 1+np=k^2=(ph-1)^2=p^2h^2+2ph+1 \\ \Leftrightarrow\ & np=p^2h^2-2ph \\ \Leftrightarrow\ & n=ph^2-2h. \end{aligned}$$

Entonces, $n+1=ph^2-2h+1=(p-1)h^2+(h-1)^2$ es suma de p cuadrados perfectos.

□

Ejercicio. 6.10.
Sean $m \geqslant 1$ un entero positivo, a y b enteros positivos distintos mayores estrictamente que m^2 y menores estrictamente que m^2+m. Hallar todos los enteros d, que dividen al producto ab y cumplen $m^2<d<m^2+m$.

Olimpíada Matemática Española, año 2016. Referencia web.

SOLUCIÓN. Sea d un entero positivo que divida a ab y tal que $d \in (m^2, m^2+m)$.
Entonces d divide a

$$(a-d)(b-d)=ab-da-db+d^2$$

Como que

$$|\, a-d \,|< m \text{ y } |\, b-d \,|< m$$

deduzco que

$$|\,(a-d)(b-d)\,|< m^2 < d$$

lo que implica que $(a-d)(b-d)=0$.

Así que concluimos con $d=a$ ó $d=b$. □

Ejercicio. 6.11.
Hallar las soluciones enteras de la ecuación $p(x+y) = xy$ donde p es un número primo.

Libro de la Olimpíada Matemática Española, año 2004. [5, pág. 31].

SOLUCIÓN. Ya que p es primo, podemos decir que p es distinto de 1 y de 0.
De la ecuación resulta que p divide a x o p divide a y. Como la ecuación es simétrica respecto de x e y, si el par (α, β) es solución, también lo será el par (β, α).

Si p divide a x, debe ser $x = p \cdot a$, con $a \in \mathbb{Z}$ y la ecuación se puede poner como $p(pa + y) = pay$, de donde $pa + y = ay$ y obtenemos que

$$y = \frac{pa}{a-1}$$

ya que a es entero.
Además, a y $a-1$ son primos entre sí, luego $a-1$ divide a p.
Al ser p primo sólo hay cuatro posibilidades:

(1) Si $a-1 = -1$, entonces $a = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

(2) Si $a-1 = 1$, entonces $a = 2$, $x = 2p$, $y = \dfrac{2p}{2-1} = 2p$.

(3) Si $a-1 = p$, entonces $a = p+1$, $x = p(p+1)$, $y = \dfrac{p(p+1)}{p+1-1} = p+1$.

(4) Si $a-1 = -p$, entonces $a = 1-p$, $x = p(1-p)$, $y = \dfrac{p(1-p)}{1-p-1} = p-1$.

Por tanto podemos concluir, que las soluciones son: $(0,0)$; $(2p, 2p)$; $(p(p+1), p+1)$; $(p(1-p), p-1)$, y por la simetría añadimos: $(p+1, p(p+1))$; $(p-1, p(1-p))$ □

Ejercicio. 6.12.
Demostrar que todo número primo p distinto de 2 y de 5 tiene infinitos múltiplos escritos sólo con unos (es decir, de la forma $111\ldots1$).

Libro de la Olimpíada Matemática Española, año 2004. [5, pág. 29].

SOLUCIÓN. Si consideramos las clases de restos módulo p, entre las potencias $10^0, 10^1, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$, tiene que haber al menos dos que pertenezcan a la misma clase.

La clase 0 no puede aparecer pues p es distinto de 2 y de 5.

Sean esas potencias 10^a y 10^b y supongamos $b > a$. Tenemos

$$10^a = p \cdot q + r, \quad 10^b = p \cdot q' + r.$$

Por lo tanto:

$$10^b - 10^a = p(q' - q) \text{ o bien } 10^a(10^k - 1) = p(q' - q).$$

Como p es distinto de 2 y de 5, p es primo con 10^a, y por lo tanto $p|(10^k - 1)$.

Si $p \neq 3$, entonces $p|111\dots1$ Si $p = 3$, existe el número 111, que es múltiplo de 3.

Es decir, al menos hay un múltiplo que cumple las condiciones exigidas.

Pero si el número M formado por k cifras, todas iguales a 1, es múltiplo de p, también lo será el número $M' = M \cdot 10^k + M = M(10^k + 1)$, y el número $M'' = M'(10^{2k} + 1)$, y así sucesivamente. □

Un reformulación de este ejercicio sería:

Ejercicio. 6.13.
Sea p un entero primo positivo. Prueba que para cada entero primo positivo q, distinto de p, existen infinitos múltiplos n de p que se escribe en la forma $n = q^t + \cdots + q + 1$.

Ejercicio. 6.14.
Determina el número de valores distintos de la expresión

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2},$$

donde $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$.

Olimpíada Matemática Española, año 2017. Referencia web.

SOLUCIÓN. Sumando y restando $2 - n$ al numerador se obtiene

$$a_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2} = \frac{n^2 - 2 - n + 2 + n - 2}{n^2 - n + 2} = 1 + \frac{n - 4}{n^2 - n + 2}$$

Ahora vamos a ver si hay dos términos iguales, es decir, cuando es $a_p = a_q$ para $p \neq q$. Estos es equivalente a encontrar los enteros $p \neq q$ para los que

$$\frac{p-4}{p^2-p+2}=\frac{q-4}{q^2-q+2}\Longleftrightarrow (p-q)(pq-4p-4q+2)=0$$
$$pq-4p-4q+2+14=14\Longleftrightarrow (p-4)(q-4)=14$$

De lo anterior deducimos que $(p-4)|14$ y $p-4\in\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$.

Los valores negativos nos son posibles porque ambos $p,q\geq 1$ con lo que $p-4\in\{1,2,7,14\}$.

Como $(p-4)(q-4)=14$ entonces $q-4\in\{14,7,2,1\}$ de donde resultan los pares $(p,q)=(5,18)$ y $(p,q)=(6,11)$ para los que $a_5=\dfrac{22}{23}=a_{18}$ y $a_6=\dfrac{17}{16}=a_{11}$.

Finalmente, dado que todos los a_n son números racionales, entonces entre los 100 primeros términos de la sucesión hay 98 que son distintos.

□

Ejercicio. 6.15.
Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc+a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab},$$

siendo a, b, c, números reales positivos tales que $a+b+c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Olimpíada Matemática Española, año 2017. Referencia web

SOLUCIÓN. En primer lugar se observa que cuando:

$a=b=c=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ el valor que toma la expresión es de $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, lo cual sugiere conjeturar que

$$27abc+a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab}\leq\tfrac{2}{3\sqrt{3}}$$

Para probar la conjetura, se puede aplicar la desigualdad de Cauchy, $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2\leq\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$ a los vectores $\overrightarrow{u}=(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ y $\overrightarrow{v}=(\sqrt{bc},\sqrt{ca},\sqrt{ab})$, obteniéndose

$$9abc=(\sqrt{abc}+\sqrt{abc}+\sqrt{abc})^2\leq(a+b+c)(bc+ca+ab)$$

Multiplicando por 3 ambos miembros de la desigualdad anterior y teniendo en cuenta la restricción, resulta

$$27abc\leq 3(a+b+c)(bc+ca+ab)=\sqrt{3}(bc+ca+ab)$$

Por otro lado, dado que

$$a\sqrt{a^2+2bc}=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)}$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica a los números $3a^2$ y a^2+2bc se obtiene

$$a\sqrt{a^2+2bc}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{3a^2+(a^2+2bc)}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2a^2+bc)$$

Análogamente, se tiene que

$$b\sqrt{b^2+2ca}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}(2b^2+ca)$$

y

$$c\sqrt{c^2+2ab}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2c^2+ab)$$

Combinando las desigualdades anteriores, y teniendo en cuenta otra vez la restricción, se obtiene:

$$\begin{gathered}27abc+a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab}\\ \leq\sqrt{3}(bc+ca+ab)+\frac{1}{\sqrt{3}}(2a^2+bc+2b^2+ca+2c^2+ab)\\ =\frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=\frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c)^2=\frac{2}{3\sqrt{3}}\end{gathered}$$

Esto prueba la conjetura y el máximo de la expresión es $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ □

Capítulo IV

Tercer nivel. Olimpíadas Internacionales

7. Problemas

Ejercicio. 7.1.
Determine todas las parejas (a, b) *de enteros positivos tales que* $ab^2 + b + 7$ *divida* $a^2b + a + b$

International Mathematical Olympiads. 1959–2000, año 1998. [1, pág. 334].

SOLUCIÓN. Desde la divisibilidad $ab^2 + b + 7 \mid a^2b + a + b$ nosotros obtenemos:

$$ab^2 + b + 7 \mid b\left(a^2b + a + b\right) - a\left(ab^2 + b + 7\right) \Rightarrow ab^2 + b + 7 \mid b^2 - 7a.$$

(1) $b^2 - 7a = 0$, se sigue que $b^2 = 7k$, $a = 7k^2$ y observamos que toda pareja $\left(7k^2, 7k\right)$, $k \geqslant 1$ son solución para el problema.

(2) $b^2 - 7a > 0$. Entonces $ab^2 + b + 7 < b^2 - 7a$ y nosotros llegamos a contradicción:

$$b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7.$$

(3) $b^2 - 7a < 0$. Entonces $ab^2 + b + 7 < 7a - b^2$ esto es posible solo para $b^2 < 7$, es decir, bien $b = 1$ o $b = 2$.

- Si $b = 1$ obtenemos $a = 11$ o $a = 49$.
- Si $b = 2$ obtenemos $4a + 9 \mid a + 22 \Rightarrow 4a + 9 \leqslant a + 22 \Rightarrow 3a \leqslant 13$. Este caso no nos da solución.

Por lo tanto, la solución del problema es:

$$\left(7k^2, 7k\right), (11, 1) \text{ y } (49, 1).$$

□

Ejercicio. 7.2.
Determina todos los pares ordenados del tipo (m,n) de enteros positivos tal que

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

es un entero.

International Mathematical Olympiads. 1959–2000, año 1994. [1, pág. 288].

SOLUCIÓN. Vamos a igualar $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = k$, k un entero positivo.
Calculamos y tenemos que

$$(n^3+1) = k(mn-1)$$

obtengo

$$k+1 = n(km-n^2)$$

De este modo, n divide a $k+1$ y tenemos que $km-n^2 = q$ y que $k = nq-1$.

Utilizando este k obtenemos:

$$n^3+1 = (nq-1)(mn-1) \Leftrightarrow n(mq-n) = m+q.$$

Siendo $m+q > 0$ se sigue que $x = mq-n > 0$.

De este modo tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} xn = m+q \\ x+n = mq \end{cases}$$

Mediante estas ecuaciones se obtiene:

$$xn+mq = x+n+m+q \Leftrightarrow xn+mq-x-n-m-q+2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)(n-1)+(m-1)(q-1) = 2$$

Obtenemos:

$$(x-1)(n-1)+(m-1)(q-1) = 2$$

tenemos un número finito de posibles soluciones de enteros positivos. Serían:

a) Si $x = 1, m-1 = 2; q-1 = 1$ entonces $x = 1; m = 3; q = 2; \Rightarrow m = 3; n = 5$.

b) Si $x = 1; m-1 = 1; q-1 = 2$ entonces $m = 2; n = 5$

c) Si $n = 1; m-1 = 2; q-1 = 1$ entonces $= 1; m = 3$

d) Si $n = 1; m-1 = 1; q-1 = 2$ entonces $n = 1; m = 2$

e) Si $m = 1; x-1 = 2; n-1 = 1$ entonces $m = 1; n = 2$

f) Si $m = 1; x-1 = 1; n-1 = 2$ entonces $m = 1; n = 3$

g) Si $q = 1; x-1 = 1; n-1 = 2$ entonces $n = 3; m = 5$

h) Si $q = 1; x-1 = 2; n-1 = 1$ entonces $n = 2; m = 5$

i) Si $x-1 = n-1 = m-1 = q-1 = 1$ entonces $m = n = 2$

De este modo, obtenemos las nueve pares de enteros positivos de la forma (m, n) siguientes:

$$(5,\ 3),\ (3,\ 5),\ (5,\ 2),\ (2,\ 5),\ (3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$$

Todas ellas son solución de nuestro problema. □

Ejercicio. 7.3.
Los números enteros positivos a y b son tales que los números $15a + 16b$ y $16s + 15b$ son ambos cuadrados de enteros positivos. Encuentre el mínimo valor posible que puede ser tomado por el mínimo de estos dos cuadrados.

International Mathematical Olympiads. 1959–2000, año 1996. [1, pág. 306].

SOLUCIÓN. Sean x e y dos enteros positivos tales que

$$\begin{aligned} 15a + 16b &= x^2 \\ 16s + 15b &= y^2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema y de este modo obtengo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{15x^2 + 16y^2}{481}; \\ b &= \frac{16x^2 - 15y^2}{481} \end{aligned}$$

La composición de $481 = 13 \cdot 37$, consideramos las congruencias siguientes:

$$\begin{aligned} 15x^2 + 16y^2 &\equiv 0 \pmod{13} \\ 15x^2 + 16y^2 &\equiv 0 \pmod{37} \end{aligned}$$

Estas congruencias solo tienen la solución cero:

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod{13} \text{ o } x \equiv y \equiv 0 \pmod{37}\text{, respectivamente.}$$

Es obvio que $x \equiv 0 \pmod{13}$ si $y \equiv 0 \pmod{13}$ Sean $x, y \not\equiv 0 \pmod{13}$.

Entonces obtenemos que

$$2x^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod{13} \text{ entonces } 3y^2 \equiv -2x^2 \pmod{13} \text{ entonces}$$
$$3 \cdot 4y^2 \equiv -2 \cdot 4x^2 \pmod{13} \text{ entonces } y^2 \equiv 5x^2 \pmod{13}$$

Por lo tanto, se obtiene que 5 es el residuo cuadrático en $\pmod{13}$. De forma recíproca:

$$\left(\frac{5}{13}\right) = \left(\frac{13}{5}\right)(-1)^{\frac{13-1}{2}\frac{5-1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)(-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{3-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

Por lo tanto, la primera congruencia solo tiene de solución

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod{13}$$

Para segunda congruencia procedemos de la misma forma:

$$15x^2 + 16y^2 \equiv 0 \pmod{37} \text{ enonces } 16y^2 \equiv -15x^2 \pmod{37} \text{ entonces } (4y)^2 \equiv 22x^2 \pmod{37}$$

Siguiendo la misma forma:

$$\left(\frac{22}{37}\right) = \left(\frac{2}{37}\right)\left(\frac{11}{37}\right) = (-1)^{\frac{37^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{11-1}{2}\frac{37-1}{2}} \frac{37}{11} = (-1)(+1)\left(\frac{4}{11}\right) = -1$$

Entonces para la segunda congruencia la solución será

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod{13}.$$

Por lo tanto, la solución (x, y) de ambas congruencias es necesariamente de la forma

$$x = 481k;\ y = 481l$$

Estas verifican ambas ecuaciones del principio.

Para $x = y = 481$ obtenemos la mínima solución. En tal caso, $a = 31 \times 481$ y $b = 481$.
De este modo, el mínimo valor del cuadrado es 481^2 □

Ejercicio. 7.4.
Halla todos los números naturales n tales que $2^n + 12^n + 2011^n$ es un cuadrado perfecto.

International Mathematical Olympiads. 1959–2000, año 1998. [1, pág. 334].

SOLUCIÓN.

(1) Si $n = 0$, obtenemos que $2^n + 12^n + 2011^n = 3$ no es un cuadrado perfecto.

(2) Si $n = 1$, obtenemos que $2^n + 12^n + 2011^n = 20125 = 45^2$.

(3) Si $n \geqslant 2$,

- Módulo 3:
  Tomando los resto módulo 3, llegamos a que
  $$2^n \equiv 1 \pmod 3 \text{ si } n \text{ es par}$$
  y
  $$2^n \equiv 1 \pmod 3 \text{ si } n \text{ es impar}$$
  mientras que 12^n siempre es congruente con 0 y 2011^n siempre es congruente con 1.

  Deducimos así que
  $$2^n + 12^n + 2011^n \equiv 2 \pmod 3 \text{ si } n \text{ es par}$$
  y
  $$2^n + 12^n + 2011^n \equiv 1 \pmod 3 \text{ si } n \text{ es impar.}$$
  Como todos los cuadrado perfectos son congruentes con 0 o con 1 módulo 3, tenemos que si $2^n + 12^n + 2011^n$ es un cuadrado perfecto, entonces n ha de ser impar.

- Módulo 4:
  Considero ahora restos módulo 4. Si $n \geqslant 2$, entonces tanto 2^n como 12^n son múltiplos de 4, luego $2^n + 12^n + 2011^n \equiv 3^n \pmod 4$, que es congruente con 1 si n es par y con 3 si n es impar.
  Como todo cuadrado perfecto es congruente con 0 o con 1 módulo 4, deducimos que n ha de ser par.

Con lo ya visto, concluimos que no existen valores de $n \geqslant 2$ para los que $2^n + 12^n + 2011^n$ es un cuadrado perfecto.

La única solución del problema es $n = 1$.

□

Ejercicio. 7.5.
Considera las potencias de 2

2^0	$= 1$	2^5	$= 32$
2^1	$= 2$	2^6	$= 64$
2^2	$= 4$	2^7	$= 128$
2^3	$= 8$	2^8	$= 256$
2^4	$= 16$	2^9	$= 512$

observa que ningún par de ellas tienen los mismos dígitos (aunque estén escritos en distinto orden). ¿Es ésto cierto para cualquier potencia de 2? Esto es, ¿existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos, pero variando el orden?; que una se escribe como una reordenación de los dígitos de la otra.

International Mathematical Olympiads. 1959–2000, año 1998. Ver [7, pág. 15].

SOLUCIÓN. Tenemos que buscar invariantes de una expresión decimal de un número que no dependan de la ordenación de los dígitos que lo representan, y de forma que nos aseguremos que las diferentes potencias de 2 puedan diferenciarse mediante estos invariantes.

Observando la tabla del enunciado parece claro que uno de los invariantes podría ser el número de cifras, pero rápidamente advertimos que dos potencias distintas de 2 pueden tener el mismo número de cifras.

2^0	$=1$	2^4	$=16$	2^7	$=128$	2^{10}	$=1024$
2^1	$=2$	2^5	$=32$	2^8	$=256$	2^{11}	$=2048$
2^2	$=4$	2^6	$=64$	2^9	$=512$	2^{12}	$=4096$
2^3	$=8$					2^{13}	$=8192$

En cada columna hemos representado las potencias de 2 que tienen una, dos tres y cuatro cifras.

¿Cómo distinguir entre ellas? Es claro que no mediante la cifra de las unidades, por ejemplo. Un método más interesante, en el que intervienen todas las cifras, es estudiar el resto módulo 9; esto es, sumar los dígitos de cada número y reducir módulo 9 hasta obtener un entero entre 0 y 8.
Completando el cuadro anterior se tiene:

2^n		$\pmod 9$	2^n		$\pmod 9$	2^n		$\pmod 9$	2^n		$\pmod 9$
2^0	$=1$	1	2^4	$=16$	7	2^7	$=128$	2	2^{10}	$=1024$	7
2^1	$=2$	2	2^5	$=32$	5	2^8	$=256$	4	2^{11}	$=2048$	5
2^2	$=4$	4	2^6	$=64$	1	2^9	$=512$	8	2^{12}	$=4096$	1
2^3	$=8$	8							2^{13}	$=8192$	2

Observamos que en este caso se repiten cíclicamente 1, 2, 4, 8, 7, 5.
Si probamos que en cada columna no hay dos de estos números ya tendremos el resultado. La lista anterior corresponde a

$$2^0 \equiv 1 \pmod 9, \quad 2^1 \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^2 \equiv 4 \pmod 9, \quad 2^3 \equiv 8 \pmod 9,$$
$$2^4 \equiv 7 \pmod 9, \quad 2^5 \equiv 5 \pmod 9, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

Por lo tanto si la primera potencia de 2 que tiene t dígitos significativos es 2^s, módulo 9 éste será uno de los elementos de $\{1,2,4,8,7,5\}$; y se repite para 2^{s+6}.
¿Tendrá 2^{s+6} más dígitos que 2^s?
Por supuesto que sí, ya que
$$10^{t-1} \leq 2^s,$$
$$10^t < 10^{t-1} \times 2^6 \leq 2^s \times 2^6 = s^{s+6}.$$

Por lo tanto no existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos ordenados de formas distintas.
□

Ejercicio. 7.6.
Sea $n \geq 2$ un entero, prueba que $\prod\{p \mid p$ es primo y $p \leq n\} < 4^n$.

Olimpiada Matemática de Australia, 2005. Referencia web

SOLUCIÓN. Hacemos la demostración por inducción sobre n. Si $n = 2$, el resultado es cierto, ya que $2 < 2^2 = 4$. Supongamos que se verifica para todos los enteros m tales que $2 \leq m < n$. Si n es par, se tiene $\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n$. Supongamos, por tanto que n es impar; sea $n = 2k+1$, y por tanto $k = (n-1)/2$. Es claro que $\prod_{k<p\leq n} p$ divide a $\binom{n}{k+1}$, y por tanto se tiene:

$$\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq k+1} p \cdot \prod_{k+1<p\leq n} p < 4^{k+1} \cdot \binom{n}{k+1} < 4^{k+1} \cdot 2^{n-1}$$
$$= 2^{2k+2} \cdot 2^{n-1} = 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} = 2^{4k+2} = 4^{2k+1} = 4^n.$$

Aquí se ha utilizado que, ya que n es impar, se tiene

$$2^n = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2\left(\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k}\right),$$

entonces

$$2^{n-1} > \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

□

Ejercicio. 7.7.
Para cada entero positivo $n > 1$ hay un primo p tal que $n < p < 2n$.

Olimpiada Matemática de Australia, 2005. Referencia web

SOLUCIÓN. Nosotros asumimos que no hay promos entre n y $2n$ y obtendremos una contradicción. Obtenemos que, bajo esta suposición, los coeficientes del binomio $\binom{2n}{n}$ es el más pequeño que debería ser. En efecto, es este caso tenemos la siguiente factorización de primos:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leq n} p^{s_p}$$

donde s_p es el exponente de los primos de p en esta factorización. No hay valores mayores que n podamos encontrar en esta factorización de primos. De hecho, podemos escribir

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leq 2n/3} p^{s_p}$$

Por tanto sabemos que $p^{s_p} < 2n$ y que $s_p = 1$ para los $p > \sqrt{2n}$. De hecho

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{s_p} \cdot \prod_{p\leq 2n/3} p$$

Estimamos ahora estos productos usando la desigualdad $p^{s_p} \leq 2n$ para el primer producto y lo demostrado en el anterior ejercicio para el segundo. No tenemos más que $\sqrt{2n}/2-1$ factores en el primer producto (como el 1 e incluso números no primos), de hecho

$$\binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{2n}/2-1} \cdot 4^{2n/3}$$

En otro camino, tenemos que

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{4^n}{2n}$$

Combinando los dos resultados anteriores llegamos a que

$$4^{n/3} < (2n)^{\sqrt{n/2}}$$

Aplicando lo que tenemos a ambos lados, obtenemos

$$\frac{2n}{3}\ln 2 < \sqrt{\frac{n}{2}}\ln(2n)$$

o

$$\sqrt{8n}\ln 2 - 3\ln(2n) < 0$$

Vamos a sustituir $n = 2^{2k-3}$ para algún k. Entonces obtenemos que $2^k \ln 2 - 3(2k-2)\ln 2 < 0$ o $2^k < 3(2k-2)$ lo cual es verdad solo para $k \leq 4$ (se prueba por inducción). De hecho, nuestra última desigualdad no es verdad para $n = 2^7 = 128$. Vamos a considerar la función $f(x) = \sqrt{8x}\ln 2 - 3\ln(2x)$ definida por $x > 0$. Su derivada es

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}\ln 2 - 3}{x}$$

notamos que para $x \geq 8$ esta derivada es positiva. De este modo no es verdad para todos los $n \geq 128$. Lo hemos probado que para $n \geq 128$ □

Ejercicio. 7.8.
Encuentra todos los enteros positivos n tales que $20n+2$ *divide a* $2017n+2016$.

Ver [8], Olimpiada Matemática de China para mujeres, 2002.

SOLUCIÓN. Primero observa que n tiene que ser par. Sea $n = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Tenemos entonces

$$20 \times 2k + 2 | 2017 \times 2k + 2016, 20k + 1 | 2017k + 1008.$$

Tenemos $2017k + 1008 = 100(20k+1) + 17k + 1007$, y por tanto $20k+1$ divide a $17k+1007$.

Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} = 1$, entonces $17k+1007 = 20k+1$, esto es, $1006 = 3k$, lo que es imposible.
Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} = 2$, entonces $17k+1007 = 40k+2$, esto es, $1005 = 23k$, lo que es imposible.
Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} = 3$, entonces $17k+1007 = 60k+3$, esto es, $1004 = 43k$, lo que es imposible.
Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} = 4$, entonces $17k+1007 = 80k+4$, esto es, $1003 = 63k$, lo que es imposible.
Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} = 5$, entonces $17k+1007 = 100k+5$, esto es, $1002 = 83k$, lo que es imposible.
Si $\dfrac{17k+1007}{20k+1} \geq 6$, entonces $17k+1007 \geq (20k+1)6$, esto es, $1001 \geq (120-17)k$, de donde $k \leq \dfrac{1001}{103} \leq 10$.
Por tanto $k \leq 9$. Pero para $k = 1, 2, \ldots, 9$ se tiene que $20k+1$ no divide a $17k+1007$, por lo tanto no existe ningún n verificando la condición del enunciado.

El continuar hasta el valor 5 es para acotar el número de comprobaciones finales que tenemos que hacer. □

Ejercicio. 7.9.
Encuentra todas las parejas de enteros positivos (x, y) tales que $x^y = y^{x-y}$.

Ver [8], Olimpiada Matemática de China para mujeres, 2002.

SOLUCIÓN. De $x^y = y^{x-y}$ se tiene $(xy)^y = y^x$. Como consecuencia $y^y | y^x$, y se tiene $x \geq y$.
Si $x = 1$, entonces $y = 1$, y se tiene la solución $(1, 1)$.
Si $y = 1$, entonces $x = 1^x$, por tanto se tiene la misma solución $(1, 1)$.
Si $x = y$, entonces $x^{2x} = x^x$, por tanto $x^x = 1$, y se tiene $x = 1$, luego la solución $(1, 1)$.
Supongamos que $x > y \geq 2$; se tiene $1 < \dfrac{x^y}{y^y} = x^{x-2y}$, y por tanto $x \geq 2y$, y $\dfrac{x^y}{y^y}$ es entero, luego $y|x$; sea $x = ky$. Se tiene $k \geq 3$. Además, $xy = ky^2$, luego se tiene $(ky^2)^y = y^{ky}$, esto es, $k^y = y^{(k-2)y}$, y por tanto $k = y^{k-2} \geq 2^{k-2}$. La relación $k \geq 2^{k-2}$ sólo se verifica para $k = 3$ y $k = 4$.
Si $k = 3$, se tiene $3 = k = y^{k-2} = y$, y $x = ky = 3 \times 3 = 9$; se tiene la solución $(9, 3)$.
Si $k = 4$, se tiene $4 = k = y^{k-2} = y^2$, luego $y = 2$, y $x = ky = 4 \times 2 = 8$; se tiene la solución $(8, 2)$. □

Ejercicio. 7.10.
Para cada entero positivo k, sea $t(k)$ el divisor impar más grande de k. Determine todos los enteros positivos a para los cuales existe un entero positivo n tal que todas las diferencias

$$t(n+a)-t(n),\ t(n+a+1)-t(n+1),\ \ldots\ ,\ t(n+2a-1)-t(n+a-1)$$

son divisibles por 4.

Ver [9]. 52nd International Mathematical Olympiad 2011.

SOLUCIÓN. Las parejas $(1,1),(3,1)$ y $(5,4)$ son parejas que satisfacen el enunciado. Ahora suponemos que a es un entero positivo distinto de 1, 3 y 5. Distinguimos casos:

(1) Si a es par. En este caso tenemos que $a = 2^{\alpha}d$ para algunos enteros positivos α y añadimos algunos d impares. Desde $a \geq 2^{\alpha}$, para cada entero positivo n existe un $i \in \{0,1,\dots,a-5\}$ tal que $n+1 = 2^{\alpha-1}e$, donde e es algún entero impar. Entonces tenemos $t(n+i) = t(2^{\alpha-1}e) = e$ y

$$t(n+a+i) = t(2^{\alpha}d + 2^{\alpha-1}e) = 2d+e \pmod 4.$$

Así que obtenemos $t(n+i)-t(n+a+i) \equiv 2(mod4)$ y no tenemos ninguna pareja que cumpla el enunciado.

(2) Si a es impar y $a > 8$. Para cada entero positivo n, existe un $i \in \{0,1,\cdots,a-5\}$ tal que $n+i = 2d$ para alguno impar d. Obtenemos

$$t(n+i) = d \neq d+2 = t(n+i+4) \pmod 4$$

y

$$t(n+a+i) = n+a+i \equiv n+a+i+4 = t(n+a+i+4) \pmod 4.$$

Por lo tanto, los enteros $t(n+a+i) = t(n+i)$ y $t(n+a+i+4)-t(n+i+4)$ no pueden ser ambos divisibles por 4, y por eso no tenemos ninguna pareja que verifique el enunciado.

(3) Si $a = 7$. Para cada entero positivo n, existe un $i \in \{0,1,\cdots,6\}$ tal que $n+i$ es de la forma $8k+3$ o de la forma $8k+6$, donde k es un entero no negativo. Pero tenemos que

$$t(8k+3) \equiv 3 \neq 1 \equiv 4k+5 = t(8k+3+7) \pmod 4$$

y

$$t(8k+6) = 4k+3 \equiv 3 \neq 1 \equiv t(8k+6+7) \pmod 4$$

Por lo tanto, no hay parejas de la forma $(7,n)$

□

Ejercicio. 7.11.
Que sea p un primo impar. Que sea k un entero positivo tal que $\sqrt{k^2-pk}$ es un entero positivo. Entonces calcula el valor de k.

Ver [8], Olimpiada Matemática de China para mujeres, 2002.

SOLUCIÓN. Fijamos $\sqrt{k^2-pk} = n$, $n \in \mathbb{N}$. De este modo $k^2-pk-n^2 = 0$, y $k = \frac{p\pm\sqrt{p^2+4n^2}}{2}$, lo cual implica que p^2+4n^2 es un cuadrado perfecto, decimos m^2, donde $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $(m-2n)(m+2n) = p^2$.
Ya que p es primo y $p \geq 3$, tenemos

$$\begin{cases} m-2n = 1 \\ m+2n = p^2 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuaciones anteriores y obtenemos

$$\begin{cases} m = \dfrac{p^2+1}{2} \\ n = \dfrac{p^2-1}{4} \end{cases}$$

En consecuencia, $k = \dfrac{p \pm m}{2} = \dfrac{2p \pm (p^2+1)}{4}$. De este modo obtenemos el valor de k que es:

$$k = \frac{(p+1)^2}{4}$$

(Los valores negativos están omitidos) □

Ejercicio. 7.12.
Dados los números naturales m, n y k. Probar que siempre podemos encontrar los primos relativos r y s tal que $rm+sn$ es un múltiplo de k.

Ver la referencia (10). Russian problems año 1998.

SOLUCIÓN. Fijamos $d = (m, n)$, el máximo común divisor de m y n.
Fijamos $r = n/d$, $s = nhk - m/d$, donde h es un entero suficientemente grande para asegurar que $s > 0$.

Ahora $rm + sn = mn/d + nnhk - mn/d = nnhk$, el cual es múltiplo de k.

Si e divide a r, entonces también divide a $rdhk = nhk$. Por tanto, si e divide a r y a s, entonces también divide $s - nhk = -m/d$.

Pero teníamos que d divide a n y a m que son primos relativos, por tanto e tiene que ser 1. Por lo tanto r y s son primos relativos. □

Ejercicio. 7.13.
Los números naturales m y n son primos relativos. Probar que el máximo común divisor de $m+n$ y m^2+n^2 es 1 ó 2.

Ver la referencia (10). Russian problems año 1998.

SOLUCIÓN. Si d divide a $m+n$ y a m^2+n^2, entonces también divide a $(m+n)^2-(m^2+n^2) = 2mn$ y por lo tanto a $2m(m+n)-2mn = 2m^2$ y a $2n(m+n)-2mn = 2n^2$. Pero m y n son primos relativos, por tanto m^2 y n^2 también lo son. Por lo tanto d tiene que dividir a 2. □

Ejercicio. 7.14.
Sean n y m enteros positivos. Prueba que si p es un entero primo positivo tal que p divide a m^3+n^3 y no divide a $m+n$, entonces $p \neq 3$, $p \nmid m$, y $p \nmid n$.

SOLUCIÓN. Se tiene la relación $m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$, por tanto $p \mid (m^2-mn+n^2)=(m+n)^2-3mn$. Por tanto, $p \nmid 3mn$, y se tiene el resultado. □

Ejercicio. 7.15.
Sean n, m, k y h enteros positivos con $n \neq 1$ tal que n^k+mn^h+1 divide a $n^{k+h}-1$. Probar que:
(1) $m=1$ y $h=2k$ ó
(2) $h|k$ y $m=\dfrac{n^{k-h}-1}{n^h}$.

57^{th} International Mathematical Olympiad, Hong Kong 2016. Referencia web.

SOLUCIÓN. Tenemos que

$$n^k+mn^h+1|n^{k+h}-1, \tag{IV.1}$$

por lo tanto:

$$n^k+mn^h+1|(n^{k+h}-1)+(n^k+mn^h+1)=n^{k+h}+n^k+mn^h. \tag{IV.2}$$

Discutimos casos:

Caso 1. Si $h \geq k$

Como $(n^k+mn^h+1, n)=1$, utilizando (IV.2), tenemos

$$n^k+mn^h+1|n^h+mn^{h-k}+1$$

En particular, nosotros obtenemos que $n^k+mn^h+1 \leq n^h+mn^{h-k}+1$. Así que $n \geq 2$ y $k \geq 1$, $(m-1)n^h$ es al menos $2(m-1)n^{h-k}$. Se sigue que la desigualdad no puede ser cuando $m \geq 2$.
Para $m=1$, la divisibilidad anterior se convierte en

$$n^k+n^h+1|n^h+n^{h-k}+1$$

Teniendo en cuenta que $n^h+n^{h-k}+1<n^h+n^h+1<2(n^k+n^h+1)$. De este modo nosotros tenemos que $n^h+n^{h-k}+1=n^k+n^h+1$ por tanto $h=2k$, lo cual nos da el primer resultado.

Caso 2. Si $h<k$

En este caso tenemos que

$$n^k+mn^h+1|n^h+n^{k-h}+m$$

En particular, obtenemos que $n^k + mn^h + 1 \leq n^k + n^{k-h} + m$, lo cual implica

$$m \leq \frac{n^{k-h} - 1}{n^h - 1} \tag{IV.3}$$

Por otro lado, nosotros dejamos que $n^{k+h} - 1 = (n^k + mn^h + 1)t$ para algunos enteros positivos. Obviamente, t es menos que n^h, lo cual significa que $t \leq n^h - 1$ por ser un entero. Entonces nosotros tenemos que $n^{k+h} - 1 \leq (n^k + mn^h + 1)(n^h - 1)$, lo cual es lo mismo que

$$m \geq \frac{n^{k-h} - 1}{n^h - 1} \tag{IV.4}$$

Utilizando (IV.3) y (IV.4), combinadas, nos lleva a

$$m = \frac{n^{k-h} - 1}{n^h - 1}$$

Como es un entero, nosotros tenemos que $h|k-h$. Esto significa que $h|k$ y se corresponde al segundo resultado que teníamos que probar.

□

Bibliografía

[1] M. Becheanu, *International Mathematical Olympiads. 1959–2000*, The Academic Distribution Center, 2001. 7, 7, 7, 7

[2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley, 2nd. Ed., 1969.

[3] A. Engel, *Problem–solving strategies*, Springer,

[4] Cristóbal Sánchez-Rubio and Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, Universitat Jaume I. Castellón, 2000.

[5] *Olimpíada Matemática Española*, Real Sociedad Matemática Española, 2004. 5, 5, 6, 6

[6] *Sessions de preparació per l'Olimpíada matemàtica*, Soc. Cat. Mat. Barcelona, 2000. 5

[7] Terence Tao, *Solving mathematical problems, A personal perspective* Oxford Univ. Press. 2006 7

[8] Xiong Bin, Lee Peng Yee (eds.), Mathematical olympiad in China. Problems and slutions, World Scientific, 2007 7, 7, 7

[9] Bart de Smit y otros, 52nd International Mathematical Olympiad 2011. Problem Shortlist with solutions. IMO2011. Amsterdam, 2012 7

Refencias Web:

Nota[1]

1. Def. de Números Naturales
2. Definición Números Enteros
3. Definición Números Racionales
4. Media Aritmética
5. Media Geométrica
6. Media Cuadrática
7. Desigualdad de Cauchy
8. Página Olimpíada Matemática Española. Granada
9. Problemas de matemáticas. Análisis y resolución
10. International/Regional Olympiad problems

[1]Los enlaces son válidos en el formato digital.

Índice alfabético

algoritmo
- de la división, 6

anillo
- conmutativo, 3

antisimétrica, 10

cero, 1, 9
cociente, 6
conjunto bien ordenado, 1
cuerpo, 9

desigualdades, 10
- estrictas, 10

divide, 3
divisor, 4
- propio, 4

elemento
- asociado, 3
- cero, 1
- inverso, 10
- neutro, 1, 9
- opuesto, 9

estabilidad, 10

ley de tricotomía, 9, 10

mínimo
- común múltiplo, 2, 6

máximo
- común divisor, 2, 6

mayor o igual que, 10
mayor que, 10
menor o igual que, 10
menor que, 10

número
- entero
  - cuadrado perfecto, 4
  - invertible, 4
  - invertible modulo —, 7
  - irreducible, 4
  - nulo, 4
  - primo, 4

números
- complejos, 9
- enteros, 3
  - compuestos, 4
  - congruentes, 7
  - primos entre sí, 7
  - primos relativos, 7
- irracionales, 9
- naturales, 1
- racionales, 9
- reales, 9
  - negativos, 9
  - positivos, 9

principio de inducción, 1
propiedad
- asociativa, 1, 9
- conmutativa, 1, 9
- distributiva, 1, 10

reflexiva, 10
relación
- compatible, 1
- divisibilidad, 2
- orden, 1, 10
  - total, 10

resto, 6

teorema
- fundamental de la aritmética, 4
- pequeño de Fermat, 8

transitiva, 10

uno, 1, 9