Universidad de Granada

Iván Valero Terrón

Trabajo Fin de Máster

Estudio y discusión sobre problemas de olimpiada. Desigualdades

Tutor: Pascual Jara Martínez
Departamento de Álgebra

Julio 2017

Máster en Matemáticas. Facultad de Ciencias

Dedicado a mi familia
y a Pascual, por su gran ayuda

Introducción

Las desigualdades son esenciales en numerosos campos de la matemática. Mediante las desigualdades, se pueden encontrar numerosas aplicaciones incluso fuera de las matemáticas en varios ámbitos teóricos y prácticos. En secundaria, la atención se centra en las desigualdades lineares, cuadráticas y las inecuaciones que involucran al valor absoluto, pero hacen menos énfasis en la manipulación algebraica de las desigualdades o en los métodos para demostrar desigualdades.

El presente documento va dirigido a los estudiantes de bachillerato que quieran prepararse para competir en las Olimpiadas Matemáticas que se celebran en nuestro país y en el extranjero. Los problemas que involucran desigualdades son cada vez más numerosos en estas competiciones. En particular, en la Fase Nacional de la Olimpiada Matemática Española (OME) es bastante probable la aparición de problemas uno de estos tipos.

En este Trabajo Fin de Máster nos centraremos en las desigualdades numéricas, ya que las desigualdades geométricas podrían formar otro TFM por sí mismas. Sin embargo, aparecerán algunas interpretaciones geométricas que ayudarán a la comprensión de los conceptos. Nos centraremos en algunas desigualdades importantes, como la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad de reordenamiento, la desigualdad de Jensen y el Teorema de Muirhead, entre otros.

Incluidos en el desarrollo teórico de los resultados aparecen ejemplos en los que se muestra cómo proceder en problemas que así lo necesiten. Además, en cada sección del documento, aparecen problemas seleccionados de las secciones finales del documento: problemas extraídos de competiciones matemáticas a tres niveles diferenciados: fases locales, fases nacionales y fases internacionales. Los problemas vienen resueltos y, en la medida de lo posible, vienen redactados de la forma más comprensible y didáctica posible.

Índice general

1

Desigualdades

Bien sabemos que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene la estructura algebraica de cuerpo junto a las operaciones se suma y producto. Recordamos que podemos establecer unos axiomas de orden en $\mathbb{R}$. La relación $\leq$ de orden en donde $a < b$ significa $a \leq b$, $a \neq b$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface las siguientes propiedades:

Proposición

(a) Se verifica una y sólo una de las relaciones $x = y$, $x < y$, $x > y$.
(b) Si $x < y$, entonces para cada z, se tiene que $x + z < y + z$.
(c) Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.

Si x es un número real, el **valor Absoluto** de x es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto verifica las siguientes propiedades:

Proposición

Sean a, b, x son números reales:
(a) $|x| \geq 0$ y es cero si y sólo si $x = 0$.
(b) $|-x| = |x|$.
(c) $|x|^2 = |x^2|$.
(d) $|ab| = |a||b|$.
(e) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

A la hora de resolver desigualdades es muy útil utilizar **Desigualdad Triangular**.

Proposición: Desigualdad triangular

Sean a y b número reales. Se verifica que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

La igualdad sólo se da si y sólo si $ab \geq 0$.

Demostración. Como $|a+b|$, $|a|$ y $|b|$ son números positivos, basta probar la desigualdad para sus cuadrados:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2+b^2+2ab \\ &= |a|^2+|b|^2+2ab \\ &\leq |a|^2+|b|^2+2|ab| \\ &= (|a|+|b|)^2. \end{aligned}$$

Observa que únicamente aparece una desigualdad, la correspondiente a $ab < |ab|$, y tendremos una igualdad cuando $ab \geq 0$, que ocurre cuando ambos tienen el mismo signo o uno de ellos es nulo.

□

Proposición: Desigualdad triangular generalizada

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Entonces se verifica

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

La igualdad se da si y sólo si todos los x_i tienen el mismo signo.

Una desigualdad muy útil es $x^2 \geq 0$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos extender esta idea para optimizar las funciones cuadráticas $ax^2+2bx+c$, con $a > 0$. Utilizando propiedades básicas de la derivada, obtenemos que, si $a > 0$, la función $ax^2+2bx+c$ alcanza un mínimo en $x = -\frac{-b}{a}$, y el valor mínimo de la función es $c - \frac{b^2}{a}$.

Ejemplo

Si x, y son números positivos con $x+y = 2a$, prueba que el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Una forma de hacer este ejercicio es utilizando cálculo diferencial. Busquemos otra resolución basada en la deducción anterior.

$$\begin{aligned} &x+y = 2a, \\ &y = 2a-x, \\ &xy = x(2a-x) = -x^2+2ax = -(x-a)^2+a^2 \end{aligned}$$

Que es máximo cuando $x = a$, y en este caso $ay = a^2$, esto es, $y = a$.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 2.1, 2.2, 2.6, 3.31 3.13, 4.1 y 4.8

1.1. Desigualdad de las medias.

Teorema: Desigualdad de la media aritmética-geométrica (MA-MG)

Dados dos números reales no negativos a, b se verifica:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

y la igualdad sólo ocurre cuando $a = b$. De forma más general, si tenemos n números reales no negativos:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

y la igualdad ocurre cuando $a_1 = \cdots = a_n$.

Ejemplo

Prueba que la suma de un número y su inverso es mayor o igual que 2.

Tomemos en **MA-MG**, $a = x$, $b = 1/x$, tenemos que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, y por lo tanto, $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$

Ejemplo

Sean a, b, c números reales positivos, probar que

$$(ab + bc + ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2.$$

Reacomodamos el $27(3 \cdot 3 \cdot 3)$ en el primer miembro:

$$\frac{(ab+bc+ca)}{3} \frac{(ab+bc+ca)}{3} \frac{ab+bc+ca}{3} \overset{(MA-MG)}{\geq} \sqrt[3]{a^2b^2c^2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = a^2b^2c^2.$$

Ejemplo

Sean a, b, c números reales positivos, probar que

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Haciendo uso de **MA-MG** obtenemos:

$$a^2b = \sqrt[3]{a^3a^3b^3} \leq \frac{2a^3 + b^3}{3},$$

$$b^2c = \sqrt[3]{b^3b^3c^3} \leq \frac{2b^3 + c^3}{3},$$

$$c^2a = \sqrt[3]{c^3c^3a^3} \leq \frac{2c^3 + a^3}{3},$$

y sumando las tres desigualdades tenemos el resultado querido.

Teorema: Desigualdad de la media geométrica-armónica

Sean $a_1,...,a_n$ números positivos. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Teorema: Desigualdad de la medias ponderada

Dados $a_1,...,a_n \geq 0$ y $w_1,...,w_n$ tales que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, se tiene que

$$w_1a_1+\cdots+w_na_n \geq a_1^{w_1}\cdots a_n^{w_n}.$$

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 2.3, 2.4, 2.7, 2.8, 2.9, 3.18, 3.26, 3.29 4.10, 4.5, 3.16, 3.3 3.4 y 3.5.

1.2. Teorema de Muirhead.

Consideremos, en primer lugar, expresiones del tipo

$$F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)(a_1,a_2,...,a_n) = F_\alpha(a) = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n},$$

donde $a_1,...,a_n > 0$ y $\alpha_1,...\alpha_n \geq 0$. Denotaremos por $\sum_{sim} F_\alpha(a)$ a la suma de los $n!$ términos obtenidos de $F_\alpha(a)$ calculando las posibles permutaciones de $\{a_1,...,a_n\}$, es decir:

$$\sum_{sim} F_\alpha(a) = \sum_{\sigma\in S_n} F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)).$$

Por ejemplo, en tres variables x,y,z:

$$\sum_{sim} x^2y = x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y.$$

Finalmente definimos la **media simétrica** como:

$$[\alpha] = [\alpha_1,...,\alpha_n] = \frac{1}{n!}\sum_{sim} F_\alpha(a).$$

Es claro que $[\alpha]$ es invariante bajo cualquier permutación de $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, luego dos conjuntos $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$son del mismo tipo si difieren por reacomodo. Veamos algunos casos particulares:

$$[1,0,...,0] = \frac{(n-1)!}{n!}(a_1+...+a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = MA.$$

$$\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right] = \frac{n!}{n!}(a_1^{1/n}...a_n^{1/n}) = \sqrt[n]{a_1...a_n} = MG.$$

Definición

Diremos que $(\alpha_1 \dots, \alpha_n) \prec (\beta_1 \dots, \beta_n)$ cuando se pueden reordenar de tal manera que:

(a) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$.

(b) Para cada $1 \leq k \leq n$ se tiene $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{k} \beta_i$.

Teorema: (De Muirhead)

$[\beta] \leq [\alpha]$ para cualesquiera valores no negativos de las variables $(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si $(\beta) \prec (\alpha)$. La igualdad sólo se tiene cuando (α) y (β) son idénticos o cuando todos los a_i son iguales.

Veamos algunos ejemplos:

- $[2,0,0] \geq [1,1,0] \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
- $[2,0] \geq [1,1] \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- $[3,0,0] \geq [1,1,1] \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.
- $[5,0] \geq [3,2] \Leftrightarrow x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3$.
- $[2,2,0] \geq [2,1,1] \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + z^2y^2 \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy$.

Ejemplo

Sean a, b números reales positivos. Prueba que

$$\sqrt{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Sea $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$. Simplificando, tenemos que probar que

$$x^3 + y^3 \geq xy(x+y).$$

Por el **teorema de Muirhead**, $[3,0] = \frac{1}{2}(x^3 + y^3) \geq \frac{1}{2}xy(x+y) = [2,1]$.

Ejemplo

Si a, b, c son números reales no negativos, probar que:

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{1}{7}(a+b+c)^3.$$

No es difícil ver que:

$$(a+b+c)^3 = 3[3,0,0] + 18[2,1,0] + 6[1,1,1].$$

Luego, se tiene que demostrar que

$$3[3,0,0] + [1,1,1] \geq \frac{1}{7}(3[3,0,0] + 18[2,1,0] + 6[1,1,1]),$$

esto es,

$$\frac{18}{7}[3,0,0] + \left(1 - \frac{6}{7}\right)[1,1,1] \geq \frac{18}{7}[2,1,0].$$

Equivalentemente
$$\frac{18}{7}([3,0,0]-[2,1,0])+\left(1-\frac{6}{7}\right)[1,1,1]\geq 0.$$
Esto se sigue usando las desigualdades $[3,0,0]\geq[2,1,0]$ y $[1,1,1]\geq 0$.

Ejemplo

Si a,b,c son números reales no negativos, prueba que:
$$a+b+c\leq\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+c\frac{c^2+a^2}{2b}\leq\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

Las desigualdades son equivalentes a lo siguiente
$$2(a^2bc+ab^2c+abc^2)\leq ab(a^2+b^2)+bc(b^2c+c^2)+ca(c^2+a^2)\leq 2(a^4+b^4+c^4).$$
que a su vez es equivalente a $[2,1,1]\leq[3,1,0]\leq[4,0,0]$. Usando el **teorema de Muirhead**, obtenemos el resultado querido.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 4.2, 4.13 y 4.12.

1.3. Desigualdades de reordenación.

Consideremos dos colecciones de números reales ordenados de forma creciente:
$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n \qquad b_1\leq b_2\leq\cdot\leq b_n.$$
Para cualquier permutación $(a'_1,a'_2,...,a'_n)$ se tiene:
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\overset{(1)}{\geq}a'_1b_1+a'_2b_2+\cdots+a'_nb_n\overset{(2)}{\geq}a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n.$$
Que son las llamadas **desigualdades de reordenación**. Además:

(1) es una igualdad si y sólo si $(a'_1,...,a'_n)=(a_1,...,a_n)$.

(2) es una igualdad si y sólo si $(a'_1,...,a'_n)=(a_n,...,a_1)$.

Corolario

Para cualquier permutación $(a'_1,\ldots,a'_n)$ de $(a_1,...,a_n)$ se tiene:
$$a_1^2+\cdots+a_n^2\geq a_1a'_1+...+a_na'_n.$$

Corolario

Para cualquier permutación $(a'_1,..,a'_n)$ de $(a_1,...,a_n)$, se tiene:
$$\frac{a'_1}{a_1}+\frac{a'_2}{a_2}+\cdots+\frac{a'_n}{a_n}\geq n.$$

Ejemplo: IMO, 1975.

Consideramos dos colecciones de números $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ e $y_1 \leq \cdots \leq y_n$ y una permutación $(z_1, \ldots, z_n)$ de $(y_1, \ldots, y_n)$. Demostrar que:

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2.$$

Desarrollando:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_n^2.$$

Usando que $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

que es la aplicación del teorema.

Ejemplo: IMO, 1978.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ enteros positivos distintos. Prueba que:

$$\frac{x_1}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \cdots + \frac{x_n}{n!} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una permutación $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ y sea $(b_1, b_2 \ldots, b_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \ldots, \frac{1}{1^2}\right)$, esto es $b_i = \dfrac{1}{(n+1-i)^2}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Consideremos la permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definida por $a_i' = x_{n+1-i}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Aplicamos el teorema:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \cdots + \frac{x_n}{n!} &= a_1' b_1 + \cdots + a_n' b_n \\
&\geq a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n \\
&= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \\
&= \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Como $1 \leq a_1$, $2 \leq a_2$, $\ldots$, $n \leq a_n$, se tiene que

$$\frac{x_1}{1^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{a_1}{1^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Teorema: Desigualdad de Chebyshev

Sea $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ dos sucesiones de números positivos. Entonces:

- Si las sucesiones están ordenadas de la misma manera (ambas crecientes o ambas decrecientes):

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}.$$

- Si las sucesiones están en orden inverso (una creciente y otra decreciente):

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + \ldots b_n}{n}.$$

Ejemplo

Si $a,b,c \geq 0$, probar que:

$$3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Aplicamos la **desigualdad de Chebyshev** a (a,b,c) y a (a^2,b^2,c^2), que tienen el mismo orden:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \times \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Multiplicamos por 9 y tenemos el resultado querido.

Ejemplo

Si $a \geq b \geq c > 0$ y $0 < x \leq y \leq z$, probar que:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right).$$

Aplicamos la **desigualdad de Chebyshev** a (a,b,c) y $(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \overset{MA-MG}{\geq} (a+b+c)\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \overset{MA-MG}{\geq} \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}.$$

Ejemplo

Sean a,b,c,d números reales positivos con $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Prueba que:

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \geq a+b+c+d.$$

Aplicamos la **desigualdad de Chebyshev** a (a,b,c,d) y (a^4,b^4,c^4,d^4):

$$\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4} \geq \frac{a+b+c+d}{4} \cdot \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4}.$$

Ahora, aplicamos la Desigualdad de Chebyshev a (a^2,b^2,c^2,d^2) y (a^2,b^2,c^2,d^2):

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} = 1.$$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos el resultado querido.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 4.3, 4.4, 4.6, 4.7 y 3.2

1.4. Funciones convexas. Desigualdad de Jensen.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Diremos que f es **convexa** en el intervalo $I=[a,b]$ si para cada $t \in [0,1]$ se tiene la desigualdad

$$f(ty+(1-t)y) \leq tf(y)+(1-t)f(x).$$

Geométricamente, la desigualdad indica que el grafo de f se encuentra por debajo del segmento que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, como se puede ver en la figura 1.1. Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es **función cóncava** si $-f$ es convexa.

Un subconjunto $\mathscr{C}$ del plano es **convexo** si para cualquier par de puntos $A, B \in \mathscr{C}$, el segmento determinado por esos puntos está contenido por completo en $\mathscr{C}$.

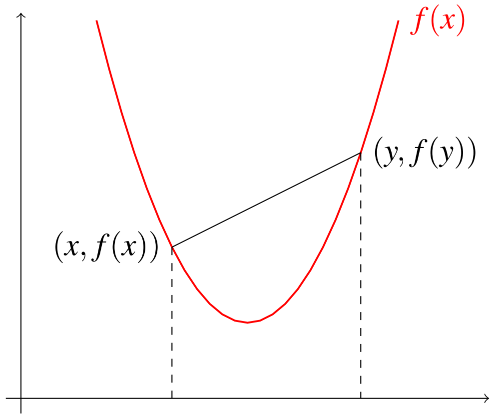

Figura 1.1: Interpretación geométrica de la convexidad

Proposición

1. Si f es convexa en un intervalo $[a,b]$, entonces es convexa en cualquier subintervalo $[x,y] \in [a,b]$.
2. Si f es convexa en $[a,b]$ para cualesquiera $x, y \in [a,b]$, se tiene que
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$
3. **Desigualdad de Jensen** Si f es convexa en $[a,b]$, entonces para cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, y para $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, se tiene que
$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$
4. En particular, para $x_1, \ldots x_n \in [a,b]$, podemos afirmar que
$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

Veamos ahora algunos criterios para decidir si una función es convexa o no:

Proposición: Criterios de convexidad

1. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si el conjunto $\{(x,y) : x \in [a,b], f(x) \leq y\}$ es convexo.
2. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si, para cada $x_0 \in [a,b]$ la función $P(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ es no decreciente para $x \neq x_0$.
3. Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable con derivada no decreciente, entonces f es convexa. En particular, si f es dos veces derivable y $f''(x) \geq 0$, la función es convexa.

Ejemplo

La función $f(x) = x^n$, $n \geq 1$ es convexa en $\mathbb{R}^+$ y la función $f(x) = x^n$, con n par es convexa en $\mathbb{R}$.

Esto se sigue del hecho de que $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ en cada caso. Basándonos en este hecho, podemos sacar las siguientes conclusiones:

I) Como $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, podemos deducir que $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, que es la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática.

II) Como $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, podemos deducir que $a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ para a y b números positivos tales que $a+b=1$.

Ejemplo

La función exponencial $f(x) = e^x$ es convexa en $\mathbb{R}$.

Esto se prueba fácilmente ya que $f''(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Utilizando esta función podemos probar algunas desigualdades:

I) **(Desigualdad aritmético-geométrica ponderada)** Sean $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n$ positivos tales que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Entonces
$$x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + \ldots t_n x_n.$$
Así es, como $x_i^{t_i} = e^{t_i \log x_i}$ y e^x es convexa, se tiene que:
$$\begin{aligned} x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n} &= e^{t_1 \log x_1} \ldots e^{t_n \log x_n} = e^{t_1 \log x + \cdots + t_n \log x_n} \\ &\leq t_1 e^{\log x_1} + \cdots + t_n e^{\log x_n} = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n. \end{aligned}$$
En particular, si tomamos $t_i = \frac{1}{n}$ para $1 \leq i \leq n$, podemos obtener otra demostración de la desigualdad aritmetico-geométrica.

II) **(desigualdad de Young)** Sean x e y números reales positivos. Si $a, b > 0$ satisfacen que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, entonces $xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$. Sólo tenemos que aplicar (I) como sigue:
$$xy = (x^a)^{1/a}(y^b)^{1/b} \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

III) **(desigualdad de Hölder)** Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números positivos y $a, b > 0$ tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, entonces
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^a\right)^{1/a} \left(\sum_{i=1}^n y_i^b\right)^{1/b}.$$
En primer lugar, asumamos que $\sum_{i=1}^n x_i^a = \sum_{i=1}^n y_i^b = 1$. Usando (II), $x_i y_i \leq \frac{1}{a}x_i^a + \frac{1}{b}y_i^b$, entonces
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{a}\sum_{i=1}^n x_i^a + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^n y_i^b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$
Ahora, supongamos que $\sum_{i=1}^n a_i = A$ y $\sum_{i=1}^n b_i = B$. Definimos $x_i' = \frac{x_i}{A^{1/a}}$ e $y_i' = \frac{y_i}{B^{1/b}}$. Como
$$\sum_{i=1}^n (x_i')^a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^a}{A} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n (y_i')^b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^b}{B} = 1,$$

podemos deducir que

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{A^{1/a} B^{1/b}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Así, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq A^{1/a} B^{1/b}$.

IV) (**desigualdad de Minkowski**) Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ números positivos y $p > 1$, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^p \right)^{1/p}.$$

Notemos que

$$(a_k + b_k)^p = a_k (a_k + b_k)^{p-1} + b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder en cada término de la suma de la derecha con q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para obtener:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q}.$$

Sustituyendo estas desigualdades en la última igualdad, y utilizando que $q(p-1) = p$, se tiene la desigualdad pedida. Nótese que la desigualdad de Minkowski es una igualdad si permitimos $p = 1$. Para $0 < p < 1$, la desigualdad cambia de sentido.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 2.3, 2.9, 2.10, 3.1, 3.19, 3.32 4.11, 3.2, 3.8

1.5. Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Nesbitt.

En esta parte del documento, trataremos dos desigualdades que usualmente aparecen al tratar con un problema de competición. Para probar ambas, usaremos la desigualdad de reordenación, aunque existen otros métodos.

Teorema: (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se tiene la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

La igualdad se da cuando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$

Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ e $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, el resultado es evidente. En otro caso, sea $S = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $T = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$, donde está claro que $S, T \neq 0$. Tomemos $a_i = \frac{x_i}{S}$ y $a_{n+i} = \frac{y_i}{T}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Aplicando el primer corolario de la **desigualdad de reordenación**,

$$\begin{aligned} 2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ \geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a 2n a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ = 2\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{ST} \end{aligned}$$

La igualdad se da si y sólo si $a_i = a_{n+i}$ para $i = 1, \ldots, n$, o equivalentemente, si y sólo si $x_i = \frac{S}{T} y_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo: Desigualdad de Nesbitt

Par $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a \leq b \leq c$, de donde se sigue que $a+b \leq c+a \leq b+c$ y $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$. Usando la **desigualdad de reordenación**:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

De donde

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b}\right) = 3.$$

1.6. Desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel

Sea P el polinomio cúbico

$$P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc,$$

donde a, b y c son las raíces del polinomio. Sustituyendo a, b y c en el polinomio, obtenemos

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0,$$

$$b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ca)b - abc = 0,$$

$$c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ca)c - abc = 0.$$

Sumando las tres ecuaciones, se tiene

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \qquad (\bigstar)$$

De donde se tiene que si $a+b+c = 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Nótese también que la expresión

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

puede ser escrita como

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Así, otra manera de escribir ($\bigstar$) es

$$a^3+b^3+c^3-abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 3.20, 3.25

Ejemplo

Sean a,b,x,y números reales con $x,y>0$. Entonces

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Demostración. Usando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**, se tiene:

$$(a+b)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right)^2\leq\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y),$$

que es una igualdad so y sólo si $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ □

Usando la desigualdad anterior dos veces, podemos extender la desigualdad a tres pares de números:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Mediante un sencillo argumento inductivo podemos obtener el siguiente resultado:

Teorema: desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel

Para números reales $a_{,}\ldots,a_n$ y $x_{,}\ldots,x_n>0$, se tiene que

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

con igualdad si y sólo si

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}.$$

Proposición: Formulaciones alternativas de CS-Engel

Sean $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ números reales positivos. Entonces:

(a) $\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\geq\dfrac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}$.

(b) $\dfrac{a_1}{b_1^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n^2}\geq\dfrac{1}{a_1+\cdots+a_n}\left(\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 3.9, 3.6, 3.21, 3.14, 3.10 y 3.24

1.7. Extensiones de la desigualdad de Hölder.

Teorema

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ números reales positivos.

1. Si a, b, c son reales positivos tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, entonces

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^c\right\}^{1/c} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right\}^{1/a} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right\}^{1/b}.$$

2. Si a, b, c son reales positivos tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right\}^{1/a} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right\}^{1/b} \left\{\sum_{i=1}^{n} z_i^c\right\}^{1/c}.$$

Demostración.

1. Aplicamos la desigualdad de Hölder a los números $x_1^c, \ldots, x_n^c, y_1^c, \ldots, y_n^c$ Con $a' = \frac{a}{c}$ y $b' = \frac{b}{c}$.
2. Procedemos como en la demostración de la desigualdad de Hölder. Lo único nuevo que tenemos que probar es que $x_i y_i z_i \leq \frac{1}{a} x_i^a + \frac{1}{b} y_i^b + \frac{1}{c} z_i^c$, pero esto es claro a partir de la desigualdad ponderada de las medias aritmética y geométrica.

□

1.8. Cambio de variable.

La sustitución es una estrategia útil para resolver problemas que involucren desigualdades. Realizar un cambio de variable adecuado puede, por ejemplo, cambiar los términos complicados de una inecuación, simplificar expresiones o reducir términos. En esta parte veremos algunos ejemplos de la numerosa casuística de ejemplos para aplicar cambios de variable. Como se ha venido haciendo, la mejor forma es a través de ejemplos.

Una sugerencia útil para problemas que contienen en la hipótesis una condición extra, es usar esa condición para simplificar el problema. En el siguiente ejemplo aplicaremos esta técnica para eliminar denominadores y hacer el problema más fácil.

Ejemplo

Si a, b, c son reales positivos menores que 1, con $a + b + c = 2$, entonces

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right) \geq 8.$$

Después de realizar la sustitución $x = 1-a$, $y = 1-b$, $z = 1-c$, obtenemos que $x+y+z = 3-(a+b+c) = 1$, $a = 1-x = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Así, la desigualdad es equivalente a

$$\left(\frac{y+z}{x}\right)\left(\frac{z+x}{y}\right)\left(\frac{x+y}{z}\right) \geq 8.$$

Esta última desigualdad puede probarse aplicando tres veces **MA-MG** bajo la forma $(x+y) \geq 2\sqrt{xy}$

Ejemplo

Si a, b, c son reales positivos con $ab+bc+ca = 1$, pruébese que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

En primer lugar, notemos que $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$. De forma similar, $b^2+1 = (b+c)(b+a)$ y $c^2+1 = (c+a)(c+b)$. Ahora, la desigualdad a probar es equivalente a

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Usando **MA-MG** aplicada a cada sumando del lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Para hacer un cambio de variable, a veces es necesario trabajar un poco antes, como podemos ver en el siguiente ejemplo. Este ejemplo también ayuda a ver que podremos necesitar hacer más de una sustitución.

Ejemplo

Sean a, b, c son reales positivos con , pruébese que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dividiendo ambos miembros por a^2 y haciendo $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$, la desigualdad se transforma en

$$(1+x)(1+y) \geq 2\sqrt{xy(1+x+y)}.$$

Ahora, dividiendo ambos miembros por xy y haciendo la sustitución $r = 1+\frac{1}{x}$, $s = 1+\frac{1}{y}$, la desigualdad a probar viene dada por

$$rs \geq 2\sqrt{rs-1}.$$

Esta última desigualdad es equivalente a $(rs-2)^2 \geq 0$, que resulta equivalente al elevar ambos miembros al cuadrado y realizar algunas manipulaciones algebraicas.

Para practicar los conceptos de esta sección pueden ser útiles los problemas 3.22, 3.11, 3.7, 3.12, 3.27, 3.15, 3.17, 3.23 y 3.28

2

Problemas de la Fase Local

En este capítulo plantearemos el análisis de problemas de la Fase Local de la Olimpiada Matemática Española, la que corresponde al nivel más elemental. Los problemas de esta sección se basan, en su mayoría, en la desigualdad de las medias, que es utilizada para resolver ecuaciones.

Problema 2.1: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2004

Demuestra que si $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, entonces:

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}.$$

Si x, y tienen signos opuestos, se tiene $|x-y| = |x|+|y|$, $|1-xy| = 1-xy = 1+|xy|$. Así pues, la desigualdad es, realmente, una igualdad.

Si la desigualdad se cumple para un par de números (x,y), se cumple para el par opuesto $(-x,-y)$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x, y \geq 0$.

Si la desigualdad se cumple para un par de números (x,y), se cumple para el par simétrico (y,x). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq y \leq x$.

En este caso, $x-y \geq 0$, $1-xy > 0$,$x \geq 0$, $y \geq 0$, $xy \geq 0$, y la desigualdad que debemos probar queda

$$(x-y)(1+xy) \leq (x+y)(1-xy).$$

Si expandimos los términos, esta desigualdad es la misma que

$$x-y+x^2y-xy^2 \leq x+y-x^2y-xy^2.$$

Si simplificamos, obtenemos la desigualdad equivalente

$$2x^2y \leq 2y$$

que, puesto que $x^2 \leq 1$ e $y \geq 0$ es cierta.

Problema 2.2: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2005

Se considera la inecuación

$$|x-1| < ax$$

donde a es un parámetro real.

a) Discute la inecuación según los valores de a.
b) Caracteriza los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente dos soluciones enteras.

a) En principio distinguiremos dos casos, según que $x \geq 1$ o $x < 1$.

Caso I: $x \geq 1$. La desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$x - 1 < ax \Leftrightarrow (1-a)x < 1.$$

- Caso I.1: Supongamos $1-a > 0$, es decir, $a < 1$. Entonces $x < \frac{1}{1-a}$, $\frac{1}{1-a} > 1 \Leftrightarrow a > 0$. Por lo tanto,
$$0 < a < 1, 1 \leq x < \frac{1}{1-a}.$$
- Caso I.2: $1-a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ y la desigualdad se escribe como $0 \cdot x < 1$. Por lo tanto $a = 1$, $x \geq 1$.
- Caso I.3: $1-a < 0 \Leftrightarrow 1 < a \Rightarrow x \geq 1$. La desigualdad equivalente a $1 - x < ax \Leftrightarrow 1 < (a+1)x$

Caso II: $x < 1$. La desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$1 - x < ax \Leftrightarrow 1 < (a+1)x.$$

- Caso II.1: $a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, $\frac{1}{a+1} < 1 \Leftrightarrow a > 0$. Por lo tanto, $a > 0$, $\frac{1}{a+1} < x < 1$ cuando $-1 < a \leq 0$.
- Caso II.2: $a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow 1 < 0$ No hay solución.
- Caso II.3: $a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{a+1} < 0$. Por lo tanto, $a < -1$, $x < \frac{1}{a+1}$.

Resumiendo:

✓ Si $a < -1$, entonces $x < \frac{1}{a+1}$.

✓ Si $-1 \leq a \leq 0$, no hay solución.

✓ Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a+1} < x < \frac{1}{a-1}$.

✓ Si $1 \leq a$, entonces $1 \leq x$.

b) Por el análisis efectuado en a), la desigualdad puede tener dos soluciones enteras sólo si $0 < a < 1$. Ya que en estos casos se tiene

$$0 < \frac{1}{1+a} < 1 < \frac{1}{1-a},$$

habrá dos soluciones enteras si y sólamente si

$$2 < \frac{1}{1-a} \leq 3.$$

Por lo tanto la respuesta es

$$\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}.$$

Problema 2.3: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2008

Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca} b^{b^2+2ab} c^{c^2+2ab} \geq \frac{1}{3}.$$

Dado que $a+b+c=1$, entonces $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 1$. Además, $\ln\left(a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}+2ab\frac{1}{b}+2bc\frac{1}{c}+2ca\frac{1}{a}\right) = \ln 3$. Aplicando la **desigualdad de Jensen** a la función $f(x)=\ln x$ que es cóncava en su dominio ($x>0$), se tiene que:

$$\ln 3 = \ln\left(a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}+2ab\frac{1}{b}+2bc\frac{1}{c}+2ca\frac{1}{a}\right) \geq$$

$$\geq a^2\ln\left(\frac{1}{a}\right)+b^2\ln\left(\frac{1}{b}\right)+c^2\ln\left(\frac{1}{c}\right)+2ca\ln\left(\frac{1}{a}\right)+2ab\ln\left(\frac{1}{b}\right)+2bc\ln\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$= \ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+bc}\right]$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x)=\ln x$ es inyectiva, resulta que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+bc} \geq 3,$$

o equivalentemente,

$$a^{a^2+2ca}b^{b^2+2ab}c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

La igualdad se alcanza cuando $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema 2.4: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2008

Halla todas las ternas (x,y,z) de números reales que son solución de la ecuación

$$\sqrt{3^x(5^y+7^z)}+\sqrt{5^y(7^z+3^x)}+\sqrt{7^z(3^x+5^y)} = \sqrt{2}(3^x+5^y+7^z).$$

Hay veces que para resolver una ecuación puede ser útil resolver una desigualdad no estricta, ya que sabemos en qué ocasiones se dan las igualdades, como es en el caso de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, como veremos en este problema.

Poniendo $a=3^x$, $b=5^y$ y $c=7^x$, la ecuación se convierte en:

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)} = \sqrt{2}(a+b+c)$$

Aplicando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** resulta:

$$\sqrt{a(b+c)} \leq \sqrt{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\right),$$

$$\sqrt{b(c+a)} \leq \sqrt{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\right),$$

$$\sqrt{c(a+b)} \leq \sqrt{2}\left(\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\right).$$

Sumando las desigualdades anteriores se obtiene

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)} \leq \sqrt{2}(a+b+c).$$

La igualdad tiene lugar cuando $a = b = c$. Por tanto, las soluciones buscadas son aquellas para las que $3^x = 5^y = 7^z$, lo que equivale a que $x \ln 3 = y \ln 5 = z \ln 7$. Es decir, las soluciones de la ecuación dada son:

$$x = \frac{1}{\ln 3}t,\ y = \frac{1}{\ln 5}t,\ z = \frac{1}{\ln 7}t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.5: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2011

Halla todas las ternas (x,y,z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^y - 1 = 2^x + 2^{-x} \\ 3 \cdot 2^z - 1 = 2^y + 2^{-y} \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 2^z + 2^{-z} \end{cases}$$

Haciendo la sustitución $2^x = a$, $2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a,b,c > 0$ y se obtiene:

$$\begin{cases} b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \\ c = \frac{1}{3}(b + 1 + \frac{1}{b}) \\ a = \frac{1}{3}(c + 1 + \frac{1}{c}) \end{cases}$$

Aplicando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica**, resulta

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \geq \sqrt[3]{a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

y por tanto, $b \geq 1/b$. Análogamente, $a \geq 1$, $a \geq 1/a$, y $c \geq 1$ y $c \geq 1/c$. Teniendo en cuenta lo anterior, de la primera ecuación resulta que:

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \leq \frac{1}{3}(a + a + a) = a,$$

y de las otras dos que $c \leq b$ y $a \leq c$. Combinando las desigualdades anteriores, se obtiene $a \leq c \leq b \leq a$. Es decir $a = b = c$.

Ahora tenemos

$$a = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1) = 0,$$

que tiene por solución $a = 1$ y $a = -1/2$. Como sólo nos vale la solución positiva, tenemos que $a = b = c = 1$ y por tanto, $(x,y,z) = (0,0,0)$ es la única terna solución del sistema.

Problema 2.6: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2012

Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demuestra que, si la suma de estos números es mayor que la suma de su inversos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Puesto que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0.\end{aligned}$$

La desigualdad se cumple cuando uno de los factores del número $(a-1)(b-1)(c-1)$ es positivo o los tres factores son positivos. Si fuesen positivos los tres, tendríamos que $a>1$, $b>1$ y $c>1$, cosa que no es posible, ya que $abc=1$. Por tanto, sólo uno de ellos es mayor que cero y esto acaba la demostración.

Problema 2.7: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2013

Obtén los dos valores enteros de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica:

$$2^{\operatorname{sen}^2 x}+2^{\cos^2 x}=2\sqrt{2}.$$

Aplicando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** resulta

$$2^{\operatorname{sen}^2 x}+2^{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{2^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot 2^{\cos^2 x}}=2\sqrt{2^{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}}=2\sqrt{2}.$$

La igualdad se alcanza cuando $2^{\operatorname{sen}^2 x}=2^{\cos^2 x}$. Es decir, cuando $\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x$ o $\operatorname{sen} x=\pm\cos x$. Los valores de x que satisfacen la igualdad anterior son $x=45+90^{o}k$ con $k\in\mathbb{Z}$. Denotando $[x]$ la parte entera de x, los valores pedidos se obtienen para

$$k_1=\left[\frac{2013^{o}-45^{o}}{90^{o}}\right]=21 \qquad k_2=\left[\frac{2013^{o}+45^{o}}{90^{o}}\right]=22,$$

y son $x_1=1935^{o}$ y $x_2=2025^{o}$.

Problema 2.8: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2013

Resuelve la ecuación exponencial

$$2^x\cdot 3^{5^{-x}}+\frac{3^{5^x}}{2^x}=6.$$

Aplicando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** y, después, una de de sus más conocidas consecuencias (la suma de un número real positivo y su inverso es siempre mayor o igual que 2, y la igualdad sólo se da para el número 1) tenemos,

$$6=2^x+3^{5^{-x}}+2^{-x}3^{5^x}\geq 2\sqrt{2^x3^{5^{-x}}2^{-x}3^{5^x}}=6.$$

Y la igualdad se dará cuando los números mediados sean iguales:

$$2^x3^{5^{-x}}=2^{-x}3^{5^x}\Leftrightarrow 2^{2x}=3^{5^x-5^{-x}}\Leftrightarrow 5^x=5^{-x},$$

esto es, cuando $x=0$ que será, pues, la única solución de la ecuación.

Problema 2.9: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2014

Sean a,b números positivos. Probar que:

$$a+b\geq\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Solución 1: La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2}\leq\frac{a+b}{2}.$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática al miembro de la izquierda, obtenemos:

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{ab+\frac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Solución 2: Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2$ $(s,t \geq 0)$ obtenemos la desigualdad equivalente

$$st+\sqrt{\frac{s^4+t^4}{2}} \leq s^2+t^2.$$

Aislando la raíz cuadrada ye levando al cuadrado, también es equivalente

$$\frac{s^4+t^4}{2} \leq s^4+t^4+s^2t^2-2s^3t-2t^3s.$$

Multiplicando por 2 e igualando a 0 el miembro de la izquierda, es equivalente a probar que

$$0 \leq s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s.$$

Finalmente, gracias al binomio de Newton,

$$s^4+t^4+6s^2t^2-4t^3s = (t-s)^4 \geq 0.$$

Solución 3: Denotamos

$$A = \frac{a+b}{2} \qquad G = \sqrt{ab} \qquad Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Con esta notación debemos probar que

$$G+Q \leq 2A.$$

o, equivalentemente

$$Q-A \leq A-G.$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2-A^2}{Q+A} \leq \frac{A^2-G^2}{A+G}.$$

Puesto que $Q \geq G$, se tiene que $Q+A \geq A+G > 0$. Como $Q > A$, tenemos que $Q^2-A^2 > 0$. Puesto que $A \geq G$, tenemos que $A^2-G^2 \geq 0$. Así pues, basta probar que

$$Q^2-A^2 \leq A^2-G^2,$$

que equivale a

$$Q^2+G^2 \leq 2A^2.$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2+b^2}{2}+ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad.

Solución 4: La desigualdad equivale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Puesto que la función $f(x)=\sqrt{x}$ es cóncava, gracias a la **desigualdad de Jensen**

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Problema 2.10: Olimpiada Matemática Española (fase local), 2015

Demuestra que

$$(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2,$$

para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$ y cualesquiera $a,b\in\mathbb{R}$ con $a+b=1$, $a,b>0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

Para acotar un cuadrado de una suma, a veces es útil usar la desigualdad de Jensen. La función $f(z)=z^2$ es claramente convexa, con lo que por la **desigualdad de Jensen**, para cualesquiera reales no negativos a y b, y cualesquiera reales x,y se tiene:

$$(ax+by)^2 = f(ax+by) < \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} = \frac{ax^2+by^2}{a+b}.$$

Usando que $a+b=1$, se obtiene el resultado pedido, dándose la igualdad bien si uno de los dos puntos “desaparece” (es decir, $a=0$ o $b=0$), o en caso contrario si ambos puntos coinciden (es decir, $x=y$).

Otras formas de resolver el problema es usar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** con los vectores $(\sqrt{a},\sqrt{b})$ y $(\sqrt{a}x,\sqrt{b}y)$ o llevar todo a un miembro y usar la positividad del cuadrado.

3

Problemas de Olimpiadas Nacionales

En este capítulo abordaremos una selección de problemas que corresponden a fases nacionales de olimpiadas, con un nivel de dificultad superior a la sección anterior.

Problema 3.1: Olimpiada Matemática Española, 1971

Consideremos cuatro números reales x, y, p, q tales que $p, q > 0$ y $p+q < 1$. Demostrar que

$$(px+qy)^2 \geq px^2+qy^2.$$

SOLUCIÓN 1: Aplicamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** a los vectores $u = (\sqrt{p}, \sqrt{q})$ y $v = (x\sqrt{p}, y\sqrt{q})$. Obtenemos que:

$$(px+qy)^2 = (u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v) = (p+q)(px^2+qy^2).$$

Como $p+q < 1$, deducimos la desigualdad del enunciado.

SOLUCIÓN 2: Apliquemos la **desigualdad de Jensen** a la función convexa $f(t) = t^2$ sobre los valores x e y sobre los pesos $\dfrac{p}{p+q}$ y $\dfrac{q}{p+q}$ (que suman 1), respectivamente. Tenemos entonces que

$$\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)^2 = f\left(\frac{p}{p+q}x+\frac{q}{p+q}y\right) \leq \frac{p}{p+q}f(x)+\frac{q}{p+q}f(y) = \frac{px^2+qy^2}{p+q}.$$

Multiplicando ambos miembros por $(p+q)^2$ y usando que $p+q<1$, obtenemos la desigualdad del enunciado.

Problema 3.2: China, 1989

Demuestra que para cualesquiera reales positivos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

En primer lugar, observamos que la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ es convexa en el intervalo $(0,1)$, ya que $f''(x) > 0$. Así, por la **desigualdad de Jensen**:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}},$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Falta por probar que $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leq \sqrt{n}$, pero esto se obtiene fácilmente usando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$.

Problema 3.3: Rusia, 1991

Sean x, y, z números reales no negativos. Demostrar que:

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Usando **MA-MG** , tenemos $xy + yz \geq 2y\sqrt{xz}$. Sumando los resultados similares obtenemos

$$2(xy + yz + zx) \geq 2(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{zy}).$$

Nuevamente por $MA - MG$, se tiene que $x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 4x\sqrt{yz}$. Sumando los resultados similares obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Sumando el primer resultado tenemos

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Problema 3.4: Rusia, 1992

Demostrar que para cualesquiera números reales $x, y > 1$, se tiene que:

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

Por **MA-MG**, tenemos que:

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 2\frac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 8.$$

Ahora, nótese que $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$, ya que $(x-2)^2 \geq 0$

Solución Alternativa: Sean $a = x-1$, $b = y-1$, que son positivos y la ecuación que queremos demostrar es equivalente a $\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 8$. Ahora bien, por $MA - MG$, tenemos que $(a+1)^2 \geq 4a$ y $(b+1)^2 \geq 4b$. Luego, $\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 4(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$. Lo último que nos falta ver es que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pero esto es bien fácil, usando nuevamente $MA - MG$:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{ab}{ba}} = 1.$$

Problema 3.5: Rusia, 1992

Para números reales positivos x, y, z, demostrar que:

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Por la desigualdad **MA-MG**, se tiene que $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2$. Usando $MA-MG$ nuevamente, $2x^2y^2+z^2 \geq \sqrt{8}xyz$. Sumando las desigualdades:

$$x^4+y^4+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^4y^4z^4}{4}} = \sqrt{8}xyz.$$

Problema 3.6: Sudáfrica, 1995

Para a,b,c,d números reales positivos, demuestra que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Utilizamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** para establecer que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Problema 3.7: Corea, 1998

Si a,b,c,d son números reales positivos tales que $a+b+c=abc$, demuestra que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Realizando la sustitución $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$, la condición $a+b+c=abc$ se convierte en $xy+yz+zx=1$ y la desigualdad se transforma en

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2},$$

que es un resultado probado en el segundo ejemplo del apartado “Cambio de variable”. Nótese que la **desigualdad de Jensen** no puede ser aplicada porque la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ no es cóncava en $\mathbb{R}^+$

Problema 3.8: Hungría-Israel, 1999

Sean k y l dos números enteros positivos dados y sean a_{ij}, $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$, kl números reales positivos dados. Demuestra que si $q \leq p > 0$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^{q}\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

Definimos $b_j=\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}$ para $j=1,2,\ldots,l$ y denotemos el lado izquierdo de la desigualdad pedida por L y el derecho por R. Entonces:

$$\begin{aligned} L^q &= \sum_{j=1}^{l} b_k^{\frac{q}{p}} \\ &= \sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q-p}{p}}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} b_j^{\frac{q-p}{p}} a_{ij}^{p}\right)\right) \end{aligned}$$

Usando la **desigualdad de Hölder**, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
L^q &\leq \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q-p}{p}}\right)^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\sum_{i=1}^{l}(a_{ij}^{p})^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\sum_{j=1}^{l}(a_{ij}^{q})\right)^{\frac{p}{q}}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}(a_{ij}^{q})\right)^{\frac{p}{q}}\right] = L^{q-p}R^{p}
\end{aligned}
$$

La desigualdad $L \leq R$ se obtiene dividiendo ambos lados de $L^q \leq L^{q-p}R^p$ por L^{q-p} y tomando la raíz $p-$ésima.

Problema 3.9: Repúblicas Checa y Eslovaca, 1999

Para a, b, c enteros positivos, demuestra la desigualdad

$$\frac{a}{2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Obsérvese que

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ab}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ca+2bc}.$$

Usando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** en la forma de Engel, se tiene que

$$\frac{a^2}{ab+2ab}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ca+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1.$$

Además, sabemos que

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0,$$

esto es, $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Usando esta desigualdad, completamos la demostración.

Problema 3.10: Bielorusia, 2000

Demuestra que, para todos los números positivos a,b,c,x,y,z se da la siguiente desigualdad

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Usando la extensión de la **desigualdad de Hölder**, tenemos que

$$\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)^{1/3}(1+1+1)^{1/3}(x+y+z)^{1/3} \geq a+b+c.$$

Elevando al cubo ambos lados y dividiendo ambos miembros por $3(x+y+z)$, obtenemos el resultado pedido.

Problema 3.11: India, 2002

Si a,b,c son reales positivos, demuestra que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

Haciendo el cambio de variable $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, el lado izquierdo de la desigualdad se simplifica notablemente, quedando $x+y+z$. Veamos cómo queda el segundo miembro:

$$\frac{c+a}{c+b}=\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{1+\frac{a}{b}\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{1+xy}{1+y}=x+\frac{1-x}{1+y}.$$

De forma análoga:

$$\frac{a+b}{a+c}=y+\frac{1-y}{1+z}\qquad\frac{b+c}{b+a}=z+\frac{1-z}{1+x}.$$

Así, la desigualdad es equivalente a

$$\frac{x-1}{1+y}+\frac{y-1}{1+z}+\frac{z-1}{1+x}\geq 0,$$

con la condición $xyz=1$. La última desigualdad puede ser escrita como

$$(x^2-1)(z+1)+(y^2-1)(x+1)+(z^2-1)(y+1)\geq 0,$$

que se transforma en

$$x^2z+y^2x+z^2y+x^2+y^2+z^2\geq x+y+z+3.$$

Ahora, usando, la desigualdad aritmético-geométrica, resulta que $x^2z+y^2x+z^2y\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3$. También, $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{x+y+z}{3}(x+y+z)\geq\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)=x+y+z$ de donde la primera desigualdad se sigue de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** .

Problema 3.12: Rumanía, 2002

Si a,b,c son reales positivos en el intervalo $(0,1)$, demuestra que

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1+a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Haciendo la sustitución $a=\cos^2 A$, $b=\cos^2 B$, $c=\cos^2 C$, con A,B,C en el intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$, obtenemos que $\sqrt{1-a}=\sqrt{1-\cos^2 A}=\operatorname{sen} A$, $\sqrt{1-b}=\operatorname{sen} B$ y $\sqrt{1-c}=\operatorname{sen} C$. Así pues, la desigualdad a probar es equivalente a probar

$$\cos A\cos B\cos C+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C<1.$$

Pero obsérvese que

$$\cos A\cos B\cos C+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C<\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B=\cos(A-B)\leq 1.$$

Problema 3.13: Repúblicas Checa y Eslovaca, 2004

Sean a,b,c,d números reales con $a+d=b+c$. Demuestra que:

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0.$$

Basta observar que

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)=2(a-b)(c-d)=2(a-b)^2\geq 0.$$

Problema 3.14: Croacia, 2004

Sean x,y,z números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

Aplicamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** para obtener

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}.$$

Por otra parte, la desigualdad

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{4},$$

es equivalente a $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$,que bien sabemos que es cierta (Véase la sección 1.6).

Problema 3.15: Rusia, 2004

Si $n>3$ y $x_1,x_2,\ldots,x_n$ son números reales positivos con $x_1x_2\ldots x_n$ demuestra que

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

Usamos la sustitución $x_1=\frac{a_2}{a_1}$, $x_2=\frac{a_3}{a_2}$, $\ldots$, $x_n=\frac{a_1}{a_n}$. Ya que

$$\frac{1}{x_1+x_1x_2}=\frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}}=\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3},$$

y repitiendo el proceso en los términos semejantes del miembro de la izquierda, deberemos probar que se da la desigualdad

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>1.$$

Pero esta desigualdad es fácil de probar. Es fácil observar que para todo $i=1,\ldots,n$ tenemos

$$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}<a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Problema 3.16: Repúblicas Checa y Eslovaca, 2005

Sean a,b,c números positivos que satisfacen $abc=1$, demostrar que

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Nótese que

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)-2}{(a+1)(b+1)(c+1)}=$$

$$=1-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq\frac{3}{4}$$

si y sólo si $(a+1)(b+1)(c+1)>8$, y esto último es inmediato, haciendo uso de $MA-MG$, de la desigualdad

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{b+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right)\geq\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=1.$$

Problema 3.17: Polonia, 2006

Sean a,b,c enteros positivos tales que $ab+bc+ca=abc$. Demuestra que

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1.$$

Usando la sustitución $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$, la condición $ab+bc+ca=abc$ se transforma en $x+y+z=1$ y la desigualdad queda:

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq 1=x+y+z.$$

Utilizando la **desigualdad de Chebyshev** , podemos ver que

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geq\frac{x^3+y^3}{2}\frac{x+y}{2},$$

y así:

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}.$$

Problema 3.18: Olimpiada Matemática Española, 2007

Sea $a\neq 1$ un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que $n^2<\dfrac{a^n+a^{-n}-2}{a+a^{-1}-2}$.

La desigualdad dada $n^2<\dfrac{a^n+a^{-n}-2}{a+a^{-1}-2}$ es equivalente a

$$n^2<\frac{\left(a^{n/2}-a^{-n/2}\right)^2}{\left(a^{1/2}-a^{-1/2}\right)^2},$$

que a su vez es equivalente a que $n<\dfrac{\alpha^n-\alpha^{-n}}{\alpha-\alpha^{-1}}$, siendo $\alpha=\sqrt{a}$. Entonces usando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica**, se tiene la desigualdad pedida:

$$\frac{\alpha^n-\alpha^{-n}}{\alpha-\alpha^{-1}}=\alpha^{1-n}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}=\alpha^{1-n}(1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2n-2})>$$

$$>\alpha^{1-n}n\sqrt[n]{\alpha^{2+4+\cdots+(2n-2)}}=\alpha^{1-n}n\alpha^{n-1}=n.$$

Problema 3.19: Olimpiada Matemática Española, 2007

Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón d. Demuestra que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

SOLUCIÓN 1: La desigualdad dada puede escribirse como

$$10a_2^3 \leq a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3,$$

y sumando $6a_2^3$ a ambos miembros se convierte en

$$a_2^3 \leq (a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

Por otro lado como a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 están en progresión aritmética, entonces

$$\binom{4}{0}a_0 + \binom{4}{1}a_1 + \binom{4}{2}a_2 + \binom{4}{3}a_3 + \binom{4}{4}a_4 = (a_0 + a_4)\binom{4}{0} + (a_1 + a_3)\binom{4}{1} + \binom{4}{2}a_2$$

$$= 2a_2\binom{4}{0} + 2a_2\binom{4}{1} + a_2\binom{4}{2} = a_2\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = 2^4 a_2.$$

Aplicando la **desigualdad de Jensen** a la función $f(t) = t^3$, convexa en $\mathbb{R}^+$, con $t_k = \binom{4}{k}\frac{1}{2^k}$ resulta

$$f\left(\sum_{k=0}^{4} p_k a_k\right) \leq \sum_{k=0}^{4} p_k f(a_k),$$

o equivalentemente,

$$a_2^3 \leq \frac{1}{2^k}\left[\binom{4}{0}a_0^3 + \binom{4}{1}a_1^3 + \binom{4}{2}a_2^3 + \binom{4}{3}a_3^3 + \binom{4}{4}a_4^3\right] = \frac{1}{16}(a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

Obsérvese que la igualdad se tiene cuando los cinco números son iguales y hemos terminado.

SOLUCIÓN 2: Llamando a al término central y d a la diferencia, la progresión es $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ y tenemos:

$$\begin{aligned}
a_0^3 &= (a - 2d)^3 = a^3 - 6a^2d + 12ad^2 - 8d^3 \\
a_4^3 &= (a + 2d)^3 = a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3 \\
4a_1^3 &= 4(a - d)^3 = 4a^3 - 12a^2d + 12ad^2 - 4d^3 \\
4a_3^3 &= 4(a + d)^3 = 4a^3 + 12a^2d + 12ad^2 - 4d^3
\end{aligned}$$

sumando:

$$a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3 = 10a^3 + 48ad^2,$$

dividiendo por 10 queda

$$\frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3) - a^3 = \frac{24}{5}ad^2 \geq 0,$$

con independencia del valor de d.

SOLUCIÓN 3: Como se trata de cinco términos en progresión aritmética, se tiene

$$a_0 + a_4 = 2a_2 = a_1 + a_3,$$

o también

$$a_0a_4 = (a_2 - 2d)(a_2 + 2d).$$

Entonces

$$a_0^3 + a_4^3 = (a_0 + a_4)^3 - 3a_0a_4(a_0 + a_4) = 8a_2^3 - 6a_0a_4a_2,$$

y

$$4(a_1^3 + a_3^3) = a[(a_1 + a_3)^3 - 3a_1a_3(a_1 + a_3)] = 4(8a_2^3 - 6a_1a_0a_2).$$

Entonces, lo que hay que probar es

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}(8a_2^3 - 6a_0a_1a_2 + 32a_2^3 - 24a_1a_3a_2),$$

cuyo segundo miembro es

$$4a_2^3 - \frac{6}{10}a_2(a_0a_4 + 4a_1a_3);$$

trasponiendo términos, la desigualdad a probar se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}a_2(a_2^2 - 4d^2 + 4a_2^2 - 4d^2) &\leq 3a_2^3 \\ 3a_2^3 - \frac{24}{5}d^2 &\leq 3a_2^3 \\ -\frac{24}{5}d^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta y hemos terminado.

Problema 3.20: Rumanía, 2007

Para los números reales no negativos x, y, z, demuestra que

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}|(x - y)(y - z)(z - x)|.$$

Sea $p = |(x - y)(y - z)(z - x)|$. Recordemos las identidades

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx), \qquad (\star)$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2].$$

Aplicando **MA-MG**, se tiene que

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2}. \qquad (\clubsuit)$$

Ahora, como $|x - y| \leq x + y$, $|y - z| \leq y + z$, $|z - x| < z + x$, se sigue que

$$2(x + y + z) \geq |(x - y)(y - z)(z - x)|.$$

Volviendo aplicar MA-MG:

$$2(x + y + z) \geq 3\sqrt[3]{p}. \qquad (\spadesuit)$$

El resultado se sigue de sustituir ($\clubsuit$) y ($\spadesuit$) en ($\star$) y dividir por 3.

Problema 3.21: Moldavia, 2007

Sean w, x, y, z números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}\geq\frac{2}{3}.$$

Expresamos el lado izquierdo de la desigualdad como sigue:

$$\frac{w^2}{xw+2yw+3zw}+\frac{x^2}{xy+2xz+3xw}+\frac{y^2}{yz+2yw+3xy}+\frac{z^2}{zw+2xz+3yz}$$

y usamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** :

$$\begin{aligned}\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}\\ \geq\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}\end{aligned}$$

Así pues, nuestra labor se reduce a probar que

$$\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}\geq\frac{3}{2},$$

que es equivalente a $3(w^2+x^2+y^2+z^2)\geq 2(wx+xy+yz+zw+wy+xz)$. Esta desigualdad puede deducirse utilizando **MA-MG** seis veces a los términos bajo forma $x^2+y^2\geq 2xy$.

Problema 3.22: México, 2007

Si a, b, c son reales positivos tales que $a+b+c=1$, demuestra que

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\leq 2.$$

Usando la condición $a+b+c=1$, tenemos que

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c),$$

así, usando MA-MG, se tiene que

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\leq\frac{2a+b+c}{2}.$$

De forma análoga

$$\sqrt{b+ca}\leq\frac{2b+c+a}{2}\qquad\sqrt{c+ab}\leq\frac{2c+a+b}{2}.$$

Sumando las tres desigualdades tenemos:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\leq\frac{2a+b+c}{2}+\frac{2b+c+a}{2}+\frac{2c+a+b}{2}=\frac{4a+4b+4c}{2}=2.$$

La igualdad se da cuando $a+b=a+c$, $b+c=b+a$ y $c+a=c+b$, esto es, cuando $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema 3.23: Irlanda, 2007

Sean x, y, z números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

La desigualdad de la izquierda se sigue de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** . Para la segunda desigualdad, la sustitución $x = \frac{bc}{a}$, $y = \frac{ca}{b}$, $z = \frac{ab}{c}$ transforma la desigualdad en

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{yz+zx+xy}{3}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$, que es válido si y sólo si $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$, hecho que sabemos que es cierto.

Problema 3.24: Grecia, 2008

Para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enteros positivos, demuestra que

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n,$$

donde $k = \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $t = \text{mín}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. ¿Bajo qué condiciones se da la igualdad?

Usamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** para obtener:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} = \frac{x_1^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \frac{x_2^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n(x_1+x_2+\cdots+x_n)} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Así, es suficiente probar que

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n.$$

Como $k = \text{máx}\, x_1, \ldots, x_n \geq \text{mín}\, x_1, \ldots, x_n = t$, tenemos que $\frac{kn}{t} \geq n$ y como $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq 1$, porque todos los x_i son enteros positivos, es suficiente probar que

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{n} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n,$$

que es equivalente a la desigualdad aritmético-geométrica. Como todas las desigualdades intermedias son igualdades cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, concluimos que la igualdad se da cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problema 3.25: Reino Unido, 2008

Encuentra el mínimo de $x^2+y^2+z^2$, donde x, y, z son números reales que verifican $x^3+y^3+z^3-3xyz = 1$.

Tomemos la igualdad

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

La condición $x^3+y^3+z^3-3xyz = 1$, puede ser escrita como

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 1. \tag{$\star$}$$

Sean $A = x^2 + y^2 + z^2$ y $B = x + y + z$. Nótese que $B^2 - A = 2(xy + yz + zx)$. Por la igualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2],$$

tenemos que $B > 0$. Y la igualdad $(\star)$ se convierte en

$$B\left(A - \frac{B^2 - A}{2}\right) = 1$$

Así pues, $3A = B^2 + \frac{2}{B}$. Como $B > 0$, aplicamos la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** para obtener

$$3A = B^2 + \frac{2}{B} = B^2 + \frac{1}{B} + \frac{1}{B} \geq 3,$$

esto es, $A \geq 1$. Así, el mínimo $A = 1$ se alcanza, por ejemplo, cuando $(x, y, z) = (1, 0, 0)$

Problema 3.26: Olimpiada Matemática Española, 2008

Demuestra que para cualesquiera números reales a, b tales que $0 < a, b < 1$, se cumple la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}.$$

Se verifica que $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$ para todo $x \in (0, 1)$. Teniendo en cuenta que $0 < \dfrac{a+b}{2} < 1$, utilizando la desigualdad anterior y aplicando **MA-MG**, se tiene:

$$\sqrt{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} < \sqrt[3]{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} \leq \frac{a + b + \left(\frac{a+b}{2}\right)}{3} = \frac{a+b}{2}$$

y

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-a)(1-b)\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)} &< \sqrt[3]{(1-a)(1-b)\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)} \\ &\leq \frac{1 - a + 1 - b + 1 - \frac{a+b}{2}}{3} \\ &= 1 - \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores resulta

$$\sqrt{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \sqrt{(1-a)(1-b)\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)} < 1,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)}\right) < 1,$$

de donde se obtiene inmediatamente la desigualdad del enunciado.

Problema 3.27: Kazajistán, 2008

Sean x,y,z números reales positivos tales que $xyz = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Con la sustitución $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, la inecuación toma la forma

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

que es la desigualdad de Nesbitt.

Problema 3.28: Rumanía, 2008

Sean a,b,c números reales positivos tales que $abc = 8$. Demuestra que

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leq 0.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leq 0 &\Leftrightarrow 3-3\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\leq 0\\ &\Leftrightarrow 1\leq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.\end{aligned}$$

Usando el cambio de variables $a=\frac{2x}{y}$, $b=\frac{2y}{z}$, $c=\frac{2z}{x}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} &= \frac{1}{\frac{2x}{y}+1}+\frac{1}{\frac{2y}{z}+1}+\frac{1}{\frac{2z}{x}+1}\\ &= \frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\\ &= \frac{y^2}{2xy+y^2}+\frac{z^2}{2yz+z^2}+\frac{x^2}{2zx+x^2}\\ &\leq \frac{(x+y+z)^2}{2xy+y^2+2yz+z^2+2zx+x^2}=1\end{aligned}$$

La única desigualdad de la expresión se sigue de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel** .

Problema 3.29: Olimpiada Matemática Española, 2009

Sean a,b,c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4}.$$

Como $abc = 1$, entonces $\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2=\left(\frac{ca}{abc+c}\right)^2=\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2$. Análogamente se obtienen

$$\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2=\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 \qquad \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2=\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2$$

. Por lo tanto, la desigualdad requerida se convierte en:

$$\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\geq\frac{3}{4},$$

equivalente a

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{2}.$$

Usando ahora la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se obtiene

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2+\left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{ca}{1+c}\right)\right].$$

Así es suficiente demostrar que $\frac{ab}{1+a}+\frac{bc}{1+b}+\frac{ca}{1+c}\geq\frac{3}{2}$ o equivalentemente

$$\frac{abc}{c(1+a)}+\frac{abc}{a(1+b)}+\frac{abc}{b(1+c)}\geq\frac{3}{2},$$

que a su vez es equivalente a

$$\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

Poniendo $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$ y $c=\frac{z}{x}$, en la última desigualdad resulta

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)^{-1}\geq\frac{3}{2}.$$

Sustituyendo ahora $\alpha=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{y}$ y $\gamma=\frac{1}{z}$, se llega a la desigualdad de Nessbit:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si $a=b=c=1$.

Problema 3.30: Olimpiada Matemática Española, 2011

Sean a,b,c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Nótese en primer lugar que, en virtud de **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica**, se tiene:

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2}=\frac{3}{2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$, o equivalentemente si $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$, es decir, si y sólo si $a=b=c$. Nos bastaría entonces, para concluir el problema, con demostrar que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq 1+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Esto puede conseguirse por *fuerza bruta*, viéndose en primer lugar que el miembro de la derecha puede escribirse como

$$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1,$$

y a partir de aquí comparando las fracciones restantes, llegándose a la conclusión tras algo de cálculo. Sin embargo, se puede obtener el resultado deseado de una forma más elegante, ya que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc}\\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\right)^2.\end{aligned}$$

Así:

$$2(ab+bc+ca) = \left(\sqrt{ab+ca}\right)^2+\left(\sqrt{bc+ab}\right)^2+\left(\sqrt{ca+bc}\right)^2,$$

y por la desigualdad del producto escalar se tendría

$$\sqrt{2(ab+bc+ca)}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}} \geq$$

$$\geq \frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\sqrt{ab+ca}+\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\sqrt{bc+ab}+\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\sqrt{ca+bc} = a+b+c$$

es decir,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1,$$

con lo que se concluye el problema. Nótese que la igualdad se da en la última desigualdad si y sólo si

$$\frac{\sqrt{ab+ca}}{a}\sqrt{ab+ca} = \frac{\sqrt{bc+ab}}{b}\sqrt{bc+ab} = \frac{\sqrt{ca+bc}}{c}\sqrt{ca+bc},$$

es decir, si y sólo si $a=b=c$, que es por lo tanto también la condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad en la desigualdad propuesta.

Problema 3.31: Olimpiada Matemática Española, 2013

Sean a,b y n enteros positivos tales que $a>b$ y $ab = 1-n^2$. Demuestra que

$$a-b \geq \sqrt{4n-3}.$$

Indica justificadamente cuándo se alcanza la igualdad.

Supongamos que el resultado a demostrar fuera falso. Entonces $(a+b)^2 = (a-b)^2+4ab < 4n-3+4(n^2+1) = (2n+1)^2$. Pero como $a+b$ es entero y $a+b<2n+1$, entonces $a+b \leq 2n$ y por **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** $n^2+1 = ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = n^2$, que es una contradicción. Luego el resultado a demostrar es cierto.

El caso de la igualdad requiere que $(a+b)^2 = 4n-3+4(n^2+1) = (2n+1)^2$, debido a la identidad $(a+b)^2 = (a-b)^2+4ab$. Por tanto $a+b = 2n+1$. La igualdad $a-b = \sqrt{4n-3}$ se alcanza cuando el radicando sea necesariamente un cuadrado perfecto impar; es decir $4n-3 = (2u+1)^2$ para algún entero no negativo u, con lo que

$$n = u^2+u+1 \qquad a-b = 2u+1.$$

Además, $b = n-u = u^2+1$, luego $a = b+2u+1 = u^2+2u+2$. Se comprueba fácilmente que en efecto $ab = u^4+2u^3+3u^2+2u+2 = (u^2+u+1)^2+1 = n^2+1$. Luego hay igualdad si y sólo si

$$a = u^2+2u+2, \quad b = u^2+1 \quad \text{y} \quad n = u^2+u+1, \text{con } a-b = 2u+1,$$

para todo entero no negativo u.

Problema 3.32: Olimpiada Matemática Española, 2016

Sea $n \geq 2$ un número entero. Determinar el menor número real positivo γ de modo que para cualesquiera números reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y parta cualesquiera números reales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, con $0 \leq y_1, y_2, \ldots, y_n \leq \frac{1}{2}$ que cumplan $x_1+x_2+\cdots+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_n = 1$ se tiene que

$$x_1x_2\ldots x_n \leq \gamma(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n).$$

Sean $M = x_1x_2\cdots x_n$ y $X = \dfrac{M}{x_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Consideremos la función $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \dfrac{M}{t}$ que es convexa como se prueba fácilmente. Como los números no negativos y_i, $(1 \leq i \leq n)$ son tales que $y_1+y_2+\cdots+y_n = 1$, entonces aplicando la **desigualdad de Jensen** a la función φ se tiene:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n y_ix_i\right) \leq \sum_{i=1}^n y_i\varphi(x_i),$$

es decir,

$$M \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_ix_i\right)^{-1} \leq \sum_{i=1}^n y_i\frac{M}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_iX_i. \tag{1}$$

Ahora se trata de encontrar la menor cota superior del término de la derecha de (1). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Entonces se tiene que $X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X$ como se comprueba inmediatamente. Aplicando la **desigualdad de reordenación**, sabemos que entre todas las sumas de la forma $\sum_{i=1}^n y_iX_i$ la que alcanza el valor máximo es la que se obtiene cuando $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ y $X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_n$. Ahora observamos que

$$\sum_{i=1}^n y_iX_i = y_1X_1+(y_2X_2+\cdots+y_nX_n) \leq y_1X_1+(y_2+\cdots+y_)X_2 = y_1X_1+(1-y_1)X_2.$$

Al ser $0 \leq y_1 \leq 1/2$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n y_iX_i \leq \frac{1}{2}(X_1+X_2) = \frac{1}{2}((x_1+x_2)x_3\ldots x_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{(x_1+x_2)+x_3+\cdots+x_n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

donde se ha utilizado la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** y la condición $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. De lo anterior y (1), resulta

$$M \leq \left(\sum_{i=1}^n y_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_iX_i\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n y_ix_i\right)$$

y

$$\gamma \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Si tomamos $x_1 = x_2 = \frac{1}{2(n-1)}$, $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = \frac{1}{n-1}$ e $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = y_4 = \cdots = y_n = 0$, entonces

$$M = x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}(y_1 x_1 + y_2 x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i,$$

y se concluye que

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Problema 3.33: Olimpiada Matemática Española, 2017

Determina el máximo valor posible de la expresión

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab},$$

siendo a, b, c, números reales positivos tales que $a+b+c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

En primer lugar, se observa que cuando $a = b = c = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ el valor que toma la expresión es $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, lo cual sugiere conjeturar que

$$27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Para probar esta conjetura, se puede aplicar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**, $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$ a los vectores $\vec{u} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ y $\vec{v} = (\sqrt{bc}, \sqrt{ca}, \sqrt{ab})$, obteniéndose que

$$9abc = (\sqrt{abc} + \sqrt{abc} + \sqrt{abc})^2 \leq (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

Multiplicando por 3 ambos miembros de la desigualdad anterior y teniendo en cuenta la restricción, resulta

$$27abc \leq 3(a+b+c)(bc+ca+ab) = \sqrt{3}(bc+ca+ab).$$

Por otro lado, dado que $a\sqrt{a^2+2bc} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)}$, aplicando la **desigualdad entre las medias aritmética y geométrica** a los números $3a^2$ y a^2+2bc se obtiene

$$a\sqrt{a^2+2bc} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(a^2+2bc)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{3a^2+(a^2+2bc)}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a^2+bc).$$

Análogamente, se tiene que

$$b\sqrt{b^2+2ca} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(2b^2+ca)$$

y

$$c\sqrt{c^2+2ab} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(2c^2+ab)$$

Combinando las desigualdades anteriores, y teniendo en cuenta otra vez la restricción, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&27abc + a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab} \\
&\leq \sqrt{3}(bc+ca+ab) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2a^2+bc+2b^2+ca+2c^2+ab) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+ca) = \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Esto prueba la conjetura y el máximo de la expresión es $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

4

Problemas de Olimpiadas Internacionales

En este último capítulo vamos a realizar un estudio de los problemas de olimpiadas que han aparecido en competiciones internacionales, como puede ser la Olimpiada Matemática Internacional (IMO), Olimpiada Matemática del Pacífico Asiático (APMO) y la Olimpiada Iberoamericana. La complejidad a la hora de resolver los problemas es superior a las demás fases, aunque su resolución resulte breve.

Problema 4.1: IMO, 1960

¿Para qué valores reales de x se cumple la siguiente desigualdad?

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

Para que las expresiones involucradas en la desigualdad tengan sentido es necesario, a priori que $x \geq -\frac{1}{2}$ y $x \neq 0$. Multiplicando el numerador y el denominador por $(1+\sqrt{1+2x})^2$ y simplificando, se tiene que verificar que $2\sqrt{2x+1} < 7$. Resolviendo para x, se tiene que $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$, por lo que la solución de la desigualdad es $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{45}{8})$.

Problema 4.2: IMO, 1964

Sean a, b, c números reales positivos, demostrar que:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

La desigualdad es equivalente a:

$$a^3+b^3+c^3 \geq ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ca(c+a-b).$$

Definimos las variables $x = a+b-c$, $y = a-b+c$, $z = -a+b+c$. Se tiene que $a = \frac{z+x}{2}$, $b = \frac{x+y}{2}$, $x = \frac{y+z}{2}$. Así pues, la desigualdad a probar es:

$$\frac{1}{8}((z+x)^3+(x+y)^3+(y+z)^3) \geq \frac{1}{4}((z+x)(x+y)x+(x+y)(y+z)y+(y+z)(z+x)z),$$

que es equivalente a

$$3(x^2y+y^2x+\cdots+z^2x) \geq 2(x^2y+\ldots)+6xyz,$$

o

$$x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z \geq 6xyz,$$

y aplicando el **teorema de Muirhead** podemos obtener el resultado si x, y, z son no negativos. Si uno de ellos es negativo (no puede haber más de uno al mismo tiempo), obtenemos

$$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+x^2 2c+y^2 2a+z^2 2b \geq 0,$$

pero el segundo término $6xyz$ es negativo, lo cual concluye la demostración.

Problema 4.3: IMO, 1964

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

La expresión es simétrica respecto de a, b y c, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $c \leq b \leq a$. En este caso $a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \leq c(a+b-c)$. Por ejemplo, la primera desigualdad se puede probar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a(b+c-a) \leq b(a+c-b) &\Leftrightarrow ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\ &\Leftrightarrow (a-b)c \leq (a+b)(a-b) \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Por la **desigualdad de reordenación**:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c),$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Así pues,

$$2[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)] \leq 6abc.$$

Problema 4.4: IMO, 1983

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0.$$

Consideremos el caso $c \leq b \leq a$ (los otros casos son similares). Procediendo como en el Problema 4.3, tenemos que $a(b+c-a) \leq b(a+c) \leq c(a+b-c)$ y como $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$, por la **desigualdad de reordenación**:

$$\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+\frac{1}{c}c(a+b-c) \geq \frac{1}{c}a(b+c-a)+\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c).$$

Por lo tanto,

$$a+b+c \geq \frac{a(b-c)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c,$$

de donde $\frac{a(b-c)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b} \leq 0$. Multiplicando por abc, obtenemos

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0.$$

Solución Alternativa: Usando el cambio de variable $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, para $x, y, z > 0$, tenemos:

$$x^3z+y^3x+z^3y \geq x^2yz+xy^2z+xyz^2,$$

o equivalentemente,

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z,$$

y utilizando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**,

$$(y+z+x)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

Problema 4.5: APMO, 1991

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números positivos tales que $a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$. Demostrar que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_n).$$

Sean $S_a = \sum_{1=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ y $S_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i+b_i}$. Así:

$$S_a - S_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-b_i^2}{a_i+b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Luego $S_a = S_b = S$. Tenemos entonces:

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2+b_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$ (Utilícese **MA-MG**).

Problema 4.6: IMO, 1995

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos con $abc = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c \leq b \leq a$. Sean $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Así:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \\ &= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+\frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\ &= \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \end{aligned}$$

Como $x \leq y \leq x$, entonces $x+y \leq z+x \leq y+z$, y también

$$\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}.$$

Usando la **desigualdad de reordenación**, podemos ver que:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{zx}{x+y}$$
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{xz}{y+z}+\frac{yx}{z+x}+\frac{zy}{x+y}$$

de lo que se deduce que $2S \geq x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. Y por lo tanto $S \geq \frac{3}{2}$.

Problema 4.7: APMO, 1998

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, demuestra que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{abc}{abc} \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.
\end{aligned}$$

Ahora, definimos $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Tendremos que probar que

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}.$$

Ahora, considerando:

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) &= \left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{z},\frac{z}{y},\frac{y}{x}\right) \\
(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5',a_6') &= \left(\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{y},\frac{z}{y},\frac{y}{x},\frac{x}{z}\right) \\
(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6) &= \left(\frac{x^2}{y^2},\frac{y^2}{z^2},\frac{z^2}{x^2},\frac{x^2}{z^2},\frac{z^2}{y^2},\frac{y^2}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} &\geq \frac{x^2}{y^2}\frac{y}{z}+\frac{y^2}{z^2}\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x^2}\frac{x}{y}+\frac{x^2}{z^2}\frac{z}{y}+\frac{z^2}{y^2}\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\frac{x}{z} \\
&= \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{yz}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x^2}{xy}+\frac{x^2}{zy}+\frac{z^2}{yx}+\frac{y^2}{xz} \\
&= \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}
\end{aligned}$$

Problema 4.8: IMO, 1996

Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

Como $(a^3-b^3)(a^2-b^2) \geq 0$, se tiene que $a^5+b^5 \geq a^2b^2(a+b)$, entonces:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a+b)+abc^2} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Análogamente $\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leq \frac{a}{a+b+c}$ y $\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{b}{a+b+c}$. Así:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1.$$

Problema 4.9: IMO, 1997

Sean $x_1,\ldots,x_n$ números reales que satisfacen $|x_1+\cdots+x_n|=1$ y $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ para todo $i=1,\ldots,n$. Demuestra que existe una permutación $y_1,\ldots,y_n$ de $x_1,\ldots,x_n$ tal que

$$|y_1+2y_2+\cdots+ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Como $1<2<\cdots<n$, tenemos, usando la **desigualdad de reordenación**, que

$$A=x_1+2x_2+\cdots+nx_n \geq nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n=B.$$

Entonces, $|A+B|=|(n+1)(x_1+\cdots+x_n)|=n+1$, de donde $A+B=\pm(n+1)$. Si $A+B=(n+1)$, se tiene que $B \leq \frac{n+1}{2} \leq A$, y si $A+B=-(n+1)$, entonces $B \leq -\frac{n+1}{2} \leq A$.

Si ahora asumimos que $\frac{n+1}{2}$ o $-\frac{n+1}{2}$ se encuentra entre B y A, ya que en caso contrario A o B estarían en el intervalo $[-\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}]$. Luego, una de los valores $|A|$ o $|B|$ es menor o igual a $\frac{n+1}{2}$ y termina el problema.

Supongamos, por lo tanto, $B \leq -\frac{n+1}{2} < \frac{n+1}{2} \leq A$. Sea $y_1,\ldots,y_n$ una permutación de $x_1,\ldots,x_n$ tal que $1y_1+2y_2+\cdots+ny_n=C$ toma el valor más grande con $C \leq -\frac{n+1}{2}$. Tomemos i tal que $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_i$ y $y_i > y_{i+1}$, y consideremos:

$$\begin{aligned} D &= y_1+2y_2+\cdots+iy_{i+1}+(i+1)y_i+\cdots+ny_n \\ D-C &= iy_{i+1}+(i+1)y_i-(iy_i+(i+1)y_{i+1})=y_i-y_{i+1}>0. \end{aligned}$$

Como $|y_i|,|y_{i+1}| \leq \frac{n+1}{2}$, se tiene que $D-C=y_i-y_{i+1} \leq n+1$.Luego, $D \leq C+n+1$ y entonces $C<D \leq C+n+1 \leq \frac{n+1}{2}$.

Por otro lado, $D \geq -\frac{n+1}{2}$, pues C es la suma más grande que es menor a $-\frac{n+1}{2}$. Luego, $-\frac{n+1}{2} \leq D \leq \frac{n+1}{2}$ y así $|D| \leq \frac{n+1}{2}$.

Problema 4.10: Propuesto para la IMO, 1998

Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números positivos con $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$, demostrar que

$$\frac{a_1a_2\ldots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

Comencemos demostrando un resultado que necesitaremos:

Lema: Si $x_1,\ldots,x_n>0$ son tales que $\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1$, entonces

$$x_1\ldots x_n \geq (n-1)^n.$$

Demostración. Notemos $y_i = \frac{1}{1+x_i}$. Entonces $x_i = \frac{1}{y_i} - 1 = \frac{1-y_i}{y_i}$. Nótese que $y_1 + \cdots + y_n = 1$ implica que $1 - y_i = \sum_{j\neq i} y_j$, y por tanto, por **MA-MG**, se tiene que $\sum_{j\neq i} y_i \geq (n-1)\left(\prod_{j\neq i} y_j\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Por último

$$\prod_i x_i = \prod_i \left(\frac{1-y_i}{y_i}\right) = \frac{\prod_i \left(\sum_{j\neq i} y_j\right)}{\prod_i y_i} \geq \frac{(n-1)^n \prod_i \left(\prod_{j\neq i} y_j\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod_i y_i} = (n-1)^n.$$

□

Para completar el problema definimos $a_{n+1} = 1 - (a_1 + \cdots + a_n)$ y $x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$ para $i = 1, \ldots, n+1$ y aplicamos directamente el lema.

Problema 4.11: Lista corta IMO, 1998

Si $r_1, \ldots, r_n$ son números reales mayores que 1, demuestra que:

$$\frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{r_1 \ldots r_n} + 1}.$$

En primer lugar, notemos que la función $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ es convexa en $\mathbb{R}^+$, ya que $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ y $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \geq 0$ para $x > 0$.

Ahora, si $r_i > 1$, entonces $r_i = e^{x_i}$ para algunos $x_i > 0$. Como $f(x)$ es convexa, por la **desigualdad de Jensen**:

$$\frac{1}{e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} + 1} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}} + \cdots + \frac{1}{1+e^{x_n}}\right),$$

de donde

$$\frac{1}{\sqrt[n]{r_1 \ldots r_n} + 1} \leq \frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n}.$$

Problema 4.12: Lista corta IMO, 1998

Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$, demuestra que

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Supongamos que $a \leq b \leq c$, entonces

$$\frac{1}{(1+b)(1+c)} \leq \frac{1}{(1+c)(1+a)} \leq \frac{1}{(1+a)(1+b)}.$$

Podemos usar la **desigualdad de Chebyshev** para probar que

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \\
&\geq \frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{(1+b)(1+c)} + \frac{1}{(1+c)(1+a)} + \frac{1}{(1+a)(1+b)}\right) \\
&= \frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usamos que $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) \geq (\frac{a+b+c}{3})^3$, $\frac{a+b+c}{3} \geq 1$ y $(1+a)(1+b)(1+c) \leq (\frac{3+a+b+c}{3})^3$ para ver que

$$\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \frac{6}{(1+\frac{a+b+c}{3})^3} \geq \frac{6}{8}.$$

Para la última desigualdad, úsese que $\frac{\frac{a+b+c}{3}}{1+\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{1}{2}$

Problema 4.13: Lista Corta Olimpiada Iberoamericana, 2003

Sean a,b,c números reales positivos, demostrar que:

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c.$$

Obsérvese que

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c$$

es equivalente a la desigualdad

$$\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}+\frac{b^3(c+a)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)}{a^3+b^3} \geq a+b+c,$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned}&a^3(b+c)(a^3+c^3)(a^3+b^3)+b^3(c+a)(b^3+c^3)(a^3+b^3)+\\&+c^3(a+b)(a^3+c^3)(b^3+c^3)\\&\geq (a+b+c)(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)\end{aligned}$$

La última desigualdad puede ser escrita en términos del **teorema de Muirhead** como:

$$\begin{aligned}[9,1,0]+[6,4,0]+[6,3,1]+[4,3,3] \geq &\left(\frac{1}{2}[1,0,0]\right)\left([6,3,0]+\frac{1}{3}[3,3,3]\right)\\ &=[7,3,0]+[6,4,0]+[6,3,1]+[4,3,3]\\ &\Leftrightarrow [9,1,0] \geq [7,3,0]\end{aligned}$$

que es cierto por el citado teorema.

Problema 4.14: OMI, 1961 (Desigualdad de Weitzenböck)

Sean a,b,c los lados de un triángulo con área S. Demuestra que

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Sean $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ para $x,y,z>0$. Ahora, tomemos la Fórmula de Herón para expresar la superficie en función de x,y y z:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{y+z+z+x+x+y}{2}=x+y+z,$$

y por lo tanto,

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{2(x+y+z)xyz},$$

que puede obtenerse así:

$$\begin{aligned}(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2 &= y^2+z^2+2yz+z^2+x^2+2zx+x^2+y^2+2xy\\ &\geq 2yz+2yz+2zx+2zx+2xy+2xy\\ &= 4(yz+zx+xy),\end{aligned}$$

donde hemos usado que $p^2+q^2 \geq 2pq$, consecuencia inmediata de **MA-MG**. Así, tenemos:

$$((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2)^2 \geq 16(yz+zx+xy)^2,$$

Para continuar, necesitaremos dos observaciones:

Observación 1: Si a,b y c son números reales, entonces $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. En efecto, como $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, se deduce que $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$, o equivalentemente, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Observación 2: Si a,b y c son números reales, entonces $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Usando la observación anterior:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &\geq ab+bc+ca+2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Ahora, podemos terminar la resolución del problema:

$$16(yz+zx+xy)^2 \geq 16\cdot 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+xy\cdot yz) = 48(x+y+z)xyz.$$

Problema 4.15: APMO 2004

Demuestra que para a,b,c números reales positivos se tiene

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Tomamos $A,B,C \in (0,\frac{\pi}{2})$, con $a=\sqrt{2}\tan A$, $b=\sqrt{2}\tan B$, $c=\sqrt{2}\tan C$. Usando que $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, podemos reescribir la desigualdad como

$$\frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C).$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C,$$

podemos escribir la desigualdad como

$$\frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C(\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)).$$

Sea $\theta = \frac{A+B+C}{3}$. Usando **MA-MG** y la **desigualdad de Jensen**, tenemos:

$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A\cos B\cos C}{3}\right)^3 \geq \cos^3\theta.$$

Ahora, tendremos que demostrar que

$$\frac{4}{9}\cos^3(\theta) \geq \cos^3\theta(\cos^3\theta-\cos 3\theta).$$

Usando la igualdad trigonométrica

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \cos^3\theta - \cos 3\theta = 3\cos\theta - 3\cos^3\theta,$$

la desigualdad se convierte en

$$\frac{4}{27} \geq \cos^4(1-\cos^2\theta),$$

que es cierta gracias a **MA-MG**:

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot(1-\cos^2\theta)\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+(1-\cos^2\theta)\right) = \frac{1}{3}.$$

La igualdad se da si y sólo si $\tan A = \tan B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir, cuando $a = b = c = 1$.

Problema 4.16: IMO 2001

Sen a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{b^2+8ca} + \frac{c}{c^2+8ab} \geq 1.$$

Hacemos la sustitución $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$, $z = \frac{c}{a+b+c}$. Dividiendo por $a+b+c$ Así pues, tenemos

$$xf(x^2+8yz) + yf(y^2+8zx) + zf(z^2+8xy) \geq 1,$$

donde $f(t) = \frac{1}{t}$. Como f es convexa en $\mathbb{R}^+$ y $x+y+z = 1$, aplicamos la **desigualdad de Jensen** para obtener

$$xf(x^2+8yz) + yf(y^2+8zx) + zf(z^2+8xy) \geq f(x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy)).$$

Nótese que $f(1) = 1$. Como f es estrictamente decreciente, es suficiente probar que

$$1 \geq x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy).$$

Usando que $x+y+z = 1$, podemos homogeneizar la desigualdad como $(x+y+z)^3 \geq x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy)$.Sin embargo, podemos verlo como

$$(x+y+z)^3 - x(x^2+8yz) - y(y^2+8zx) - z(z^2+8xy) = 3[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2] \geq 0$$

Bibliografía

[1] BULAJICH MANFRINO, R., GÓMEZORTEGA, J. A., AND VALDEZ DELGADO, R. *Inequalities: a mathematical olympiad approach*. Springer Science & Business Media, 2009.

[2] CVETKOVSKI, Z. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] HERMAN, J., KUCERA, R., AND SIMSA, J. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 2000.

[4] LARSON, L. C. *Problem-solving through problems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] SÁNCHEZ-RUBIO GARCÍA, C., AND RIPOLLÉS AMELA, M. *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, vol. 7. Universitat Jaume I, 2000.

[6] XAMBÓ, S. Sessions de preparació per a l'olimpíada matemàtica, 1997.

Bibliografía Web

- `http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html`
- `https://wdb.ugr.es/~olimpiada/`
- `http://www.imo-official.org/`
- `https://artofproblemsolving.com`
- `https://math.stackexchange.com/questions/tagged/inequality`
- `http://www.imomath.com/`

Índice alfabético