PROBLEMAS SOBRE CUADRILÁTEROS

Rocío López Anguita

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada. 2014

Problemas de Olimpiadas sobre Cuadriláteros

Rocío López Anguita

Dirigido por el Prof. Dr. D. Pascual Jara

Departamento de Álgebra
Universidad de Granada. 2014

Introducción

Como Trabajo Fin de Máster (TFM) en el Máster Interuniversitario en Matemáticas, se presenta Problemas de Olimpiadas Matemáticas sobre Cuadriláteros.

Las primeras competiciones matemáticas nacionales fueron los concursos Eotvos en Hungría, que se iniciaron en 1894, paralelamente al proceso iniciado por el Barón de Coubertin que desembocó en las Olimpiadas de la época moderna (Atenas 1896). Pero no será hasta principio del S. XX cuando este tipo de competiciones se extienda por el Centro y Este de Europa. La forma actual del concurso es similar a la establecida en 1938 en las competiciones W. L. Putnam, organizadas en EEUU y Canadá. El nombre de Olimpiadas data de 1958, año de celebración de las Olimpiadas Matemáticas Internacionales por iniciativa de Rumania.

La elección de este modalidad de TFM tiene como objetivo, el análisis y autoevaluación personal sobre las distintas materias cursadas en el mencionado Máster. A la vez, con este trabajo intento estimular el estudio de las Matemáticas y el desarrollo de jóvenes talentos en esta ciencia. Filosofía que comparto con la de las Olimpiadas Matemáticas, las cuales son algo más que un concurso, orientas a promocionar las Matemáticas y dotarla de un contenido lúdico, ayudando así a aquellos jóvenes para que dejen de enfrentarse a ellas como un obstáculo difícil de superar, y al mismo tiempo descubrir a jóvenes talentos en esta materia.

¿Por qué sobre cuadriláteros?
El estudio de los cuadriláteros constituye un pilar fundamental para el aprendizaje de la geometría plana y está muy presente en los problemas de Olimpiadas Matemáticas convocadas periódicamente. Al mismo tiempo, están presente en nuestra vida cotidiana de diversas formas, por ejemplo a través de distintos diseños arquitectónicos, dando origen al los poliedros (edificios), formando mosaicos, además de algunos elementos naturales como los accidentes geográficos. En consecuencia, el estudio de los cuadriláteros contribuye al desarrollo del pensamiento espacial y a la superación de los fenómenos didácticos encontrados por los estudiantes que participan en este tipo de competiciones.

El presente trabajo va a estar dividido, fundamentalmente, en tres partes.
La primera de ellas se centra en repasar los conceptos fundamentales necesarios para la realización de los problemas de Olimpiadas sobre cuadriláteros. En la segunda, se estudia los principales teoremas necesarios para el desarrollo de las mismas, que sirven como base a esta ciencia. Y la tercera, está dedicada al desarrollo de los propios Problemas de Olimpiadas, los cuales están agrupados según el

grado de dificultad, en base a las distintas fases del concursos: local, nacional e internacional.

En última instancia, mencionar que por el grado de dificultad elegido en el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster, éste está orientado a alumnos de la Enseñanza Secundaria y Bachillerato.

Índice general

Introducción I

I Circunferencias y polígonos 1
1 Conceptos fundamentales 1
2 Ángulos en la circunferencia 5
3 Cuadriláteros 8
4 Polígonos Regulares 12

II Teoremas importantes y ejercicios 15
5 Teorema de Pitágoras 15
6 Teorema de Ptolomeo 20

III Problemas de Olimpiadas 25
7 Problemas de Olimpiadas: Fase Local 25
8 Problemas de Olimpiadas: Fase Nacional 35
9 Problemas de Olimpiadas: Fase Internacional 44

Bibliografía 53

Bibliografía. Referencias Web 55

Capítulo I

Circunferencias y polígonos

Para comenzar a estudiar y desarrollar problemas de olimpiadas sobre cuadriláteros son imprescindible las nociones básicas de geometría en general, y de triángulos, y circunferencias en particular, que como tal, no formaría parte de este Trabajo de Fin de Máster, pero que me siento en la obligación de recapitular, puesto que sin las mismas sería muy complicado resolver los mencionados problemas.

1. Conceptos fundamentales

Por su utilidad en los ejercicios, vamos a empezar recordando algunas definiciones básicas y fundamentales en geometría.

1.1. Triángulos:

Es una figura geométrica plana de tres lados y tres ángulos, los cuales siempre suman 180^0.
El triángulo está determinado por tres segmentos de recta (lados), o por tres puntos no alineados llamados vértices.
Los triángulos lo podemos clasificar según los lados o los ángulos:

1. **Clasificación de los triángulos según los lados:**

   a. Triángulo Equilátero: triángulo con los tres lados iguales, por lo que los ángulos también son iguales y miden 60^0.

   b. Triángulo Isósceles: triángulo con dos lados iguales y uno desigual, como consecuencia tiene dos ángulos iguales.

   c. Triángulo Escaleno: triángulos con los tres lados y los tres ángulos distintos.

2. **Clasificación de los triángulos según los ángulos:**

    a. Triángulo Acutángulo: triángulo con los tres ángulos agudos, menores de 90^0.

    b. Triángulo Obtusángulo: triángulo con un ángulo obtuso, mayor de 90^0.

    c. Triángulo Rectángulo: triángulo con un ángulo recto, igual a 90^0.

Puntos Notables en el triángulo

Para poder saber cuales son los puntos notables en un triángulo, debemos tener presente las nociones de altura, bisectriz y mediatriz en esta figura geométrica.

- **Altura**
  La altura de un triángulo es cada una de las rectas perpendiculares, trazadas desde un vértice, a la recta que contiene al lado opuesto (o su prolongación).

- **Mediana**
  Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

- **Bisectriz**
  La bisectriz de un triángulo es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

- **Mediatriz**
  La mediatriz de un triángulo es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

Tras este breve repaso de concepto, ya podemos observar cuales son los puntos notables en un triángulo, los cuales son:

- **Ortocentro**
  El ortocentro, H, es el punto de intersección de las tres alturas que tiene un triángulo.

- **Baricentro**
  El baricentro, B, es el punto de intersección de las tres medianas que posee un triángulo.

- **Circuncentro**
  El circuncentro, O, es el punto de intersección de las tres mediatrices que tiene un triángulo. Dicho punto equidista de los tres vértices, por lo que es el centro de la circunferencia que pasa por ellos.

- **Incentro**
  El incentro, I, es el punto de intersección de las tres bisectrices que se pueden trazar en un triángulo. Dicho punto también es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo y tangente a sus tres lados.

Por último recordad que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados. Es decir, pertenecen a la misma recta, llamada **recta de Euler**.

Principio de Dirichlet o Principio del Palomar

El curioso nombre del Principio del Palomar viene derivado por el ejemplo trivial, generalmente usado para presentarlo: *Si hay un número de palomas mayor que el número de nidos, necesariamente hay que colocar más de una paloma en algún nido*.
Precisamente por la sencillez del enunciado es muy frecuente su aplicación en diversos planteamientos y circunstancias.
De modo más general, podemos exponer el principio diciendo: si hay p palomas y n nidos (con $p > n$), haciendo la división entera con resto de p entre n tendremos:

$$p = nk + r$$

siendo k el cociente y r el resto por defecto.
Podemos concluir que, si r es mayor que 0, entonces al menos en un nido el número de palomas es mayor o igual que $k + 1$.

Desigualdades:

Desigualdad de Cauchy–Schwarz

$$\forall a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Se verifica la desigualdad si y sólo si existe λ tal que $a_i = \lambda b_i$ para todos $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda b_i)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0,$$

por tanto el discriminante ha de ser menor o igual a cero:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

La igualdad vale si y sólo si:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda b_i)^2 = 0 \Longleftrightarrow a_i - \lambda b_i = 0, \quad \text{para todos } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros la desigualdad se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

□

Desigualdad Triangular

$$\forall a_1, a_2 \ldots a_n \in R : |a_1 + a_2 + \ldots a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Se llama triangular porque en el caso $n = 2$, y si a_1, a_2 representan las longitudes de dos lados de un triángulo, la desigualdad anterior expresa la conocida propiedad de que un lado no puede exceder a la suma de los otros dos.

DEMOSTRACIÓN.
La demostración es muy sencilla para $n = 2$, pues

$$-|a_1| \leq a_1 \leq |a_1|$$

$$-|a_2| \leq a_2 \leq |a_2|$$

Sumando

$$\Rightarrow -(|a_1| + |a_2|) \leq a_1 + a_2 \leq a_1 + a_2 \leq |a_1| + |a_2| \Rightarrow |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|,$$

y después se extiende por inducción sobre n.

□

En conclusión, cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Lo podemos expresar:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

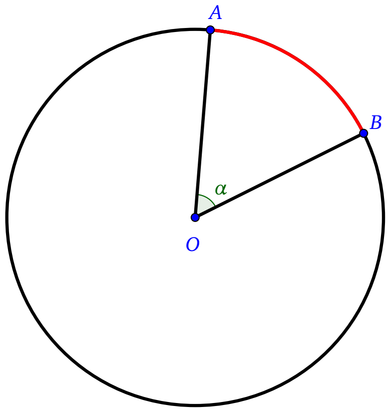
2. Ángulos en la circunferencia

Podemos dibujar ángulos que se relacionen con la circunferencia. Dependiendo de la posición que ocupen los mismos recibirán nombres acorde con su relación a esa posición. Cuando nos referimos a los ángulos en la circunferencia siempre relacionamos a éstos con los arcos que forman. Así, podemos diferenciar entre:

Ángulo central

Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son el radio de ella. Si el radio de la circunferencia es la unidad, la medida del arco corresponde con el valor del ángulo expresada en radianes. Es decir

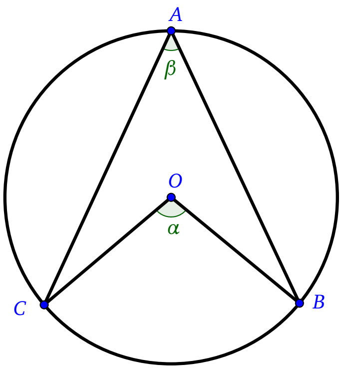
$$\alpha = \text{longitud} AB.$$



Ángulo inscrito

Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos rectas secantes.
Su valor es la mitad del central correspondiente

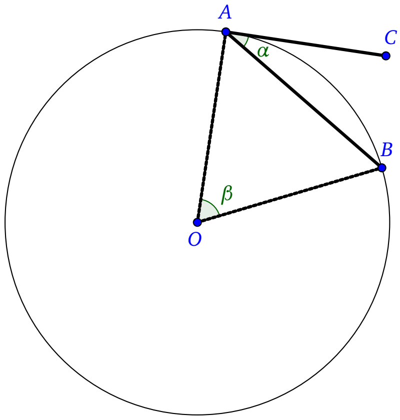
$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$



Ángulo semiiscrito

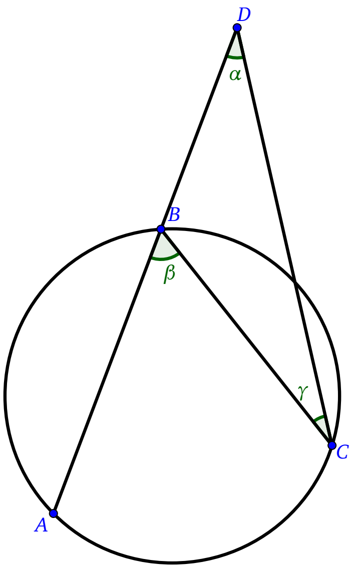
Es el que tiene su vértice en la circunferencia, un lado secante y otro tangente.
Su valor es la mitad del central correspondiente

$$\beta = 2\alpha.$$

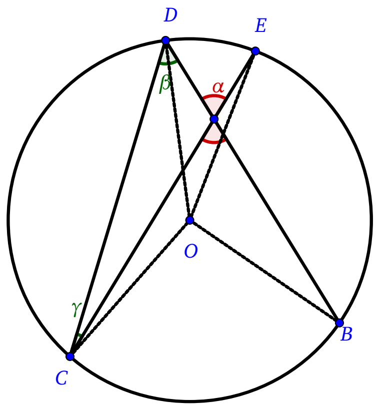


Ángulo exterior
Es el que tiene el vértice fuera de la circunferencia y los lados de su ángulo son secantes a ella.
Su valor es la diferencia de los ángulos interiores, o equivalentemente, semidiferencia de los dos arcos centrales, ver dibujo. Este resultado sigue siendo válido si los lados del ángulo son tangentes a la circunferencia.

$$\alpha = \beta - \gamma.$$



Ángulo interior
Es el que tiene el vértice en el interior de la circunferencia, y sus lados son secantes. Su valor es la semisuma de los arcos centrales.
$\alpha = \beta + \gamma.$



Arco capaz de un ángulo dado sobre un segmento

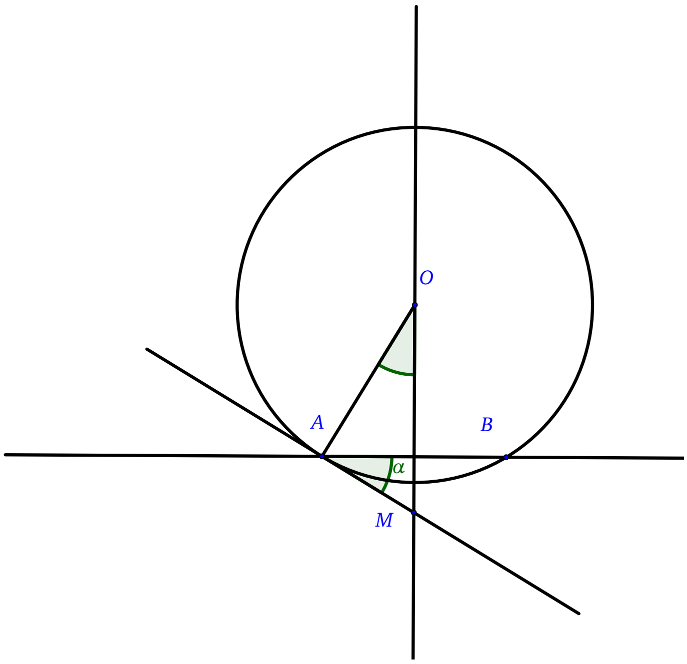
> El lugar geométrico de los puntos, desde los cuales se ve un segmento dado (una cuerda) bajo ángulo constante, es un arco de circunferencia, llamado arco capaz del ángulo dado sobre el segmento constituido por la cuerda.

Este resultado es muy importante, tanto por su aplicación a numerosos problemas, como por su uso para otros teoremas. Por ello, vamos a desarrollar los pasos para su construcción geométrica con regla y compás.
El problema está definido como sigue a continuación.

Dados un ángulo α y un segmento AB, construir el arco capaz de α sobre AB.

Para la construcción del arco capaz de α sobre AB seguimos los siguientes pasos:

1. Se traza la mediatriz MN de AB.
2. Se traza una recta r que pasa por A y forma ángulo α con AB.
3. Se construye el punto M intersección de la mediatriz y la recta r.
4. Se traza la perpendicular por A a r. La intersección de esta recta con la mediatriz determina un punto O.
5. Los puntos del arco de la circunferencia con centro O y que pasa por A y B, en el interior del semiplano que no contiene a M es el lugar geométrico buscado.



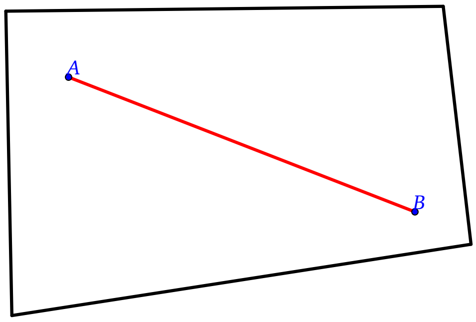
Puede comprobarse que el arco en el otro semiplano corresponde al arco capaz del ángulo $\alpha' = 180^0 - \alpha$, suplementario de α sobre el mismo segmento AB dado. La verificación de que el arco construido es el solicitado, es evidente observando la figura y por la igualdad de los dos ángulos marcados con α en ella.

3. Cuadriláteros

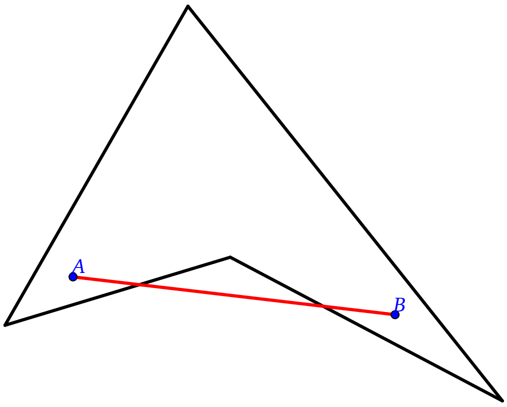
Los cuadriláteros son polígonos que tiene cuatro lados.
Estas figuras geométricas tienen distintas formas, pero todas tienen: cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos interiores y dos diagonales. Además, la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360^0. Básicamente, existen dos tipos de cuadriláteros: **convexos y cóncavos**.

Una diagonal de un cuadrilátero es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.

CUADRILÁTEROS CONVEXOS
Son aquellos tales que, si se toman dos puntos interiores A y B cualesquiera del mismo, todos los puntos del segmento AB que determinan están dentro del cuadrilátero. En particular todas las diagonales son interiores.

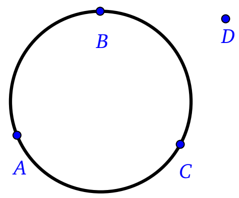


CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS O NO CONVEXOS
Son aquellos cuadriláteros en los que se pueden encontrar dos puntos interiores A y B del mismo, tales que algunos de los puntos del segmento AB que determinan están fuera del cuadrilátero. O equivalentemente, una de las dos diagonales es exterior.



Cuadrilátero Cíclico

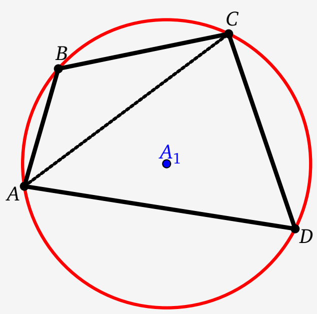
Un hecho expuesto en geometría es el que podemos presentar indicando que por cualquiera tres puntos no alineados pasa exactamente una circunferencia.
¿Pero qué podemos decir si en vez de considerar tres puntos, consideramos cuatro? Como es de esperar, no siempre va a existir una circunferencia que pase por los cuatro puntos dados.
Por ejemplo, consideramos una circunferencia que pase por tres puntos dados (la cuál es única) A, B, C y consideramos un punto D que no esté sobre circunferencia. Claramente, no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos.



Por lo tanto, llegamos a la conclusión que un cuadrilátero que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma especiales. A dichos cuadriláteros se le llaman ***cuadriláteros cíclicos***.

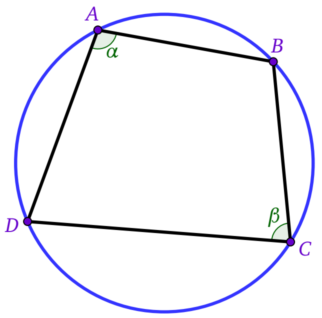
Definición. 3.1.
Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir que sus vértices están sobre una circunferencia se dice que es un cuadrilátero cíclico ó inscriptible.

Proposición. 3.2.
Un cuadrilátero es inscriptible $\Longleftrightarrow$ cada dos ángulos opuestos son suplementario.

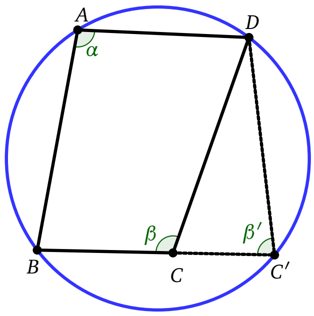


DEMOSTRACIÓN.

Para probar esto, primero vamos a suponer que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Tenemos que $\widehat{DAB} = \frac{BD}{2}$ y $\widehat{BCD} = \frac{DB}{2}$ y como $\widehat{Bd} + \widehat{DB} = 360^0$ (midiendo los ángulos en grados). Entonces tenemos que: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \alpha + \beta = 180^0$



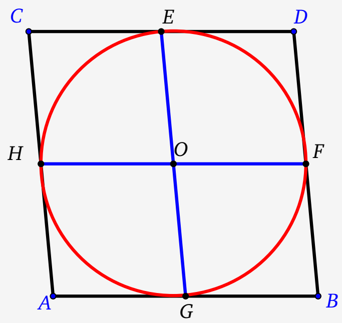
Ahora supongamos que $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \alpha + \beta = 180^0$. Trazamos la circunferencia que pasa por los vértices D, A, B y supongamos que está no pasa por el vértice C. Prolonguemos DC hasta que intersecte a la circunferencia en C'.
Como el cuadrilátero $ABC'D$ es cíclico tenemos que $\widehat{DAB} + \widehat{BC'D} = \alpha + \beta = 180^0$, esto quiere decir que $\widehat{BC'D} = \widehat{BCD} = \beta$ y entonces DC sería paralelo a DC', lo cuál es una contradicción por que las líneas paralelas no se intersecan. Entonces C y C' coinciden, por lo que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.



□

Definición. 3.3.
Un cuadrilátero se llama circunscriptible si existe una circunferencia tangente a sus cuatro lados.

Proposición. 3.4.
Un cuadrilátero es circunscriptible $\Longleftrightarrow$ *los pares de lados opuestos suman igual.*



Problema. 3.5.
Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a la circunferencia C_1 y C_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demuestra que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.

SOLUCIÓN.
Queremos probar que $\widehat{CMD} + \widehat{DBC} = 180^0$. Tracemos la cuerda común AB. Tenemos que $\widehat{MCA} = \widehat{CBA} = \alpha$ ya que uno es ángulo semiinscrito y el otro es ángulo inscrito, ambos en la circunferencia C_1.
Análogamente se demuestra que $\widehat{MDA} = \widehat{DBA} = \beta$ en C_2.
Tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 180^0$, por lo que los ángulos internos del triángulo $AMCD$, pero como $\widehat{CBD} = \alpha + \beta$ tenemos que $\widehat{CMD} + \widehat{DBC} = 180^0$. Por lo tanto el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.

□

4. Polígonos Regulares

Un polígono regular, de n lados (n-ángulo), es el que tiene todos sus lados iguales, y en consecuencia todos sus ángulos también son iguales. Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia y tiene una circunferencia inscrita. Los centros de estas dos circunferencias coinciden; este punto se llama el centro del polígono.

- Se llama radio del polígono (y lo denotaremos por r), al de su circunferencia circunscrita, es decir, el segmento que une el centro del polígono con cualquier vértice.

- Se llama apotema del polígono (y la denotaremos a), al segmento que une el centro de la circunferencia circunscrita, con el punto medio de cualquier lado.

Por lo tanto, la construcción de un polígono regular de n lados, equivale a la división de una circunferencia en n partes iguales. Supuesto que se ha construido por bisección del arco, a través de la cuerda, es inmediato duplicar el número de lados, por lo que se pueden construir polígonos regulares de $n \cdot 2^m$ lados.
Existen métodos para algunos valores como $3, 4$ ó 5, pero no es posible inscribir con regla y compás polígonos de 7 ó 9 lados. Aunque sí es posible para 17 lados (célebre problema resuelto por Gauss).
Gauss demostró que una circunferencia se puede dividir, con regla y compás, en n partes iguales si, y sólo si, n admite una descomposición en factores primos de la forma:

$$n = 2^p(2^{2^a} - 1)(2^{2^b} - 1)\dots(2^{2^c} - 1)$$

con $a, b, c, \dots$ distintos.
Por su incidencia en muchos problemas, vamos a estudiar los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 10 lados y algunos elementos.

Relaciones métricas en cualquier polígono regular
Sea r el radio, a la apotema y l el lado, para construir polígonos regulares. Considerando el triángulo isósceles con base l y lados r, la apotema a es la altura. Tenemos dos triángulos rectángulos de hipotenusa r y catetos a y $l/2$. Por el teorema de Pitágoras (que veremos más adelante) tenemos:

$$r^2 = \frac{l^2}{4} + a^2,$$

relación que permite, conociendo dos de estos elementos, hallar el tercero.

El ángulo central α es el formado por dos radios consecutivos, para un n-ángulo los valores son:

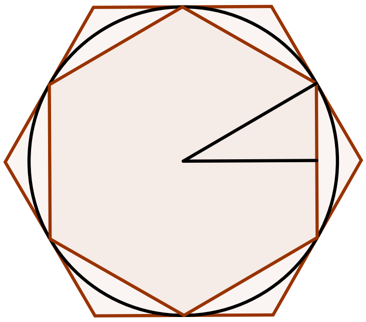
$$\alpha = \frac{360^0}{n} \qquad\qquad \beta = \frac{(n-2)180^0}{n}$$

Los ángulos entre lados con vértices comunes son inscritos en arcos múltiplos de α. Se tiene así una relación que permite calcular l y a en función de r. En efecto, se tiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{l/2}, \text{ esto es, } l = \frac{2r}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{I.1}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{a}, \text{ esto es, } a = \frac{r}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{I.2}$$

Si consideramos el polígono regular circunscrito a la circunferencia que pasa por los vértices de un polígono regular dado, sus lados serán tangentes a esta circunferencia; luego la apotema del polígono circunscrito coincide con el radio del inscrito.



Como dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes, la razón de semejanza entre ambos polígonos es la misma que hay entre el radio y la apotema del polígono.
Todas las medidas lineales, como lado o diagonales del polígono circunscrito, se hallan multiplicando la medida correspondiente del inscrito por la razón de semejanza $k = r/a$.
En particular, el área del polígono inscrito es: $A = \frac{P \cdot a}{2}$, siendo A el área, P el perímetro y a la apotema; entonces el área del polígono circunscrito es: $A' = A \cdot k^2$.
En virtud de las relaciones expuestas, basta conocer, en función del radio r, el lado del n-ágono regular inscrito para poder deducir los demás elementos: apotema, perímetro y área, tanto del polígono inscrito como del circunscrito.
Sólo nos queda obtener el valor del lado del n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r, ver la ecuación (I.1), y dar el modo de construcción con regla y compás para $n = 3, 4, 5, 6, 10$.

NÚMEROS DE LADOS	VALOR DEL LADO
3	$l = \sqrt{3}r$
4	$l = \sqrt{2}r$
5	$l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r$
6	$l = r$
10	$l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

Capítulo II

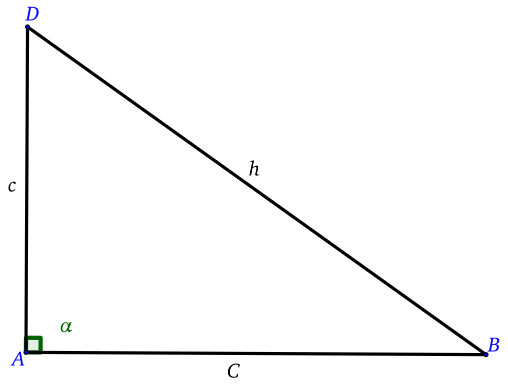
Teoremas importantes y ejercicios

Una vez introducido los conceptos fundamentales de la geometría que necesitamos para comprender el estudio de esta materia, pasamos a desarrollar algunos teoremas que serán de gran utilidad para resolver los Problemas de Olimpiadas sobre Cuadriláteros.

5. Teorema de Pitágoras

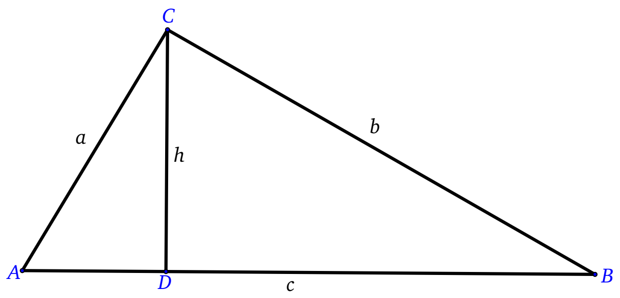
El teorema de Pitágoras nos indica que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$h^2 = c^2 + C^2.$$



A lo largo de la historia han sido muchas las demostraciones y pruebas que matemáticos y amantes de estas ciencias han dado sobre este teorema.
La demostración más simple es la atribuida a Lagrange, la cuál vamos a ver a continuación:

Demostración.
Trazando la perpendicular CD a AB, obtenemos así tres triángulos semejantes, como observamos en la figura.



Considerando y, el segmento AD, obtenemos como resultado que el segmento DB es $c-y$. Por lo tanto, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{c} \Longrightarrow yc = b^2$$

$$\frac{c-y}{a} = \frac{a}{c} \Longrightarrow c(c-y) = a^2$$

Sumando las dos igualdades resulta que:

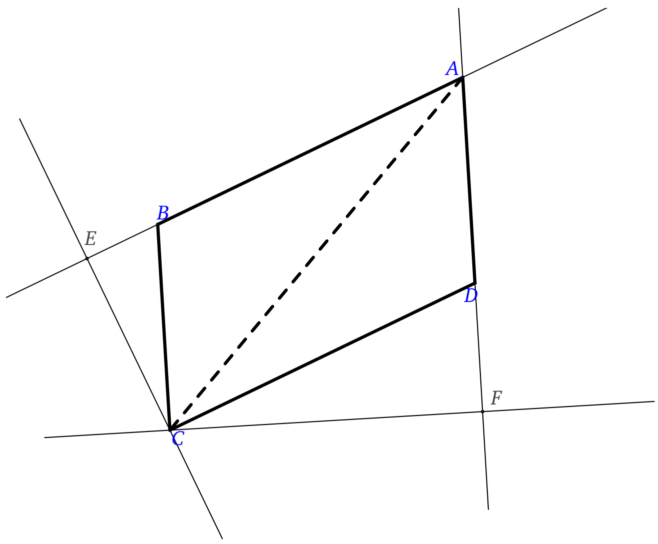
$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

Ejercicio. 5.1. (Ref. Web (5))
Sea $ABCD$ un paralelogramo y supongamos que AC es su diagonal mayor. Desde C se trazan perpendiculares a las rectas AB y AD, con pies en E y F respectivamente. Demostrar que:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

SOLUCIÓN.
Para resolver este ejercicio aplicamos el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ACE y BCE.



Usando también que $BC = AD$ al ser un paralelogramo, obtenemos que:

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = (AE + BE)(AE - BE) + AD^2 = AB \cdot AE + AB \cdot BE + AD^2$$

Ahora bien, vemos que los triángulos BCE y CDF son semejante, ya que tienen dos ángulos iguales. Entonces tenemos que $\frac{BE}{BC} = \frac{DF}{CD}$, y teniendo en cuenta que $CD = AB$, deducimos que $BE \cdot AB = AD \cdot DF$ Sustituyendo esto último en la igualdad anterior obtenida para AC^2, queda demostrada que:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

□

Ejercicio. 5.2. (Ref. Web (5))
En una circunferencia de centro O y radio 1, tomemos una cuerda de longitud a y la circunferencia C que tiene a dicha cuerda por diámetro. Si P es el punto de C más alejada de O, ¿cuál es el valor máximo de la distancia entre O y P cuando variamos a?

SOLUCIÓN.
Para realizar este ejercicios, en primer lugar vamos a calcular la longitud de OP en términos de a, en segundo, calcularemos su valor máximo. Denotaremos M al punto de corte de la cuerda con el segmento OP, y A a uno de los puntos de corte de la circunferencia.
Por el teorema de Pitágoras tenemos que $OM^2 = OA^2 - AM^2 = 1 - (\frac{a}{2})^2$, y por otro lado, como MP es un radio de C, tendremos que $MP = \frac{a}{2}$.

Siendo $OP = OM + MP$ y usando la desigualdad entre las medias aritméticas y cuadrática[1], obtenemos que:

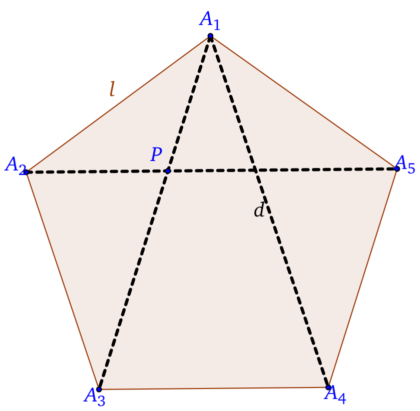
$$OP = OM + MP - \frac{a}{2} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \leq 2\sqrt{\frac{\frac{a^2}{4} + 1 - \frac{a^2}{4}}{2}} = \sqrt{2}$$

Como dicha cota se alcanza cuando $\frac{a}{2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, es decir, para $a = \sqrt{2}$, el valor máximo de OP es $\sqrt{2}$ y se alcanza $\Longleftrightarrow a = \sqrt{2}$.

$\square$

Ejercicio. 5.3. (Ref. Web (5))
Calcular la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular.

SOLUCIÓN.
Para resolver este ejercicio vamos a intentar buscar triángulos semejantes, una vez que tracemos las diagonales en el pentágono.



Como podemos observar en la figura, consideramos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 a los vértices, l al lado y d a la diagonal del pentágono. Además, sea P el punto de corte de las diagonales A_1A_3 y A_2A_5.
Sabemos que cada diagonal es paralela a un lado del pentágono, por lo que el cuadrilátero $PA_3A_4A_5$ es un paralelogramo y, por tanto, $PA_5 = l$ y $PA_2 = d - l$.
Podemos ver que los triángulos A_2PA_3 y $A_3A_4A_1$ son semejantes, al tener los lados paralelos, por lo que se verifica que

$$\frac{A_2P}{A_3A_4} = \frac{A_2A_3}{A_1A_3}.$$

Al escribir la igualdad en función de d y l tenemos: $\frac{d-l}{l} = \frac{l}{d}$.
Por lo que deducimos que $(\frac{d}{l})^2 - \frac{d}{l} - 1 = 0$ y a resolver, la ecuación de segundo grado, obtenemos

[1]La raíz cuadrada de la media de los cuadrados.

que:

$$\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

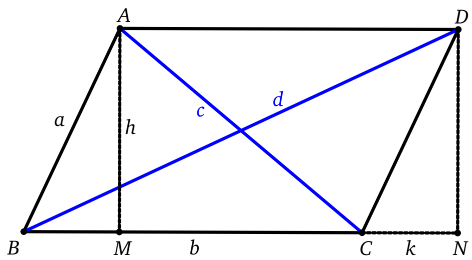
es decir, la razón entre la diagonal de un pentágono regular y su lado es la razón áurea.

□

Una vez visto el teorema de Pitágoras, es fácil probar el siguiente teorema conocido como la ley del paralelogramo.

Teorema. 5.4. (Ley del Paralelogramo)
La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados

DEMOSTRACIÓN.
Sea $ABCD$ el paralelogramo y sean $AB = CD = a$ y $BC = DA = b$. También sea $AC = c$ y $BD = d$.



Tracemos perpendiculares a BC desde A y D, las cuales intersectan a BC en M y N. Sean $AM = DN = h$ y $BM = CN = k$.
Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos DCN, DBN y AMC tenemos las siguientes igualdades:

$$h^2 + (b+k)^2 = d^2$$
$$h^2 + (b-k)^2 = c^2$$
$$h^2 + k^2 = a^2$$

Sumando las dos igualdades primeras obtenemos:

$$2h^2 + 2b^2 + 2k^2 = d^2 + c^2$$

Ahora utilizando la última igualdad, de las tres obtenidas anteriormente, tenemos que:

$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + c^2$$

□

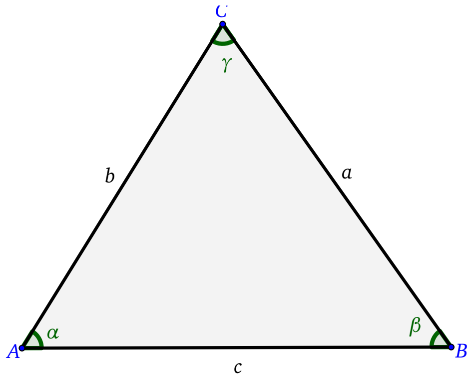
A continuación vamos a mencionar algunas generalizaciones del teorema de Pitágoras que se utilizan con frecuencia en los ejercicios.
En primer lugar tenemos el teorema del coseno que es un generalización del teorema de Pitágoras

5.1. Teorema del Coseno

Dado un triángulo ABC, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

O lo que es lo mismo, en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.



5.2. Teorema del Seno

Los lados de un triángulos es directamente proporcional al seno de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

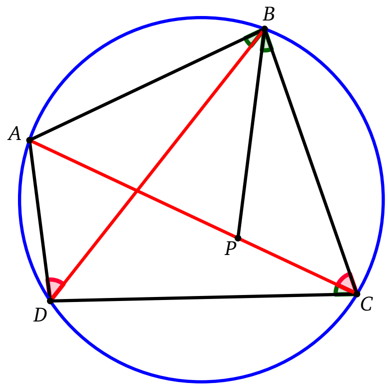
6. Teorema de Ptolomeo

El teorema de Ptolomeo nos indica que un cuadrilátero es convexo e inscriptible si y solo si el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.
O lo que es lo mismo:

Proposición. 6.1.
Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

DEMOSTRACIÓN.

- Empezaremos demostrando que si el cuadrilátero es cíclico, se cumple la expresión dada en el enunciado.
  Consideramos un punto P sobre la diagonal AC, de tal manera que $\widehat{PBC} = \widehat{ABD} = \alpha$.



Dado que $ABCD$ es cíclico, también tenemos que $\widehat{PCB} = \widehat{ADB} = \beta$. De aquí deducimos que los triángulos PBC y ABC son semejantes, por lo que:

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

Como también los triángulos BAP y BDC son semejantes, tenemos que:

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}$$

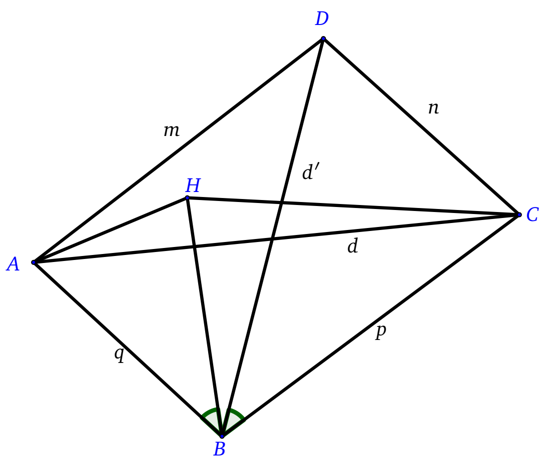
Sumando las dos expresiones obtenidas anteriormente tenemos:

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

por tanto,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

- Demostraremos la otra implicación, es decir, si cumple $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ es un cuadrilátero cíclico. Consideramos el cuadrilátero de la figura de vértices $ABCD$, lados m, n, p, q y diagonales d, d'.



Construimos un triángulo AHB semejante al DCB, de forma que el lado q, se corresponda con d', y los ángulos con vértice B marcados en la figura, sean iguales.
Por la semejanza se cumple:

$$\frac{BH}{p} = \frac{q}{d'} = \frac{AH}{n} \Longleftrightarrow q \cdot n = AH \cdot d'$$

La primera de las igualdades de la proporción junto a la igualdad de los ángulos marcados establece que los triángulos HBC y ABD también sean semejantes (un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman), por tanto:

$$\frac{HC}{m} = \frac{p}{d'} \Longleftrightarrow p \cdot m = HC \cdot d'$$

Y sumando las dos igualdades nos queda:

$$q \cdot n + p \cdot m = AH \cdot d' + HC \cdot d' \geq AC \cdot d' = d \cdot d'$$

Desigualdad válida para cualquier cuadrilátero.
El teorema estará demostrado cuando veamos la condición para que se de la igualdad:

$$q \cdot n + p \cdot m = d \cdot d'$$

$$\Longleftrightarrow H \text{ está alineado con } A \text{ y } C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAH} = \widehat{BDC} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ABCD \text{ es inscriptible.}$$

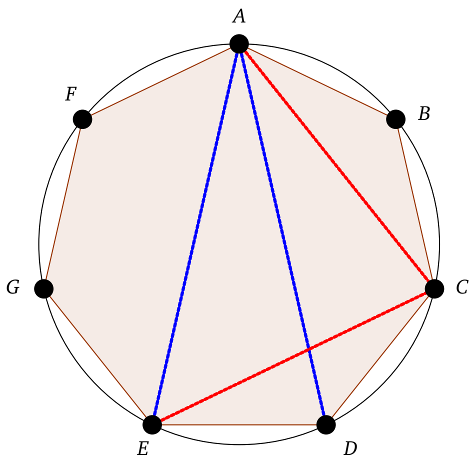
Es decir, es un cuadrilátero cíclico,ya que A y D están en el arco capaz de un mismo ángulo sobre el segmento BC.

□

Problema. 6.2. (Ref. Web (6))
Dado un heptágono $ABCDEFG$ de lado 1, demuestra que las diagonales AC y AD verifican:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$

SOLUCIÓN.
Sea x la longitud de los segmento AC y BD e y, las de los segmentos AD y AE.



Si consideramos el cuadrilátero $ACDE$ por el teorema de Ptolomeo tenemos que $xy = y + x$. Si dicha ecuación la dividimos por x obtenemos: $y = \frac{y}{x} + 1$ y si ahora los dividimos por y, el resultado es: $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$

□

Ejercicio. 6.3. (Ref. Web (5))
Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $AB = BC = CD$, $DE = EF = AF$ y $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = \frac{\pi}{3}$. Sean P y Q dos puntos interiores al hexágono de forma que los ángulos $\widehat{APB}$ y $\widehat{QE}$ valen ambos $\frac{2\cdot\pi}{3}$. Demostrar que:

$$AP + PB + PQ + DQ + QE \geqslant CF$$

SOLUCIÓN.
Sabemos que la longitud de una poligonal es siempre mayor o igual que la distancia que une sus extremos por la desigualdad triangular. Vamos a intentar relacionar $AP + PB + PQ + DQ + QE$ con la longitud de una poligonal.
Consideramos M y N puntos exteriores del hexágono tales que, ABM y DEN sean triángulos equiláteros. En consecuencia, la propiedad de arco capaz nos asegura que P está en la circunferencia circunscrita al triángulo ABM.
Si aplicamos el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $AMBP$, $AP + PB = MP$. De igual modo, obtenemos que $DQ + QE = NQ$ y se cumple que:

$$AP + PB + PQ + DQ + QE = MP + PQ + QN \geq MN$$

ya que $MPQN$ es una poligonal que une M y N, su longitud siempre es mayor que la del segmento MN.

Ahora bien, el octógono $AMBCDNEF$ es simétrico respecto de la recta BE, por las condiciones del enunciado. Luego se tiene que $MN = CF$,por lo tanto demostramos que:

$$AP + PB + PQ + DQ + QE \geqslant CF$$

□

Capítulo III

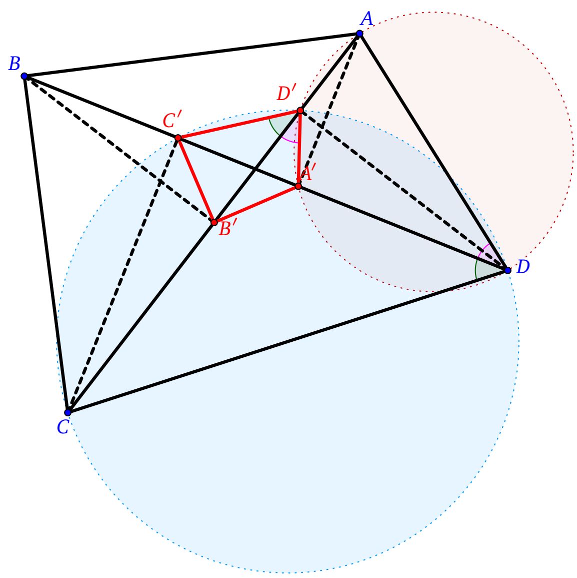
Problemas de Olimpiadas

7. Problemas de Olimpiadas: Fase Local

Una vez recordada la teoría necesaria para la realización de Problemas de Olimpiadas relacionados con nuestra temática, los cuadriláteros. Comenzamos con los problemas propuestos en la fase local, los mismos conllevan un menor grado de dificultad, y han sido extraídos de la página oficial de las Olimpiadas Matemáticas Española.

Ejercicio. 7.1. (Ref. Web (7), 2008)
En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

Solución.
En primer lugar, veamos como es el dibujo para comprender mejor lo que nos están pidiendo:
Si observamos la figura, nos damos cuenta que lo que tenemos que demostrar es que ambos cuadriláteros tienen todos los ángulos iguales.

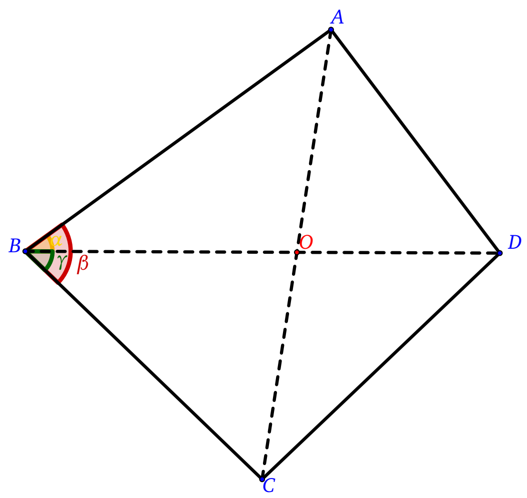


Consideramos el cuadrilátero $ADA'D'$. Sabemos por construcción, que dicho cuadrilátero es circunscriptible y de ahí que $\widehat{B'D'A'} = \widehat{ADA'}$, al ser ambos suplementarios del mismo ángulo $\widehat{AD'A'}$.
Por otro lado, si consideramos el cuadrilátero $DCC'D'$ que es circunscriptible, vemos que los ángulos $\widehat{C'D'B'}$ y $\widehat{A'DC}$ son iguales por estar inscrito en el mismo arco.
Ahora si sumamos los ángulos, obtenemos $\widehat{ADC} = \widehat{C'D'A'}$. De igual forma, demostramos que se dan las siguientes igualdades:
$\widehat{BCD} = \widehat{D'C'B'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{C'B'A'}$, $\widehat{BAD} = \widehat{B'A'D'}$.
Luego, vemos que efectivamente los dos cuadriláteros tienen los mismo ángulos. Por lo que son semejantes.

□

Ejercicio. 7.2. (Ref. Web (7), 2008)
Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O, demuestra que la longitud OA es también racional.

SOLUCIÓN.
Consideramos la siguiente figura:



donde $\alpha = \widehat{ABD}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{CBD}$.
Para resolver este ejercicio vamos a utilizar el teorema del coseno y del seno.
En primer lugar, aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABC:

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \cdot BA \cos \beta$$

despejando, tenemos:

$$\cos \beta = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BC \cdot BA}$$

(que por hipótesis) es un número racional.
De igual modo obtenemos el $\cos \alpha$ y el $\cos \gamma$.
Para obtener el coseno(α) consideramos el triángulo ABD

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA \cdot BD \cos \alpha$$

despejando, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{BA^2 + BD^2 - AD^2}{2BA \cdot BD}$$

(que por hipótesis) es un número racional.
Para obtener el coseno(γ) consideramos el triángulo ABD

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos \gamma$$

despejando, tenemos:

$$\cos \gamma = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC \cdot BD}$$

(que por hipótesis) es un número racional.
Por otra parte, $\cos \beta = \cos(\alpha + \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\gamma$, por lo que $\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma$ es un número racional.

Sabemos, que también es racional $\text{sen}^2\gamma = 1 - \cos\gamma$
Por tanto $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} = \frac{\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma}{\text{sen}^2\gamma}$ es racional.
En segundo lugar, aplicamos el teorema del seno a los triángulos OAB y obtenemos que $\frac{AB}{\text{sen}\widehat{BOA}} = \frac{AO}{\text{sen}\alpha}$ y si lo aplicamos en el triángulo OCB tenemos que $\frac{BC}{\text{sen}\widehat{BOC}} = \frac{OC}{\text{sen}\gamma}$.
Por lo que deducimos que $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} = r$, es un número racional. Luego

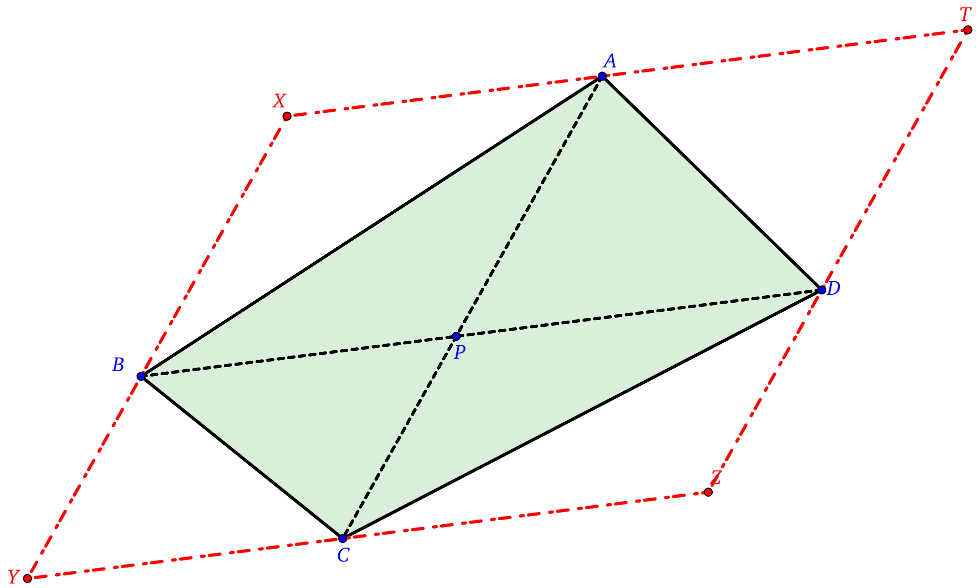
$$AC = OA + OC = (1+r)OA \Longrightarrow OA = \frac{AC}{1+r}$$

y OA es racional.

□

Ejercicio. 7.3. (Ref. Web (7), 2008)
Si un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área, demuestra que es un paralelogramo

SOLUCIÓN.
Partimos del cuadrilátero $ABCD$ dado.

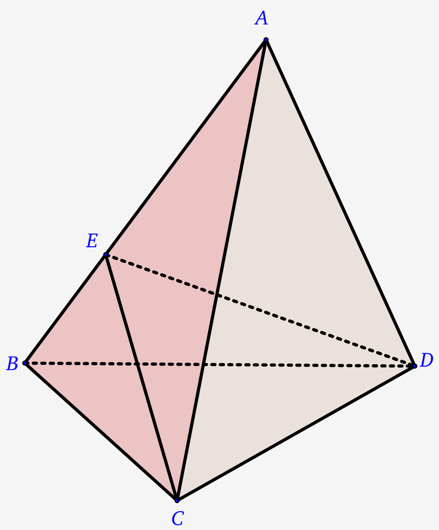


Sabemos que si trazamos paralelas a cada diagonal por los extremos de la otra, se forma un paralelogramo $XYZT$, como observamos en la figura. El cuál tiene el doble de área del cuadrilátero de partida. (Esto es muy sencillo comprobarlo con GeoGebra)
A continuación lo demostramos:

Si tomamos el segmento AC por construcción, vemos que biseca a $ABCD$ y también a $XYZT$, pero siendo $XYZT$ un paralelogramo, y AC paralela a los lados XY y TZ, llegamos a que P es el punto medio de BD.
De igual forma comprobamos que P es el punto medio de AC, ya que el segmento BD por construcción, vemos que biseca a $ABCD$ y también a $XYZT$, pero siendo $XYZT$ un paralelogramo y BD paralela a los lados XT y YZ llegamos a la conclusión que P es el punto medio de AC.
Luego, los triángulos APD y BPC son iguales porque tienen dos lados iguales y también un ángulo. Del mismo modo los triángulos APB y CPD también son iguales.
Entonces llegamos a la conclusión de que el cuadrilátero inicial tiene iguales los lados opuestos, por lo que es un paralelogramo.

□

Ejercicio. 7.4. (Ref. Web (7), 2010)
Se considera un tetraedro regular, como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?



SOLUCIÓN.
En primer lugar, como vemos en el dibujo un tetraedro regular es un poliedro formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros, y cuatro vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras. (Es uno de los cinco poliedros perfectos llamados sólidos platónicos.)
Para simplificar los cálculos, vamos a suponer que el tetraedro tiene arista de longitud 1. Llamamos α al ángulo CED, y x, a la longitud del segmento AE Aplicamos el teorema del coseno al triángulo AEC obteniendo:

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60^0 = x^2 + 1 - x$$

Por otra parte,se tiene que la longitud EC es igual a la longitud ED, por simetría. De nuevo, aplicando el teorema del coseno, ahora para el triángulo EDC, resultando que:
$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos\alpha \Longrightarrow 1 = 2(x^2 - x + 1) \cdot (1 - \cos\alpha)$ Despejando se tiene que: $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2(x^2 - x + 1)}$
La función coseno es decreciente en el primer cuadrante, por lo que para encontrar el valor máximo de α tenemos que buscar el valor de $x \in [0, 1]$ que haga mínima la función,es decir, que haga mínimo el denominador.
Vamos a sacar el mínimo del denominador, para ello hacemos la derivada de $2(x^2 - x + 1)$ que es $4x - 2$, seguidamente la igualamos a 0 por lo que el mínimo se alcanza cuando $x = \frac{1}{2}$.
Luego, el $\widehat{CED}$ es máximo cuando E es el punto medio del lado AB. En ese caso tenemos: $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

□

Finalizado el ejercicio, me planteo lo siguiente:

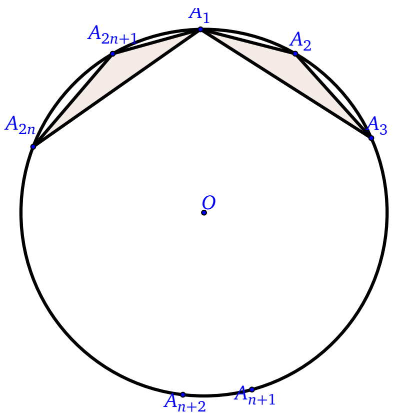
Pregunta. 7.5.
¿Y cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es mínimo?

SOLUCIÓN.
Para ver cuándo el $\widehat{CED}$ es mínimo tenemos que sacar el máximo del denominador.
En este caso, como solo nos ha salido un punto crítico, el cuál era mínimo, el máximo se alcanza en los extremos, es decir en 0 y en 1, por lo que α vale para $x0$, $\alpha = \arccos\frac{1}{2}$ y para $x = 1$, $\alpha = \arccos\frac{1}{2}$.
Luego, el ángulo $\widehat{CED}$ es mínimo cuando el punto $E = A$ ó $E = B$.

□

Ejercicio. 7.6. (Ref. Web (7), 2012)
Los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n + 1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo.

SOLUCIÓN.
En primer lugar, sabemos que al tener un número impar de vértices $(2n + 1)$, no es posible construir triángulos rectángulos.



Observando la figura, voy a intentar resolver el problema dejando un vértice agudo fijo y viendo cuántos triángulos podemos formar.
Vemos que cualquier triángulo obtusángulo va a dejar el centro de la circunferencia ,O, fuera de él. Por lo que si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O, podemos conseguir que uno de los vértices agudos esté en A_1. Los otros dos ángulos estarán en el conjunto $\{A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}\}$, ó bien en $\{A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots, A_{2n+1}\}$. El número buscado es $2\binom{n}{2}$.
Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n+1$ vértices, quedarán $2(2n+1)\binom{n}{2}$ triángulos. Antes de finalizar, tenemos que ser consciente de que cada triángulo lo hemos contado 2 veces, uno para cada vértice agudo. En conclusión, la solución buscada es

$$(2n+1)\binom{n}{2}$$

Como todo problema matemático, podemos intentar resolverlo por otro método.
Así teniendo la misma idea de fijar un ángulo agudo, en este caso el A_1, los tres lados del triángulo abarcarán respectivamente x, y, y z lados del polígono de $2n+1$ lados. Entonces, tenemos que $x+y+z=2n+1$. El lado opuesto al ángulo obtuso , digamos z, deberá cumplir $z \geq n+1$.
Por lo que tenemos que calcular el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x+y+z=2n+1$, para saber cuántos triángulos obtusángulo hay.
Para resolver dicha ecuación tenemos que considerar una condición, es decir, fijar una variable, por ejemplo z, la cuál sabemos que puede tomar $2n+1$ valor.

- Si z=n+1, queda $x+y=n$ que tiene $n-1$ soluciones.
- Si z=n+2, queda $x+y=n-1$ que tiene $n-2$ soluciones.
- ...
- Si z=2n-1, queda $x+y=1$ que tiene 1 solución.

Luego, en total hay:

$$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}.$$

Soluciones con el ángulo obtuso en A_1. Si consideramos todas las posibilidades para dicho ángulo, en total queda

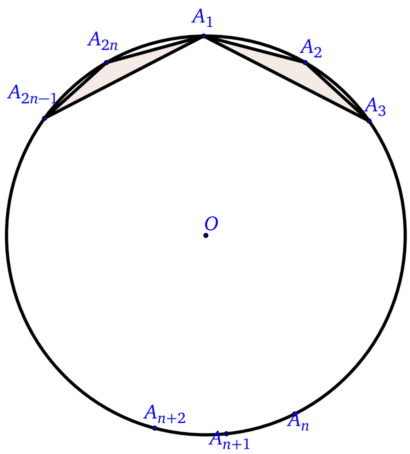
$$(2n+1)\binom{n}{2}.$$

□

Ejercicio. 7.7. (Ref. Web (7), 2012)
Los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo y el número de ternas tales que el triángulo es acutángulo.

SOLUCIÓN.
En este ejercicio tenemos un número par de vértices $2n$, por lo que a diferencia del ejercicio anterior, aquí si podemos formar triángulos rectángulos. Cuyas hipotenusas estarán sobre los n diámetros del polígono.
Para cada diámetro fijado, el ángulo recto del triángulo puede ser cualquiera de los $(2n-2)$ vértices sobrantes.
Luego, en total, los triángulos rectángulo que podemos obtener son

$$Rn = n(2n-2) = 2n(n-1)$$



Ahora vamos a calcular los triángulos acutángulos. Para ello se me ocurre calcular los triángulos obtusángulos (del mismo modo que el ejercicio anterior) y restar al total los triángulos obtusángulos y los triángulos rectángulos (ya calculados).
Sabemos que cualquier triángulo obtusángulo va a dejar el centro de la circunferencia, O, fuera de él.
Por lo que si lo giramos en sentido directo, o inverso, alrededor de O, podemos conseguir que uno de

los vértices agudos esté en A_1. Los otros dos ángulos estarán en el conjunto $\{A_2, A_3, \ldots, A_n\}$, ó bien en $\{A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots, A_2 n\}$
Luego, el número buscado será $2\binom{n+1}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n$ vértices, quedarán $2(2n)\binom{n-1}{2}$ triángulos. Tenemos que darnos cuenta de que cada triángulo lo hemos contado 2 veces, uno para cada vértice agudo. Luego, el número de triángulos obtusángulo será $On = (2n)\binom{n-1}{2}$
En conclusión, el número de triángulos acutángulos An será el número total de triángulos $\binom{2n}{3}$ menos los triángulos rectángulos Rn y los obtusángulo On.

$$An = \binom{2n}{3} - Rn - On = \binom{2n}{3} - 2n(n-1) - 2n\binom{n-1}{2} = \frac{2n!}{(2n-3)!3!} - 2n(n-1) - 2n\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} =$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{(2n-3)!3!} - 2n(n-1) - \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)2!} = \ldots = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = 2\binom{n}{3}$$

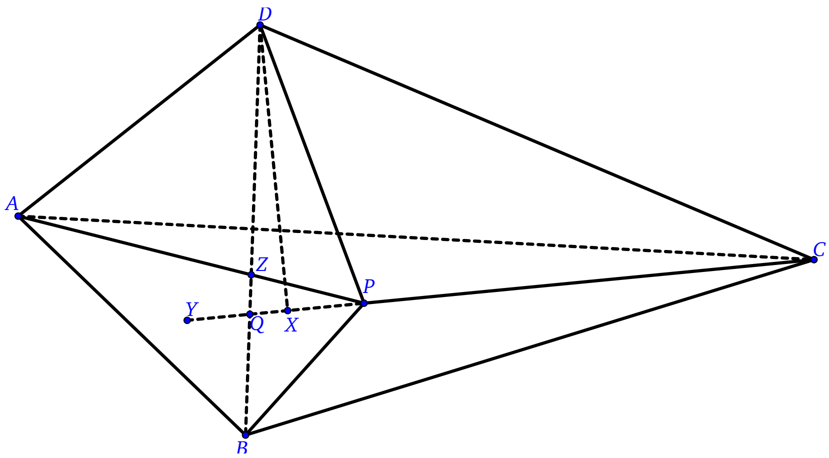
Luego,

$$An = 2\binom{n}{3}$$

□

Ejercicio. 7.8. (Ref. Web (7), 2012)
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD y PDA tengan la misma área.

SOLUCIÓN.
Consideramos los triángulos PCD y PCB



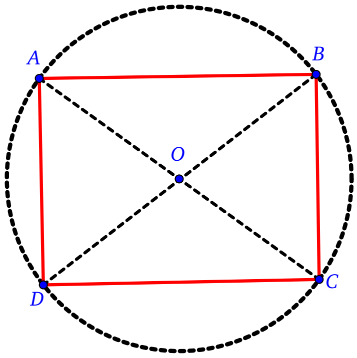
Observando la figura, vemos que tienen la base común PC, y las alturas correspondiente son DX y BY.
Por lo tanto si queremos que tengan la misma área, tienen que tener la misma altura, es decir $DX = BY$.
Para que se de esto, el punto Q tiene que ser el punto medio de la diagonal BD y Q tiene que estar en la recta PC.
Del igual forma, consideramos los triángulos PBA y PDA, en este caso la base común es PA y las alturas son DZ y BZ, las cuales tienen que ser iguales para que tengan la misma área, por lo que Z tiene que ser el punto medio de la diagonal BD y pasar por la recta PA. Luego $Z = Q$.
Entonces, AP tiene que pasar por Q. Luego AP y PC tienen dos puntos comunes, P y Q. Sin más remedio AP y PC están alineados. Es decir, son las diagonales AC
De modo que es necesario que las dos diagonales se corten en el punto medio de una de ellas. Pero mirando los triángulos PDA y PDC, que tienen la misma área, resulta que P tiene que ser el punto medio de AC.
Luego, llegamos a la conclusión de que la condición que nos piden consiste en que las diagonales del cuadrilátero se corten en el punto medio de una de ellas, y el punto P sea el punto medio de la otra.

□

Una vez que hemos resuelto este ejercicio, me resulta interesante plantear la siguiente cuestión:

Pregunta. 7.9.
¿Cómo debería ser el cuadrilátero cíclico para que el centro de la circunferencia fuese el punto P y que los cuatro triángulos de un cuadrilátero tengan la misma área?

SOLUCIÓN.
Jugando un poco con Geogebra, nos resulta muy sencillo ver, que realmente el centro de la circunferencia es el punto medio de una diagonal (AC), también tiene que ser el punto medio de la otra diagonal (BD), ya que estamos en una circunferencia y las diagonales miden lo mismo. Por lo tanto, el cuadrilátero cíclico tiene que tener paralelos sus lados opuestos, y por tanto es necesariamente un rectángulo.



□

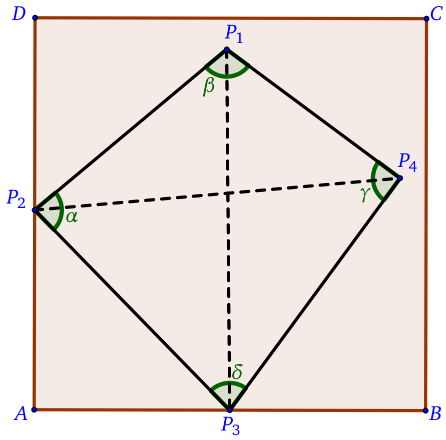
8. Problemas de Olimpiadas: Fase Nacional

En esta sección vamos a analizar algunos problemas con mayor grado de dificultad con respecto la sección anterior ya que son propuestos en la fase nacional, relacionados siempre con las figuras geométricas. Los problemas se han extraídos de la página oficial de las Olimpiadas Matemáticas Española.

Ejercicio. 8.1. (Ref. Web (7), 2000)
Tomemos cuatro puntos situados en el interior o en el borde de un cuadrado de lado 1*. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que* 1*.*

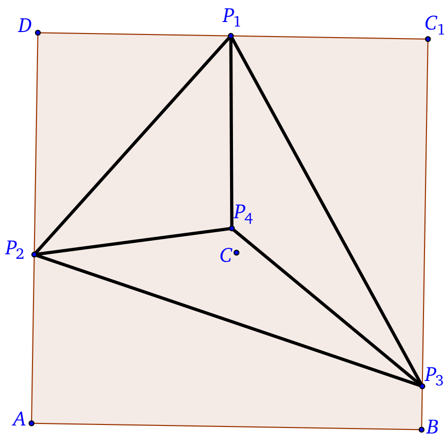
SOLUCIÓN.
Este ejercicio vamos a intentar resolverlo por reducción al absurdo.
Supongamos que distribuimos 4 puntos en el cuadrado de manera que cada una de las seis distancias sea mayor que 1.
Entonces tenemos dos posibilidades, la cuales vamos a estudiar:

1. Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo.
   En este caso tendríamos la siguiente figura:



Consideramos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos del cuadrilátero convexo. Por lo que $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0$.
Además cualquier pareja de puntos del interior,(o frontera) del cuadrado están a una distancia $d \leq \sqrt{2}$ ya que el diámetro del cuadrado mide $\sqrt{2}$
De la condición $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0$, se deduce que necesariamente uno de los ángulos ha de ser mayor o igual que 90^0, digamos por ejemplo $\alpha = 90^0$.
Entonces, tenemos: $\overline{P_iP_j} > 1, i \neq j, i, j = 1,2,3,4$.
Luego, $\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}^2 \cdot \overline{P_2P_3}^2 \cdot \cos\alpha$
como el cuadrilátero es convexo, $90^0 \leq \alpha \leq 180^0$ y por tanto $\cos\alpha \leq 0$ y en consecuencia:
$\overline{P_1P_3}^2 \geq \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 \Longrightarrow \overline{P_1P_2} > \sqrt{2}$.
Por lo que llegamos a una contradicción. Entonces nos damos cuenta de que el error ha estado en tener que $\overline{P_iP_j} > 1, i \neq j, i, j = 1,2,3,4$.
En conclusión al menos dos de ellos están a una distancia menor o igual que 1.

2. Los cuatro puntos forman un cuadrilátero no convexo.
   Si se forma un cuadrilátero no convexo podemos elegir tres puntos de los cuatro puntos formando un triángulo de modo que el cuarto punto sea interior, como podemos ver en la figura:



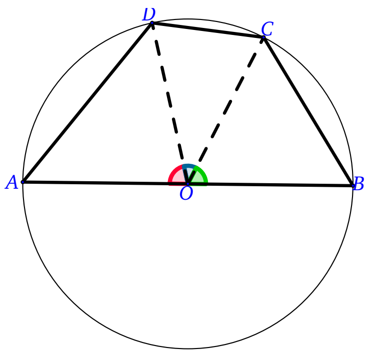
Vamos a suponer que el punto interior sea P_4. Sabemos que cada lado de dicho triángulo es menor o igual que $\sqrt{2}$ (diámetro del cuadrado) y por tanto estará contenido en el triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, y su circunradio es $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Por lo tanto, si su centro es C, P_4 estará en el interior y la distancia de P_4 a uno de los vértices será menor o igual que el circunradio , es decir menor que $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ y por tanto menor que 1. Luego, hemos encontrado un par de puntos a distancias menor o igual que 1. Por último, si tres puntos están alineados se reduce al caso (1),es decir, si llamamosx_1, x_2, x_3 a las distancias entre puntos consecutivos, tenemos: $x_1, x_2, x_3 \leq \sqrt{2}$ y por el principio del palomar, uno de ellos, digamos $x_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$. Luego queda demostrado el ejercicio para los posibles casos.

□

Ejercicio. 8.2. (Ref. Web (7), 2001)
$ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita. Probar que:

$$CD \leq 2\sqrt{5} - 4$$

SOLUCIÓN.
Para resolver el ejercicio, primero vamos a ver la figura que tenemos:



Observando la figura, tenemos que O es el centro de la circunferencia, y vamos a llamar $2\alpha = \widehat{BOC}, 2\beta = \widehat{AOD}, 2\gamma = \widehat{COD}$. Para que el cuadrilátero $ABCD$ admita una circunferencia inscrita tiene que cumplir que la suma de los lados opuestos sean iguales, es decir

$$CD + 2 = BC + AD$$

Por otra parte, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^0 \implies \beta = 90 - (\alpha + \gamma)$ y además, por trigonometría, tenemos que: $BC = 2\text{sen}\alpha, DC = 2\text{sen}\gamma, AD = 2\text{sen}\beta = 2\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2\text{sen}\alpha\text{sen}\gamma$

A continuación, expresamos la condición $CD+2=BC+AD$ en función de α y el segmento $\overline{DC}$ que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\frac{DC^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-DC^2}}{2}$$

donde $AD = \sqrt{4-DC^2}\cos\alpha - DC\operatorname{sen}\alpha$ sustituyendo nos queda:

$$DC+2 = 2\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{4-DC^2}\cos\alpha - DC\operatorname{sen}\alpha$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{4-DC^2}\cos\alpha + (2-DC)\operatorname{sen}\alpha = DC+2$$

Por lo que, existirá circunferencia inscrita para los valores de DC que hagan compatible la última ecuación con la incógnita α. En este momento se me ocurren dos caminos para seguir: Uno expresar el seno en función del coseno y estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene; Y otro, el que voy a desarrollar interpretando la ecuación como producto escalar de vectores. Los vectores que tenemos son $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, \sec\alpha)$ de módulo 1 y $\overrightarrow{v} = (\sqrt{4-DC^2}, 2-DC)$. Por lo tanto, la condición nos queda: $|\overrightarrow{v}|\cos\delta = DC+2$ siendo $\delta = \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$.
Para que dicha condición sea compatible debe cumplirse $DC+2 \le |\overrightarrow{v}| = \sqrt{4-DC^2+(2-DC^2)}$, elevando al cuadrado y operando, nos queda: $DC^2+8DC-4 \le 0$.
Las raíces de esta ecuación es $DC = \pm 2\sqrt{5}-4$, teniendo en cuenta que DC es un segmento no puede ser negativo, por lo tanto la condición final es:

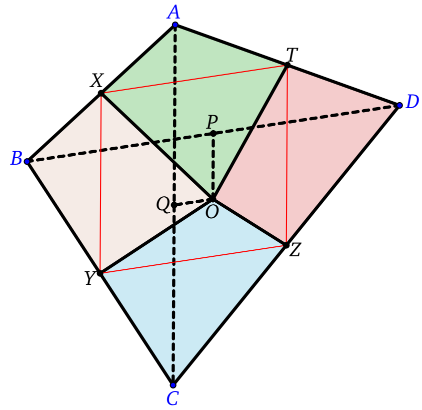
$$0 \le DC \le 2\sqrt{5}-4$$

□

Ejercicio. 8.3. (Ref. Web (7), 2004)
$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O. Si unimos O con los cuatro puntos medios de los lados X, Y, Z, T se forman cuatro cuadriláteros $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$. Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

Comparar con el Ejercicio (7.8.).

SOLUCIÓN.
En primer lugar, hacemos un dibujo plasmando los datos de los que partimos:



Observando la figura, para demostrar que los cuatro cuadriláteros, de distintos colores, tienen la misma área, podemos probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total. Por un lado, tenemos que la quebrada APC divide al cuadrilátero en dos partes de igual área, ya que AP es la mediana de ABD y PC es la mediana de CBD.

Por otro parte, la quebrada TPZ divide al cuadrilátero $APCB$ en dos partes de igual área, pues PT es la mediana de APD y PZ es la mediana de CPD.

Luego tenemos ya probado que el área del cuadrilátero $TPZD$, es la cuarta parte del área total del cuadrilátero inicial.

Finalmente TZ es paralela a OP por serlo amabas a AC, luego los triángulos TPZ y TOZ tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros $TPZD$ y $TOZD$.

Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

Para finalizar el ejercicio lo podemos comprobar fácilmente con GeoGebra.

Como todo ejercicio de matemáticas hay otra forma de realizarlo,la cual vamos a ver a continuación:

Sabemos que la superficie de un cuadrilátero se calcula como el semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo que forman, es decir: $S = \frac{AC \cdot BD \operatorname{sen}\alpha}{2}$ donde $\alpha = \widehat{AC, BD}$

Además, $ZT = XY = \frac{AC}{2}$ al ser ZT la paralela media del triángulo ACD y XY la paralela media del triángulo ABC

Igualmente: $XT = ZY = \frac{BD}{2}$.

Para probar el enunciado bastará probar que:

$$\frac{AC \cdot BD}{2} \operatorname{sen}\alpha = 4XT \cdot AO \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$AC \cdot BD \operatorname{sen}\alpha = 2XT \cdot AO \operatorname{sen}\beta$$

$$AC \operatorname{sen}\alpha = 2AO \operatorname{sen}\beta$$

$$AQ \operatorname{sen}\alpha = AO \operatorname{sen}\beta$$

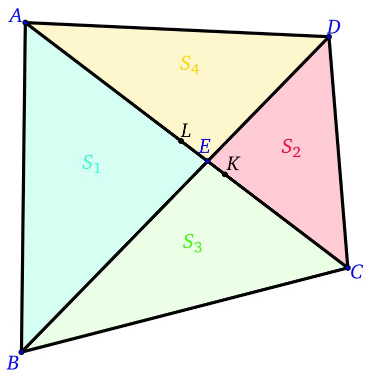
$$\frac{AQ}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AO}{\operatorname{sen}\alpha}$$

hemos llegado al teorema del seno en el triángulo AQO
Queda probado el enunciado por extensión de la demostración a los 4 cuadrilátero pequeños que resulta ser una cuarta parte del grande.

□

Ejercicio. 8.4. (Ref. Web (7), 2006)
Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en E. Denotamos por S_1 y S_2 a las áreas de los triángulos ABE, CDE y del cuadrilátero $ABCD$ respectivamente. Prueba que $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leq\sqrt{S}$. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

SOLUCIÓN.



Como podemos ver en la figura, llamamos S_3 al área del triángulo BEC, y S_4 a la del triángulo AED. Entonces tenemos que demostrar que: $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leq\sqrt{S}$,es decir

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leq\sqrt{S_1+S_2+S_3+S_4}$$

Elevando al cuadrado obtenemos: $S_1+S_2+2\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\leq S_1+S_2+S_3+S_4$, operando $2\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\leq S_3+S_4$
Consideramos ahora K y L los pies de las perpendiculares en la diagonal AC trazadas desde D y B respectivamente.
Entonces tenemos que: $S_1=\frac{1}{2}AE\cdot BL$, $S_2=\frac{1}{2}CE\cdot DK$, $S_3=\frac{1}{2}CE\cdot BK$, $S_4=\frac{1}{2}AE\cdot DL$ Sustituyendo esta expresión en la desigualdad anterior se llega a :

$$\sqrt{AE\cdot BL-AE\cdot DK}\leq\frac{1}{2}(CE\cdot BK+AE\cdot DL)$$

que es precisamente la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de los dos productos $CE\cdot BK$ y $AE\cdot DL$.
Esta última desigualdad se alcanza si y solo si $CE\cdot BK=AE\cdot DL\iff\frac{BK}{DL}=\frac{AE}{CE}$ Las rectas BK y DL

son paralelas.
Así $\frac{BK}{DL} = \frac{BE}{DE}$, por la semejanza entre los triángulos BKE y DLE, por lo tanto

$$CE \cdot BK = AE \cdot DL \Longleftrightarrow \frac{BK}{DL} = \frac{AE}{CE}$$

se convierte en

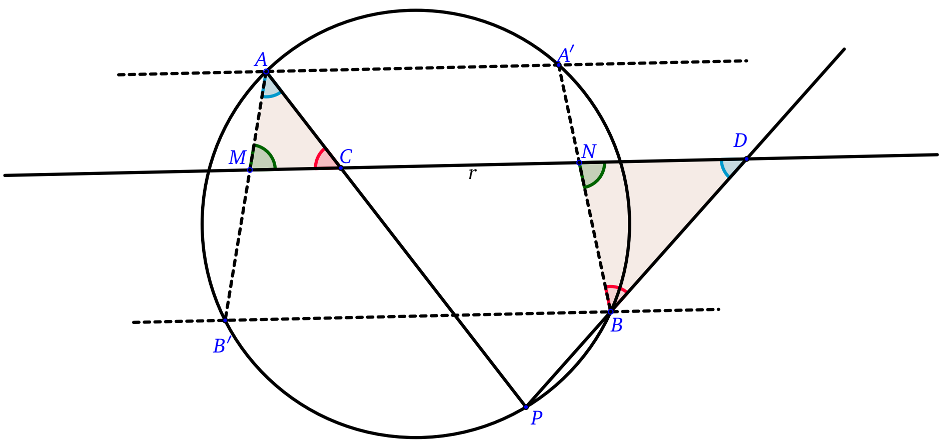
$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$$

Y recíprocamente por la semejanza de triángulos, $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ se verifica $\Longleftrightarrow AB\, y\, CD$ son paralelas, es decir el cuadrilátero dado es un trapecio con los lados paralelos AB y CD

□

Ejercicio. 8.5. (Ref. Web (7), 2008)
Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos A y B, otro variable P y una recta r. Se trazan las rectas PA y PB que cortan a r en C y D respectivamente. Determina dos puntos fijos M y N de r, tales que el producto $CM \cdot DN$ sea constante al variar P.

SOLUCIÓN.
Empezamos trazando una paralela a r que pase por A y corte a la circunferencia en A'. Y seguidamente trazamos otra paralela que pase por B y corte a la circunferencia en B', de modo que tenemos un trapecio isósceles formado por $AA'BB'$.



Como vemos en la figura los puntos de intersección de AB' y BA' con r, van a determinar los puntos fijos M y N que buscamos.
Por lo tanto, los triángulos que vemos sombreado en el dibujo, AMC y el NBP son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales (como podemos observar), $\widehat{MAC} = \widehat{B'BP}$ por ser ángulos inscrito en

el mismo arco y $\widehat{B'BP} = \widehat{NDB}$ por seerBB' paralela a r, por lo tanto $\widehat{MAC} = \widehat{NDB}$. Con los mismo argumentos tenemos que $\widehat{AMC} = \widehat{AB'B} = \widehat{DNB}$.
Si establecemos ahora la proporcionalidad de los lados obtenemos que:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{ND}{BN} \Longleftrightarrow MC \cdot ND = AM \cdot BN$$

resultado que no depende de P.
En resumen, si la recta r pasa por el punto A, entonces $M = A = C$, por lo que no se forma en triángulo AMC. En este caso $CM = 0$ y el producto $CM \cdot DN = 0$ es constante. De igual modo, este producto es cero si la recta r pasa por el punto B o por los puntos A y B en cuyo caso tendríamos $CM = DN = 0$. Luego queda demostrado el ejercicio.

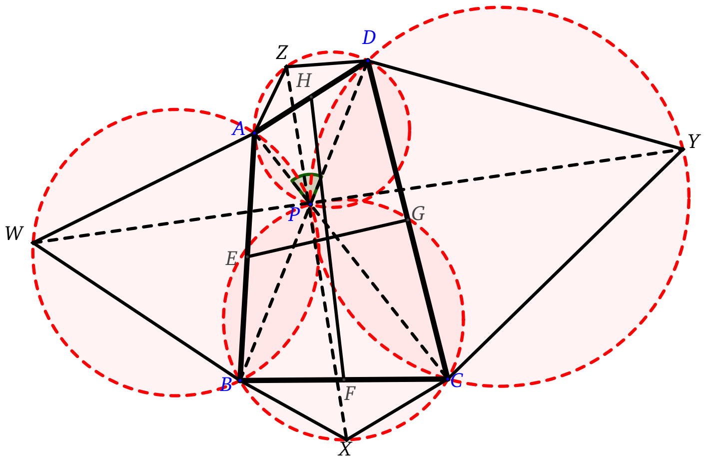
□

Ejercicio. 8.6. (Ref. Web (7), 2010)
Sea $ABCD$ un cuadrilátero conexo. Sea P la intersección de AC y BC. El ángulo $< APD = 60^0$. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Halla el mayor número real positivo K tal que

$$EG + 3HF \geqslant kd + (1-k)s$$

siendo s el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y d la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

SOLUCIÓN.
En primer lugar vamos a demostrar que $k = 1 + \sqrt{3}$ y que la igualdad se da sí y solo si, $ABCD$ es un rectángulo.



En primer lugar, vamos a considerar cuatro puntos exteriores a $ABCD$ que van a ser W,X, Y, Z. Elegiremos los puntos de tal forma que los triángulos ABW y DCY son equiláteros, el triángulo BCX sea isósceles en X, y el triángulo AZD sea isósceles en Z y $\widehat{BXC} = \widehat{AZD} = 120^0$.
Los cuadriláteros $WAPB$, $XBPC$, $YCPD$ Y $ZDPA$ son cíclicos.
Luego, aplicando el teorema de Ptolomeo, se obtiene que:

$$WP = PA + PB, XP\sqrt{3} = PB + PC, YP = PC + PD, ZP\sqrt{3} - 0PD + PA$$

Por otro lado,

$$\widehat{WPY} = \widehat{WPB} + 60^0 + \widehat{CPY} = \widehat{WAB} + 60^0 + \widehat{CDY} = 180^0$$

Luego, W, P, Y están alineados y, de igual modo Z, P, X también lo están.
Por lo que

$$WY = WP + PY = PA + PB + PC + PD = AC + BC$$

$$XZ = XP + PZ = \frac{1}{3}(PB + PC + PD + PA) = \frac{1}{3}(AC + BD)$$

Por la desigualdad triangular, obtenemos:

$$WY \leq WE + EG + GY, XZ \leq XF + FH + HZ$$

Luego:

$$AC + BD \leq AB\frac{1}{3} + EG + DC\frac{1}{3}, \frac{1}{3}(AC + BD) \leq \frac{BC}{2} + FH + \frac{AC}{2\sqrt{3}}$$

Si sumamos las dos desigualdades tenemos:

$$(1 + \sqrt{3})(AC + BC) \leq EG + 3FH + s\sqrt{3}$$

lo que es lo mismo:

$$EG + 3FH \geq (1 + \sqrt{3})d - s\sqrt{3}$$

Luego, si $k = 1 + \sqrt{3} \Longrightarrow EG + 3FH \geq kd + (1 - k)s$
Entonces la igualdad se da, si y sólo si, tenemos por un lado que los puntos W, E, G, Y están alienados, y por otro lado X, F, H, Z también lo están.
Como WE es perpendicular a AB, y GY es perpendicular DC, por tanto AB y DC deben de ser paralelos. De igual forma, AD y BC también deben de ser paralelos.Luego $ABCD$ debe ser un paralelogramo.
Además, la recta EG es perpendicular a DC, lo que implica que $ABCD$ es un rectángulo.
Por lo tanto, llegamos a la conclusión,que $EG + 3FH = kd + (1 - k)s$ se da si $ABCD$ es un rectángulo.
Ahora bien, sea un número real positivo l tal que $EG + 3FH \geq ld + (1 - l)s$. En consecuencia, si $ABCD$ es un rectángulo tenemos: $kd + (1 - k)s \geq ld + (1 - l)s$, es decir $k(d - s) \geq l(d - s)$
Pero la desigualdad triangular, implica que $d > s$, por lo que $k \geq l$. Luego el número real buscado es $k = 1 + \sqrt{3}$ y la igualdad se da s, y sólo si, $ABCD$ es un rectángulo.

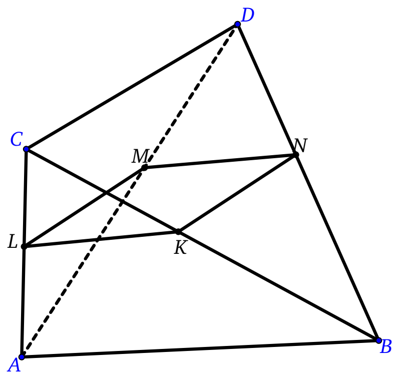
□

9. Problemas de Olimpiadas: Fase Internacional

En última instancia,vamos a desarrollar los problemas con mayor grado de dificultad, los cuales son propuesto en la fase internacional. Debemos de tener en cuenta que los mismos versan sobre la temática de cuadriláteros.

Ejercicio. 9.1. (IMO[1, pag. 44], 1965)
Sea $ABCD$ un tetraedro, no regular, y $AB = a$, $CD = b$. La distancia entre los segmentos AB y DC es d y su ángulo es ω. Sea P el plano paralelo a AB y a DC tal que el radio entre las distancias de P y a AB y DC es k. El plano P divide al tetraedro en dos sólidos geométricos.
Encontrar el radio entre los volúmenes de esos dos sólidos.

SOLUCIÓN.
En primer lugar vamos hacer el dibujo plasmando los datos facilitados.



Como vemos en la figura hemos consideramos K, L, M, N los puntos de intersección entre el plano P y los segmentos BC,AC,AD,BD respectivamente.
Tenemos que KL es paralelo a AB, LM es paralelo a CD, MN es paralelo a AB, y NK es paralelo a CD. Luego el cuadrilátero $KLMN$ es un paralelogramo, ya que LM es paralelo a CD y LK es paralelo a AB. También tenemos que el $\widehat{MLK} = \omega$.
Luego el área del paralelogramo es:

$$S = KL \cdot LM \operatorname{sen}\omega$$

Por otro lado, consideramos x la distancia entre el plano P y el segmento CD, teniendo:

$$\frac{d-x}{x} = k \Longrightarrow \frac{d}{x} = k+1$$

De igual forma tenemos:

$$\frac{d}{x} = \frac{AB}{KL} \text{y} \frac{d}{d-x} = \frac{CD}{LM}$$

Luego , obtenemos que:

$$KL = \frac{ax}{d}, LM = \frac{b(d-x)}{d} y S = S(x) = \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \cdot \operatorname{sen}\omega$$

Entonces tenemos que el volumen es:

$$Vol(KLMNCD) = \int_0^x S(t)dt = (\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2})\operatorname{sen}\omega$$

y

$$Vol(KLMNAB) = \int_0^{d-x} S(t)dt = (\frac{ab(d-x)^2}{2d} - \frac{ab(d-x)^3}{3d^2})\operatorname{sen}\omega$$

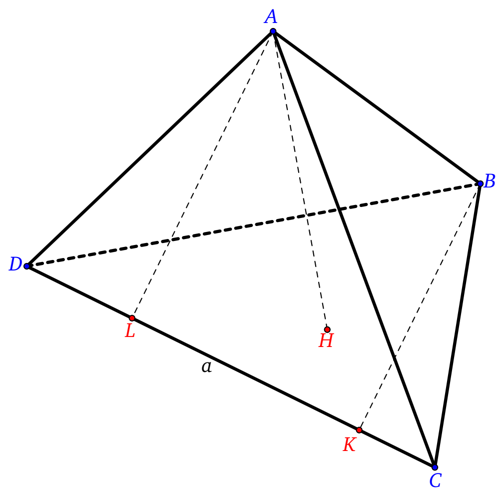
Luego, el radio entre los volúmenes de los dos sólidos es:

$$\frac{Vol(KLMNAB)}{Vol(KLMNCD)} = k^2\frac{3k+3}{3k+1}$$

□

Ejercicio. 9.2. (IMO[1], 1967)
Sea un tetraedro, no regular, tal que solo uno de sus lados tiene una longitud mayor que 1. Demostrar que el volumen del tetraedro no es mayor que $\frac{1}{8}$.

SOLUCIÓN.
En primer lugar, vamos a fijar el segmento que va a ser mas largo que 1, el cuál será $CD = a$ y veamos como queda el dibujo.



Tenemos que los lados de los triángulos ADC y BDC son menores que 1. Tenemos que tener cuidado, y no confundir los lados,que hemos fijado con a, con la base.
Ahora, consideramos el triángulo BDC cuya altura es BK, es máxima cuando $DB = CB = 1$ y en este caso obtenemos que: $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Luego

$$BK < \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

Del mismo modo, considerando el triángulo DAC cuya altura es AL, la cual es máxima cuando $AD = AC = 1$ y por lo que obtenemos que:

$$AL < \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

Análogamente, considerando el triángulo ADB cuya altura es AH, la cual es máxima cuando $AD = AB = 1$ obteniendo en este caso que:

$$AH < \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

En conclusión el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a(1-\frac{a^2}{4}) = \frac{1}{24} a(4-a^2)$$

Finalmente, solo queda ver que $a(4-a^2) \leq 3$
Para ello se me ocurre estudiar la función.
Sacamos las raíces de $a(4-a^2) = 3$, las cuales son $a_1 = 1, a_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, a_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Como vemos la solución es $a_3 < 0$, por lo que la descartamos, ya que a es un segmento y tiene que ser positivo.
Ahora estudiamos la función entre $[0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$. Es fácil ver (comprobando) que el valor máximo que toma $a(4-a^2)$ es cuando $a = 1$ que vale 3.
En conclusión,

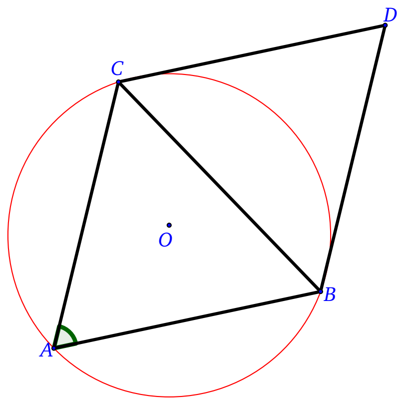
$$V \leq \frac{1}{8}$$

□

Ejercicio. 9.3. (IMO[1, pag. 56], 1967)
Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que $AB = a$, $AD = 1$ y $\widehat{BAD} = \alpha$ y ABD es un triángulo agudo. Probar que es posible cubrir el paralelogramo con 4 círculos K_A, K_B, K_C, K_D de centros A, B, C, D, respectivamente, si y sólo si

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3} sen\alpha$$

SOLUCIÓN.
Como partimos de un paralelogramo, si trazamos una de las diagonales, por ejemplo BD tenemos dos triángulos simétricos ABD y BDC, como vemos en la figura.



Por lo tanto, para resolver el ejercicio, solo tenemos que buscar una solución necesaria y suficiente para que el triángulo ABD esté cubierto por K_A, K_B, K_D.
Sea T la circunferencia circunscrita del triángulo ABD y de centro O, sabemos que por ser el triángulo agudo O está dentro de él.
Sabemos que: $OA = OB = OD = R$, y para cualquier punto P interior, al menos una de las distancias PA, PB, PD es menor que R.
Esto es fácil de ver, considerando los seis triángulos interiores de ABD, determinados por los segmentos OA, OB, OD y las mediatrices de los segmentos AB, BD, DA
Luego, ABD está cubierto por $K_A, K_B, K_D \iff R \leq 1$.
En el triángulo ABD, el radio R viene determinado por

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot DA}{4S}$$

donde S es el área.
Tenemos $BD^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$ y $S = \frac{1}{2}a\text{sen}\alpha$. Luego:

$$R < 1 \iff a^2(a^2 + 1 - 2a\cos\alpha) \leq 4a^2\text{sen}^2\alpha \iff$$

$$\iff a^2 + 1 - 2a\cos\alpha \leq 4 - 4\cos^2\alpha \iff$$

$$\iff a^2 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha \leq 3\text{sen}^3\alpha \iff$$

$$\iff |a - \cos\alpha| \leq \sqrt{3}\text{sen}\alpha$$

En consecuencia, en el triángulo ADB, $\cos\alpha$ es la longitud de la proyección del segmento AD en AB y luego $a > \cos\alpha$. Sustituyendo esto, en la condición que hemos obtenido anteriormente, tenemos:

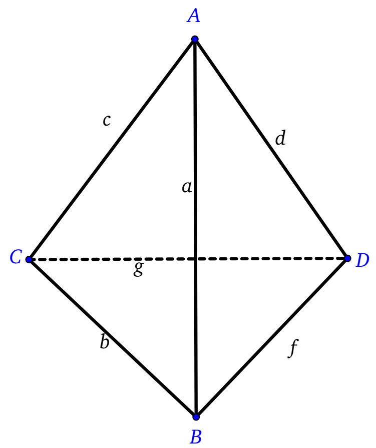
$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\text{sen}\alpha$$

Demostrando así el ejercicio, por la simetría del problema.

□

Ejercicio. 9.4. (IMO[1, pag. 63], 1968)
Demostrar que en cualquier tetraedro, no regular, existe un vértice tal que los lados que salen de él son los lados de un triángulo.

SOLUCIÓN.
Sea $ABCD$ un tetraedro y considerando $AB = a$, su lado más largo. Para mayor comodidad tomamos $AC = c, AD = d, BC = d, BD = f, CD = g$.
Vamos a demostrar que, el vértice A, o el vértice B, se puede elegir como respuesta al problema.



Supongamos que A no cumple la condición: $c + d \leq a$.
De lo contrario, A cumple: $a + c > d$ y $a + d > c$. De los triángulos ABC y ABD obtenemos: $c + d > a$ y $d + f > a$
Sumando las dos desigualdades obtenemos: $2a < b + c + d + f$
Si unimos ahora estas dos desigualdades $2a < b + c + d + f$ y $c + d \leq a$ conseguimos: $b + f > a$.
Luego, los lados que salen del vértice B son los lados de un triángulo.

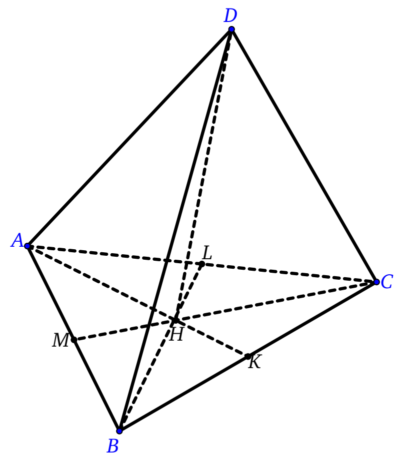
□

Ejercicio. 9.5. (IMO[1, pag. 80], 1970)
Sea $ABCD$ un tetraedro, no regular, tal que BD es perpendicular a DC y el pie de las perpendicular desde D en la cara ABC es el ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

¿Cuándo se da la igualdad?

SOLUCIÓN.
Consideramos H el ortocentro del triángulo ABC. Sabemos que un tetraedro, donde H es el pie de la altura desde D, tiene los lados opuestos perpendiculares.



Para demostrar esto, vamos a ver el plano generado por las líneas de AH y DH y observaremos que BC es perpendicular a ella.
De este modo, BC es perpendicular a AD. Las otras perpendiculares se obtiene de las misma forma.
Tenemos que DC es perpendicular a BD, y DC es perpendicular a AB, por lo tanto se deduce que DC es ortogonal en el plano ABC.
Luego, DC es perpendicular a AD. Del mismo modo, obtenemos que BD es perpendicular AD, por lo tanto, cada par de aristas que derivan del vértice D son perpendiculares.
En conclusión tenemos:

$$(AB+BC+CA)^2 \leq 3(AD^2+BD^2+BD^2+CD^2+CD^2+AD^2) = 3(AB^2+BC^2+AC^2)$$

Esta desigualdad es obvia. Para facilitar las operaciones vamos a hacer el siguiente cambio: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, y utilizar la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

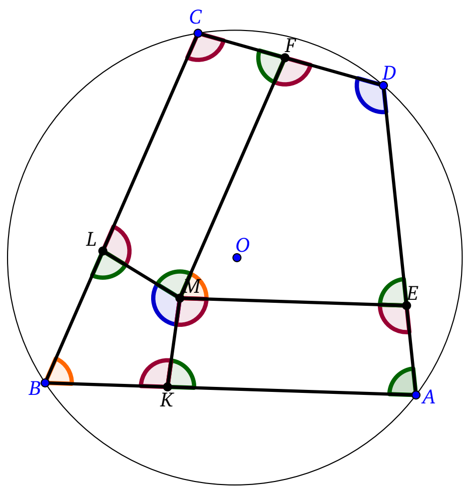
$$a+b+c \leq \sqrt{1+1+1}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Teniendo esta desigualdad, podemos ver que se da $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) \Longleftrightarrow a = b = c$, es decir, el triángulo ABC tiene que se equilátero para obtener la igualdad.

$\square$

Ejercicio. 9.6. (IMO[1, pag. 95], 1972)
Demostrar que cualquier cuadrilátero cíclico se puede descomponer en n, $(n \geq 4)$, cuadriláteros cíclicos.

SOLUCIÓN.
Sabemos que cualquier cuadrilátero cíclico se puede descomponer en cuatro cuadrilátero cíclico,, dos de los cuales son trapecios isósceles.
Considerando B el mínimo ángulo de $ABCD$, tomamos un punto M en el interior del cuadrilátero $ABCD$ cerca del vértice B. Trazamos dos líneas paralelas a BC, y a BA, desde el punto M. Dichas líneas cortan a CD en el punto F, y a DA en el punto E, como podemos ver en la figura.



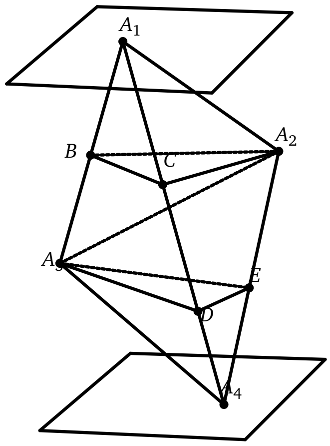
Por otro lado, consideramos dos puntos interiores lo segmentos AB y BC, los cuales son K y L respectivamente.Si unimos los puntos K, L y M obtenemos dos cuadriláteros $AEMK$ y $MLCF$ tales que son trapecios isósceles.
Es fácil ver que $KBLM$ es un cuadrilátero cíclico, por la forma de construirlo, ya que tenemos: $\widehat{LBK} = \widehat{FME}$, $\widehat{BKM} = \widehat{MFD}$, $\widehat{KML} = \widehat{EDF}$ y $\widehat{BLM} = \widehat{MED}$, por lo tanto es semejante al cuadrilátero cíclico $ABCD$, (esto lo podemos observar perfectamente con el dibujo)
Finalmente, cada trapecio isósceles puede descomponerse en un número arbitrario de trapecios isósceles, mediante líneas paralelas a las bases.
En consecuencia, el enunciado del ejercicio queda demostrado.

$\square$

Ejercicio. 9.7. (IMO[1, pag. 96], 1972)
Dado cuatro planos paralelos. Demuestra que existe un tetraedro regular que tiene sus vértices en esos planos.

SOLUCIÓN.
Consideramos los cuatro planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ paralelos, y sea A_1, A_2, a_3, A_4 los cuatro puntos del tetraedro tal que $A_i \in \pi_i$, con $i = 1, 2, 3, 4$.

El plano π_2 interseca al tetraedro formando el triángulo A_2BC donde $B \in [A_1,A_3]$ y $C \in [A_1,A_4]$
El plano π_3 interseca al tetraedro formando el triángulo A_3DE donde $D \in [A_1,A_4]$ y $E \in [A_2,A_4]$



Sea α_1, α_2 y α_3 las distancias entre los planos $\pi_1 y \pi_2$, $\pi_2 y \pi_3$, $\pi_3 y \pi_4$ respectivamente y sea a la longitud del segmento A_1,A_2.
Luego tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{A_1B}{BA_3} = \frac{A_1C}{CD} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\frac{CD}{DA_4} = \frac{A_2E}{EA_4} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

$$A_1B + BA_3 = A_1C + CD + DA_4 = A_2E + EA_4 = a$$

$$\frac{A_1D}{DA_4} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_3}$$

Tenemos un sistema de ocho ecuaciones lineales, donde lo único que tenemos fijos son los planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, y las distancias a los planos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, por lo que nuestras incógnitas son A_1,A_2,A_3,A_4,B,C,D y a.
Luego tenemos un sistema de ocho ecuaciones lineales con ocho incógnitas.
Estudiando el sistema tenemos que:

$$\alpha_2 = \frac{BA_3}{A_1B}\alpha_1, \qquad \alpha_1 = \frac{A_1C}{CD}\alpha_2,$$

$$\alpha_3 = \frac{DA_4}{CD}\alpha_2, \qquad \alpha_2 = \frac{A_2E}{EA_4}\alpha_3,$$

$$\alpha_3 = \frac{DA_4}{A_1D}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

o lo que es lo mismo:

$$A_1B = BA_3\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad EA_4 = A_2E\frac{\alpha_3}{\alpha_2},$$

$$DA_4 = CD\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \qquad A_1C = CD\frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$A_1D = DA_4\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_3} = CD\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2},$$

Además se verifica:

$$A_1B + BA_3 = a, \quad A_1C + CD + DA_4 = a, \quad A_2E + EA_4 = a.$$

Llegándose a que

$$a = A_1C + CD + CA_4 = CD\left(\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_2}\right)$$

$$a = BA_3\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1\right)$$

$$a = A_2E\left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right).$$

Por lo tanto el sistema, parametrizado en a, tiene solución, la cual podemos expresar en función, por ejemplo, de CD. □

Bibliografía

[1] Dr. Mircea Becheanu, *International Mathematical Olympiads, 1959-2000,* University of Bucharest, 2001. 9.1., 9.2., 9.3., 9.4., 9.5., 9.6., 9.7.

[2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley, 2nd. Ed., 1969.

[3] H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.

[4] A. Engel, *Problem–solving strategies*, Springer, 1998.

[5] K. Kedlaya, Notes on euclidean geometry MIT, 1999.

[6] Cristóbal Sánchez-Rubio and Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, Universitat Jaume I. Castellón, 2000.

[7] *Sessions de preparació per l'olimpiada matemàtica*, Soc. Cat. Mat. Barcelona, 2000.

Refencias Web:

Teoría.

1. www.acm.ciens.ucv.ve/material.php
2. www.ual.es/eventos/OMERSMALMERIA/GEOMETRIA/Preparacion.pdf
3. www.ual.es/eventos/OMERSMALMERIA/GEOMETRIA/Apuntes.pdf
4. http://cepre.uni.edu.pe/pdf/cuadrilateros.pdf

Problemas para aplicar teoría.

5. http://wdb.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/
6. http://lya.fciencias.unam.mx/omdf/material/GeometriaChuy.pdf

Problemas de Olimpiadas.

7. http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimprab.htm