ESTUDIO DE PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES FUNCIONALES EN EL NIVEL DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS. RESOLUCIÓN

LUIS CASTRO CASTRO

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada. 2016

ESTUDIO DE PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES FUNCIONALES EN EL NIVEL DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS
Resolución

Luis Castro Castro

Trabajo de fin de máster
Universidad de Granada. 2016

Dedicado a Mamen, que siempre ha estado ahí, sin su ayuda, apoyo y motivación constante este trabajo no hubiese sido posible

Agradecimientos

Este trabajo fin de Máster no se podría haber realizado sin los conocimientos adquiridos durante la carrera así como en los estudios correspondientes a este Máster. Agradecer a cada uno de los profesores que me han ayudado en este camino y en especial, al profesor Pascual Jara Martínez, tutor de este proyecto, por su entrega,dedicación y constancia en la realización de este trabajo. Agradecer a mis padres que me han permitido cursar estos estudios, me han apoyado y han confiado siempre en mí.

Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo principal contribuir al desarrollo del pensamiento y de las habilidades matemáticas, tanto para aquellos que quieran aprender sobre los temas tratados, como aquellos que quieran involucrarse en el reto de las Olimpíadas Matemáticas (OO. MM.). Este material debería permitir fortalecer el potencial de los alumnos y ayudarlos en sus debilidades, generando estrategias de aprendizaje, tanto sobre el tema concreto que estamos estudiando, como en la estrategia general de plantear, abordar y desarrollar un problema.

Las OO. MM., además de ser un concurso, permiten acercar la Matemática a aquellos jóvenes inquietos en su educación. Conviene destacar que una de las finalidades de las OO. MM. es estimular el estudio de la Matemática y el desarrollo de jóvenes talentos en esta Ciencia.

Hemos considerado en la Olimpíada tres fases: Local, Nacional e Internacional. Para resolver los problemas de cada fase el alumno debe tener conocimientos específicos a un determinado nivel, sin olvidar que la finalidad última de la resolución de los problemas es desarrollar capacidades y habilidades que le permitan enfrentarse a otras situaciones.

En este trabajo nos hemos centrado en el estudio de las Ecuaciones Funcionales, desde un nivel elemental a otro superior, y siempre dirigido a ayudar al alumno en su preparación para las OO. MM. en sus diferentes fases. Como parte teórica previa se incluye un capítulo en el que se ha recopilado los resultados que hemos considerado necesarios para la resolución de los problemas tratados; por esta razón puede no ser exhaustivo, ni completo desde una perspectiva académica, su contenido. Para ilustrarla mejor, esta introducción teórica se ha acompañado de ejemplos que ilustran las nociones tratadas.Los capítulos posteriores tratan sobre la resolución y análisis de problemas en los tres niveles antes mencionados.

Los más sencillos se organizan bajo el rótulo de "*Fase Local*", y pueden servir de ejercicios de introducción. Como siempre, su dificultad depende de los conocimientos previos, y de ahí la importancia de las nociones incluidas en el primer capítulo. Más elaborados, en su planteamiento y resolución, son los problemas que aparecen bajo el rótulo de "*Fase Nacional*"; se trata de problemas en los que el proceso de resolución requiere varios pasos, lo que incrementa su dificultad. Finalizamos esta memoria con problemas de una mayor complejidad, tanto en su resolución como en las nociones que involucran; los agrupamos para el epígrafe de "*Fase Internacional*". Unas palabras sobre esta *clasificación*: la ubicación en uno u otro apartado ha sido, en determinados casos, inspirada por el bagaje supuesto al lector, y es de responsabilidad exclusiva del redactor de este texto, así como forma en que se ha estructurado la materia tratada.

Índice general

Capítulo I

Ecuaciones Funcionales. Preliminares

En este capítulo se introduce la noción de *ecuación funcional*, aportando una serie de conceptos preliminares que serán claves a la hora de abordar un problema.

1. Conceptos fundamentales

Ecuación

Una *ecuación* es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un sistema, o mediante otros procesos. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo, en la ecuación:

$$2x + 5 = 4x - 3,$$

la variable x representa la incógnita, mientras que los coeficientes 2 y 4 y los números 5 y 3 son constantes conocidas.

La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas; se puede afirmar entonces que una ecuación es una igualdad condicional, en la que sólo ciertos valores de las variables (incógnitas) la hacen cierta.

Se llama *solución* de una ecuación a cualquier valor individual de las variables que la satisfaga. Para la ecuación anterior la solución es $x = 4$.

Las ecuaciones pueden clasificarse según el tipo de operaciones necesarias para definirlas y según el conjunto de números sobre el que se busca la solución. Entre los tipos más frecuentes están:

- Ecuaciones algebraicas:
    - *De primer grado*: $2x + 1 = 4$.

- *De segundo grado*: $x^2 + 2x + 1 = 4$.
- *Diofánticas*: $x + y = 5$.
- *Racionales*: Aquellas en las que uno o ambos miembros se expresan como un cociente de polinomios.

- Ecuaciones trascendentes: cuando involucran funciones no polinómicas, como las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.
- Ecuaciones diferenciales.
- Ecuaciones integrales.
- Ecuaciones funcionales: cuando la incógnita es una función.

Nuestro estudio se centrará en este último tipo de ecuaciones. Comenzamos aportando la definición y una serie de ejemplos para realizar una primera toma de contacto con este concepto.

Definición. 1.1.
Una *aplicación* o *función* $f : X \to Y$ es una regla que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$. Normalmente escribimos $y = f(x)$.

Definición. 1.2.
Las ecuaciones donde las incógnitas son funciones reciben el nombre de *ecuaciones funcionales*. Aunque no hay una estrategia establecida para resolverlas, sí hay algunas relaciones funcionales que suelen aparecer mucho en distintos problemas de ingenio matemático.

Las ecuaciones que se plantearán se encuadran básicamente dentro de los tipos siguientes:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Ecuación de Cauchy).
- $f(xy) = f(x) + f(y)$.
- $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
- $f(x^2) = 2f(x)$.
- $f(f(x)) = x$.
- $f(x^2) + f(x) = \mathrm{sen} x$.

Para resolver una ecuación funcional es conveniente fijarse en los siguientes datos:

- Dominio y codominio de definición.
- Condiciones extras impuestas.
- Ver ejemplos conocidos de aplicaciones que verifiquen las condiciones.

Veamos unos primeros ejemplos con su solución para ver cómo podríamos enfrentarnos a resolver ecuaciones de este tipo.

Ejemplo. 1.3.
Hallar todas las funciones $f(x)$ tales que $3f(2-x)+2f(x)=x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. En primer lugar observando la ecuación vemos que tenemos un término, $f(2-x)$, que nos impide extraer directamente el valor de $f(x)$. Por tanto realizamos el cambio $x=2-x$ en la ecuación, obteniendo:

$$3f(x)+2f(2-x)=(2-x)^2.$$

De la ecuación inicial podemos extraer el valor de $f(2-x)$, obteniendo:

$$f(2-x)=\frac{x^2-2f(x)}{3}.$$

Sustituyendo el valor de $f(2-x)$ en la ecuación con el cambio realizado se obtiene:

$$3f(x)+2\left[\frac{x^2-2f(x)}{3}\right]=(2-x)^2.$$

Ahora sí, tenemos una ecuación cuya incógnita es la función $f(x)$ y podemos despejarla:

$$9f(x)+2x^2-4f(x)=3(2-x)^2.$$

$$5f(x)=3(2-x)^2-2x^2=3(4+x^2-4x)-2x^2.$$

$$f(x)=\frac{1}{5}[12+3x^2-12x-2x^2]=\frac{1}{5}[x^2-12x+12].$$

□

Ejemplo. 1.4.
Resolver la ecuación funcional $x^2 - 2f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

SOLUCIÓN. Al igual que el ejemplo anterior nos enfrentamos a una ecuación cuya incógnita es una función, pero aparece un término que nos dificulta despejar $f(x)$. Por tanto procedemos de forma análoga:
En primer lugar realizamos el cambio $x = 1/x$ y lo sustituimos en la ecuación, obteniendo:

$$\frac{1}{x^2} - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

La ecuación original es

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 2f(x)$$

Sustituyendo en la ecuación, con el cambio que hemos realizado, obtenemos

$$\frac{1}{x^2} - 2[x^2 - 2f(x)] = f(x).$$

Observamos que ya estamos en condiciones de despejar $f(x)$, realizando operaciones en la ecuación obtenemos la solución de la misma:

$$\frac{1}{x^2} - 2x^2 + 4f(x) = f(x).$$

$$3f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[2x^2 - \frac{1}{x^2}\right].$$

□

Encontrar todas las soluciones a este tipo de ecuaciones no siempre es fácil. Sin embargo el problema suele ser mucho más atacable si se piden condiciones adicionales como monotonía, continuidad o ciertas condiciones puntuales sobre las soluciones. Es por esto, que es muy importante observar las condiciones de la función.A continuación, presentamos algunas de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones funcionales. En primer lugar, consideraremos el caso de funciones reales de variable real. Posteriormente, analizaremos las técnicas para resolver ecuaciones con funciones de variable entera.

2. Técnicas de resolución de ecuaciones funcionales

2.1. Funciones reales de variable real

Evaluación de la ecuación en valores "simplificadores"

En multitud de casos, la ecuación funcional se simplifica mucho al evaluar una o más de las variables involucradas en ciertos valores, talEs como el 0 ó 1, o igualando entre sí alguna de las variables en función de las cuales se expresa la ecuación funcional. Éste es un método "básico", y la mayor parte de las veces se usa en conjunción con otros. Sin embargo, es importante no subestimar su potencia, ya que puede tener un gran impacto a la hora de simplificar una ecuación compleja.

Inyectividad y sobreyectividad

Definición. 2.1.
Una función, $f : X \longrightarrow Y$, se dice que es *inyectiva* si verifica alguna de estas dos condiciones equivalentes:

(a) Si a y b son elementos de X tales que $f(a) = f(b)$, entonces necesariamente $a = b$.
(b) Si a y b son elementos diferentes de X, necesariamente se cumple que $f(a) \neq f(b)$.

Definición. 2.2.
Una función, $f : X \longmapsto Y$, se dice que es *sobreyectiva* si cada elemento de Y es la imagen de como mínimo un elemento de X, es decir, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Una de las simplificaciones que nos permite utilizar el hecho de conocer que la función incógnita $f(x)$ es inyectva, es el que, ante una igualdad de la forma $f(A) = f(B)$, se deduce directamente que $A = B$, donde A y B pueden ser expresiones que contengan tanto a la función incógnita, como a las variables y a constantes. De esta forma, si nos pidieran calcular todas las funciones inyectivas tales que

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)),$$

sabríamos directamente que

$$x + f(y) = y + f(x).$$

Sustituyendo ahora $y = 0$, habríamos acabado, pues tendríamos que

$$f(x) = x + k,$$

donde $k = f(0)$ puede tomar a priori cualquier valor. Si sustituimos esta solución general en la ecuación dada, veríamos que es cierta para cualquier k, con lo que ésta sería la solución general (y única) del problema.

Si no sabemos a priori si una función incógnita $f(x)$ es inyectiva, puede ser un avance muy importante en la resolución del problema el demostrar que sí lo es. Si somos capaces de encontrar una relación de la forma $f(f(x)) = A$, donde A es una expresión que depende de forma inyectiva de x (por ejemplo $A = ax + b$, donde $a \neq 0$ y b son constantes). En este último caso, podemos decir que, si x e y son tales que $f(x) = f(y)$, entonces

$$ax + b = f(f(x)) = f(f(y)) = ay + b,$$

de donde se deduce que $x = y$ y la inyectividad queda demostrada.

Otra forma de poder llegar a simplificar mucho ciertas ecuaciones funcionales es poder asignar valores a $f(x)$ o a $f(y)$ a voluntad. Por ejemplo, ciertas ecuaciones funcionales pueden resolverse sin más que hacer $f(x) = 0$. Sin embargo, para eso es necesario tener garantizado que existe un x tal que $f(x) = 0$. Esto se puede conseguir de dos formas:

- Demostrando la sobreyectividad de la función, es decir que la función toma todos los posibles valores reales.
- Llegando a una relación de la forma $f(A) = 0$, donde A es una expresión cualquiera. Por muy complicada que sea la expresión A, lo que si tenemos garantizado es que la función $f(x)$ toma el valor 0 para algún valor real de la variable x. Realizando entonces la sustitución $x = \lambda$, y teniendo en cuenta que ahora x ya no es una variable, sino que toma un valor concreto, podemos simplificar la ecuación funcional. A partir de esa sustitución, es posible que, tras la simplificación, nos quede una relación de la cuál seamos capaces de deducir el valor de λ, con lo que seguiríamos avanzando hacia la solución.

Nótese finalmente que no es necesario que sea la función la que tome todos los valores reales posibles; puede ser una expresión que depende de la función, la suma o diferencia de dos valores de la función, etc. De lo que se trata es de poder demostrar que existe una expresión que depende de la función que puede tomar cualquier valor, para poder asignárselo a voluntad.

Aditividad y multiplicatividad

Definición. 2.3.
Una función f se dice *aditiva* si para cualquier x e y se cumple que

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

A partir de esta relación, haciendo $x = y = 0$ obtenemos

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

de donde se deduce que $f(0)=0$. Reemplazando y por $-x$ en la ecuación, resulta

$$0=f(0+0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x),$$

por lo que $f(-x)=-f(x)$.
Es decir, es suficiente hallar una solución $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ para obtener la solución $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Ahora bien, mediante un proceso inductivo, se tiene que

$$f(n)=f(1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=nf(1),\ n\in\mathbb{N}.$$

Para los números racionales $\frac{m}{n}$ con $m,n\geq 0$ obtenemos

$$f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)=f\left(\frac{1+\cdots+1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

es decir $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$.
Luego

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\left(\frac{1}{n}\right)\right)=f\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)\frac{m}{n}.$$

En general, para $x\in\mathbb{R}$, sea $\{q_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números racionales con $q_n\longrightarrow x$ cuando $n\longrightarrow\infty$ y f continua, entonces $f(q_n)=f(1)q_n$ y así

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n)=\lim_{n\to\infty}(f(1)q_n),$$

por lo que

$$f(\lim_{n\to\infty} q_n)=f(1)\lim_{n\to\infty} q_n.$$

Y en consecuencia

$$f(x)=f(1)x.$$

Haciendo $c=f(1)$, se deduce que $f(x)=cx$.

Definición. 2.4.
Una función se dice *multiplicativa* si para cualesquiera x,y se verifica

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Es trivial comprobar que, si $f(x)=0$ para algún x no nulo, entonces $f(z)=f(z)f(z/x)=0$ para todo z, mientras que si $f(0)$ es no nulo, entonces haciendo $y=0$ se concluye que $f(x)=1$ para todo x. Descartaremos en lo sucesivo estos dos casos triviales (que como se puede comprobar, son las únicas funciones multiplicativas constantes).

Haciendo $y = 1$, se comprueba que $f(1) = 1$. Es trivial constatar, haciendo $x = y = -1$, que bien $f(-1) = 1$, o bien $f(-1) = -1$. Haciendo $y = -1$, se comprueba entonces que, en el primer caso, $f(-x) = f(x)$ para todo x, y en el segundo que $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Es también trivial comprobar que si $z \geq 0$ tomando $x = y = \sqrt{z}$ se tiene que

$$f(z) = (f(\sqrt{z}))^2,$$

es decir, $f(x)$ toma sólo valores positivos para valores positivos de la variable x. Nos basta pues hallar la restricción de f de forma que consideremos sólo valores reales positivos de la variable y de la función. Podemos entonces definir $u = ln(x)$, $v = ln(y)$, $g(u) = ln(f(e^u))$, para encontrar que g, definida para todos los reales (pues x e y recorren todos los reales positivos) cumple

$$g(u+v) = ln(f(e^{(u+v)}) = ln(f(xy)) = ln(f(x)f(y))$$

$$= ln(f(e^u)) + ln(f(e^v)) = g(u) + g(v).$$

Entonces, si f es continua (o en su defecto monótona), al ser el logaritmo natural una función continua y estrictamente creciente, también g es continua (o en su defecto monótona).De aquí, se obtiene finalmente que, para todo $x \geq 0$,

$$f(x) = exp(ln(f(e^u))) = e^{g(u)} = e^m u = (e^u)^m = x^m.$$

Luego si f es una función multiplicativa, que, además es continua, o por lo menos monótona, entonces las únicas soluciones no triviales (no constantes) son $f(x) = x^m$ y $f(x) = |x^m|$ para algún m no nulo, siendo las soluciones triviales las definidas por $f(x) = 0$ y $f(x) = 1$.

Es muy importante la condición de continuidad, o en su defecto de monotonía. Obviamente, esta técnica se podría aplicar a funciones de variable entera, natural o racional, pero sólo si son monótonas (la continuidad obviamente no tendría sentido en esos casos).

Puntos fijos

Definición. 2.5.
Un *punto fijo* de una función f se define como aquel valor p de la variable tal que $f(p) = p$.

La existencia de puntos fijos nos puede ayudar mucho a resolver la ecuación funcional, usualmente porque podemos expresar el valor de dicho punto fijo a través de la propia función. Esta técnica se combina en la mayoría de los casos con una de las anteriores, a fin de llegar a la solución final.

Acotación de la función

Otra forma de hallar la función deseada puede ser mediante acotación de la misma. La forma exacta de utilizar esta técnica dependerá de las condiciones exactas impuestas sobre la función. En muchos casos, es posible que alguna condición de las impuestas sobre la función exija que su valor sea mayor o igual que una determinada cota, mientras que de alguna otra resulte en que su valor sea menor o igual que esa cota, de lo que se deduce que la única posibilidad es que la función tome el valor de dicha cota.

2.2. Funciones enteras de variable entera

Una vez vistas las técnicas de resolución de ecuaciones funcionales de variable real, consideramos ahora el caso de funciones de variable entera que toman valores enteros.

Técnicas comunes a las funciones reales de variable real

Las funciones enteras de variable entera suelen tener rasgos particulares que las distinguen de las funciones reales de variable real, en el sentido de que algunas técnicas que se usan en las segundas no sirven para las primeras, o de que las primeras pueden disponer de técnicas específicas que tienen sentido en las segundas. Sin embargo, las técnicas utilizadas en la resolución de ecuaciones funcionales sobre funciones reales de variable real también pueden ser muy útiles en el caso de funciones enteras de variable entera; si bien no siempre nos van a proporcionar la solución, sí pueden simplificar mucho la ecuación a tratar, o por lo menos ofrecer resultados que nos permitan caracterizar o realizar hipótesis sobre la solución buscada.
Una técnica que puede ser muy interesante es la de doble acotación. En el caso de funciones enteras de variable entera, esta acotación puede ser incluso más potente, ya que al poder tomar la función sólo valores enteros, si sabemos que $f(n) > m$ para enteros n y m cualesquiera, entonces $f(n) \geq m+1$.

Definición de funciones auxiliares

La idea principal detrás de esta técnica es la simplificación de la ecuación a través de la definición de una función auxiliar, resultado de aplicar alguna operación o transformación sobre la función a hallar, de forma que esta última satisface la ecuación funcional dada, si y solo si, la función auxiliar satisface una ecuación funcional más sencilla, resolviéndose entonces esta segunda. Si bien esta técnica no se ilustró a través de su uso con funciones reales de variable real, también sería aplicable a éstas.

Expresión del conjunto de imágenes como unión de subconjuntos distintos

En principio esta técnica no es exclusiva de funciones enteras de variable entera, pero puede resultar más sencilla de utilizar cuando el conjunto de valores que toma la imagen es discreto (caso de enteros y racionales). La idea principal es comprobar que el conjunto de imágenes (que puede ser desconocido a priori) puede dividirse, mediante alguna condición aplicada a la función, en diferentes subconjuntos disjuntos, para, a través de las propiedades de dichos conjuntos, poder acotar las soluciones, o bien probar o refutar hipótesis acerca del conjunto de valores que toma la función.

También puede utilizarse esta técnica de otra forma: dividiendo ciertos conjuntos de enteros (o todos ellos), en diferentes conjuntos disjuntos, según sean o no imágenes de la función, y a partir nuevamente de propiedades de estos conjuntos o de sus elementos, llegar a comprobar cuáles sí podrían ser imágenes de la función, cuáles no, o simplemente probar o refutar hipótesis acerca de dichos valores.

Factorización en números primos

Esta técnica (exclusiva de funciones que tomen valores enteros y/o para variables que tomen valores enteros, o a lo sumo racionales) es especialmente potente cuando la función del producto de dos valores se puede relacionar con las imágenes de dichos valores. Por ejemplo, cuando la función satisface $f(mn) = f(m)f(n)$, o $f(mn) = f(m) + f(n)$, para cualesquiera n y m, aunque ante otras posibles expresiones similares también se podría utilizar esta técnica.

En este contexto, hay que tener cuidado con la definición de *función multiplicativa*, pues si bien para las funciones reales de variable real se definían como aquellas para las que, para cualesquiera x, y reales, $f(xy) = f(x)f(y)$, en el contexto de los números enteros se definen como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn) = f(m)f(n)$.

Las funciones para las que $f(mn) = f(m)f(n)$ para cualesquiera m y n sin restricciones, se suelen denominar *completamente multiplicativas*. En el contexto de funciones de variable entera se suelen definir también las funciones aditivas como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn) = f(m) + f(n)$, a diferencia de la definición que se suele dar en el contexto de funciones reales de variable real.

Una primera forma de aplicar esta técnica sería, caso de que f satisfaga alguna de las relaciones anteriores o similares, hallar el valor de f en todos los números primos, y a partir de ahí, utilizando probablemente inducción, llegar a hallar el valor de f para todo natural.

Expresión en bases distintas de la decimal

En ciertas ecuaciones funcionales con origen e imagen en el conjunto de los naturales, puede ser conveniente realizar un cambio de base para simplificar su resolución, ya que, en la base adecuada, algunas funciones se expresan a través de relaciones muy sencillas. Obviamente, esta técnica no es de aplicación en el caso de funciones reales de variable real.

Inducción

Cada vez que tenemos alguna cantidad o expresión que depende de números enteros, y existe una definición recursiva, la inducción puede ser un arma muy potente.

Capítulo II

Problemas de fase local

En este capítulo ofrecemos una lista con los primeros problemas sobre resolución de ecuaciones funcionales enmarcados en la fase local de Olimpiadas Matemáticas.

3. Problemas

Ejercicio. 3.1. (2000-2001, ver (1) en las referencias web)
Consideramos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *y* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *que cumple:*
(1) $f(f(n)) = n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
(2) $f(f(n)+1) = \begin{cases} n-1 & \textit{si } n \textit{ es par} \\ n+3 & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$

Determina el valor de $f(n)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$*, observando previamente que* f *es biyectiva y que al no ser nunca* $f(f(n)+1) = 2$ *tiene que ser* $f(1) = 2$*.*

SOLUCIÓN. En primer lugar de la condición (1) deducimos la biyectividad de la función. En efecto:
Sobreyectividad: Por la condición (1) sabemos que para cada valor natural existe un valor imagen, por tanto la función ha de ser sobreyectiva. Formalmente, como $f(a) = n$ siendo $a = f(n)$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(a) = n$ para cualquier valor de a, luego la función es sobreyectiva.
Inyectividad: Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, queremos probar lo siguiente:

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2.$$

En efecto, por la condición (1) tenemos que $f(f(n_1)) = n_1$ y $f(f(n_2)) = n_2$, por tanto:

$$f(f(n_2)) = n_1 \text{ y } f(f(n_1)) = n_2.$$

Pero como por hipótesis $f(f(n)) = n$, se deduce automáticamente que necesariamente $n_1 = n_2$ y por tanto queda probado el carácter inyectivo de la función.

Dicho esto, de (2) se deduce que en ningún caso $f(f(n)+1) = 2$ pues, distinguiendo los casos, se obtiene:

- Si n es par entonces $f(f(n)+1) = n-1$, por lo que

$$f(f(2)+1) = 1,\ f(f(4)+1) = 4-1 = 3,\ \ldots$$

- Si n es impar entonces $f(f(n)+1) = n+3$, por lo que

$$f(f(3)+1) = 3+3 = 6,\ f(f(5)+1) = 5+3 = 8,\ \ldots$$

Con esto observamos que, efectivamente, $f(f(n)+1)$ nunca alcanza el valor 2. Pero como f es biyectiva, forzosamente tiene que haber un elemento cuya imagen sea 2, pero este elemento no es de la forma $f(n)+1$. Por (1) sabemos que $f(f(1)) = 1$ y por (2) $f(2) = 2-1 = 1$ por tanto, se debe cumplir que $f(1) = 2$.

De forma más general, vamos a hallar el valor el valor de $f(n)$, sabemos que $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$, podemos decir que nuestra función será de la forma:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En efecto, utilizando un razonamiento de inducción probaremos que nuestra función es de esta forma. Para $n = 1$ y $n = 2$ se verifica trivialmente la igualdad. Supongamos $n > 2$, la hipótesis de inducción nos dice que

$$f(n-1) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

y además

$$f(n-2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

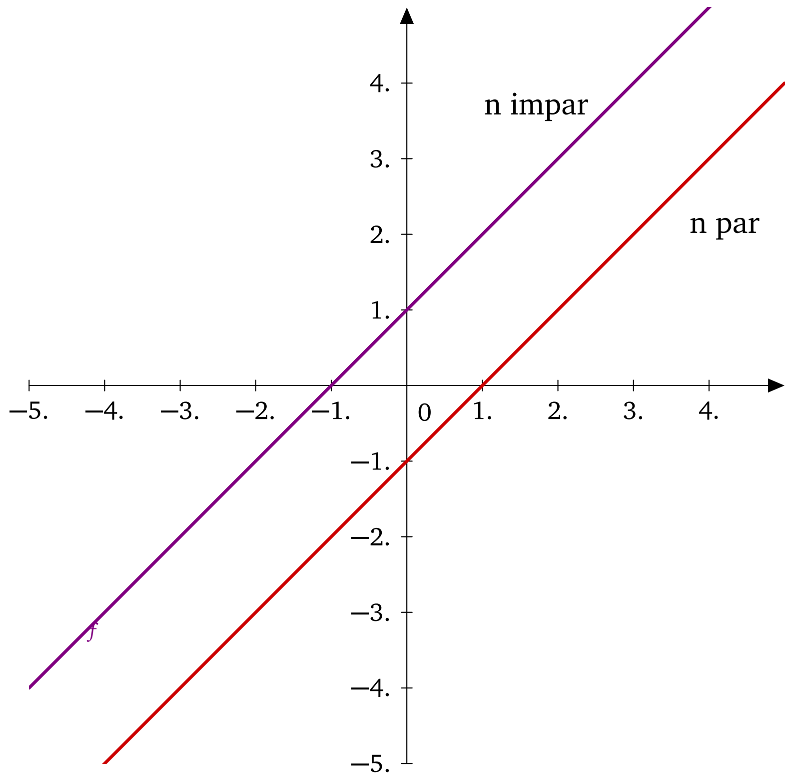
Por tanto:

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n-2)+1) & \text{si } n \text{ es impar} \\ f(f(n-1)) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

que, por las hipótesis (1) y (2) se deduce que la expresión de $f(n)$ es:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

como queríamos demostrar. Observando la gráfica de esta función, vemos que se trata de dos rectas paralelas y que, efectivamente, $f(1) = 2$.



□

Ejercicio. 3.2. (2005, ver (3) en las referencias web)
Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$$

SOLUCIÓN. En este ejercicio lo que se pretende es hallar la solución de una ecuación cuya incógnita es $f(x)$. Observamos que no podemos extraer directamente el valor de $f(x)$ de la ecuación pues hay un término, $f(1-x)$, que nos lo impide. Por lo tanto, en este tipo de ejercicios procedemos de la siguiente forma:

En primer lugar realizamos el cambio $x = 1-x$ y sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$(1-x)^2 - f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4.$$

Ahora bien, de la ecuación original podemos saber el valor de $f(1-x)$ sin más que despejar:

$$f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x).$$

Sustituyendo el valor de $f(1-x)$ en la ecuación con el cambio que hemos realizado obtenemos:

$$(1-x)^2(2x-x^4-x^2f(x))+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4.$$

Observamos que hemos obtenido una ecuación en la solo desconocemos el valor de $f(x)$, podemos proceder pues a su resolución. Desarrollando el primer miembro de la ecuación obtenemos:

$$(1+x^2-2x)(2x-x^4-x^2f(x))+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4.$$

$$2x+2x^3-4x^2-x^4-x^6+2x^5-x^2f(x)-x^4f(x)+2x^3f(x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4.$$

Desarrollando ahora el segundo miembro de la igualdad obtenemos:

$$2x+2x^3-4x^2-x^4-x^6+2x^5+f(x)(-x^4+2x^3-x^2+1)=2-2x-1-6x^2+4x+4x^3-x^4.$$

Agrupando términos y simplificando obtenemos:

$$f(x)(-x^4+2x^3-x^2+1)=2x^3-2x^2-2x^5+1+x^6.$$

Descomponiendo el polinomio del segundo miembro de la igualdad llegamos a la siguiente expresión:

$$f(x)(-x^4+2x^3-x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^4-2x^3+x^2-1),$$

o lo que es lo mismo

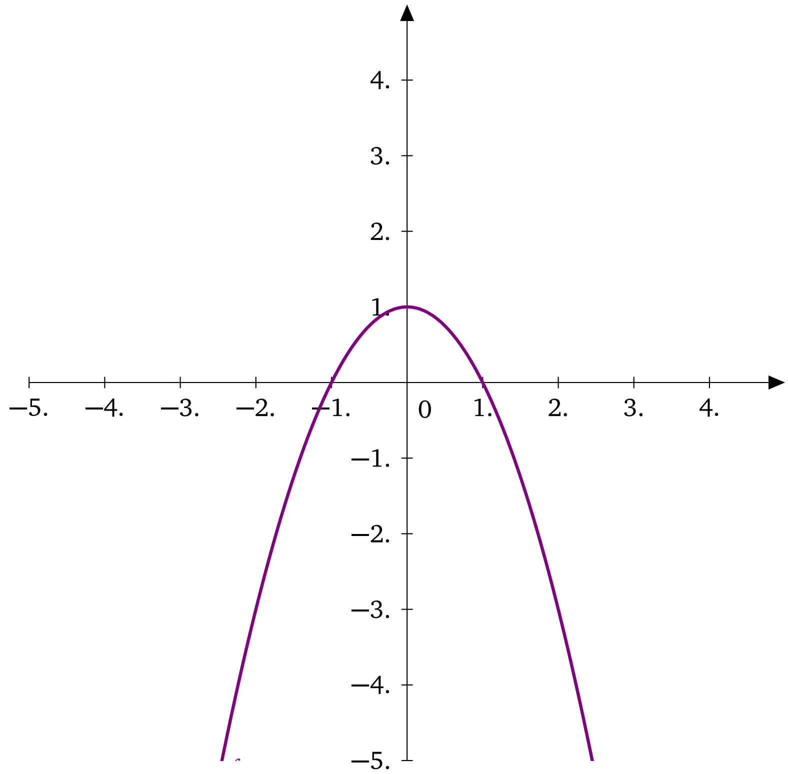
$$f(x)(-x^4+2x^3-x^2+1)=-(x-1)(x+1)(-x^4+2x^3-x^2+1).$$

Con lo que obtenemos que

$$f(x)=-(x-1)(x+1)=-(x^2-1)=1-x^2.$$

Entonces la solución de nuestra ecuación es $f(x)=1-x^2$.

Para ver el comportamiento de la función observamos su gráfica:



Observamos que se trata de una parábola invertida, cuyo vértice se encuentra en el punto 1. □

Ejercicio. 3.3. (2011, ver (1) en las referencias web)
Denotamos por $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$ *el conjunto de los números naturales excluyendo el cero y por* $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ *el conjunto de los números naturales. Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ *verificando:*

(1) Son crecientes, es decir, que $f(n) \geq f(m)$ *si* $n \geq m$ *y*
(2) $f(nm) = f(n) + f(m)$ *para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}^*$

SOLUCIÓN. Vamos a suponer, en primer lugar, que la función que satisface las condiciones del ejercicio es la función nula $f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Esta función, trivialmente, satisface todas las condiciones del ejercicio.
Supongamos que f es una función no nula que verifica las condiciones del ejercicio, entonces:

- f no es constante, ni está acotada. En efecto, si $f(a) \neq 0$ entonces por la segunda condición se tiene que $f(a^n) = f(a) + \cdots + f(a) = nf(a) > f(a)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- f no es estrictamente creciente. En efecto, si $f(2) = f(3)$ ya lo tenemos probado, supongamos que existen a y b tales que $f(2) = a \lneqq b = f(3)$ entonces

$$f(2^b) = bf(2) = ab$$

$$f(3^a) = af(3) = ab$$

De lo que deducimos que $f(2^b) = f(3^a)$ pero $2^b \neq 3^a$.

Por tanto podemos deducir que podemos encontrar un $m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$k = f(m) = f(m+1) < f(m+2).$$

Entonces

$$f((m+1)^2) = 2f(m+1) = 2f(m) = 2k < f(m) + f(m+2) = f([m(m+2)]).$$

Sin embargo, $m(m+2) < (m+1)^2$, rompiendo así el carácter creciente de la función, por tanto la única solución posible de nuestro problema es la función nula $f(n) = 0$. □

Ejercicio. 3.4. (2011,ver (1) en las referencias web)
Denotamos por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con las siguientes propiedades:

(I) $f(2) = 2$.
(II) $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. De (ii), haciendo $m = 1$, tenemos que $f(n) = f(n) + f(1)$ de donde $f(1) = 0$.
Haciendo un proceso de inducción finita sobre (ii), llegamos a que $f(n^k) = kf(n)$ para todos $n, k \in \mathbb{N}$. En efecto, tenemos que $f(1) = 0$, supongamos que la igualdad se verifica para n es decir que $f(n^k) = kf(n)$ y lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} f((n+1)^k) &= f((n+1)^{k-1}(n+1)) = f((n+1)^{k-1}) + f(n+1) \\ &= f((n+1)^{k-2}(n+1)) + f(n+1) = f((n+1)^{k-2}) + f(n+1) + f(n+1) = \cdots = kf(n+1). \end{aligned}$$

Con lo que la igualdad queda demostrada y $f(n^k) = kf(n)$.
A continuación, vamos a ver si podemos construir una función creciente con estas propiedades. En primer lugar sabemos por lo anteriormente demostrado y por (i) que :

$$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 4.$$

Ya sabemos los valores de $f(2)$ y $f(4)$, veamos los posibles valores de $f(3)$. Como la función ha de ser creciente, las únicas posibilidades de $f(3)$ son 2,3 y 4. Estudiemos caso por caso:

- Si $f(3) = 2$ entonces

$$2^3 < 3^2 \Rightarrow f(2^3) < f(3^2) \Rightarrow 3f(2) < 2f(3) \Rightarrow 6 < 4.$$

Pero esto es absurdo, por tanto $f(3) \neq 2$.

- Si $f(3) = 3$ entonces

$$2^{11} < 3^7 \Rightarrow f(2^{11})f(3^7) \Rightarrow 11f(2) < 7f(3) \Rightarrow 22 < 21.$$

  Una vez más llegamos a una situación imposible, por tanto $f(3) \neq 3$.

- Si $f(3) = 4$ entonces

$$3^3 < 2^5 \Rightarrow f(3^3) < f(2^5) \Rightarrow 3f(3) < 5f(2) \Rightarrow 20 < 10.$$

  Finalmente, llegamos de nuevo a una situación imposible. Por tanto $f(3) \neq 4$.

Deducimos de todo esto que no existe ninguna función que satisfaga las condiciones expuestas en el problema. □

Ejercicio. 3.5. (2015,ver (1) en las referencias web)
Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican:
(1) $f(n) + f(n+1) = 2n+1$, *para cualquier entero n.*
(2) $\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$.

SOLUCIÓN. Notemos que de la ecuación deducimos que $f(n+1) = 2n+1-f(n)$. Por tanto:

- $f(1) = 1 - f(0)$.
- $f(2) = f(1+1) = 2*1+1-f(1) = 3-f(1) = 3-1+f(0) = 2+f(0)$.
- $f(3) = f(2+1) = 2*2+1-f(2) = 5-2-f(0) = 3-f(0)$.
- ...
- En general podemos decir que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$, para todo $n \geq 0$.

En efecto, vamos a demostrarlo por inducción. La igualdad se verifica para $n = 1,2,3$, supongámosla cierta para n y demóstremosla para $n+1$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2n+1-f(n) = 2n+1-n-(-1)^n f(0) = n+1-(-1)^n f(0) \\ &= n+1-(-1)^n f(0) = n+1+(-1)^{n+1} f(0), \end{aligned}$$

con lo que deducimos la siguiente expresión

$$f(n+1) = (n+1) + (-1)^{n+1} f(0).$$

Queda probado entonces que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$, para todo $n \geq 0$.
Haciendo un razonamiento de inducción análogo, mediante inducción hacia atrás usando que $f(n) = 2n+1-f(n+1)$ se puede comprobar que esta expresión es válida para todo número entero también negativo. En efecto:

- $f(-1) = -2 + 1 - f(0) = -1 - f(0)$
- $f(-2) = -4 + 1 - f(-1) = -3 + 1 - f(0) = -2 + f(0)$
- $f(-3) = -6 + 1 - f(-2) = -5 + 2 - f(0) = -3 - f(0)$
- ...
- $f(-n) = -n + (-1)^n f(0)$

Vamos a probar esta igualdad por inducción, vemos que trivialmente se verifica para $n = -1, -2, -3$, supongamos la igualdad cierta para $-n$ y demostrémosla para $-n-1$:

$$\begin{aligned} f(-n-1) &= 2(-n-1) + 1 - f(-n) = -2n - 2 + 1 - (-n + (-1)^{-n} f(0)) \\ &= -2n - 1 + n - (-1)^{-n} f(0) = -n - 1 + (-1)^{-n-1} f(0). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $f(-n-1) = -n - 1 + (-1)^{-n-1} f(0)$ y la igualdad es válida. Una vez visto esto, notamos que en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$ hay 31 enteros pares y 32 impares, es decir hay exactamente un entero impar más. Como sabemos que en la imagen de cada entero par aparece $f(0)$ con signo positivo y en la imagen de cada entero impar aparece con signo negativo, tenemos que, aplicando la hipótesis

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015,$$

podemos deducir lo siguiente:

$$2015 = \sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015 = \sum_{i=1}^{63} i - f(0) = \frac{63 \times 64}{2} - f(0) = 2016 - f(0).$$

Con lo que $f(0) = 1$ y la función que satisface las condiciones del problema tiene la siguiente expresión:

$$f(n) = n + (-1)^n f(0)$$

Nota: En la resolución de este ejercicio hemos empleado la siguiente proposición para calcular el valor de una suma:

Proposición. 3.6.
Dada una serie de la forma $\sum_{i=1}^{n} i$, el valor de su suma se calcula de la siguiente forma $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

Ejercicio. 3.7. (2004,ver (1) en las referencias web)
Encontrad todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n.

SOLUCIÓN. En primer lugar vamos a ver qué forma tendría nuestra función f distinguiendo si n es par o impar:

- Si $f(1) = a$ entonces por la condición $f(f(n)) = n+2$ obtenemos que $f(f(1)) = 1+2$ entonces $f(a) = 3$. Con lo que $f(a) = 3$. Veamos el valor de $f(3)$:

  $$f(f(a)) = a+2 \Rightarrow f(3) = a+2.$$

  Repitiendo el proceso podemos hallar los diferentes valores de n. En efecto:

  - Sabemos que $f(1) = a$ y que $f(a) = 3$ ya que $f(f(1)) = a$.
  - Como $f(f(a)) = a+2$ entonces $f(3) = a+2$.
  - Si $f(f(3)) = 5$, entonces $f(a+2) = 5$.
  - Con lo anterior deducimos que como $f(f(a+2)) = a+4$, entonces $f(5) = a+4$.
  - ...
  - Repitiendo el proceso podemos intuir que la forma de nuestra función será $f(n) = n-1+a$.

  En efecto, realizando un proceso de inducción podemos deducir que si n es impar la expresión de la función es de la forma $f(n) = n-1+a$. Supongamos la igualdad cierta para n y demostrémosla para $n+2$. Como $f(f(n)) = n+2$ entonces $f(n-1+a) = n+2$, de aquí se deduce que

  $$f(f(n-1+a)) = n-1+a+2 \Rightarrow f(n+2) = (n+2)-1+a.$$

  Por lo tanto la igualdad es cierta para todo número n natural impar. Veamos qué ocurre ahora si n es par:

- Sea n par, análogamente al caso anterior veamos qué forma tendría nuestra función. Sea $f(2) = b$ entonces por la hipótesis del enunciado deducimos que $f(f(2)) = 4$, con lo que $f(b) = 4$. Análogo al caso anterior tenemos que

  - Como $f(f(b)) = b+2$, entonces $f(4) = b+2$.
  - Por la hipótesis del problema se tiene que $f(f(4)) = 6$ con lo que $f(b+2) = 6$.
  - Como $f(f(b+2)) = b+4$ entonces $f(6) = b+4$.
  - ...
  - Repitiendo el proceso llegamos a que $f(n) = n-2+b$.

Probemóslo por inducción, en efecto supongamos que la igualdad es cierta para $n = 2,4,6$ y si es cierta para n lo demostramos para $n+2$. Tenemos que por hipótesis $f(f(n)) = n+2$ por lo que $f(n-2+b) = n+2$ (por la hipótesis de inducción). Entonces:

$$f(n-2+b) = n-2+b+2 \Rightarrow f(n+2) = (n+2)-2+b.$$

Como queríamos demostrar, por tanto la igualdad es cierta.

Tenemos que una primera aproximación de la forma de nuestra función sería:

$$f(n) = \begin{cases} n+a-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n+b-2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora nuestra labor consiste en averiguar los valores de a y b para completar la expresión de nuestra función. Las condiciones de $f(a) = 3$, $f(b) = 4$, $f(n) = n+a-1$ (si n es impar) y $f(n) = n+b-1$ (si n es par) son necesarias y suficientes para que se cumpla la condición dada en el enunciado. Para continuar debemos distinguir casos (a y b son pares o impares).

- Supongamos a impar, como $3 = f(a) = a+a-1 = 2a-1$ entonces $2a-1 = 3$, $a = 2$ pero hemos supuesto que a es impar, por tanto necesariamente a debe ser par.

- Supongamos b par, como $4 = f(b) = 2b-2$ entonces $2b-2 = 4$, y $b = 3$, al igual que antes llegamos a una contradicción por tanto b es impar.

Dicho esto, sabemos por las condiciones que hemos extraído de la función que:

- $3 = f(a) = a+b-2$.
- $4 = f(b) = a+b-1$.

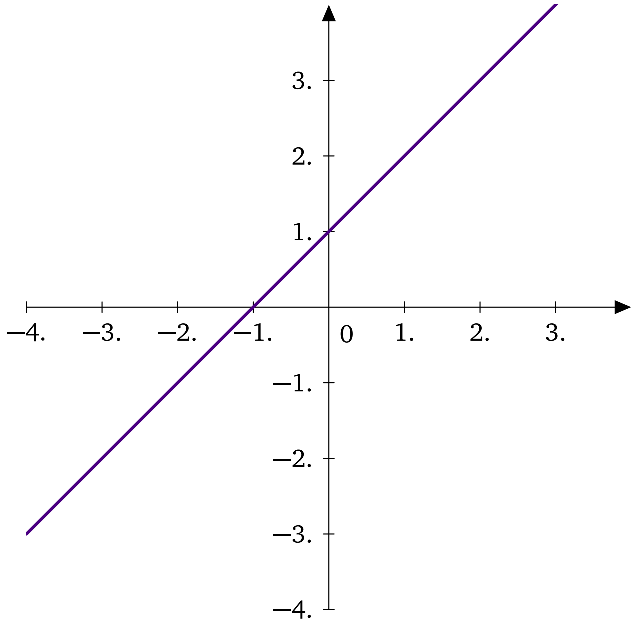
Obtenemos un sistema de ecuaciones, pero ambas ecuaciones son la misma $a+b = 5$. Nuevamente, las condiciones de $f(n) = n+a-1$ (si n es impar), $f(n) = n+b-2$ (si n es par), a es par, b es impar y $a+b = 5$ son necesarias y suficientes para que f cumpla la condición dada. Las únicas posibilidades son:

- $a = 2$ y $b = 3$.
- $a = 4$ y $b = 1$.

En el primer caso tenemos que la expresión de la función buscada es:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

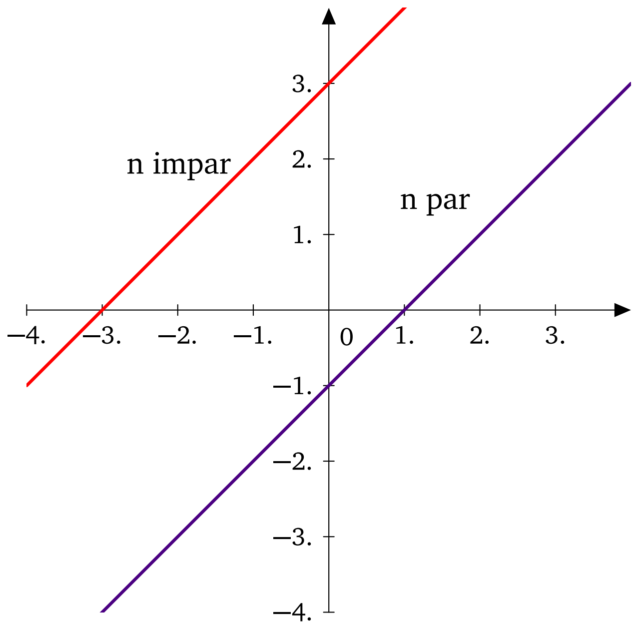
Con lo que $f(n) = n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y su gráfica sería:



En el segundo caso, la expresión de la función vendría dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En este caso la gráfica de esta función sería



Por tanto, estas son todas las funciones que verifican la condición dada por el ejercicio. □

Ejercicio. 3.8. (2004, ver (1) en las referencias web)
Calculad todos los posibles valores de $f(2004)$ donde $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una función que cumple:

(I) $f(nm) = f(n)f(m)$ *para todo par de números naturales n y m.*
(II) $f(n) \leq n^2$ *para todo $n \in \mathbb{N}$.*
(III) $f(1002) \geq 1003969$.

SOLUCIÓN. En primer lugar vamos a descomponer 2004 y 1002 en factores primos:

- $1002 = 2 \times 3 \times 167$.
- $2004 = 2^2 * 3 * 167$.

De (i) deducimos que $f(1002) = f(2\times3\times167) = f(2\times3)\times f(167) = f(2)f(3)f(167)$. Supongamos ahora que $f(2) \leq 2^2 - 1$, entonces aplicando (ii) obtenemos:

$$f(1002) \leq (2^2-1)\times 3^2 \times 167^2 = (2\times3\times167)^2 - (3\times167)^2) = (1002)^2 - (3\times167)^2.$$

Supongamos ahora que $f(3) \leq 3^2 - 1$, entonces obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(1002) = f(2)f(3)f(167) &\leq 2^2 * (3^2-1)\times(167^2) \\ &= (2\times3\times167)^2 - (2\times167)^2 = 1002^2 - (2\times167)^2. \end{aligned}$$

Si, finalmente, suponemos que $f(167) \leq 167^2 - 1$ deducimos que:

$$\begin{aligned} f(1002) = f(2)f(3)f(167) &\leq 2^2 \times 3^2 \times (167^2 - 1) \\ &= (2\times3\times167)^2 - (2\times3)^2 = (1002)^2 - (2\times3)^2. \end{aligned}$$

De estas tres relaciones deducimos que la menor cantidad que restamos a 1002^2 es $(2\times3)^2$. Por tanto, en los tres casos ocurre que:

$$f(1002) \leq (1002)^2 - (2\times3)^2.$$

Con lo que $f(1002) \leq 1003968$, pero de iii) tenemos que $f(1002) \geq 1003969$, con lo que esta última condición contradice el enunciado. De aquí se deduce que forzosamente:

- $f(2) = 2^2$.
- $f(3) = 3^2$.
- $f(167) = 167^2$.

Por tanto, el valor de $f(2004)$ se calcula de la siguiente forma atendiendo a su descomposición en factores primos:

$$\begin{aligned} f(2004) &= f(2^2 \times 3 \times 167) = f(2^2) \times f(3) \times f(167) = f(2)^2 \times f(3) \times f(167) \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 167^2 = (2^2 \times 3 \times 167)^2 = (2004)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, cabe decir que hay una función que satisface las condiciones dadas por el ejercicio. Esta función es $f(n) = n^2$ con lo que $f(2004) = 4016016$. $\square$

Ejercicio. 3.9. (2011,ver (1) en las referencias web)
Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$, que cumplen la condición:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

SOLUCIÓN. Observando la ecuación podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$x - f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - f(x)}{xf(x)}.$$

De donde obtenemos, desarrollando:

$$x + \frac{1}{x} - f(x) - \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Por tanto

$$(x - f(x))\left(1 - \frac{1}{xf(x)}\right) = 0.$$

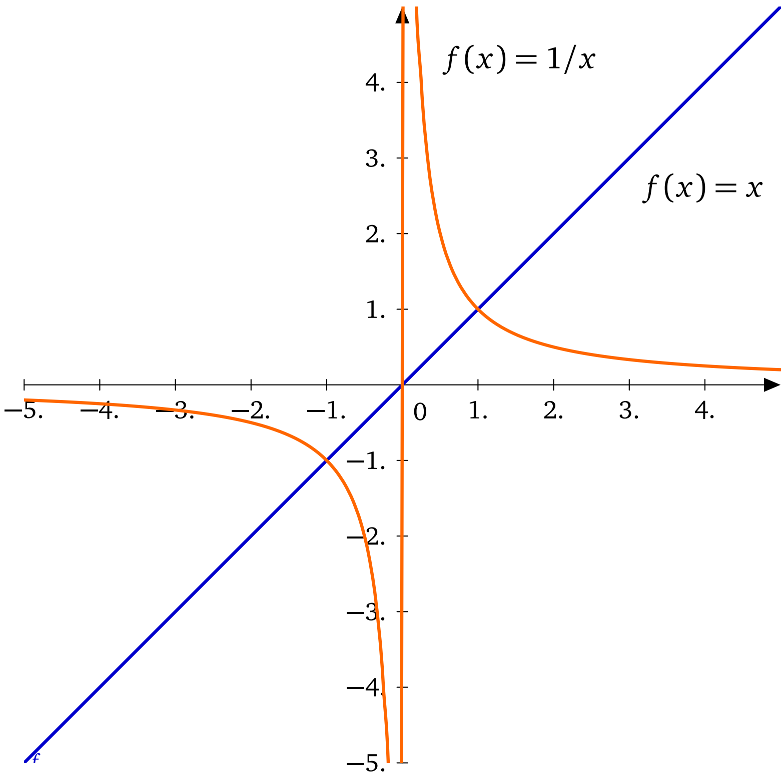
De aquí tenemos dos posibilidades:

- $x - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$.
- $\left(1 - \frac{1}{xf(x)}\right) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$.

Tenemos que por tanto para cada $p > 0$ o bien $f(p) = p$ o bien $f(p) = \frac{1}{p}$. Las funciones de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = x$ y $f(x) = 1/x$ satisfacen las condiciones del problema, pero si analizamos el problema observamos que las funciones :

- $\max\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$.
- $\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$.

también la cumplen ya que las curvas $f(x)=x$ y $f(x)=1/x$ se cortan en (1,1) y solamente en ese punto, como puede observarse con sus gráficas:



Observación: Un razonamiento más completo para deducir que estas funciones son las únicas continuas es el siguiente: Sea f una función que cumple las condiciones del problema y supongamos que en el intervalo (0,1) tomase valores x y $1/x$. Sea α el supremo de los $x<1$ tales que $f(x)=x$. Si α fuese estrictamente menor que 1, la función tendría una discontinuidad en él, luego $\alpha=1$ y la función no puede saltar de x a $1/x$ en el intervalo (0,1). Análogamente se hace a la derecha del 1. □

Ejercicio. 3.10. (2000, ver (1) en las referencias web)
Se consideran las funciones reales de variable real $f(x)$ de la forma $f(x)=ax+b$ siendo a y b números reales. ¿Para qué valores de a y b se verifica que $f^{2000}(x)=x$ para todo número real x?
***Nota**: Se define:*

- $f^2(x)=f(f(x))$.
- $f^3(x)=f(f(f(x)))$.
- *En general* $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))=f(f(\dots f(x)\dots))$, *$n$ veces.*

SOLUCIÓN. En primer lugar hay que partir de una proposición previa para la resolución de este ejercicio:

Proposición. 3.11.
Sean f y g funciones lineales reales de variable real definidas como $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La composición de estas funciones $f \circ g$ nos da otra función lineal cuyo coeficiente en x es el producto de a y c, esto es, $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$.

Atendiendo a la proposición, tenemos que si $f(x) = ax + b$ entonces $f^{2000}(x)$ será una función del tipo $a^{2000}x + c$, donde c depende de a y b. Por tanto tenemos que ver para qué valores de a y c $f^{2000}(x) = x$. De esta forma obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} a^{2000} &= 1. \\ c &= 1. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $a = 1$ ó $a = -1$. Analicemos los dos casos por separado:

- Si $a = 1$ entonces $f(x) = x + b$, y
  - $f^2(x) = f(f(x)) = f(x + b) = x + 2b$.
  - $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 2b) = x + 3b$.
  - ...
  - $f^{2000}x = x + 2000b$.

  En este caso como $f^{2000}x = x$ entonces $2000b = 0 \Rightarrow b = 0$ y las funciones que satisfacen la condición son aquellas de la forma $f(x) = x$.

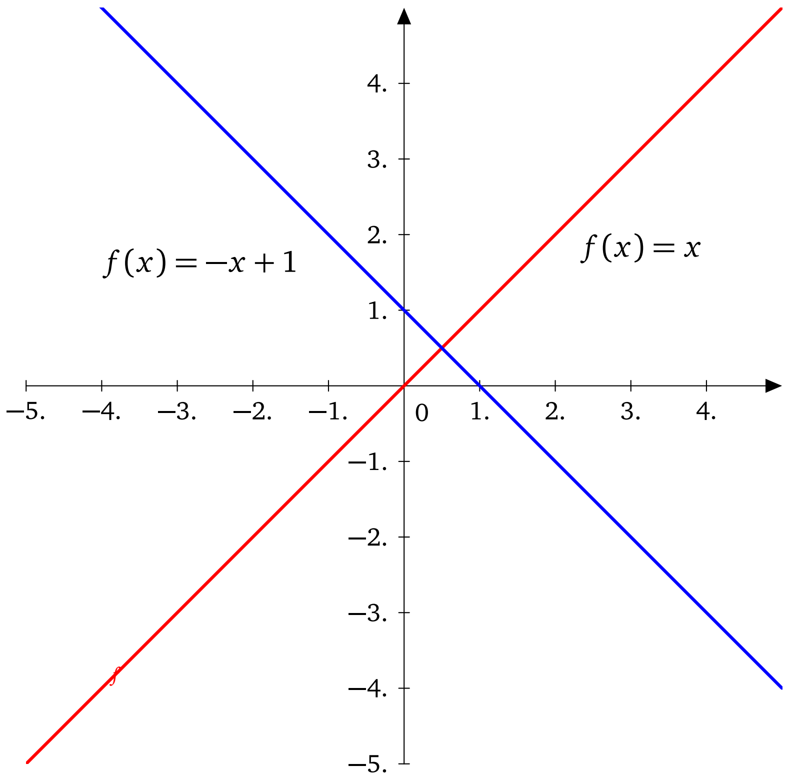
- Si $a = -1$ entonces $f(x) = -x + b$ y se tiene que:
  - $f^2(x) = f(f(x)) = f(-x + b) = -(-x + b) + b = x$.
  - $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x + b$.
  - $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(-x + b) = x$.
  - ...
  - En general podemos decir que la expresión de la función viene dada por:

    $$f(n) = \begin{cases} -x + b & \text{si } n \text{ es impar} \\ x & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

    Por tanto como 2000 es par entonces $f^{2000}x = x$. En este segundo caso cualquier función de la forma $f(x) = -x + b$ con b arbitrario es solución. Como conclusión podemos decir que :

- Si $a = 1$, entonces $f(x) = x$.
- Si $a = -1$, entonces $f(x) = -x + b$.

De la última expresión deducimos que existen infinitas soluciones si $a = -1$, una para cada valor de b. Para ver más claras las soluciones podemos observar las gráficas de $f(x) = x$ y $f(x) = -x + b$ cuando $b = 1$.



□

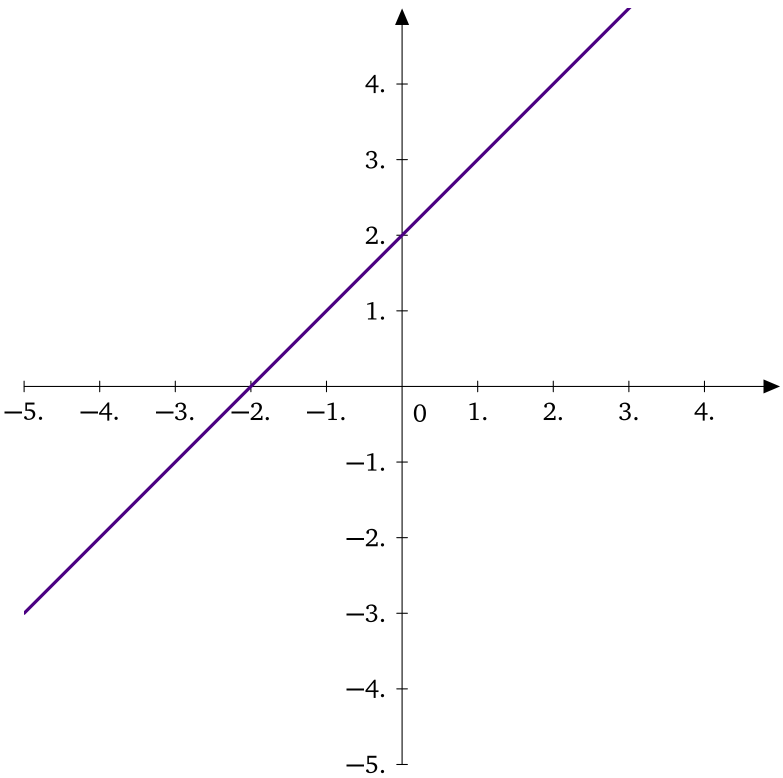
Ejercicio. 3.12. (2009, ver (2) en las referencias web)
Determinar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifican:

(I) $f(0) = 2$.
(II) $f(n) + f(f(n)) = 2n + 6$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. Para hallar todas las funciones que verifican esta condición vamos a ver, en primer lugar el comportamiento de la función tanto en los números pares como impares. En efecto: Si $n = 0$ por las hipótesis (i) y (ii) se tiene que $f(0) + f(f(0)) = 2 \times 0 + 6$ es decir $2 + f(2) = 6$ de donde $f(2) = 4$. Obtenemos así el valor de $f(2)$, en general podemos afirmar que la expresión de la función en los pares es $f(2t) = 2t + 2$. En efecto, probémoslo por inducción:

- Si $t = 0$ el resultado es cierto, supongamos la igualdad cierta para n y demostrémosla para $t = n + 1$.
- La hipótesis de inducción nos dice que $f(2n) = 2(n+1)$ por tanto aplicando la condición ii) tenemos que $f(2t)+f(f(2t)) = 2(2t)+6$), o lo que es lo mismo $2(t+1)+f(2t+1) = 4t+6$, es decir:
$$f(2t+1) = 4t+6-2t-2 = 2t+4 = 2(t+1)+2$$
Por tanto la igualdad es cierta y se tiene que $f(2t) = 2t+2$. Veamos que ocurre en los impares:
- Si n es impar, entonces n es de la forma $n = 2t+1$. Tenemos, trivialmente, la siguiente cadena de desigualdades: $2t < 2t+1 < 2t+2$. Como f es estrictamente creciente entonces $f(2t) < f(2t+1) < f(2t+2)$. Y por lo anterior tenemos $2+2 < f(2t+1) < 2(t+1)+2 = 2t+2+2 = 2t+4$ luego $f(2t+1) = 2t+3 = (2t+2)+1 = (2t+1)+2$. Tenemos por tanto que:
    - $f(2t) = 2t+2$.
    - $f(2t+1) = (2t+1)+2$.

Podemos deducir que la expresión de la función para un n arbitrario es $f(n) = n+2$. Esta función es la única que satisface las condiciones del enunciado y su gráfica es:



Vemos que, efectivamente, es estrictamente creciente pues es una recta de pendiente positiva. □

Capítulo III

Problemas de fase nacional

En este capítulo abordaremos problemas de ecuaciones funcionales cuyo grado de dificultad es más avanzado con respecto al capítulo anterior. Estos problemas corresponden a la fase nacional de Olimpiadas Matemáticas y enumeramos una lista de ellos.

4. Problemas

Ejercicio. 4.1. (OME 1998, ver (1) en las referencias web)
Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *estrictamente crecientes y tales que*

$$f(n + f(n)) = 2f(n),$$

para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

SOLUCIÓN. En primer lugar, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(1) = k$. Entonces a partir de la ecuación funcional deducimos que $f(1 + f(1)) = 2f(1)$ y por tanto $f(1 + k) = 2k$. Como por hipótesis f es estrictamente creciente, entonces se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$k = f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(1 + k) = 2k$$

Por tanto, a partir de estas desigualdades deducimos que $f(1), f(2), \ldots, f(1 + k)$ son $k + 1$ números naturales distintos tales que el primero es k y el último $2k$, por lo que han de ser consecutivos. Tenemos por tanto:

- $f(1) = k$,
- $f(2) = f(1) + 1 = k + 1$,

- $f(3) = f(2) + 1 = k + 2$,
- $\cdots$
- $f(1 + k) = k + k = 2k$.

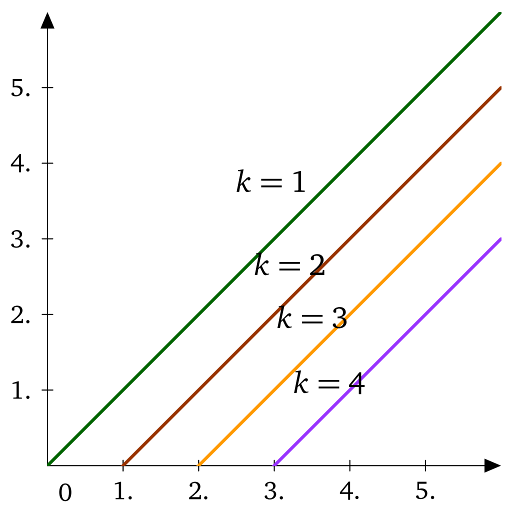
A partir de estas igualdades podemos intuir que nuestra función tendrá una expresión de la forma $f(n) = n - 1 + k$. En efecto, consideremos el caso general: sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = d$, entonces se tiene que $f(n + d) = d + d = 2d$. Por tanto, al igual que antes tenemos que:

$$d = f(n) < f(n+1) < \cdots < f(n+d) = 2d$$

Con lo que $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+d)$ han de ser consecutivos y $f(n) = n - 1 + f(1)$. En efecto, probemos esta igualdad por inducción:

- Para $n = 1$ es trivial pues $f(1) = 1 - 1 + f(1) = f(1)$.
- Supongamos que se cumple para n, es decir $f(n) = n - 1 + f(1)$.
- Lo demostramos para $n+1$, se tiene que $f(n+1) = f(n)+1$, ya que $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+d)$ son consecutivos, entonces aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $f(n+1) = n-1+f(1)+1 = (n+1)-1+f(1)$.

Por tanto la igualdad se cumple y se tiene que la función que satisface las condiciones es $f(n) = n - 1 + f(1)$. Llamando $k = f(1)$ obtenemos que $f(n) = n - 1 + k$ y existen infinitas soluciones dependiendo del valor de k. Tomando por ejemplo $k = 1, 2, 3, 4$ obtenemos las siguientes funciones solución:



$\square$

Ejercicio. 4.2. (OME 2000, ver (1) en las referencias web)
Demuestra que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla $f(f(n)) = n+1$.

SOLUCIÓN.
Vamos a razonar por reducción al absurdo, supongamos que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifica la condición. Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $f(0) = a$. Entonces, por la definición de la función se tiene que $f(f(0)) = 1$ por lo que $f(a) = 1$. A partir de aquí podemos calcular los diferentes valores de la función para los naturales, en efecto:

- Como $f(a) = 1$ entonces $f(f(a)) = a+1 \Rightarrow f(1) = a+1$,
- $f(f(1)) = 1+1 \Rightarrow f(a+1) = 2$,
- $f(f(a+1)) = a+1+1 = a+2 \Rightarrow f(2) = a+2$,
- $f(f(2)) = 3 \Rightarrow f(a+2) = 3$,
- $f(f(a+2)) = a+3 \Rightarrow f(3) = a+3$,
- $\ldots$
- $f(n) = a+n$.

Vamos a demostrarlo por inducción, para $n = 1$ el resultado es cierto. Supuesto cierto para n para $n+1$ tenemos que

$$f(f(n)) = n+1 \Rightarrow f(a+n) = n+1.$$

Con lo que

$$f(f(a+n)) = a+n+1 \Rightarrow f(n+1) = a+n+1.$$

Por tanto la función tiene la forma $f(n) = a+n$. Ahora, por hipótesis tenemos que $f(f(n)) = n+1$, y por lo demostrado se tiene que $f(f(n)) = f(a+n) = a+n+a$. Por tanto uniendo estas dos expresiones tenemos que $n+1 = a+a+n$, y se tiene $a = \frac{1}{2}$. Como, por hipótesis, $a \in \mathbb{N}$, no existe ninguna función que satisface la condición exigida. $\square$

Ejercicio. 4.3. (OME 2002, ver (1) en las referencias web)
Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable que cumplen

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y),$$

para todos los números reales x e y.

SOLUCIÓN. Observando la ecuación funcional, vemos que es de la forma $P(uv) = P(u)P(v)$ realizando el cambio de variable $u = x+y$ y $v = x-y$. Una vez transformada la ecuación inicial en una más simple podemos trabajar con ella para hallar la solución.

Vamos a dar valores a u y v.
Si $u = v = 0$, tenemos que $P(0) = P(0)P(0)$ con lo que $P(0) = P(0)^2$, por tanto o bien $P(0) = 0$ o bien $P(0) = 1$. Distinguimos ambos casos:

- Supongamos que $P(0) = 1$. Haciendo $v = 0$ en la ecuación transformada llegamos a que $P(0) = P(u)P(0)$ con lo que $1 = P(u)$ y por tanto una solución de la ecuación inicial sería la función constante igual a 1: $P(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Supongamos ahora que $P(0) = 0$ entonces $P(t)$ es un polinomio de la forma $P(t) = tQ(t)$ con $Q(t)$ un polinomio de grado $n = \text{grado}(P(t)) - 1$. Este nuevo polinomio satisface la ecuación, pues:
$$uvQ(uv) = uQ(u)vQ(v) \text{ para todos } u, v \in \mathbb{R}.$$
Entonces $Q(uv) = Q(u)Q(v)$, para todos $u, v \in \mathbb{R}$. Por tanto tenemos dos posibles valores para el polinomio $Q(t)$:
  - $Q(t) = 0$,
  - $Q(t) = t^n$.

Como conclusión de todo este proceso tenemos que la ecuación posee tres soluciones:

- $P(t) = 1$.
- $P(t) = 0$.
- $P(t) = t^{n+1}$.

□

Ejercicio. 4.4. (OME 2002, ver (1) y (4) en las referencias web)
La función g se define sobre los naturales y satisface las condiciones:

- $g(2) = 1$.
- $g(2n) = g(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
- $g(2n+1) = g(2n) + 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$.

(1) Calcula el valor máximo M de $g(n)$.
(2) Calcula también cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.

SOLUCIÓN. En primer lugar, observando las condiciones de la función g vemos que :

- $g(1) = g(0) + 1$.
- $1 = g(2) = g(1) = g(0) + 1$, entonces $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.
- $g(3) = g(2) + 1 = 1 + 1 = 2$.
- $g(4) = g(2) = 2$.
- $g(5) = g(4) + 1 = 2 + 1 = 3$.

- $\cdots$

Sea ahora un número natural $a \in \mathbb{N}$, entonces hay dos posibilidades para a: es par o es impar.

- Si $a = 2n$ se tiene $g(a) = g(2n) = g(n)$.
- Si $a = 2n+1$ se tiene $g(a) = g(2n+1) = g(n)+1$.

Distinguimos ahora si n es par o impar. Si $n = 2m$ entonces $g(n) = g(m)$ en cambio si $n = 2m+1$ entonces $g(n) = g(m)+1$. Tenemos entonces la siguiente casuística:

- Si $a = 2n$ entonces
    - $a = 2 \times 2m$, entonces $g(a) = g(m)$.
    - $a = 2 \times (2m+1) = 2^2m + 2$, entonces $g(a) = g(m)+1$.
- Si $a = 2m+1$ entonces
    - $a = 2 \times 2m + 1 = 2^2m + 1$, entonces $g(a) = g(m)+1$.
    - $a = 2 \times (2m+1) + 1 = 2^2m + 2 + 1$, entonces $g(a) = g(m)+1$.

Podemos escribir todo número natural n en base t, para $t \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. En el caso $t = 2$, tendríamos una expresión del tipo: $n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + a_k2^k$, donde $a_i \in 0,1$, y $k \in \mathbb{N}$. En este caso escribimos $n = (a_ka_{k-1}\dots a_1a_0)_{2)}$.
Según esto, y lo visto anteriormente, podemos decir que si escribimos a en base 2, $a = (a_ka_{k-1}\dots a_1a_0)_{2)}$, entonces $g(a) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ (es decir, $g(a)$ es el número de unos que hay en la expresión de a en base 2). En efecto:

- Si $a = 1$ entonces $g(1_{2)}) = g(1) = 1$.
- Vamos a hacer inducción sobre el número de cifras de a en base 2. Supongamos que es cierto si a se escribe con $n+1$ cifras: $a = (a_na_{n-1}\dots a_1a_0)_{2)}$. Tenemos $g(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i$ lo demostramos para $n+2$ cifras.
- Para $a = (a_{n+1}a_n\dots a_1a_0)_{2)}$ se tiene que
    - Si $a_0 = 0$, entonces a es múltiplo de dos: $a = 2b$, donde $b = (a_{n+1}a_n\dots a_1)_{2)}$. Se tiene $g(a) = g(2b) = g(b) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=0}^{n+1} a_i$.
    - Si $a_0 = 1$, entonces $a = b+1$, donde $b = (a_{n+1}a_n\dots a_10)_{2)}$, si llamamos $c = (a_{n+1}a_n\dots a_1)_{2)}$, se tiene $g(a) = g(2c+1) = g(c)+1 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + 1 = \sum_{i=0}^{n+1} a_i$.

Por tanto, g es de la forma $g(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, si $a = (a_na_{n-1}\dots a_1a_0)_{2)}$. Una vez demostrado esto, pasamos a calcular lo que se nos pide. En primer lugar tenemos que por hipótesis $1 \le n \le 2002$, por tanto observando las sucesivas potencias de 2:

- $2^8 = 256$.
- $2^9 = 512$.

- $2^{10} = 1024$.
- $2^{11} = 2048 > n$.

Vemos que la mayor potencia que tiene dos es 10 por tanto $M = 10$. Ahora bien, nos preguntamos cuántos valores de n satisfacen la ecuación $g(n) = 10$. Tenemos que $2^{10} = 1024$ por tanto es un número par y en su expresión en base 2 solo habrá un 1, por tanto 1023 si tendrá 10 unos. Así vamos construyendo los valores de n que satisfacen la ecuación:

- $2^{10} + 2^9 = 1536$ que tiene 1 uno, por tanto 1535 tendrá 10 unos.
- $2^{10} + 2^9 + 2^8 = 1792 \Rightarrow n = 1791$ satisface la ecuación.
- $2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 = 1920 \Rightarrow n = 1919$ satisface la ecuación.
- $2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 = 1984 \Rightarrow n = 1983$ satisface la ecuación.
- $2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 = 2016 > n$ por tanto este valor no vale.

De esta forma los únicos valores de n que satisfacen la ecuación $g(n) = 10$ son:

- 1023.
- 1535.
- 1791.
- 1919.
- 1983.

□

Ejercicio. 4.5. (OME 2004, ver (1) en las referencias web)
Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica que

$$f(x + f(y)) = f(x) - f(y).$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, observando la ecuación podemos decir que $f(x + nf(y)) = f(x) - ny$ para $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

- Para $n = 1$ se da trivialmente la igualdad.
- Supuesta la igualdad para n, $f(x + nf(y)) = f(x) - ny$, lo demostramos para $n + 1$.
- Para $n + 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + (n+1)f(y)) = f(x + nf(y) + f(y)) = f(x + nf(y)) - f(y) \\ = f(x) - nf(y) - f(y) = f(x) - (n+1)f(y). \end{aligned}$$

Análogamente demostramos el caso en que $n \leq -1$. En efecto:

- Para $n = -1$ hay que probar que $f(x - f(y)) = f(x) + y$. En efecto, se tiene

$$f(x) = f(x - f(y) + f(y)) = f(x - f(y)) - f(y).$$

De donde se tiene el resultado.

- Supuesto para n, $f(x - nf(y)) = f(x) + ny$, lo demostramos para $-n-1$.
- Para $-n-1$ se tiene que:

$$f(x + (-n-1)f(y)) = f(x - nf(y) - f(y)) =$$

$$f(x - nf(y)) + y = f(x) + ny + y = f(x) - (-n-1)y$$

Por tanto, se tiene que $f(x+nf(y)) = f(x) - ny$ para cualquier n entero. Con esto, dando los valores $x = y = 1$ y $n = f(1)$ sustituyendo en la expresión obtenemos que:

$$f(1 + f(1)) = f(1) - f(1) = 0.$$

A partir de esto, llamando $k = 1 + f(1)f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$ se tiene que $f(k) = 0$. Por tanto, a partir de esto y lo anteriormente demostrado llegamos a que:

$$f(x) = f(x + f(k)) = f(x) - k$$

Como $k > 0$ llegamos a una contradicción, por lo que no existe ninguna función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifique la igualdad del ejercicio. $\square$

Ejercicio. 4.6. (OME 2006, ver (1) y (4) en las referencias web)
Hallar todas las funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(x)f(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(\lambda) = 1$,

SOLUCIÓN. En primer lugar, para hallar la solución de esta ecuación funcional vamos a ir dando valores a x e y para obtener relaciones.
Primeramente, si $x = y = 1$ tenemos que

$$f(1)f(1) + f(\lambda)f(\lambda) = 2f(1) \Rightarrow f^2(1) + f^2(\lambda) = 2f(1).$$

Con lo que

$$f^2(1) - 2f(1) = -1 \Rightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Ya tenemos que $f(1) = 1$, dando ahora $y = 1$ y sustituyendo en la ecuación teniendo en cuenta la relación obtenida vemos que

$$f(x)f(1) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(\lambda) = 2f(x).$$

$$f(x) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\lambda}{x}\right).$$

Ya tenemos otra relación en la ecuación funcional, tomando ahora $y = \dfrac{\lambda}{x}$ en la ecuación y teniendo en cuenta las relaciones tenemos que

$$f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(x) = 2f\left(x\frac{\lambda}{x}\right).$$

$$2f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 2f(\lambda) \Rightarrow f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 1.$$

Con lo que $f(x)f(x) = 1$ y por tanto $f^2(x) = 1$, esto es, $f(x) = 1$ ó $f(x) = -1$. Para decidir que función es la solución tenemos que tener en cuenta que para todo número real positivo t, existe un número real positivo z tal que $z = \sqrt{t}$.
Ahora, tomando en la ecuación funcional $x = y = z$ se llega a que

$$f(\sqrt{t})f(\sqrt{t}) + f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right)f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) = 2f(t).$$

Con lo que

$$f^2(\sqrt{t}) + f^2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) = 2f(t).$$

Como el lado izquierdo de la igualdad son números positivos, se debe cumplir que $f(t)$ es positivo con lo que la única posibilidad es que $f(t) = 1$.

$\square$

Ejercicio. 4.7. (OME 2012, ver (1) en las referencias web)
Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)) = f(x + yf(x)),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. Para realizar este ejercicio vamos a suponer dos casos y estudiarlos. Los casos son: $f(0)=0$ y $f(0)\neq 0$. Comencemos en primer lugar estudiando el primer caso. Si $f(0)=0$ haciendo $x=0$ en la ecuación funcional

$$-2f(y)+f(y+2f(0))=f(0+yf(0)).$$

$$-2f(y)+f(y)=0\Rightarrow f(y)=0.$$

Obteniendo así una primera solución para la ecuación $f(x)=0$. Supongamos ahora el caso contrario, $f(0)\neq 0$. Haciendo en este caso $y=0$ en la ecuación funcional tenemos

$$(x-2)f(0)+f(2f(x))=f(x).$$

Lo que nos da a entender que $f(x)$ es claramente inyectiva. En efecto, sean x_1 y x_2 números reales tales que $f(x_1)=f(x_2)$ probaremos que $x_1=x_2$. Como $f(x_1)=f(x_2)$ entonces

$$(x_1-2)f(0)+f(2f(x_1))=(x_2-2)f(0)+f(2f(x_2)),$$

de donde al ser $f(x_1)=f(x_2)$ se tiene que

$$(x_1-2)f(0)=(x_2-2)f(0)\Rightarrow x_1=x_2.$$

Por tanto, la función f es inyectiva. Haciendo ahora $x=2$ en la ecuación llegamos a que

$$f(y+2f(2))=f(2+yf(2)).$$

Aplicando la inyectividad de la función tenemos

$$y+2f(2)=2+yf(2).$$

Haciendo $y=0$ en la igualdad anterior llegamos a que

$$2f(2)=2\Rightarrow f(2)=1.$$

Como f es inyectiva se tiene que $f(3)$ no puede ser 1, por tanto realizando ahora el cambio

$$x=3 \quad y=\frac{3}{1-f(3)}$$

en la ecuación llegamos a la siguiente igualdad

$$f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right)+f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right)=f\left(3+\frac{3}{1-f(3)}f(3)\right).$$

Desarrollando las expresiones tenemos

$$f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right)+f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right)=f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right).$$

Con lo que

$$f\left(\frac{3}{1-f(3)}\right)=0.$$

Por tanto, a partir de esto vemos que tiene que existir un número $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=0$. Poniendo $y=a$ en la ecuación obtenemos

$$(x-2)f(a)+f(a+2f(x))=f(x+af(x)).$$

Con lo que

$$a+2f(x)=x+af(x)\Rightarrow f(x)=\frac{x-a}{2-a}.$$

Solo queda hallar el valor de a para tener completa la expresión de f. Para ello, sustituyendo la expresión de f obtenida en la ecuación tenemos

$$(x-2)\left(\frac{y-a}{2-a}\right)+\frac{y+2f(x)-a}{2-a}=\frac{x+yf(x)-a}{2-a}.$$

$$(x-2)(y-a)+y+2\left(\frac{x-a}{2-a}\right)-a=x+y\left(\frac{x-a}{2-a}\right)-a.$$

$$(x-2)(y-a)+y+2\left(\frac{x-a}{2-a}\right)=x+y\left(\frac{x-a}{2-a}\right).$$

Haciendo $y=2$ en la igualdad anterior llegamos

$$(x-2)(2-a)+2=x.$$

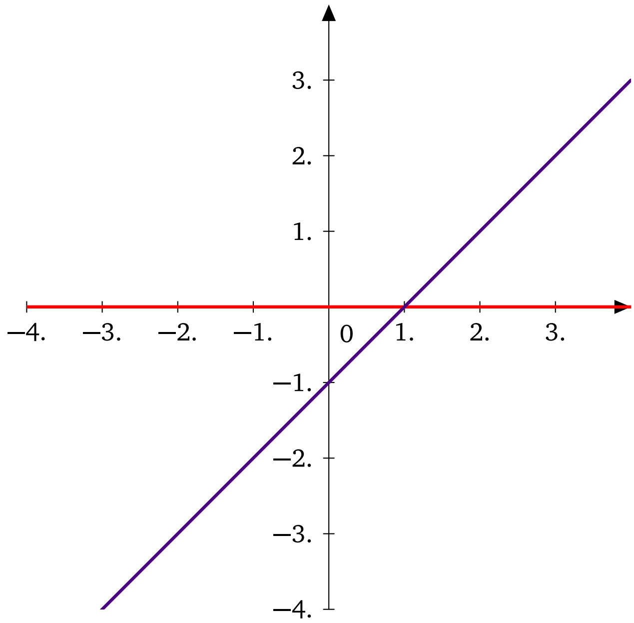
Por tanto, resolviendo la ecuación anterior

$$(x-2)(2-a)=x-2\Rightarrow 2-a=1\Rightarrow a=1.$$

Ya tenemos el valor de a, por tanto la función que satisface la ecuación funcional es $f(x)=x-1$. A modo de conclusión, existen dos funciones que satisfacen la ecuación funcional dada, a las cuales hemos llegado distinguiendo casos si el valor de la función es 0 en 0 o no. Así las soluciones obtenidas han sido:

- $f(x)=0$;
- $f(x)=x-1$;

para cualquier $x\in\mathbb{R}$. Las gráficas de estas funciones vienen dadas por



$\square$

Ejercicio. 4.8. (OME 1996, ver (1) en las referencias web)
Sean a, b, c números reales. Se consideran las funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = cx^2 + bx + c$. Sabiendo que

- $|f(-1)| \leqslant 1$.
- $|f(0)| \leqslant 1$.
- $|f(1)| \leqslant 1$.

Demostrar que si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ entonces $|f(x)| \leqslant \dfrac{5}{4}$ y $|g(x)| \leqslant 2$

SOLUCIÓN. Vamos a utilizar un concepto clave de espacios vectoriales: la base.
Los vectores $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Por tanto todo punto de R^3 es combinación lineal de los $\{(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. Ahora teniendo en cuenta que el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2, $\mathbb{P}_2$, es isomorfo a $\mathbb{R}^3$, los polinomios x^2+x, x^2-x y x^2-1 serán una base de $\mathbb{P}_2[x]$. Con esto se tiene que existen unos coeficientes A, B y C tales que:

$$f(x) = Ax(x+1) + Bx(x-1) + C(x^2-1).$$

En esta nueva expresión de f sustituyendo x por los valores 1,-1 y 0 tenemos que:

- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2A \Rightarrow A = \dfrac{f(1)}{2}$.

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = -C$.
- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2B \Rightarrow B = \dfrac{f(-1)}{2}$.

Sustituyendo los valores obtenidos para A, B y C en la expresión de f llegamos a

$$f(x) = \frac{f(1)}{2}x(x+1) + \frac{f(-1)}{2}x(x-1) + f(0)(1-x^2).$$

De donde aplicando las hipótesis llegamos a la siguiente desigualdad

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x(x+1)| + \frac{1}{2}|x(x-1)| + |1-x^2|.$$

De aquí, como por hipótesis $-1 \leqslant x \leqslant 1$ tenemos que $1+x \geqslant 0$, $1-x \geqslant 0$ y $1-x^2 \geqslant 0$. Aplicando estas desigualdades a la desigualdad anterior tenemos

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{2}(x+1) + \frac{|x|}{2}x(1-x) + 1 - x^2,$$

de donde desarrollando el miembro de la derecha llegamos a que

$$|f(x)| \leqslant |x| - x^2 + 1.$$

Ahora bien, el miembro de la derecha se puede reescribir de la forma

$$|x| - x^2 + 1 = \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Por lo que aplicando esto llegamos a que

$$|f(x)| \leqslant \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}.$$

Con lo que $|f(x)| \leqslant \dfrac{5}{4}$ como queríamos demostrar. Pasamos ahora al caso de la función g, la función g se puede expresar en términos de f de la siguiente forma:

$$g(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Partiendo de la expresión nueva de la función f tenemos que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(1)}{2}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{f(-1)}{2}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + f(0)\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Con lo que

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(1)}{2}(x+1) + \frac{f(-1)}{2}(1-x) + f(0)(x^2-1).$$

Por tanto, llegamos a que

$$|g(x)| \leqslant \frac{|x+1|}{2} + \frac{|1-x|}{2} + 1 - x^2 \leqslant \frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2} + 1 - x^2 = 2 - x^2 \leqslant 2.$$

Con lo que $|g(x)| \leqslant 2$ como queríamos demostrar. □

Ejercicio. 4.9. (Olimpíada Nacional del Canadá. 2008)
Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ que verifican $f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

SOLUCIÓN. Veamos algunas relaciones que se obtienen de forma inmediata:

(I) Si $x = y = 0$, se tiene $f(3f(0)) = 0$.
(II) Si $x = y$, se tiene $f(3f(x)) = 3x$.
(III) Si $x = 0$, se tiene $f(2f(0) + f(y)) = y$.
(IV) Si $y = 0$, se tiene $f(2f(x) + f(0)) = 2x$.

Veamos cómo llegar a la caracterización.

(1) Primero probamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x) = f(y)$, se tiene:

$$2x + y = f(2f(x) + f(y)) = f(3f(x)) = f(2f(y) + f(x)) = 2y + x.$$

Entonces $x = y$.
(2) Se tiene $f(0) = 0$. Sabemos que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(0) &= f(3f(x)) = 3x, \\ 0 &= f(3f(0)) = f(3 \times 3x) = f(9x), \end{aligned}$$

y por ser inyectiva, se tiene $x = 9x$, esto es, $x = 0$.
(3) Se tiene que f es autoinversa. En efecto, para cada $y \in \mathbb{Q}$ se tiene $y = f(2f(0)+f(y)) = ff(y)$.
(4) f es un homomorfismo para el 2, esto es, $f(2x) = 2f(x)$. Se tiene $2x = f(2f(x))$, y aplicando f se tiene $f(2x) = ff(2f(x)) = 2f(x)$.
(5) f es lineal (homomorfismo para la suma). Aplicando f a la relación original se tiene $f(2x+y) = ff(2f(x) + f(y)) = 2f(x) + f(y)$. Basta ahora sustituir x por $\frac{x}{2}$.
(6) Como consecuencia f está definida $f(x) = kx$, para un elemento $k \in \mathbb{Q}$. Como f es autoinversa, se debe verificar $x = ff(x) = f(kx) = k^2x$, esto es, $k^2 = 1$, de donde $k = 1$ ó $k = -1$.

Hay exactamente dos funciones verificando las condiciones dadas: la identidad, $f(x) = x$, y la opuesta, $f(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. □

Ejercicio. 4.10. (Olimpíada Nacional del Canadá. 2008)
Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *que verifican* $f(x^2+y^2)=f(x+y)f(x-y)$ *para todos* $x,y\in\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. Hacemos un cambio de variables en el siguiente sentido: llamamos $x=\frac{a+b}{2}$ e $y=\frac{a.b}{2}$. Hacer variar x e y en $\mathbb{R}$ es equivalente a hacer variar a y b en $\mathbb{R}$. En este caso se tiene la relación: $f(\frac{a^2+b^2}{2})=f(a)f(b)$ para todos $a,b\in\mathbb{R}$.
Relaciones inmediatas:

(I) Si $a=b$, se tiene $f(a^2)=f(a)^2$.
(II) Si $a=b=0$, se tiene $f(0)=f(0)^2$, de donde $f(0)=0$ ó $f(0)=1$.
(III) Si $b=0$, se tiene $f(\frac{a^2}{2})=f(a)f(0)$.

Caso 1. $f(0)=0$.
Tomando $b=0$, se tiene $f(\frac{a^2}{2})=f(a)f(0)=0$. Por tanto, para cada $a\in R$ se tiene $f(a)^2=f(a^2)=f(\frac{(a\sqrt{2})^2}{2})=0$, de donde $f(a)=0$.
Caso 2. $f(0)=1$.
Tomando $b=0$, se tiene $f(\frac{a^2}{2})=f(a)f(0)=f(a)$. Tenemos entonces la relación $f(a^2)=f(a)^2=f(\frac{a^2}{2})^2$. Si consideramos ahora $p\in\mathbb{R}^+$, por ejemplo $p=\frac{a^2}{2}$, se tiene:

$$\begin{array}{l} f(2p)=f(p)^2, \text{ entonces se tiene:}\\ f(p^2)=f(p)^2=f(2p)=f(\frac{(2p)^2}{2})=f(2p^2), \text{ y por tanto:}\\ f(p)=f(2p). \end{array}$$

Se verifica pues $f(p)=f(p)^2$, y como consecuencia $f(p)=0$ ó $f(p)=1$, para cada $p\in\mathbb{R}^+$.
Caso 2.1. $f(0)=1$ y existe $p\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(p)=0$.
Supongamos que existe $p\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(p)=0$. Para cada $q\in\mathbb{R}^+$, vamos a ver que $f(q)=0$; en efecto, sabemos que $f(q)=f(2q)$, y por inducción tendremos que $f(q)=f(2^tq)$, para cada $t\in\mathbb{N}$. Como ambos son positivos, siempre es posible encontrar $t\in\mathbb{N}$ tal que $2^tq>\frac{p^2}{2}$, entonces existe $u\in\mathbb{R}$ tal que $2^tq=\frac{u^2+p^2}{2}$, y como consecuencia se tiene: $f(q)=f(2^tq)=f(\frac{u^2+p^2}{2})=f(u)f(p)=0$. Tenemos que para todo número real positivo q se tiene $f(q)=0$. Si q es un número real positivo, se tiene $f(-q)=f(\frac{(-q)^2}{2})=f(\frac{q^2}{2})=f(q)$; por tanto, en este caso se tiene $f(a)=0$ para todo $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Caso 2.2. $f(0)=1$ y no existe $p\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(p)=0$.
Si no existe $p\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(p)=0$, entonces para todos ellos se verifica $f(p)=1$, y por ser $f(-q)=f(q)$, para cada número real positivo q, se tiene que f deber ser la función contante igual a uno.
Tenemos tres posibles funciones:
(1) La función constante igual a cero.

(2) La función constante igual a uno.
(3) La función definida por $f(0) = 1$ y $f(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\square$

Capítulo IV

Ecuaciones Funcionales. Problemas de Competición

En este capítulo final vamos a realizar un estudio de los problemas de Olimpiadas en la fase de mayor dificultad: la fase internacional. Abordaremos problemas en los que pondremos de manifiesto la potencialidad de las soluciones al resolver este tipo de problemas.

5. Problemas

Ejercicio. 5.1. (OMI 1978, ver en [4] y [6])
El conjunto de los números naturales positivos es unión de dos subconjuntos disjuntos $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$ *y* $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$ *donde*

(1) $f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots$
(2) $g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots$
(3) $g(n) = ff(n) + 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}^*$.

Determine $f(240)$.

SOLUCIÓN. Llamemos F al conjunto de imágenes dada por f, $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, y G al conjunto de las imágenes dadas por g, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$. Por hipótesis del enunciado se tiene que $\mathbb{Z}^+ = F \cup G$, es decir si un elemento, z, está en F entonces no está en G. Dicho esto, si $m \in G$ entonces $m - 1 \notin G$. En efecto, si $m \in G$ entonces existe un número entero positivo, n,tal que $m = g(n) = f(f(n)) + 1$ con lo que $m - 1 = f(f(n))$ y por tanto $m - 1$pertenece a F, y no a G.

Teniendo en cuenta esto podemos ver también que si $m \in G$ entonces $m + 1 \notin G$. En efecto, si suponemos que $m + 1 \in G$, entonces aplicando lo visto anteriormente tenemos que $(m + 1) - 1 \in F$

pero $m+1-1=m$ y estamos suponiendo que $m \in G$, llegamos a una contradicción con lo que necesariamente si $m \in G$ entonces $m+1 \in F$.
Tomemos ahora como m el número 1 y veamos que ocurre. Obviamente, $1 \notin G$ pues si $1 \in G$ entonces tendría que existir un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g(n)=1$ y por tanto $f(f(n))+1=1$. De aquí deducimos que $f(f(n))=0$, puesto que f y g toman valores en $\mathbb{Z}^+$ no pueden tomar el valor 0 con lo que $1 \in F$ y con esto se deduce que $f(1)=1$ siendo $f(1)$ el menor elemento del conjunto F y por tanto aplicando la hipótesis del enunciado para g llegamos a que $g(1)=f(f(1))+1=f(1)+1=1+1=2$. Por tanto, 2 es el mínimo del conjunto G.
Asimismo, podemos ver que como no hay dos enteros consecutivos en G se deduce que $3 \notin G$ y por tanto $f(2)=3$. Dicho esto, la meta del ejercicio es hallar $f(240)$, para ello vamos a realizar un análisis de los conjuntos con la finalidad de poder deducir una expresión sencilla para el cálculo de las imágenes de f.
Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $m=f(n)$ y construimos los siguientes conjuntos:

- $F_m=\{f(1),f(2),\ldots,f(m)\}$. Este conjunto tiene m elementos con la propiedad de que cada uno de ellos es menor que $f(m)+1$.
- $G_n=\{g(1),g(2),\ldots,g(n)\}$. Que tiene n elementos con $g(n)=f(f(n))+1=f(m)+1$.

Claramente, $F_n \cup G_m$ tiene $n+m$ elementos. Hay que probar ahora que no hay ningún hueco en $F_n \cup G_m$. En efecto, dado $y \notin F_m$ se tiene que $y<f(m)$ por lo que $y<f(f(n)) \leqslant f(f(n))+1=g(n)$. De aquí se deduce que existe un z tal que $g(z)=y$ por ser $F \cup G=\mathbb{Z}^+$ luego $y \in G_n$. Entonces $n+m$ está en $F_m \cup G_n$ y es el mayor por lo que necesariamente se tiene la igualdad $f(m)+1=g(n)$.Por tanto

$$n+m=f(m)+1 \Rightarrow f(m)=n+m-1,$$

y además,

$$g(n)=n+m=n+f(m).$$

Con esto, sustituyendo $m=f(n)$ tenemos que $f(f(n))=f(n)+n-1$ y por tanto ya tenemos una expresión clara para ir calculando valores de f. En efecto, hemos probado que $f(1)=1$ y $f(2)=3$, a continuación calculamos los siguiente valores:

- $f(3)=f(f(2))=f(2)+2-1=3+2-1=4$.
- $f(4)=f(f(3))=f(3)+3-1=6$.
- $f(6)=f(f(4))=6+4-1=9$.
- $f(9)=f(f(6))=9+6-1=14$.
- $f(14)=f(f(9))=14+9-1=22$.
- $f(22)=f(f(14))=22+14-1=35$.
- $f(35)=f(f(22))=35+22-1=56$.
- $f(56)=f(f(35))=56+35-1=90$.
- $f(90)=f(f(56))=90+56-1=145$.
- $f(145)=f(f(90))=145+90-1=234$.
- $f(234)=f(f(145))=234+145-1=378$.

Observamos que $378>240$ por lo que con este método no llegamos a la meta del ejercicio, ahora bien podemos hallar el valor de la función en este punto a partir de la definición de g y de la condición de que si un elemento está en G no está ni el siguiente ni el anterior. En efecto, como $g(n)=f(f(n))+1$ entonces $g(35)=f(f(35))+1=f(56)+1=91$.Por tanto, 92 necesariamente debe estar en F y como $f(56)=90$ entonces necesariamente $f(57)=92$. Con esto tenemos que

- $f(92) = f(f(157)) = 92 + 57 - 1 = 148.$
- $f(148) = f(f(92)) = 148 + 92 - 1 = 239.$
- $f(239) = f(f(148)) = 239 + 148 - 1 = 386.$

Estamos muy cerca de lograr el valor de la función en el punto 240, viendo que $g(148) = f(f(148)) + 1 = f(239) + 1 = 387$ tenemos que 388 no puede estar en G y por tanto 388 ha de estar necesariamente en F. Como hemos visto que $f(239) = 386$ y $387 \in G$, se tiene forzosamente que $f(240) = 388$ y con esto se llega a la meta del ejercicio concluyendo que el valor de la función f en el punto 240 es 388. □

Ejercicio. 5.2. (OMI 1999, ver en [5])
Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1,$$

para cualesquiera x, y números reales.

SOLUCIÓN. En primer lugar, en este tipo de ecuaciones es interesante ver qué le pasa a la ecuación al realizar cambios en la misma. Por la forma de la ecuación vemos que haciendo $x = f(y)$ obtenemos

$$f(0) = f(f(y)) + f(y)^2 + f(f(y)) - 1,$$

de donde

$$f(0) = f(y)^2 + 2f(f(y)) - 1 \Rightarrow f(f(y)) = \frac{1 + f(0) - f(y)^2}{2}.$$

Haciendo ahora en la ecuación $x = f(z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(z) - f(y)) &= f(f(y)) + f(z)f(y) + f(f(z)) - 1 \\ &= \frac{1 + f(0) - f(y)^2}{2} + f(z)f(y) + f(f(z)) - 1 \\ &= \frac{1 + f(0) - f(y)^2}{2} + f(z)f(y) + \frac{1 + f(0) - f(z)^2}{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1 + f(0) - f(y)^2 + 2f(z)f(y) + 1 + f(0) - f(z)^2 - 2}{2} \\ &= \frac{2f(0) - (f(y)^2 + f(z)^2 - 2f(z)f(y))}{2} \\ &= \frac{2f(0) - (f(z) - f(y))^2}{2} = f(0) - \frac{(f(z) - f(y))^2}{2}. \end{aligned}$$

Con lo que a partir de esto tenemos que

$$f(f(z)-f(y))=f(0)-\frac{(f(z)-f(y))^2}{2}.$$

Si $f(z)-f(y)$ tomase todos los valores reales habríamos acabado el ejercicio y sólo quedaría hallar el valor de la función el punto 0. Veamos que esto se verifica. En efecto, partiendo de la ecuación tenemos que

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1=f(x-f(y))-f(x)=f(f(y))+xf(y)-1.$$

Tomamos un $y\in\mathbb{R}$ tal que $f(y)=0$. Nótese que este elemento existe pues si tomamos $f(y)=0$ en la ecuación llegamos a que

$$f(x)=f(0)+f(x)-1,$$

y finalmente, tomando $f(x)=0$ tenemos que $f(0)=1$. Vemos con esto el valor de la función en el punto 0. Ahora, tomamos $t\in\mathbb{R}$ tal que $t=f(f(y))+xf(y)-1$ y tenemos que a partir de la ecuación funcional

$$x=\frac{t+1-f(f(y))}{f(y)},$$

con lo que

$$f\left(\frac{z+1-f(f(y))}{f(y)}-f(y)\right)-f\left(\frac{z+1-f(f(y))}{f(y)}\right)=t.$$

Observamos que a partir de esta igualdad tenemos garantizado que cualquier $t\in\mathbb{R}$ se puede expresar como la diferencia de la función en dos puntos, con lo que podemos decir que existen u y v números reales tales que $f(u)-f(v)=t$ y por tanto $f(t)=f(f(u)-f(v))$, a partir de la igualdad

$$f(f(z)-f(y))=f(0)-\frac{(f(z)-f(y))^2}{2},$$

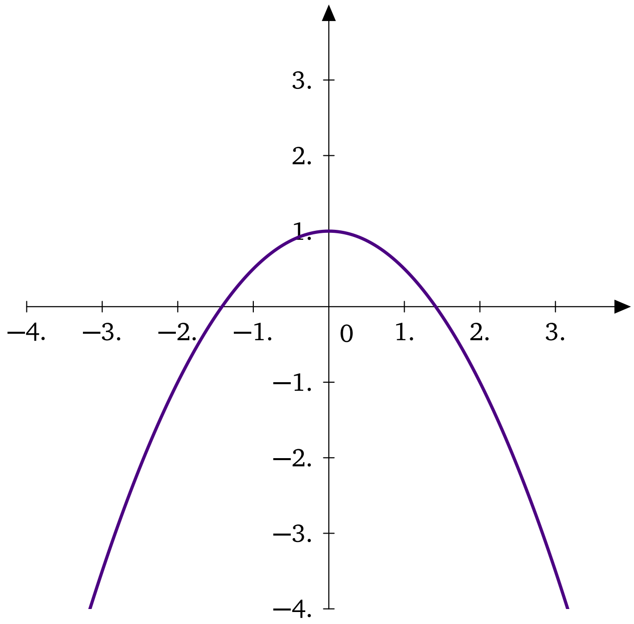
sustituyendo en la expresión obtenida para u y v llegamos a

$$f(0)-\frac{(f(u)-f(v))^2}{2}=f(0)-\frac{t^2}{2}.$$

Como $f(0)=1$ llegamos a que la expresión de la función que satisface la hipótesis del enunciado es

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

La gráfica de la función solución viene dada por:



□

Ejercicio. 5.3. (OMI 1983, ver en [5])
Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definidas sobre el conjunto de los reales positivos, que satisfacen las siguientes condiciones:

- $f(xf(y)) = yf(x)$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}^+$.
- $f(x)$ *tiende a o cuando* x *tiende a 0.*

SOLUCIÓN. En primer lugar vamos a ver que la función es inyectiva y sobreyectiva. En efecto, tomando $x = 1$ en la primera condición tenemos que $f(f(y)) = yf(1)$. Con lo que si $f(x) = f(y)$ entonces

$$f(f(y)) = f(f(x)) \Rightarrow yf(1) = xf(1) \Rightarrow x = y,$$

lo que garantiza el carácter inyectivo de la función. Tomando ahora $y = \dfrac{z}{f(1)}$ entonces

$$f\left(f\left(\frac{z}{f(1)}\right)\right) = z.$$

Lo que nos garantiza que para cualquier real positivo z existe un elemento y tal que $f(y) = z$, por lo que f es sobreyectiva. Nótese además que $\frac{z}{f(1)}$ es un real positivo por serlo $f(1)$ (f sólo toma valores positivos). Ya tenemos que f es inyectiva y sobreyectiva, lo que jugará un papel fundamental en la resolución del ejercicio.

Tomando ahora $y = 1$ tenemos que $f(xf(1)) = f(x)$, aplicando ahora que f es inyectiva llegamos a que $x = xf(1)$ con lo que $f(1) = 1$. Tomando ahora $x = 1$ vemos que $f(f(y)) = yf(1)$ con lo que $f(f(y)) = y\ \forall y \in \mathbb{R}^+$. De aquí podemos decir que la función va a tener puntos fijos. En efecto, tomando $y = f(z)$ en la primera condición llegamos a que

$$f(xz) = f(z)f(x).$$

Con lo que f es multiplicativa. Sea ahora $y = x$, sustituyendo en la primera condición tenemos

$$f(xf(x)) = xf(x).$$

De donde vemos que $xf(x)$ es un punto fijo de la función f. Es decir, para cada número real x, existe un número real positivo $k(x)$ tal que $xf(x) = k(x)$ con $f(k(x)) = k(x)$. Anteriormente, hemos calculado un punto fijo pues $f(1) = 1$. Veamos ahora que si k es un punto fijo entones k^2 también lo es. Para ello, haciendo $x = k$ en $xf(x)$ obtenemos

$$f(kf(k)) = kf(k) \Rightarrow f(k^2) = k^2.$$

Esto se cumple porque f es multiplicativa y por tanto k^2 es un punto fijo. Veamos, realizando un proceso de inducción, que k^{2^n} es un punto fijo $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, si $n = 1$ ya lo tenemos demostrado, supongamos que se verifica para n es decir que $f(k^{2^n}) = k^{2^n}$ y lo probaremos para $n + 1$

$$f(k^{2^{n+1}}) = f(k^{2^n 2}) = f(k^{2^n} k^2) = k^{2^n} k^2 = k^{2^{n+1}}.$$

Hemos aplicado la condición de que f es multiplicativa. Por tanto, el conjunto de puntos fijos es de la forma $\{k, k^2, k^4, \ldots, k^{2^n}, \ldots\}$. Si llamamos $P_n = \{k^{2^n}\}$, esta sucesión claramente tiende a infinito cuando n tiende a infinito por lo que

$$\{k^{2^n}\} \longrightarrow \infty \Rightarrow f(k^{2^n}) \longrightarrow \infty (x \to \infty).$$

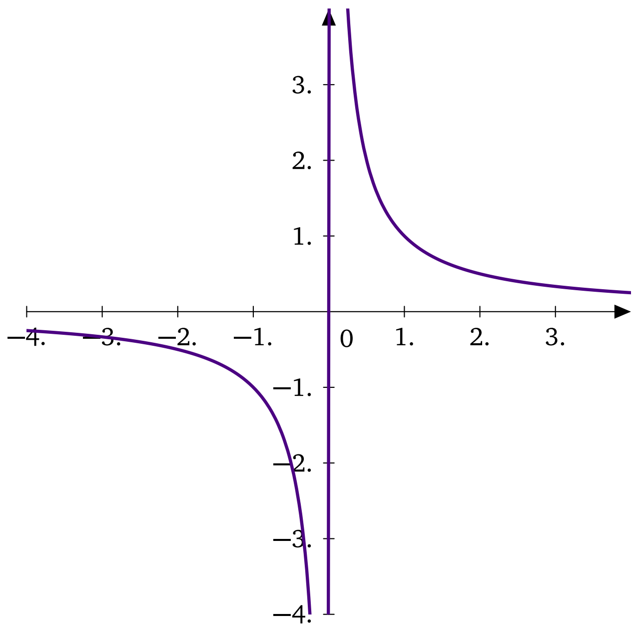
Por tanto, vemos que $f(x)$ no tiende a 0 cuando x tiende a ∞ por lo que podemos decir que no existen puntos fijos mayores que 1. Supongamos ahora que existe un punto fijo $k < 1$ entonces

$$1 = f(1) = f\left(k\frac{1}{k}\right) = f(k)f\left(\frac{1}{k}\right) = kf\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow kf\left(\frac{1}{k}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k},$$

y $\frac{1}{k} > 1$ por lo tanto no hay puntos fijos menores que 1. De donde el único punto fijo es el 1 y por tanto

$$xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

La solución que hemos obtenido se trata de una hipérbola cuya gráfica es la siguiente



□

Ejercicio. 5.4. (OMI 1994, ver en [5])
Sea S el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Encuentre todas las funciones $f : S \to S$ que satisfacen las dos siguientes condiciones:

- $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)\ \forall x, y \in S$.
- *$f(x)/x$ es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $-1 < x < 0$ y $0 < x$.*

SOLUCIÓN. En primer lugar veamos que f es inyectiva.En efecto, haciendo $x = 0$ en la primera condición tenemos que $f(f(y)) = y + f(0) + yf(0) = y(1 + f(0)) + f(0)$. Como $f : S \to S$ entonces $f(x) > -1$ con lo que en particular $f(0) > -1$ y por tanto $f(0) + 1 > 0$. Visto esto si $f(x) = f(y)$ entonces:

$$f(f(y)) = y(f(0) + 1) + f(0),$$
$$f(f(x)) = x(f(0) + 1) + f(0),$$

igualando estas dos expresiones llegamos a que $x(1 + f(0)) + f(0) = y(f(0) + 1) + f(0)$ por lo que $x = y$ lo que garantiza la inyectividad de f.
Si hacemos ahora $y = 0$ tenemos que $f(x + f(0) + xf(0)) = f(x)$ que, al ser f inyectiva se tiene que $x + f(0) + xf(0) = x$ con lo que $xf(0) + f(0) = 0 \Rightarrow (x + 1)f(0) = 0$. Visto esto, como $x > -1$ entonces $x + 1 > 0$ con lo que $f(0) = 0$.
Hemos visto qué pasa si hacemos $y = 0$, veamos ahora qué pasa si $x = 0$. Si hacemos $x = 0$ tenemos que $f(f(y)) = y$, lo que nos garantiza la sobreyectividad de la función. Es interesante, en este tipo

de ejercicios ver qué pasa en el origen en cada una de las variables ya que obtendremos información vital para la resolución del ejercicio,en nuestro caso si $y = 0$ hemos obtenido el valor de la función en 0, y si $x = 0$ hemos obtenido que la función es sobreyectiva.

Dicho esto, vamos a hacer ahora $y = x$. Tenemos que si hacemos este cambio en la primera condición obtenemos

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x).$$

A la vista de ésto, deducimos que $x + f(x) + xf(x)$ es un punto fijo de la función. Ahora bien, llegados hasta aquí la pregunta natural es ¿Cuántos puntos fijos hay? Para responder a esta cuestión analizamos dos casos:

- Si $x \in (-1,0)$, sean x_1,x_2 tales que $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$.Por hipótesis, $f(x)/x$ es estrictamente creciente en $(-1,0)$, entonces si ocurre esto, rompería el comportamiento creciente de $f(x)/x$, por tanto si $x \in (-1,0)$ entonces $x + f(x) + xf(x) < 0$ y deducimos que tiene un punto fijo en el intervalo $(-1,0)$.
- Si $x > 0$ es inmediato ver que sólo hay un punto fijo.

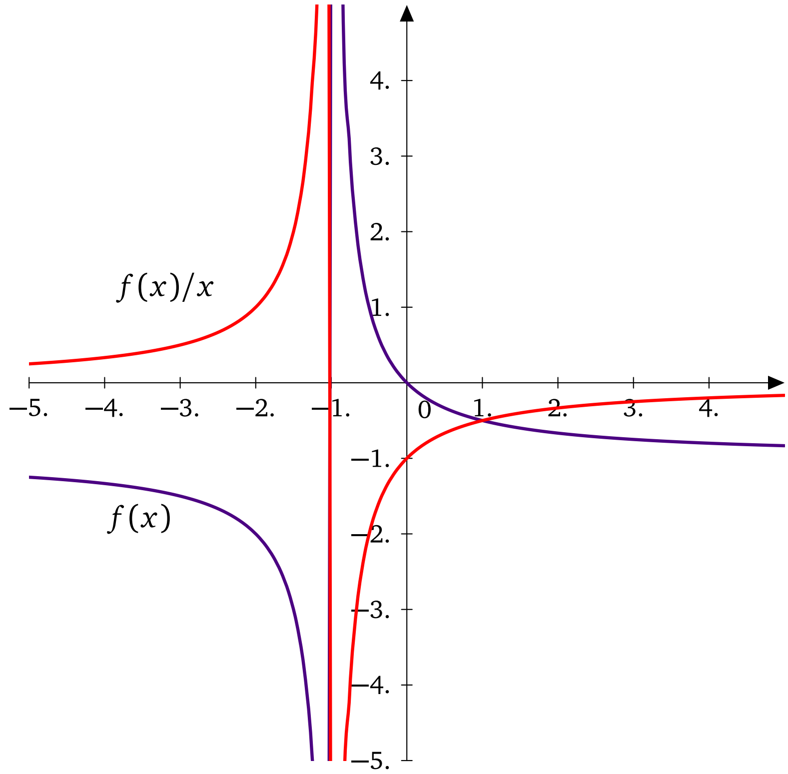
Por tanto, hemos comprobado que a lo sumo existen 3 puntos fijos (0 también es un punto fijo pues $f(0) = 0$). Sean n, 0, p los puntos fijos respectivamente. Sea k un punto fijo cualquiera de ellos entonces:

- Si $k = n$ entonces $n = x + f(x) + xf(x)$ para $x < 0$ con lo que $f(x)(1 + x) = n - x$. Evaluando esta expresión en n tenemos $f(n)(1 + n) = 0$. Entonces:
  - $f(n) = 0 \Rightarrow n = 0$ Imposible.
  - $1 + n = 0$ Imposible.
- Si $k = 0$ entonces $x + f(x) + xf(x) = 0$ con lo que $x + (1 + x)f(x) = 0$, es decir, $(1 + x)f(x) = -x$. De aquí se deduce que la igualdad se verifica si
  - $x = 0$ ✓
  - $x < 0$ ✓ (ya que $x + f(x) + xf(x) \leq 0$)
  - $x > 0$ ✓
- Si $k = p$ entonces $p = x + f(x) + xf(x)$ para $x > 0$ con lo que $f(x)(1 + x) = p - x$. Evaluando esta expresión en p tenemos $f(p)(1 + p) = 0$. Entonces:
  - $f(p) = 0 \Rightarrow p = 0$ Imposible.
  - $1 + p = 0$ Imposible.

De aquí deducimos que el único valor que puede tomar k es 0. Con lo que

$$x + f(x) + xf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{1 + x}.$$

Hemos llegado a la solución del ejercicio cuya gráfica es:



además vemos que, efectivamente, $f(x)/x$ es estrictamente creciente. $\square$

Ejercicio. 5.5. (OMI 1972, ver en [5])
Sean f y g funciones reales de variable real,tales que para cualesquiera valores reales x,y se cumple la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

Demuestra que si $f(x)$ no es idénticamente nula y $|f(x)|\leq 1$, para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $|g(y)|\leq 1$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. Para atacar este problema razonaremos por reducción al absurdo y llegaremos a una contradicción. Para ello supongamos que $|g(x)|>1$. La desigualdad triangular nos dice que para cualesquiera a,b,c números reales se verifica

$$|a+b|\leq |a|+|b|.$$

En virtud de la desigualdad triangular tenemos que

$$|f(x+y)|+|f(x-y)|\geq |f(x+y)+f(x-y)|=|2f(x)g(y)|=2|f(x)||g(y)|>2|f(x)|.$$

Esto nos dice que o bien $|f(x+y)| > 2|f(x)|$ o bien $|f(x-y)| > 2|f(x)|$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar

$$|f(x+y)| = |f(x)| + \delta,$$

con $\delta > 0$, ya que siempre podemos cambiar a y de signo sin afectar al resultado a probar. Entonces sustituyendo x por $x+y$ en la relación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x+2y)| + |f(x)| &\geq |f(x+2y) + f(x)| = 2|f(x+y)||g(y)| \\ &> 2|f(x+y)| = 2(|f(x)| + \delta) = 2|f(x)| + 2\delta.\end{aligned}$$

Con lo que hemos obtenido que $|f(x+2y)| + |f(x)| > 2|f(x)| + 2\delta$ y por tanto $|f(x+2y)| > |f(x)| + 2\delta$. El siguiente paso en la resolución del problema es demostrar por inducción que

$$|f(x+ny)| > |f(x)| + n\delta.$$

Para $n = 2$ ya está probado, supongamos que la desigualdad es cierta para n y demóstremosla para $n+1$. En efecto, haciendo $x = x + ny$ en la relación obtenida anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x+ny)| + |f(x+(n-1)y)| &\geq |f(x) + (n+1)y + f(x+(n-1)y)| \\ &= |2f(x+ny)g(y)| = 2|f(x+ny)||g(y)| > 2|f(x+ny)|.\end{aligned}$$

Aplicamos la hipótesis de inducción y llegamos a que

$$\begin{aligned}|f(x+(n+1)y)| &> 2|f(x+ny)| - |f(x+(n-1)y| > 2|f(x+ny)| - |f(x)| - (n-1)\delta \\ &> 2|f(x)| + 2n\delta - |f(x)| - n\delta + \delta = |f(x)| + n\delta + \delta = |f(x)| + (n+1)\delta.\end{aligned}$$

como queríamos probar. Entonces, para un entero positivo $N > \dfrac{1}{\delta}$ (que existe por ser $\delta > 0$ se tiene que

$$|f(x+Ny)| > |f(x)| + N\delta > 0 + 1 = 1.$$

Hemos probado que $|f(x)|+N\delta > 1$. Nótese que de aquí extraemos una contradicción, pues tomando límite cuando $\delta \longrightarrow 0$ se tiene que $|f(x)| > 1$ que contradice la hipótesis del enunciado y por tanto se tiene que verificar que $|g(x)| \leq 1$. $\square$

Ejercicio. 5.6. (OMI 1986 ver en [5])
Encuentre todas las funciones f, definidas sobre el conjunto de los reales no negativos y tomando valores reales no negativos tales que

- $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ *para todos* $x, y \geq 0$.
- $f(2) = 0$.
- $f(x) \neq 0$ *para* $0 \leq x < 2$.

SOLUCIÓN. En primer lugar vamos a ver si $f(x) = 0$ en algún punto, para ello sea $z > 2$ y definimos $y = 2$, $x = z - 2 > 0$, con lo que:

$$f(z) = f(x+2) = f(2)f(xf(2)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \text{ para todo } x \geq 2.$$

Hemos probado que $f(x) = 0$ si $x \geq 2$, tomando entonces $x = 2 - y$ para $0 \leq y < 2$ (con lo que $f(y)$ es no nulo) tenemos

$$0 = f(2) = f(x+y) = f(y)f((2-y)f(y)).$$

Esta igualdad implica que o bien $f(y) = 0$, lo cual es imposible pues estamos tomando $0 \leq y < 2$, o bien $f((2-y)f(y)$ lo cual implica que $(2-y)f(y) \geq 2$ y por tanto

$$f(y) \geq \frac{2}{2-y}.$$

Sin embargo, si tomamos un ϵ positivo y menor que 2, definiendo $x = 2 - y - \epsilon$ tenemos que

$$0 \neq f(2-\epsilon) = f(x+y) = f(y)f((2-y-\epsilon)f(y)),$$

lo que implica que $f(y)f((2-y-\epsilon)f(y)) \neq 0$ y por tanto tenemos dos casos

- $f(y) \neq 0$, ya lo sabíamos;
- $f(y)f((2-y-\epsilon)f(y)) \neq 0 \Rightarrow (2-y-\epsilon)f(y) < 2$.

Con lo que de aquí deducimos

$$f(y) < \frac{2}{2-y-\epsilon};$$

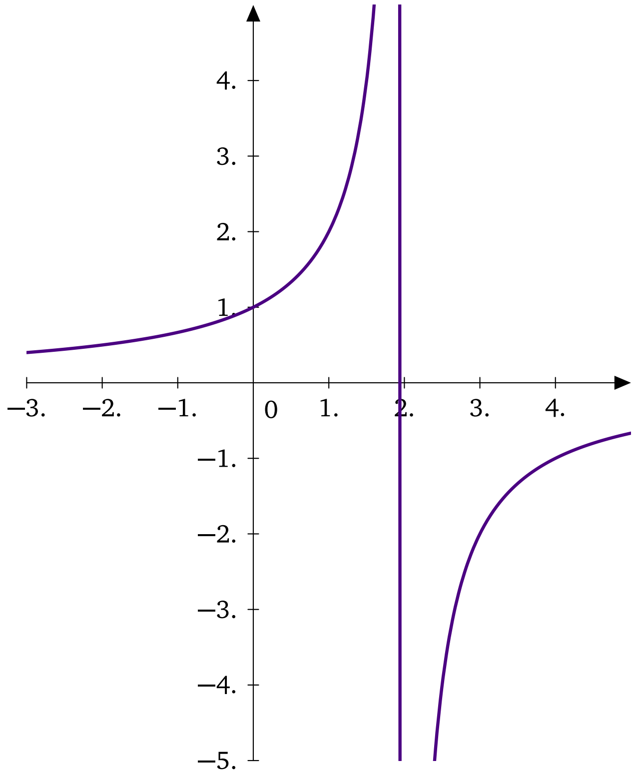
Tomando límite en esta expresión, cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, llegamos a

$$f(y) < \frac{2}{2-y}.$$

Con lo que de estas dos desigualdades deducimos que la única expresión para la función es

$$f(x) = \frac{2}{2-x}.$$

La solución que hemos obtenido se trata de una hipérbola cuya asíntota se encuentra en $x = 2$, en efecto observando la gráfica vemos esta propiedad:



□

Ejercicio. 5.7. (OMI 1981, ver en [6])
La función $f(x,y)$ satisface

- $f(0,y) = y + 1.$
- $f(x+1,0) = f(x,1).$
- $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y)).$

para cualesquiera enteros no negativos x,y. Determinar $f(4,1981)$

SOLUCIÓN. Para realizar este ejercicio vamos a hallar sucesivamente las expresiones de $f(1,y)$, $f(2,y)$, $f(3,y)$ y $f(4,y)$ para cualquier valor de y, de esta forma sustituyendo y por 1981 en la última expresión habremos acabado. Comenzamos pues hallando la expresión de $f(1,y)$, para ello vamos a calcular valores:

- $f(1,0) = f(0,1) = 1+1 = 2.$
- $f(1,1) = f(0, f(1,0)) = f(0,2) = 1+2 = 3.$
- $f(1,2) = f(0, f(1,1)) = f(0,3) = 3+1 = 2+2.$
- $f(1,3) = f(0, f(1,2)) = f(0,4) = 4+1 = 3+2.$

De estos valores podemos deducir que $f(1,y) = y+2$. En efecto, para $y = 0$ el resultado se cumple.Supongamos que es cierto para cualquier valor de y, y demostrémoslo para $y+1$:

$$f(1,y+1) = f(0,f(1,y)) = f(0,y+2) = y+2+1 = (y+1)+2.$$

Con lo que el resultado es cierto. Pasamos ahora a calcular $f(2,y)$, para ello al igual que antes calculamos valores e intentamos deducir una expresión:

- $f(2,0) = f(1,1) = 3 = 2\times 0+3$.
- $f(2,1) = f(1,f(2,0)) = f(1,3) = 5 = 2\times 1+3$.
- $f(2,2) = f(1,f(2,1)) = 7 = 2\times 2+3$.

De aquí podemos deducir que para un y cualquiera $f(2,y) = 2y+3$. Para $y = 0$ es claro el resultado, supongamos que se cumple para cualquier valor de y y vamos a ver si se cumple para $y+1$:

$$f(2,y+1) = f(1,f(2,y)) = f(1,2y+3) = 2y+3+2 = 2(y+1)+3.$$

Vemos que el resultado es cierto. Calculemos ahora la expresión para $f(3,y)$. Razonamos de forma análoga a los casos anteriores, calculamos valores de esta expresión e intentamos deducir una expresión para cualquier valor de y:

- $f(3,0) = f(2,1) = 2\times 1+3 = 2^{0+3}-3$.
- $f(3,1) = f(2,f(3,0)) = f(2,5) = 2\times 5+3 = 13 = 2^{1+3}-3$.
- $f(3,2) = f(2,f(3,1)) = f(2,13) = 2\times 13+3 = 29 = 2^{2+3}-3$.

De estos valores podemos deducir que la expresión general para un y cualquiera será $f(3,y) = 2^{y+3}-3$. En efecto, para $y = 0$ esta demostrado el resultado, supongamos que se cumple para cualquier valor de y y vamos a probarlo para $y+1$:

$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = f(2,2^{y+3}-3) = 2(2^{y+3}-3)+3 = 2^{y+1+3}-6+3 = 2^{(y+1)+3}-3.$$

Luego la igualdad es cierta. Finalmente, vamos a calcular la expresión $f(4,y)$ con lo que finalizaremos el ejercicio. Para ello vamos a proceder igual que en los casos anteriores, de esta forma calculamos valores:

- $f(4,0) = f(3,1) = 2^{1+3}-3 = 2^{2^2}-3$.
- $f(4,1) = f(3,f(4,0)) = f(3,2^{1+3}-3) = 2^{2^4-3+3}-3 = 2^{2^4}-3 = 2^{2^{2^2}}-3$.

De estas expresiones podemos deducir que la expresión general de $f(4,y)$ será la siguiente

$$f(4,y) = 2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3.$$

donde hay $y+3$ doses. Vamos a demostrar el resultado por inducción. En efecto, para $y = 0$ es trivial, supongamos que se cumple para cualquier valor de y, y vamos a probarlo para $y+1$:

$$f(4,y+1) = f(3,f(4,y)) = f(3,2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3+3}-3 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3.$$

y hay $(y+1)+3$ doses, luego la igualdad es cierta para cualquier valor de y. Recapitulando, hemos calculado las expresiones de las distintas $f(i,y)$ para $i = 1,2,3,4$ las cuales son:

- $f(1,y) = y+2.$
- $f(2,y) = 2y+3.$
- $f(3,y) = 2^{y+3}-3.$
- $f(4,y) = 2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3.$

Para finalizar el ejercicio, evaluamos la última expresión en 1981 y obtenemos

$$f(4,1981) = 2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3.$$

donde hay 1984 doses. □

Ejercicio. 5.8. (OMI 1968, ver en [2] y [5])
Sea f una función real de variable real, tal que, para una constante positiva a, la relación

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

se cumple para todo x.

(a) Demuestre que la función es periódica (es decir, que existe una constante b tal que $f(x+b) = f(x)$ para todo x).
(b) Para $a=1$, dé un ejemplo de una función no constante con dicha propiedad.

SOLUCIÓN. Observando la hipótesis del enunciado tenemos que $f(x+a) \geq \frac{1}{2}$ pues es la suma de $\frac{1}{2}$ y la raíz cuadrada que es una cantidad positiva.Por tanto, $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Consideramos la función g aquella definida a partir de f como:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}.$$

Tenemos que $g(x) \geq 0$, $\forall x$. De esta forma la ecuación funcional se transforma en

$$g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4}-(g(x))^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad se obtiene

$$[g(x+a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x)]^2.$$

como esta igualdad se cumple para todo x, en particular también se cumplirá para $x = x+a$, en efecto

$$[g(x+2a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x+a)]^2.$$

Estas dos igualdades implican que

$$[g(x+2a)]^2 = [g(x)]^2.$$

Como la función $g(x)$ es positiva para cualquier valor de x podemos tomar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad

$$g(x+2a) = g(x),$$

de esta forma, deshaciendo el cambio obtenemos

$$f(x+2a) - \frac{1}{2} = f(x) - \frac{1}{2},$$

y por tanto, simplificando la igualdad llegamos a que

$$f(x+2a) = f(x),$$

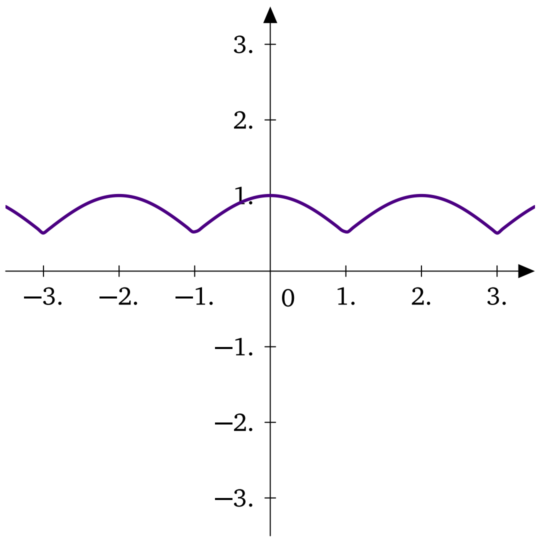
tomando $b = 2a$ se tiene que la función es periódica de período $2a$.
Para realizar el apartado b) tenemos que encontrar una función que sea periódica de período 2 (pues $a = 1$). Es obvio que $f(x) \geq \frac{1}{2}$ pues $f(x+a) \geq \frac{1}{2}$ y $f(x) \leq 1$ pues si fuese $f(x) \geq 1$ entonces $f(x+a) \in \mathbb{C}$ lo cual es contradictorio. Por esto, ejemplos de funciones que verifiquen esta condición serían:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\cos(Bx+\theta)|.$$

En particular, tomando $B = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$ tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\cos(x\frac{\pi}{2})|.$$

Observando la gráfica de esta función vemos el comportamiento periódico de la misma, cuyo período es efectivamente 2:



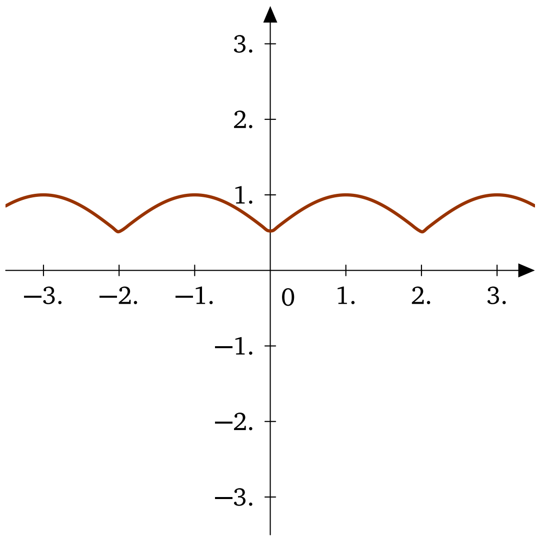
Otro tipo de funciones que también satisfacen la condición son aquellas de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\text{sen}(Bx + \theta)|.$$

En particular, tomando $B = \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$ tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\text{sen}(x\frac{\pi}{2})|.$$

Observando la gráfica de esta función vemos el comportamiento periódico de la misma, cuyo período es efectivamente 2:



□

Ejercicio. 5.9.
Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tales que* $f(x - f(y)) = ff(x) - f(y) - 1$ *para todos* $x, y \in \mathbb{Z}$.

SOLUCIÓN. Veamos las primera relaciones inmedatas:

(I) Si tomamos $y = f(x)$, entonces $f(x - ff(x)) = ff(x) - ff(x) - 1 = -1$.
(II) Si tomamos ahora $x = 0$, tenemos $f(-ff(0)) = -1$.
(III) Si tomamos $y = -ff(0)$, tenemos $f(x+1) = f(x - f(-ff(0))) = ff(x) - f(-ff(0)) - 1 = ff(x)$.
(IV) De estas propiedades se deduce que $f(x - f(y)) = f(x+1) - f(y) - 1$.

Definimos una función auxiliar $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mediante $g(x) = f(x)+1$. Veamos que propiedad verifica g. Tenemos

$$\begin{aligned} g(x-g(y)) = f(x-g(y))+1 = f(x-1-f(y)) = g(x-1+1)-f(y)-1+1 \\ = f(x)+1-(f(y)+1) = g(x)-g(y). \end{aligned}$$

Como consecuencia $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathbb{Z}$ es un subgrupo, esto es, $\mathrm{Im}(g) = 0$ ó $\mathrm{Im}(g) = n\mathbb{Z}$, para algún $n \geq 1$.
Caso 1. $\mathrm{Im}(g) = 0$.
Se tiene $g(x) = 0$, luego $f(x) = -1$ para cada $x \in \mathbb{Z}$.
Caso 2. $\mathrm{Im}(g) = n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$.
Para cada $q \in \mathbb{Z}$ existe $y_q \in \mathbb{Z}$ tal que $g(y_q) = -qn$. Dado $x \in \mathbb{Z}$, dividiendo x por n se tiene $x = qn + r$, donde $0 \leq r < n$, entonces

$$g(x) = g(r+nq) = g(r-g(y_q)) = g(r)-g(y_q) = g(r)+qn.$$

Conocidos $g(0), \ldots, g(n-1)$ conocemos g, y recíprocamente, dados $k_0, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$, si definimos

$$g'(x) = g'(r+qn) = k_r n + qn,$$

entonces g' verifica la condición $g'(x-g'(y)) = g'(x)-g'(y)$. En efecto, si $x = r+qn$ e $y = s+pn$, con $0 \leq r, s < n$, entonces

$$\begin{aligned} g'(x-g'(y)) &= g'(r+qn-g'(s+pn)) = g'(r+qn-(k_s n+pn)) \\ &= g'(r+(q-k_s-p)n) = (q-k_s-p)n+k_r n = k_r n+qn-(k_s n+pn) = g'(x)-g'(y). \end{aligned}$$

Tenemos la condición adicional $ff(x) = f(x+1)$, que trasladada a g se expresa $g(x+1)-1 = f(x+1) = ff(x) = f(g(x)-1) = g(g(x)-1)-1$. Esto es, $g(x+1) = g(g(x)-1)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} g(g(x)-1) &= g(g(r+qn)-1) = g((k_r+q)n-1) \\ &= g((k_r+q-1)n+(n-1)) = (k_{n-1}+k_r+q-1)n. \end{aligned}$$

$$g(x+1) = g(r+qn+1) = \begin{cases} (k_{r+1}+q)n & \text{si } r < n-1 \\ (k_0+q+1)n & \text{si } r = n-1. \end{cases}$$

Si $r < n-1$, se verifica $k_{n-1}+k_r+q-1 = k_{r+1}+q$, de donde $k_{r+1} = k_r+k_{n-1}-1$; de aquí obtenemos $k_{r+1} = k_0+(r+1)k_{n-1}-(n-1)$, y como consecuencia se tiene $k_{n-1} = k_0+(n-1)k_{n-1}-(n-1)$, y por tanto $k_{n-1}(n-2)+k_0-(n-1) = 0$.
Para $r = n-1$ se tiene $k_{n-1}+k_{n-1}+q-1 = k_0+q+1$, de donde $2k_{n-1}-k_0-2 = 0$.
Por tanto se tiene $0 = k_{n-1}(n-2)+k_0-(n-1) = k_{n-1}(n-2)+(2k_{n-1}-2)-(n-1) = k_{n-1}n-(n+1)$, de donde $k_{n-1} = \frac{n+1}{n}$, que es entero solo si $n = 1$.
Tenemos pues $n = 1$ y $g(x) = g(x \cdot 1) = g(0)+x$. De las relaciones anteriores se tiene $2k_{n-1}-k_0-2 = 0$, esto es, $k_0 = 2$, y por tanto $g(x) = 2+x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.
Pasando ahora a f tenemos $f(x) = g(x)-1 = x+1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.
En resumen, tenemos dos funciones verificando la condición del enunciado:

(1) $f(x) = -1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$,
(2) $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

□

Ejercicio. 5.10. (Olimpíada internacional de Bulgaria 2014)
Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tales que

$$f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y))-$$

SOLUCIÓN. Veamos las primera relaciones inmediatas:

(I) Si $y = 1$ entonces $f(x) = f(x+1)(f(x)+f(1))$ con lo que $f(x+1) = \frac{f(x)}{f(x)+f(1)} < 1$.
(II) Si $y = x$ entonces $f(x^2) = f(2x)2f(x)$, tomando $x = 1$ tenemos $f(1) = 2f(2)f(1) \Rightarrow 1 = 2f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$. En este caso, si se define $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$, se tiene una solución.

Supongamos $f(1) = a$, entonces se tiene

$$f(3) = f(2+1) = \frac{f(2x1}{f(2)+f(1)} = \frac{f(2)}{f(2)+f(1)},$$

de la misma forma

$$f(y+1) = \frac{f(y)}{f(y)+f(1)},$$

tenemos

- $f(3) = \dfrac{1}{1+2a}$.
- $f(4) = \dfrac{1}{1+a+2a^2}$.
- $f(5) = \dfrac{1}{1+a+a^2+2a^3}$.
- $f(6) = \dfrac{1}{1+a+a^2+a^3+2a^4}$.

De $f(6) = f(2\times 3) = f(2+3)(f(2)+f(3))$ obtenemos

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3+2a^4} = \frac{1}{1+a+a^2+2a^3}\left(\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+a+2a^2}\right).$$

y por tanto, $4a^5-3a^3-a^2-a+1=(a-1)(a+1)(a-\frac{1}{2})(4a^2+2a)$. Los posibles valores son $a=-1$, $a=1$ y $a=\frac{1}{2}$ de los cuales son válidos $a=1$ y $a=\frac{1}{2}$.

Dado $\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}^+$, con $r,s\in\mathbb{Z}^+$, se tiene $r=\frac{r}{s}s$ y por tanto

$$f\left(\frac{r}{s}+1\right)=\frac{f\left(\frac{r}{s}\right)}{f\left(\frac{r}{s}\right)+a}=\frac{b}{b+a},$$

donde $b=f\left(\frac{r}{s}\right)$

$$f\left(\frac{r}{s}+2\right)=\frac{f\left(\frac{r}{s}+1\right)}{f\left(\frac{r}{s}\right)+a}=\frac{b/(b+a)}{b/(b+a)+a}=\frac{b/(b+a)}{(b+(b+a)a)/(b+a)}=\frac{b}{b(1+a)+a^2}.$$

$$f\left(\frac{r}{s}+3\right)=\frac{b/b(1+a)+a^2}{(b/(b(1+a)+a^2)+a}=\frac{b}{b(1+a+a^2)+a^3}.$$

En general se tiene que

$$f\left(\frac{r}{s}+t\right)=\frac{b}{b(1+a+\cdots+a^{t-1})+a^t}.$$

Como $f(r)=f\left(\frac{r}{s}s\right)=f\left(\frac{r}{s}+s\right)\left(f\left(\frac{r}{s}\right)+f(s)\right)$ si $a=1$ tenemos $f(t)=\frac{1}{t}$ para $t\in\mathbb{Z}^+$ y por tanto

$$\frac{1}{r}=\frac{b}{b(1+\cdots+1^{s-1})+1}\left(b+\frac{1}{s}\right),$$

con lo que

$$\frac{1}{r}=\frac{b}{sb+1}\left(b+\frac{1}{s}\right)=\frac{b}{sb+1}\frac{sb+1}{s}=\frac{b}{s},$$

entonces $b=\dfrac{s}{r}=\dfrac{1}{(r/s)}$, y tenemos $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es una solución. Ahora

$$\frac{1}{2}=\frac{b\left(b+\frac{1}{2}\right)}{b\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^s}=\frac{b\left(b+\frac{1}{2}\right)}{b\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^s}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}+\left(\frac{1}{2}\right)^s}=\frac{b\left(b+\frac{1}{2}\right)}{b\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^s+\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}\right)/(1/2)}.$$

Entonces

$$1=\frac{b\left(b+\frac{1}{2}\right)}{b\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}},$$

de donde

$$b\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^s\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}=b\left(b+\frac{1}{2}\right).$$

De aquí, desarrollando las expresiones, obtenemos

$$b^2+b\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^s-1\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}=b^2+b\left(\left(\frac{1}{2}\right)^s-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}.$$

De esta ecuación se deduce que una raíz es $b = \frac{1}{2}$ y la otra es $-\left(\frac{1}{2}\right)^s \in \mathbb{R}^+$. Por tanto $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. $\square$

Bibliografía

[1] Sahoo P. K., Kannappan P.-Introduction to functional equations. CRC, 2011.

[2] Engel, A., Problem solving trategies. Springer, 1998. 5.8.

[3] Jara, P., Ecuaciones funcionales. Notas manuscritas. Granada, 2013.

[4] Klamkin, M. S., Olimpiadas internacionales de matemáticas 1978–1986 y cuarenta problemas suplementarios. ORBALC, Santiago de Chile, 1988. 5.1.

[5] Lasaosa Madarde, D., Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (I): Funciones reales de variable real. (2007). Ver: http://oei.es/oim/revistaoim/numero30/ecuacionesfuncionales1.pdf 5.2., 5.3., 5.4., 5.5., 5.6., 5.8.

[6] Lasaosa Madarde, D., Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (II): Funciones enteras de variable entera. (2007). Ver: http://oei.es/oim/revistaoim/numero31/ecuacionesfuncionales2.pdf

5.1., 5.7.

Refencias Web:

Problemas de olimpiadas (fases local y nacional)

1. http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimprab.htm
2. http://www.ugr.es/~olimpiada/convocatorias/45ome/45local_enunciados.pdf
3. http://www.math.ust.hk/excalibur/v8_n1.pdf
4. http://wdb.ugr.es/~olimpiada

Técnicas de resolución y problemas de olimpiadas (fase internacional)

5. https://www.imo-official.org/?language=es

Sobre ecuaciones

6. https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación
7. http://math.stackexchange.com/questions/tagged/functional-equations