PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS SOBRE GEOMETRÍA
El triángulo

ELISABETH GONZÁLEZ FUENTES

Máster de Matemáticas

Universidad de Granada. 2014

Problemas sobre triángulos

Trabajo Fin de Máster presentado en el
Máster Interuniversitario de Matemáticas

Realizado por:
ELISABETH GONZÁLEZ FUENTES

Dirigido por el
Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster de Matemáticas
Universidad de Granada. 2014

Introducción

Las olimpiadas matemáticas son un concurso que se celebra anualmente desde el año 1965, consistente en resolver diversos problemas de alta dificultad pero en los que principalmente se utilizan técnicas de nivel de bachillerato.

En cada sesión se proponen tres o cuatro problemas. Se conceden medallas de oro, plata y bronce. Cada una de las medallas tiene también un premio en metálico y, además, estos nuevos estudiantes participan en las olimpiadas españolas, de las que se seleccionan los que van a la olimpíada internacional.

Existen clases de preparación, que no son solo útiles como preparación para las olimpiadas, sino que son una introducción a técnicas sencillas que los estudiantes podrán utilizar en sus clases, tanto en el Bachillerato como en la Universidad. Estas lecciones son a su vez una oportunidad para que los estudiantes disfruten empezando a manipular conceptos matemáticos nuevos.

En este Trabajo de Fin de Máster (TFM) se realizará una síntesis de aquellos aspectos que he considerado especialmente significativos e importantes, que se pueden desarrollar a lo largo de los diferentes bloques de Matemáticas cursados hasta segundo de bachillerato, centrándonos especialmente en aquellos relacionados con el triángulo en el plano.

Tras un desarrollo teórico, necesario para resolver los problemas que se van a trabajar, que ocupa los dos primeros capítulos de este trabajo, se relaciona una colección de problemas que han aparecido en las diversas competiciones de las olimpiadas en Matemáticas, locales, nacionales e internacionales, y que tienen como eje central el triángulo y sus propiedades. La dificultad de estos problemas es distinta en cada una de estas competiciones, por lo que los clasificamos atendiendo a la misma o equivalentemente según las competiciones en las que se han propuesto.

Hemos procurado que los ejercicios están complemente desglosados, explicando y analizando en detalle cada uno de los pasos de su resolución, probando cada uno de los resultados parciales, lo que ha permitido engrosar la parte teórica con estos resultados con objeto de hacer más accesible la lectura del texto.

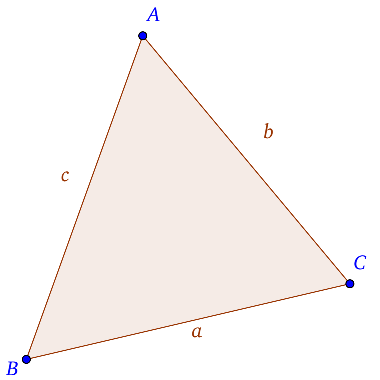
Índice general

Capítulo I

Puntos notables de un triángulo. Conceptos y resultados básicos

1. Triángulo

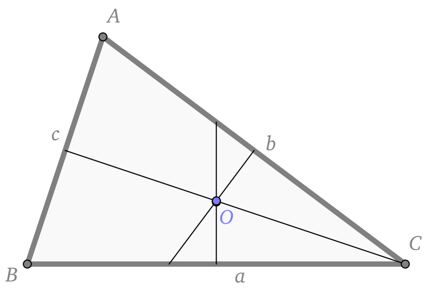
Un **triángulo**, en geometría, es la unión de tres segmentos que determinan tres puntos, no colineales, del plano. Cada punto dado pertenece a dos segmentos exactamente. Los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan **vértices** del triángulo y los segmentos de recta determinados son los **lados** del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los **ángulos interiores** del triángulo.



Un triángulo es una figura estrictamente convexa y tiene 3 ángulos interiores, 3 ángulos exteriores, 3 lados y 3 vértices entre otros elementos.

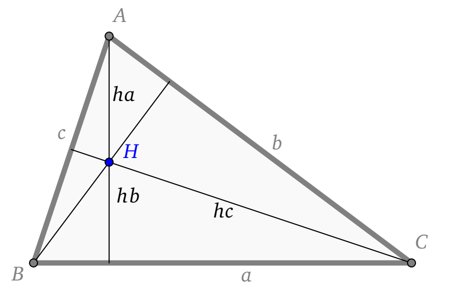
1.1. Mediatriz.Circuncentro

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.
El **circuncentro** O de un triángulo es el punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo.



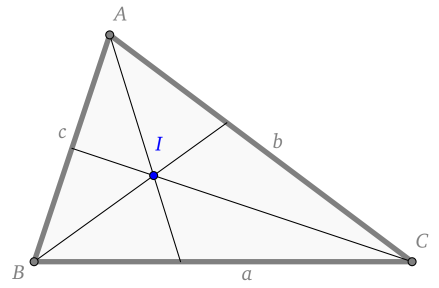
1.2. Altura.Ortocentro

Una **altura** de un triángulo es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.
El **ortocentro** H de un triángulo es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.



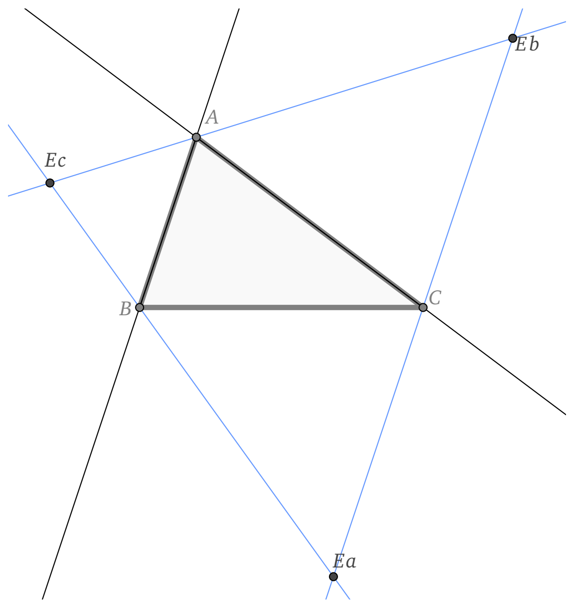
1.3. Bisectriz.Incentro

La **bisectriz** es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.
El **incentro** I de un triángulo es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo.



La bisectriz de los ángulos exteriores[a] de un triángulo se le llama **bisectriz exterior**.
Un **exincentro** E de un triángulo es el punto de intersección de las bisectrices de cualesquiera dos de los tres ángulos exteriores de un triángulo.
También se les llama **excentros**.
Todo triángulo posee tres exincentros que son los centros de las circunferencias exinscritas del triángulo.

[a]El **ángulo exterior** de un polígono está formado por un lado cualquiera y la prolongación del que está a continuación.

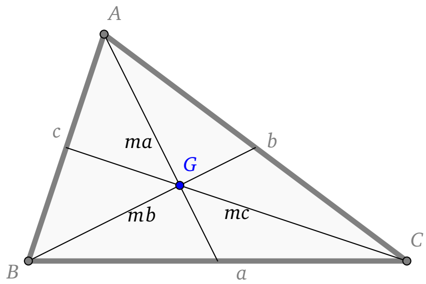


PROPIEDAD

- Como los dos ángulos externos son opuestos por el vértice, sus bisectrices son prolongación una de otra y perpendiculares a la bisectriz interior del mismo vértice.

1.4. Mediana. Baricentro

Una **mediana** es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.
El **baricentro** G de un triángulo es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo.



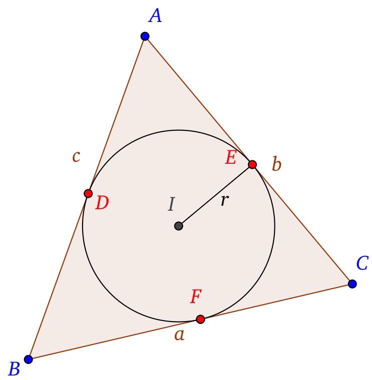
PROPIEDADES

- Cada mediana divide al triángulo en dos regiones de igual área.
- El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos. El segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

2. Circunferencias en el triángulo

2.1. Circunferencia inscrita en el triángulo

Una **circunferencia inscrita** en un triángulo es aquella que, siendo interior, es tangente a todos sus lados.
Al radio de una circunferencia inscrita en un polígono se le denomina **inradio**.
El **incentro**(1.3) es el centro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.



PROPIEDAD

Sea:

- p el semiperímetro(I.12) del triángulo ABC.
- D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo con el lado c, b y a respectivamente.

Entonces:

$$AD = p - a, \tag{I.1}$$

$$BD = p - b. \tag{I.2}$$

Análogamente:

$$AE = p - a,\ CE = p - c, \tag{I.3}$$

$$CF = p - c,\ BF = p - b. \tag{I.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que:

- $AD = AE$,
- $EC = CF$,
- $FB = BD$.

Entonces el semiperímetro del triángulo quedaría:

$$\begin{aligned} p &= \frac{a+b+c}{2} && \text{(ver semiperímetro}^{(I.12)}\text{)} \\ &= \frac{2AD+2EC+2FB}{2} && \text{(aplicando las igualdades anteriores)} \\ &= AD+EC+FB. \end{aligned}$$

Despejando tenemos:

$$AD = p - (EC + FB) = p - a \tag{I.5}$$

$$DB = FB = p - (AD + EC) = p - b. \tag{I.6}$$

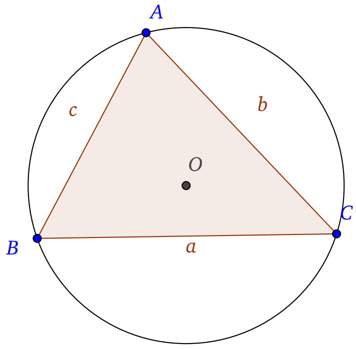
Análogamente se probaría:

$$AE = p - a,\ CE = p - c,\ CF = p - c,\ BF = p - b.$$

□

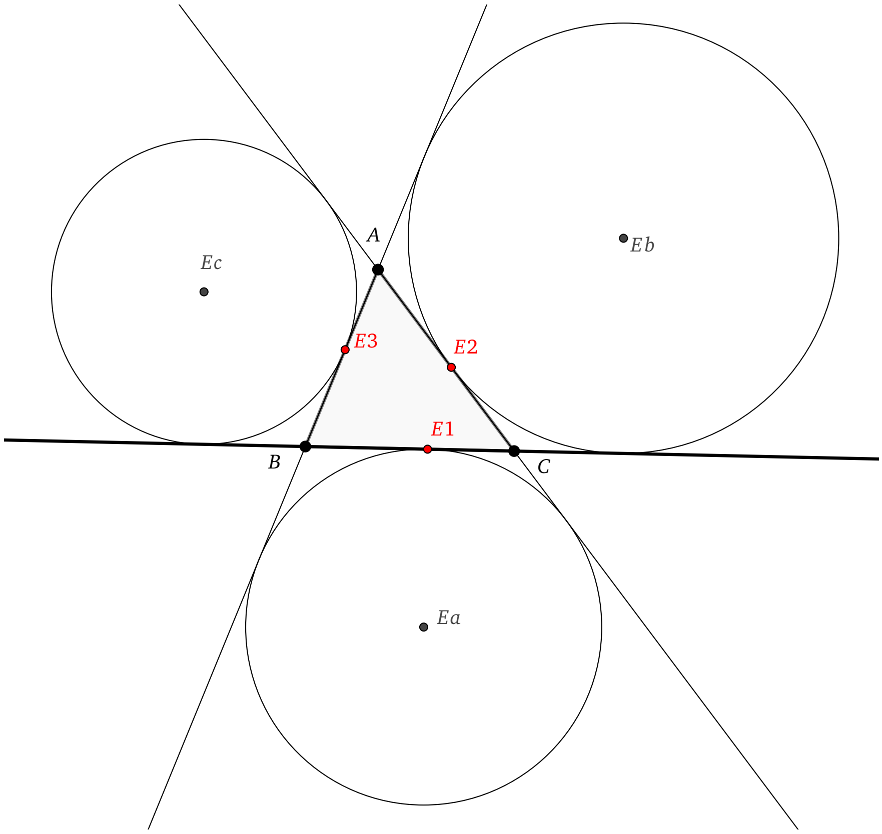
2.2. Circunferencia circunscrita en el triángulo

La **circunferencia circunscrita** de un triángulo es la circunferencia que pasa por todos sus vértices y, por tanto, lo contiene completamente en su interior.
El centro de la circunferencia circunscrita es el **circuncentro**[(1.1)] y su radio se llama **circunradio**.



2.3. Circunferencias exinscritas en el triángulo

Las **circunferencias exinscritas** de un triángulo son las circunferencias tangentes a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.



PROPIEDAD

Sea:

- p el semiperímetro(I.12) del triángulo ABC.
- $E1, E2$ y $E3$ los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita en el triángulo con el lado c, b y a, respectivamente.

Entonces:

$$BE1 = p - a, \tag{I.7}$$

$$BE1 = p - a. \tag{I.8}$$

Análogamente:

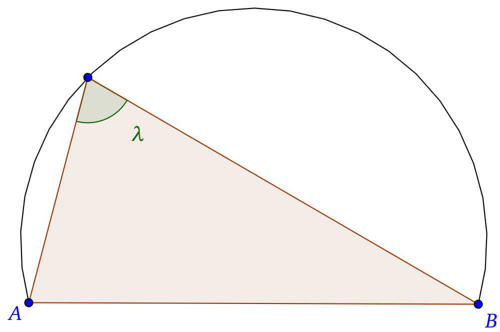
$$AE2 = p - c, \ \ CE2 = p - a, \tag{I.9}$$

$$CA3 = p - b, \ \ BA3 = p - c. \tag{I.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración anterior (2.1). □

2.4. Arco capaz

El **arco capaz** es el lugar geométrico de los puntos desde los que un segmento AB se ve con el mismo ángulo; es decir, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.
El arco capaz de un segmento AB, de ángulo λ, es un par de arcos de circunferencia simétricos a cada lado del segmento AB que contiene los vértices de ángulo λ y unidos por los puntos A y B.
El ángulo que subtiende el segmento AB visto desde el centro del círculo es 2λ.



2.5. Ángulo inscrito en una circunferencia

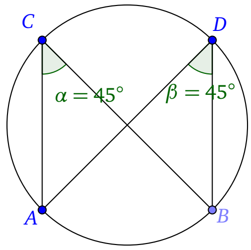
Un **ángulo inscrito** en una circunferencia es un ángulo subtendido en un punto de la circunferencia por otros dos puntos de esta. Un ángulo inscrito está definido por dos cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo común.

PROPIEDAD

- Si dos o más ángulos inscritos comparten el mismo arco, éstos miden lo mismo.

  $\angle ACB = \angle ADB$

  $\alpha = \beta.$



3. Fórmulas del triángulo

Perímetro del triángulo

El **perímetro**, P, es igual a la suma de las longitudes de sus tres lados y se denota con una P mayúscula.

$$P = a + b + c. \tag{I.11}$$

Semiperímetro del triángulo

El **semiperímetro**, p, de un triángulo es igual a la suma de sus lados partido por 2 (Es el perímetro dividido entre dos).

$$p = \frac{a + b + c}{2}. \tag{I.12}$$

Área del triángulo

El **área**, S, de un triángulo es igual a base por altura partido por 2.

$$S = \frac{bh}{2}. \tag{I.13}$$

donde:

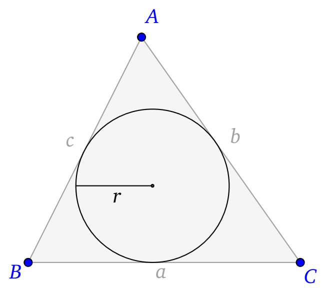
- b es la base del triángulo.
- h es la altura del triángulo.

Área en función del radio de su circunferencia inscrita

$$S = rp. \tag{I.14}$$

donde:

- r es el radio de la circunferencia inscrita(2.1) en el triángulo.
- p es el semiperímetro(I.12) del triángulo.

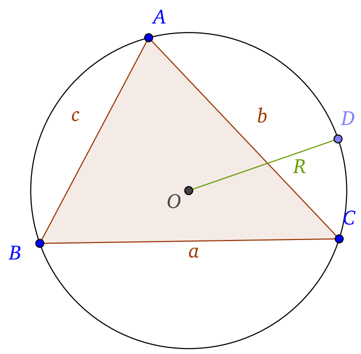


Área en función del radio de su circunferencia circunscrita

$$S = \frac{abc}{4R}. \tag{I.15}$$

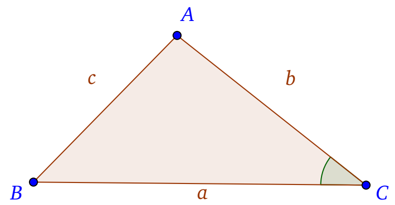
donde:

- R es el radio de la circunferencia circunscrita(2.2) en el triángulo.
- p es el semiperímetro(I.12) del triángulo.



Área conociendo dos lados de un triángulo y el ángulo que forman

$$S = \frac{1}{2} ba \operatorname{sen} \widehat{C}. \tag{I.16}$$



Capítulo II

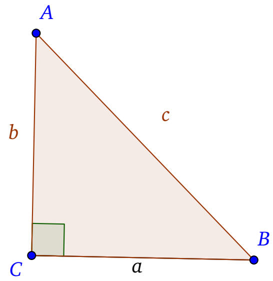
Relaciones métricas en el triángulo

4. Teoremas destacables para el triángulo

4.1. Teorema de Pitágoras

Teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras)
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
Es decir, para todo triángulo se tiene:

$$c^2 = b^2 + a^2. \tag{II.1}$$



DEMOSTRACIÓN. Este Teorema tiene varias demostraciones interesantes en el siguiente enlace se pueden ver detalladamente algunas de ellas.

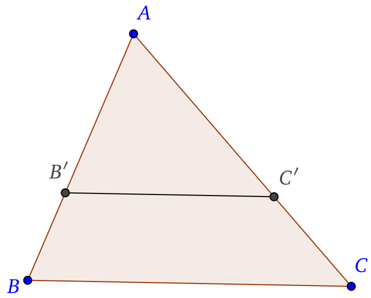
http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras □

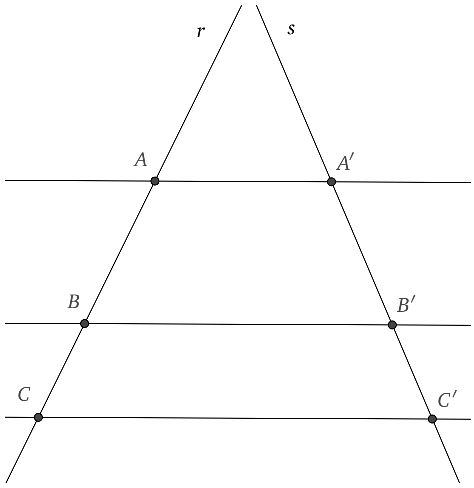
4.2. Teorema de Thales

Existen dos teoremas relacionados con la geometría clásica que reciben el nombre de Teorema de Thales, ambos atribuidos al matemático griego Thales de Mileto.

Teorema 4.2 (Teorema 1)
Dado un triángulo ABC. Si se traza un segmento paralelo, $B'C'$, a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo $AB'C'$, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.

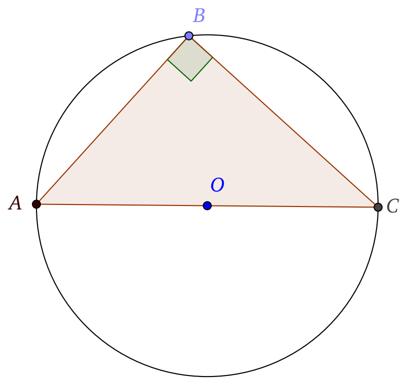
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}. \tag{II.2}$$



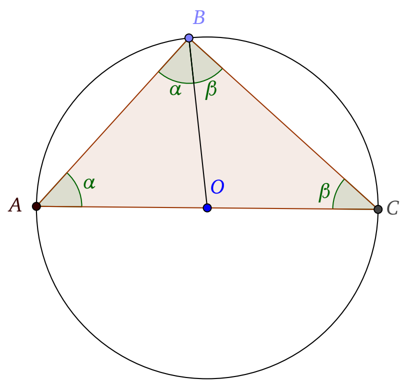


Teorema 4.3 (Variante del Teorema de Thales)
Si dos rectas cualesquiera (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra ($A'B', B'C'$).Es decir,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}. \tag{II.3}$$



Teorema 4.4 (Teorema 2)
Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. Entonces el ángulo ABC, es recto.



DEMOSTRACIÓN. En la circunferencia de centro O, los segmentos OA, OB y OC son iguales por ser todos radios de la misma circunferencia, entonces los triángulos AOB y BOC son isósceles por tener dos lados iguales.
Notemos a los ángulos iguales del triángulo AOB con α y a los del triángulo BOC con β, entonces fijándonos en el triángulo ABC tenemos:

$$2\alpha + 2\beta = \pi. \tag{II.4}$$

Dividiendo ambos miembros por dos tenemos:

$$\widehat{ABC} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \tag{II.5}$$

□

Corolario 4.1 (Corolario 1)
En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana(1.4) *correspondiente a la hipotenusa es siempre la mitad de la hipotenusa.*

Corolario 4.2 (Corolario 2)
La circunferencia circunscrita(2.2) *a todo triángulo rectángulo siempre tiene radio igual a la mitad de la hipotenusa y su circuncentro*(1.1) *se ubicará en el punto medio de la misma.*

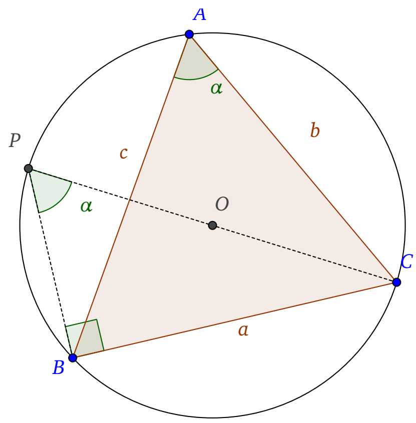
4.3. Teoremas trigonométricos

Teorema 4.5 (Teorema del seno)
Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son respectivamente a, b, c, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}. \tag{II.6}$$

DEMOSTRACIÓN.

Dado el triángulo ABC, denotamos por O su circuncentro(1.1) y dibujamos su circunferencia circunscrita(2.2).
Prolongando el segmento BO hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro BP.



Ahora, el triángulo PCB es rectángulo, puesto que BP es un diámetro, y además los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{P}$ son iguales, porque ambos son ángulos inscritos(2.5) que abren el segmento BC (véase definición de arco capaz (2.4)).

Por definición de la función trigonométrica seno, se tiene:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}\widehat{P} = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}. \tag{II.7}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.
Despejando $2R$ tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2R. \tag{II.8}$$

Repitiendo el procedimiento con un diámetro que pase por A y otro que pase por C, se llega a que las tres fracciones tienen el mismo valor $2R$ y por tanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}. \tag{II.9}$$

La conclusión que se obtiene suele llamarse teorema de los senos generalizado y establece:

Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son respectivamente a, b, c y R es el radio de la circunferencia circunscrita(2.2)**, entonces:**

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R. \tag{II.10}$$

□

Teorema 4.6 (Teorema del coseno)
Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son respectivamente a, b, c, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{II.11}$$

DEMOSTRACIÓN.

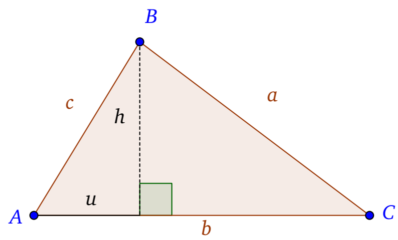
Vamos a hacer la demostración a través del Teorema de Pitágoras.

Notemos que el Teorema de Coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras(4.1) cuando el ángulo $\widehat{C}$ es recto.

Por tanto sólo es necesario considerar los casos cuando c es adyacente a dos ángulos agudos y cuando c es adyacente a un ángulo agudo y un obtuso.

1. **c es adyacente a dos ángulos agudos**

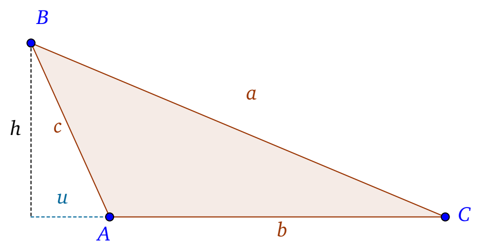
   Consideremos la figura adjunta.
   Por el teorema de Pitágoras, la longitud c es calculada así:
   $$c^2 = h^2 + u^2. \tag{II.12}$$
   Pero, la longitud h también se calcula así:
   $$h^2 = a^2 - (b-u)^2. \tag{II.13}$$
   Sumando ambas ecuaciones y luego simplificando obtenemos:
   $$c^2 = a^2 - b^2 + 2bu. \tag{II.14}$$



   Por la definición de coseno, se tiene:
   $$\cos\widehat{C} = \frac{b-u}{a}, \tag{II.15}$$
   y por lo tanto:
   $$u = b - a\cos\widehat{C}. \tag{II.16}$$
   Sustituimos el valor de u en la ecuación para c^2, concluyendo que:
   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}, \tag{II.17}$$
   y tenemos terminado el primer caso.

2. c **es adyacente a un ángulo obtuso**

Consideremos la figura adjunta.
El teorema de Pitágoras establece nuevamente:



$$c^2 = h^2 + u^2, \tag{II.18}$$

pero en este caso

$$h^2 = a^2 - (b+u)^2. \tag{II.19}$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos:

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 - 2bu - u^2, \tag{II.20}$$

y de este modo:

$$c^2 = a^2 - b^2 - 2bu. \tag{II.21}$$

De la definición de coseno, se tiene:

$$cos\widehat{C} = \frac{b+u}{a}, \tag{II.22}$$

y por tanto:

$$u = a\cos\widehat{C} - b. \tag{II.23}$$

Sustituimos en la expresión para c^2 y simplificamos:

$$c^2 = a^2 - b^2 - 2b(a\cos\widehat{C} - b), \tag{II.24}$$

concluyendo nuevamente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}. \tag{II.25}$$

Esto concluye la demostración.

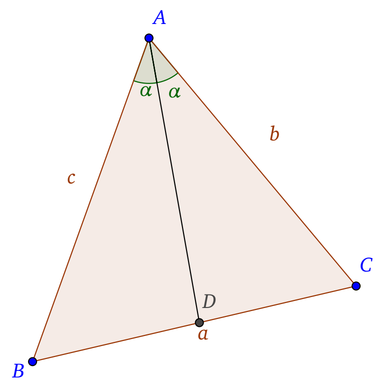
Es importante notar, que si se considera a u como un segmento dirigido, entonces sólo hay un caso y las dos demostraciones se convierten en la misma.

□

4.4. Teorema de la bisectriz

Teorema 4.7 (Teorema de la bisectriz) *Dado el triángulo ABC, sea AD la bisectriz del ángulo interno $\widehat{A}$, entonces se cumple la siguiente proporción:*

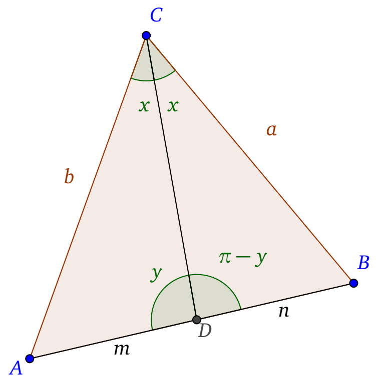
$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}. \tag{II.26}$$



Demostración.

Fijándonos en la figura de la derecha tenemos:

- $|AC| \equiv b$,
- $|BC| \equiv a$,
- $|AD| \equiv m$,
- $|BD| \equiv n$,
- $\angle ACD \equiv \angle DCB \equiv x$,
- $\angle ADC \equiv y$.



Aplicando el teorema del seno(4.5) al triángulo ADC tenemos:

$$\frac{m}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{\operatorname{sen} y}. \tag{II.27}$$

Los ángulos y y $\pi - y$ son suplementarios[1] , lo que implica:

$$\operatorname{sen}(\pi - y) = \operatorname{sen}(y), \tag{II.28}$$

entonces aplicando ahora el teorema del seno al triángulo DBC tenemos:

$$\frac{n}{\operatorname{sen} x} = \frac{a}{\operatorname{sen} y}. \tag{II.29}$$

Dividiendo la ecuación (II.28) por la ecuación (II.29) y simplificando obtenemos:

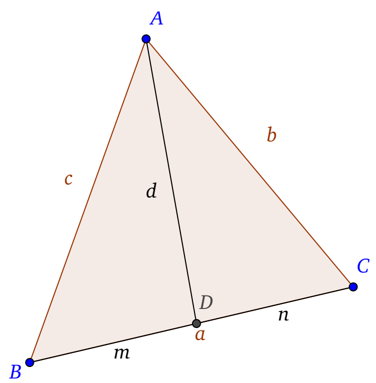
$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}. \tag{II.30}$$

□

4.5. Teorema de Stewart

Teorema 4.8 (Teorema de Stewart)
Dado el triángulo ABC, sean a, b, c las longitudes de los lados BC, AC y AB, respectivamente.
Sea D un punto dentro del segmento BC. Si $BD = m$, $CD = n$ y $AD = d$, se cumple que:

$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - mna. \tag{II.31}$$



[1] Los ángulos suplementarios son aquellos cuyas medidas suman 180^0.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\widehat{BDA} = \alpha$, entonces $\widehat{ADC} = 180^o - \alpha$.

Utilicemos el Teorema del coseno(4.6) en los triángulos ABD y ADC.

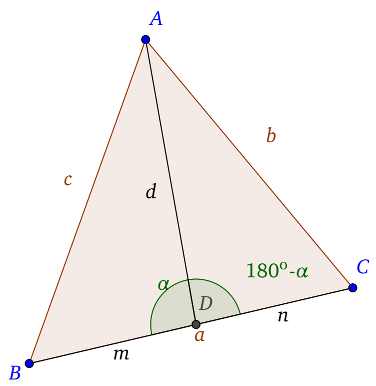
$$ABD\colon\; c^2 = d^2 + m^2 - 2dm\cos\alpha \to \cos\alpha = \frac{d^2+m^2-c^2}{2dm}.$$

$$ADC\colon\; b^2 = d^2 + n^2 - 2dn\cos(180^o - \alpha) \to$$

$$-\cos\alpha =^{a} \cos(180^o-\alpha) = \frac{d^2+n^2-b^2}{2dn}$$

$$\to \cos\alpha = \frac{-d^2-n^2+b^2}{2dn}.$$

[a] Ya que $\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$



Igualando las dos expresiones de $\cos\alpha$ tenemos:

$$\frac{d^2+m^2-c^2}{2dm} = \frac{-d^2-n^2+b^2}{2dn}$$

$$(d^2+m^2-c^2)n = (-d^2-n^2+b^2)m$$

$$d^2n + m^2n - c^2n = -d^2m - n^2m + b^2m$$

$$d^2n + d^2m = b^2m + c^2n - (n^2m + m^2n)$$

$$d^2(n+m) = b^2m + c^2n - nm(n+m)$$

$$d^2a = b^2m + c^2n - nma, \quad (\text{ya que } m+n = BD+CD = BC = a).$$

□

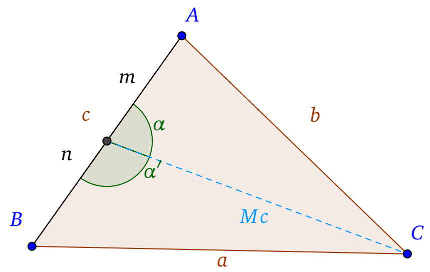
4.6. Teorema de Apolonio

Teorema 4.9 (Teorema de Apolonio (Teorema de la mediana))
Para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.

DEMOSTRACIÓN.

Vamos a hacer la demostración a través del Teorema del Coseno(4.6).
Sea ABC un triángulo cualquiera de lados a, b y c, para cuyo lado c se ha trazado la mediana correspondiente M_c, entonces:

$$m = n = \frac{1}{2}c. \tag{II.32}$$



La mediana M_c forma con el lado c los ángulos α y α' como podemos ver en el dibujo. Entonces según el Teorema del Coseno tenemos:

$$b^2 = m^2 + M_c^2 - 2mM_c cos\alpha, \tag{II.33}$$

$$a^2 = n^2 + M_c^2 - 2nM_c cos\alpha'. \tag{II.34}$$

Teniendo en cuenta (II.32) y aplicando el coseno de los ángulos del segundo cuadrante en función de los del primero[2] en las dos últimas igualdades tenemos:

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + M_c^2 - 2\frac{c}{2}M_c cos\alpha, \tag{II.35}$$

$$a^2 = \frac{c^2}{4} + M_c^2 + 2\frac{c}{2}M_c cos\alpha. \tag{II.36}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2M_c^2. \tag{II.37}$$

Esta expresión es la conclusión del Teorema de Apolonio realizada para la mediana M_c, como se trata de una demostración general, con razonamientos similares se puede obtener expresiones equivalente para las restantes medianas M_a y M_b las cuales serían:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2M_a^2, \tag{II.38}$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2M_b^2. \tag{II.39}$$

□

4.7. Teorema de Euler

El Teorema de Euler se usa para el cálculo de la distancia entre el incentro y el circuncentro.

Teorema 4.10
Sea $d = IO$. Entonces:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

[2] $\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$.

donde:

- *R es el radio de la circunferencia circunscrita*(2.2)*.*
- *r es el: radio de la circunferencia inscrita*(2.1)*.*

DEMOSTRACIÓN.
Queremos hallar d, para ello, sean:

- N el segundo corte de la bisectriz que parte de A con la circunferencia circunscrita.
- M el punto diametralmente opuesto.

Si llamamos:

- $2\alpha = \widehat{A}$,
- $2\beta = \widehat{B}$.

Tenemos:

- $\alpha = \widehat{NAC} = \widehat{BAN}$,
- $\beta = \widehat{IBA} = \widehat{IBA}$.

Como $\widehat{NBI} = \widehat{BIN} = \alpha + \beta$, el triángulo IBN es isósceles y por tanto $NB = NI$. Por otro lado tenemos que la potencia(6) del incentro(1.3) I respecto de la circunferencia circunscrita(2.2) vale:

$$d^2 - R^2 = -IN\, IA = -NB\, IA. \tag{II.40}$$

Como:

- $NB = MN \operatorname{sen} \alpha$,
- $IA = \dfrac{IP}{\operatorname{sen} \alpha}$.

queda:

$R^2 - d^2 = M\,N\, \operatorname{sen} \alpha \dfrac{IP}{\operatorname{sen} \alpha} = MN\, IP = 2Rr.$

Entonces nos queda:

$$d^2 = R^2 - 2Rr. \tag{II.41}$$

Una consecuencia importante se deriva del resultado anterior y de ser $d^2 \geq 0$. En efecto:

$$d^2 = R^2 - 2Rr \geq 0. \tag{II.42}$$

Por lo que nos queda lo que conocemos como la desigualdad de Euler:

$$R \geq 2r. \tag{II.43}$$

□

4.8. Desigualdad triángular

La suma de las medidas de dos lados de un triángulo es mayor o igual que la medida del tercero. La igualdad se cumple si y solo si A, B y C están alineados en ese orden.

DEMOSTRACIÓN. Véase la demostración en el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=mKXU01rHW0s □

4.9. Fórmula del Herón

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{II.44}$$

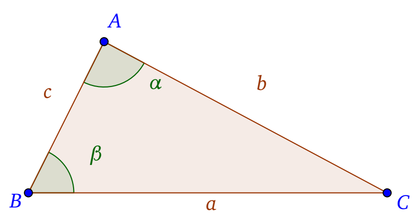
donde:

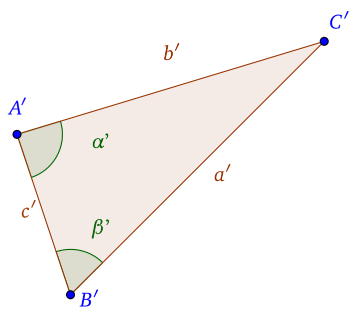
- p es el semiperímetro(I.12) del triángulo.

5. Igualdad y semejanza de triángulos

Criterios de igualdad de triángulos

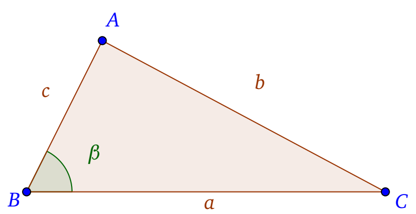
- Dos triángulos son **iguales** cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.

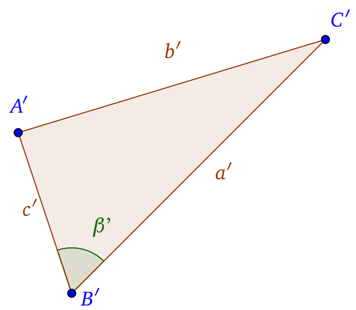




$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $c = c'$.

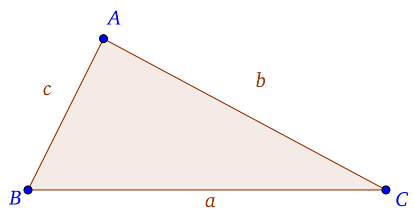
- Dos triángulos son **iguales** cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido.

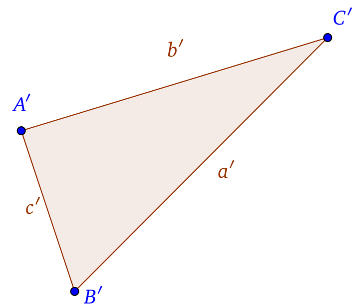




$\beta = \beta'$,$c = c'$ y $a = a'$.

- Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados iguales.





$b = b'$,$c = c'$ y $a = a'$.

5.1. Semejanza de triángulos

Dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño. Cuando dos triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales en medida.

Razón de semejanza

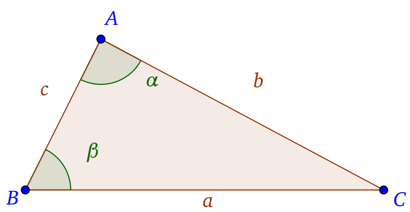
Llamamos **razón de semejanza** entre dos triángulos ABC y $A'B'C'$ a la constante de proporcionalidad k entre sus lados:

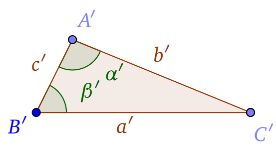
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k. \tag{II.45}$$

Si tomamos las proporciones entre los lados al revés, la razón de proporcionalidad será $1/k$.

Criterios de semejanza de triángulos

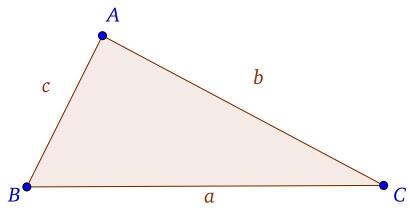
- Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

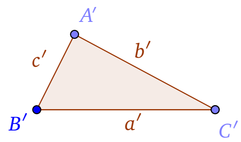




$\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$.

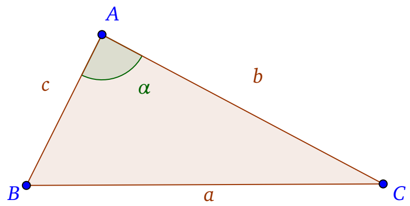
- Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.

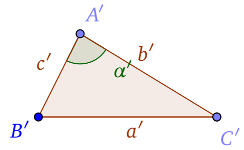




$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.



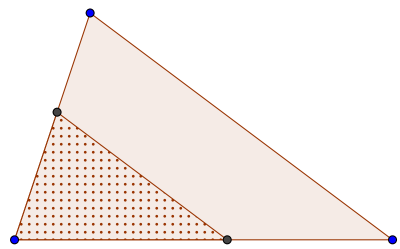


$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ y } \alpha = \alpha'.$$

Posición de Thales

Dos triángulos se dicen en **posición de Thales** ($\triangle ABC =^T \triangle ABC$) si:

- Dos lados de uno contienen respectivamente a dos lados del otro.
- El tercer lado de uno es paralelo al tercer lado del otro.



Dos triángulos en posición de Thales son semejantes

6. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Dado un punto cualquiera P y una circunferencia c, se traza una recta que pasa por P y corta a la circunferencia en dos puntos M y N.

Se verifica que el producto de las distancias PM y PN toma siempre el mismo valor, sea cual sea la posición de la recta.

Por tanto, tiene sentido definir la **potencia de un punto respecto de una circunferencia** como el resultado de este producto:

$$k = |PM||PN|. \tag{II.46}$$

Si la distancia entre el punto y el centro de la circunferencia es d, y el radio r, la potencia es:

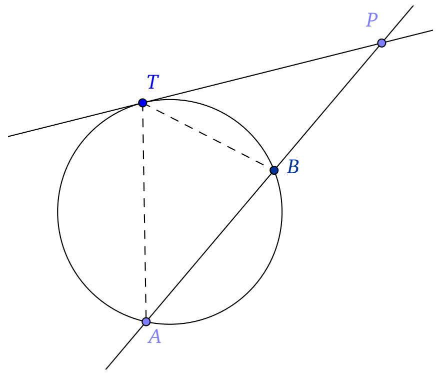
$$k = |d^2 - r^2| = (d + r)(d - r). \tag{II.47}$$

Esta expresión nos permite observar fácilmente que:

- si $k < 0$, entonces P es interior a la circunferencia.
- si $k = 0$, entonces P es está en la circunferencia.
- si $k > 0$, entonces P es exterior a la circunferencia.

Un caso de especial consideración es el formado por una recta tangente y una secante, como en la figura. En esta situación el ángulo $\widehat{BTP}$ es semiinscrito[a] y mide la mitad del arco BT, al igual que el ángulo inscrito(2.5) $\widehat{TAP}$.

[a]Se llama **ángulo semiinscrito** en una circunferencia a cualquier ángulo que tenga su vértice en la circunferencia, una de las semirectas que determina sus lados sea tangente a la circunferencia y la otra sea secante



La igualdad de ángulos nuevamente implica una semejanza de triángulos, entre los triángulos PAT y PTB. Dicha semejanza implica:

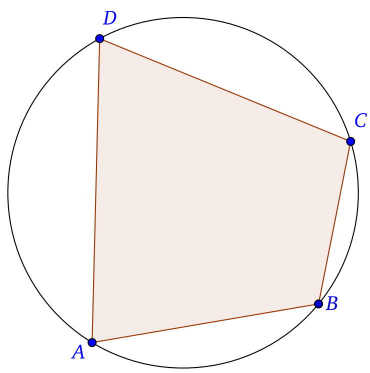
$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}. \tag{II.48}$$

Y por tanto:

$$PT^2 = PA \quad PB. \tag{II.49}$$

6.1. Puntos cocíclicos

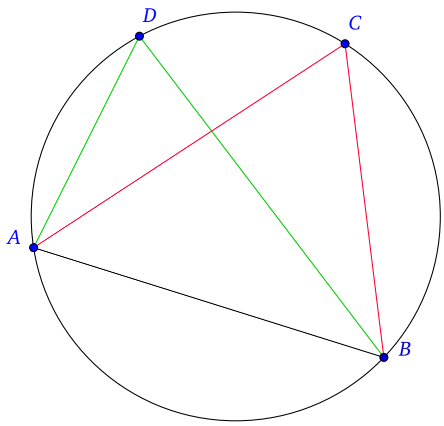
Los puntos **cocíclicos** (o concíclicos) son aquellos que pertenecen a una misma circunferencia.



PROPIEDADES DE LOS PUNTOS COCÍCLICOS

1. Dos puntos siempre son cocíclicos (caso trivial). Tres puntos siempre serán cocíclicos excepto en el caso de que estén alineados. En el caso de cuatro puntos D, C, B, A, serán cocíclicos sólo si los ángulos ADC y CBA son suplementarios[3].

2. **Teorema 6.1 (Ángulo constante)**
   Sean A, B, C y D cuatro puntos cocíclicos, colocados en este orden en el círculo. Entonces tenemos la igualdad de ángulos: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.



DEMOSTRACIÓN. Ambos ángulos miden el doble del ángulo al centro AOB. Dicho de otro modo, si se considera la cuerda AB y un punto móvil que recorre el círculo quedándose del mismo lado con relación a AB, entonces el ángulo AMB es constante.

Se dice que se ve AB desde M bajo un ángulo constante.

Tomando otra cuerda, se obtiene otra igualdad: por ejemplo, con BC : $BAC = BDC$. □

[3]Los ángulos suplementarios son aquellos cuyas medidas suman 180°.

Capítulo III

Olimpiadas Locales

7. Problemas

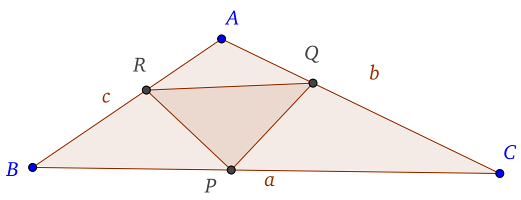
Ejercicio. 7.1. (2013, Ver 40 en las Referencias web)
Sean A, B y C los vértices de un triángulo y P, Q y R los respectivos pies de las bisectrices(1.3) *trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que PQR es un triángulo rectángulo en P se pide probar:*

- *Que ABC ha de ser obtusángulo*[1]*.*
- *Que en el cuadrilátero $ARPQ$, pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.*

SOLUCIÓN.
Primero apliquemos el Teorema de la bisectriz(4.7) en el triángulo ABC:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{PB}{PC},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{PB}{PC}.$$



Expresando PC como $a - PB$ y PB como $a - PC$ tenemos:

- $\dfrac{c}{b} = \dfrac{PB}{a - PB}$,
- $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a - PC}{PC}$.

Despejando PB y PC respectivamente tenemos:

- $PB = \dfrac{ca}{b+c}$,
- $PC = \dfrac{ab}{b+c}$.

Análogamente tenemos:

- $QC = \dfrac{ba}{a+c}$,
- $QA = \dfrac{bc}{a+c}$,
- $RA = \dfrac{cb}{a+b}$,
- $RB = \dfrac{ca}{a+b}$.

Ahora vamos a aplicar el Teorema de Stewart(4.8):

$$AP^2\ a = b^2\ PB + c^2\ CP - PB\ PC\ a. \tag{III.1}$$

Sustituyendo en (III.1) los valores calculados anteriormente con el Teorema de la bisectriz tenemos:

$$\begin{aligned}
AP^2 &= \frac{b^2 \dfrac{ca}{b+c} + c^2 \dfrac{ab}{b+c} - \dfrac{ca}{b+c}\dfrac{ab}{b+c}a}{a} \\
&= \frac{b^3c + b^2c^2 + c^2b^2 + c^3b - ca^2b}{(b+c)^2} \\
&= \frac{bc(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}{(b+c)^2} \\
&= \frac{bc(b^2 + 2bc + c^2 - (b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos\widehat{A}))}{(b+c)^2}, \quad \text{aplicando el Teorema del Coseno}^{(4.6)}(a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A) \\
&= \frac{2b^2c^2(1+\cos\widehat{A})}{(b+c)^2}.
\end{aligned}$$

Aplicamos raíces en ambos lados y tenemos:

$$
\begin{aligned}
AP &= \frac{\sqrt{2}bc\sqrt{1+\cos\widehat{A}}}{b+c} \\
&= \frac{\sqrt{2}bc\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\widehat{A}}{2}}}{b+c} \\
&= \frac{2bc\cos\dfrac{\widehat{A}}{2}}{b+c}, \quad \text{aplicando la fórmula del coseno del ángulo mitad}^{2}.
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a calcular los lados del triángulo PQR.

AQR:

$$
\begin{aligned}
QR^2 &= QA^2 + PA^2 - 2QA\ RA\ \cos\widehat{A}, \quad \text{aplicando el Teorema del Coseno} \\
&= \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{c^2b^2}{(a+b)^2} - 2\frac{bc}{a+c}\frac{cb}{a+b}\cos\widehat{A}
\end{aligned}
$$

sustituyendo los valores del principio calculados con el Teorema de la bisectriz.

ARP:

$$
\begin{aligned}
PR^2 &= AP^2 + RA^2 - 2PA\ RA\ \cos(\widehat{A}/2), \quad \text{aplicando el Teorema del Coseno} \\
&= \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2(\widehat{A}/2) + \frac{c^2b^2}{(a+b)^2} - 2\frac{2b^2c^2}{(b+c)(a+b)}\cos^2(\widehat{A}/2)
\end{aligned}
$$

sustituyendo los valores del principio calculados con el Teorema de la bisectriz

$$
= \frac{4b^2c^2(a-c)}{(b+c)^2(a+b)}\cos^2(\widehat{A}/2) + \frac{c^2b^2}{(a+b)^2}.
$$

[2] La fórmula para el coseno del ángulo mitad es: $\cos A/2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$

AQP:

$$QP^2 = AP^2 + QA^2 - 2PA\ QA\ \cos A/2, \quad \text{aplicando el Teorema del Coseno}$$

$$= \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2(\widehat{A}/2) + \frac{c^2b^2}{(a+c)^2} - 2\frac{2b^2c^2}{(b+c)(a+c)}\cos^2(\widehat{A}/2)$$

sustituyendo los valores del principio calculados con el Teorema de la bisectriz

$$= \frac{4b^2c^2(a-b)}{(b+c)^2(a+c)}\cos^2(\widehat{A}/2) + \frac{c^2b^2}{(a+c)^2}.$$

Como sabemos que el triángulo PQR es rectángulo en P tenemos:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2. \tag{III.2}$$

sustituyendo el valor de cada lado tenemos:

$$\frac{4b^2c^2(a-b)}{(b+c)^2(a+c)}\cos^2(\widehat{A}/2) + \frac{4b^2c^2(a-c)}{(b+c)^2(a+b)}\cos^2(\widehat{A}/2) = -2\frac{bc}{a+c}\frac{cb}{a+b}\cos\widehat{A}$$

$$\frac{2b^2c^2(1+\cos\widehat{A})(a-b)(a+b)}{(b+c)^2(a+c)(a+b)} + \frac{2b^2c^2(1+\cos A)(a-c)(a+c)}{(b+c)^2(a+b)(a+c)} = -2\frac{b^2c^2(b+c)^2}{(a+c)(a+b)(b+c)^2}\cos\widehat{A}$$

$$(1+\cos\widehat{A})(a^2-b^2+a^2-c^2) = -(b+c)^2\cos\widehat{A}$$

$$2a^2-b^2-c^2+(2a^2-b^2-c^2+b^2+2bc+c^2)\cos\widehat{A} = 0$$

$$2a^2-b^2-c^2+(2a^2+2bc)\cos\widehat{A} = 0$$

Despejando el coseno de esta expresión tenemos:

$$\cos\widehat{A} = \frac{-2a^2+b^2+c^2}{2a^2+2bc}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{-a^2-a^2+b^2+c^2}{2a^2+2bc}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{-a^2-b^2-c^2+2\ b\ c\ \cos\widehat{A}+b^2+c^2}{2a^2+2bc}, \quad \text{aplicando el Teorema del Coseno}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{-a^2+2\,b\,c\ \cos\widehat{A}}{2a^2+2bc}$$

$$\cos\widehat{A}(2a^2+2bc) = -a^2+2\,b\,c\ \cos\widehat{A}$$

$$2a^2\ \cos\widehat{A} = -a^2$$

$$\cos\widehat{A} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces $\widehat{A} = 120^o$ y con esto demostramos que el triángulo ABC es obtusángulo.

Por otro lado sabemos que $\widehat{P} = 90^o$ por ser el triángulo PQR rectángulo en P. Con lo que:

- $\widehat{P} + \widehat{A} = 210^o$,
- $\widehat{R} + \widehat{Q} = 360^o - (\widehat{P} + \widehat{A}) = 360^o - 210^o = 150^o$,

y con esto queda demostrado que en el cuadrilátero $ARPQ$ la suma de sus ángulos opuestos es constante. □

Ejercicio. 7.2. (2011, Ver 40 en las Referencias web)
Sean:

- *ABC un triángulo acútangulo*[3] *con $\widehat{A} = 45^o$.*
- *P el pie de la altura*[(1.2)] *por B.*

Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y.
Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X respectivamente y L y K las intersecciones de r y s con AB.
Demuestra que L es el punto medio de KB.

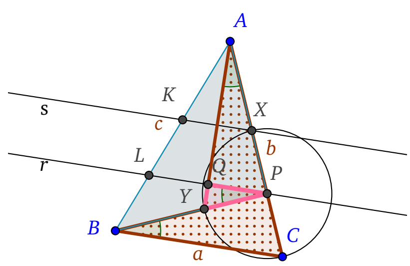
SOLUCIÓN.
Por construcción tenemos:

$$PX = PY = PC, \tag{III.3}$$

por ser todos radio de la circunferencia.

Los triángulos PAY y PCB (son rectángulos en P por ser PB la altura del triángulo ABC) son iguales aplicando el segundo criterio de igualdad de triángulos[(5)]:

1. $\widehat{APY} = \widehat{BPC}$.
2. $AP = PB$ por ser el triángulo APB isósceles (tiene dos ángulos iguales: $\widehat{BPA} = 90^o$, $\widehat{PAB} = 45^o$ y por tanto $\widehat{PBA} = 180^o - 45^o - 90^o = 45^o$)
3. $PY = PC$ por (III.3).



Entonces todos sus ángulos y lados son iguales y en particular:

$$\widehat{PAY} = \widehat{PBC}. \tag{III.4}$$

Por otro lado el triángulo PYQ (rectángulo en Q por ser r perpendicular a AY) es semejante a APY por el primer criterio de semejanza(5.1).

1. $\widehat{YQP} = \widehat{YPA}$ por ser ambos ángulos rectos.
2. $\widehat{PYA} = \widehat{PYQ}$ por ser el mismo ángulo.

Entonces todos sus ángulos son iguales y en particular:

$$\widehat{YPQ} = \widehat{PAY}. \tag{III.5}$$

Entonces:

$$\widehat{LPB} = \widehat{YPQ} = \widehat{PAY}. \tag{III.6}$$

Por otro lado el segmento PL es paralelo a BC:

- Si nos fijamos en los triángulos QPA y BCP respectivamente tenemos:

  $$\widehat{QPA} = 180^o - \widehat{PAQ} - \widehat{AQP} = 180^o - \widehat{PAY} - 90^o = 180^o - \widehat{PBC} - 90^o = 180^o - \widehat{PBC} - \widehat{CPB} = \widehat{BCP},$$

  teniendo en cuenta (III.3) y que los ángulos $\widehat{AQP}$ y $\widehat{BCP}$ son rectos.

  Entonces los ángulos $\widehat{LPA} = \widehat{QPA}$ y $\widehat{BCP}$ son iguales, por lo que si desplazamos el segmento BC hacia donde está el segmento PL el ángulo que forma con el segmento AC no varía.

Y a la misma vez los segmentos PL (recta r) y BC son paralelos a KX (recta s) por construcción, así que aplicando el Teorema de Thales(4.3), tenemos:

$$\frac{KL}{XP} = \frac{LB}{PC} = \frac{KB}{XC}, \tag{III.7}$$

nos quedamos con la primera igualdad y tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{KL}{XP} = \frac{LB}{PC} \\
&\frac{PC}{XP} = \frac{LB}{KL} \\
&\frac{PX}{XP} = \frac{LB}{KL} \qquad \text{porque } PC = PX \text{ (véase (III.3))} \\
&\frac{LB}{KL} = 1 \\
&LB = KL.
\end{aligned}$$

□

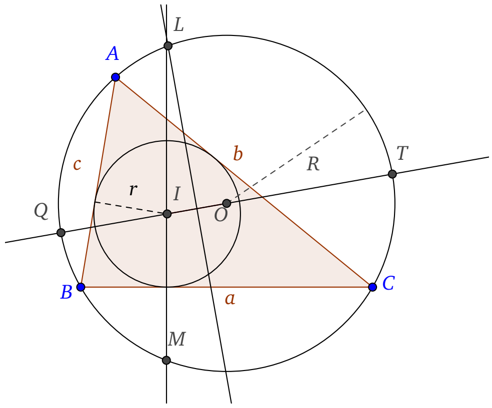
Ejercicio. 7.3. (2011, Ver 40 en las Referencias web)
En un triángulo llamaremos:

- O *al circuncentro*(1.1).
- I *al incentro*(1.3).
- r *al radio de la circunferencia inscrita*(2.1).

Si la mediatriz(1.1) *del segmento* OI *corta a la circunferencia circunscrita*(2.2) *en* L *y* LI *vuelve a cortar en* M, *demuestra que:*

$$IM = 2r. \tag{III.8}$$

SOLUCIÓN.



Sea R el radio de la circunferencia circunscrita, por lo que aplicando el Teorema de Euler(4.7) tenemos:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr. \tag{III.9}$$

Sean T y Q los puntos de corte de la recta OI con la circunferencia circunscrita.

Considerando las cuerdas LM y TQ y aplicando la potencia(6) del punto I respecto a la circunferencia circunscrita, con respecto a ambas cuerdas, tenemos:

$$IL\ IM = IT\ IQ. \tag{III.10}$$

Sabemos que:

- $IL = OL$, por ser L un punto de la mediatriz de IO.
- $OL = R$, por ser O el centro de la circunferencia circunscrita y L estar en está.

Entonces tenemos:

$$IL = OL = R. \tag{III.11}$$

Por otro lado tenemos:

- IT = OI + OT = OI + R,
- IQ = OQ - OI = R - OI,

por ser OT y OQ radios de la circunferencia circunscrita.

Sustituyendo en (III.10) estas dos igualdades tenemos:

$$IL\ IM = IT\ IQ$$

$$R\ IM = (OI + R)(R - OI) \text{ por (III.11)}$$

$$R\ IM = R^2 - OI^2$$

$$R\ IM = R^2 - (R^2 - 2Rr) \text{ por (III.9)}$$

$$R\ IM = 2Rr.$$

Despejando IM nos queda:

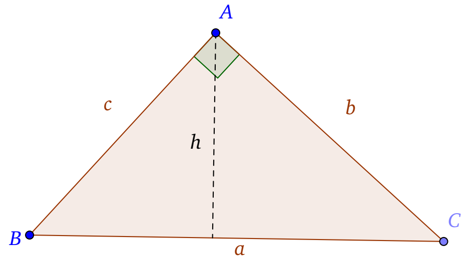
$$IM = \frac{2Rr}{R} = 2r. \tag{III.12}$$

□

Ejercicio. 7.4. (2010, Ver 40 en las Referencias web)
Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro(3) $P = 96$ *y la altura*(1.2) *sobre la hipotenusa* $h = \dfrac{96}{5}$.

SOLUCIÓN.
Consideramos el triángulo ABC rectángulo en A.

Tenemos que el área del triángulo(I.13) se puede calcular como:



- $S = \dfrac{ah}{2}$ tomando como altura h y base a.
- $S = \dfrac{cb}{2}$ tomando como altura b y base c.

Igualando ambas expresiones tenemos:

$$ah = cb. \tag{III.13}$$

Por otro lado como conocemos el perímetro tenemos que:

$$P = a + b + c = 96 \rightarrow b + c = P - a. \tag{III.14}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos:

$$(b + c)^2 = (P - a)^2. \tag{III.15}$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned}
&b^2 + 2bc + c^2 = P^2 - 2Pa + a^2 \\
&b^2 + 2bc + a^2 - b^2 = P^2 - 2Pa + a^2, \quad \text{aplicando Pitágoras}^{(4.1)} \text{ en el triángulo rectángulo ABC} \\
&2bc = P^2 - 2Pa \\
&2ah = P^2 - 2Pa \quad \text{utilizando (III.13)} \\
&2a(h + P) = P^2.
\end{aligned}$$

Despejando a tenemos:

$$a = \frac{P^2}{2(h + P)}. \tag{III.16}$$

Como por el enunciado del ejercicio conocemos h y P tenemos:

$$a = \frac{96^2}{2\left(\frac{96}{5} + 96\right)} = \frac{9216}{2\frac{576}{5}} = 40. \tag{III.17}$$

Ya tenemos determinado el lado a, para determinar los lados b y c basta con resolver la ecuación:

$$z^2 - (b + c)z + bc = 0. \tag{III.18}$$

Las soluciones de esta ecuación serán los lados b y c del triángulo[4].

La ecuación es equivalente a:

$$z^2 - (P - a)z + ah = 0, \tag{III.19}$$

usando (III.14) y (III.13).

Como conocemos a y P tenemos:

$$z^2 - (96 - \frac{P^2}{2(h + P)})z + \frac{P^2}{2(h + P)}\frac{96}{5} = 0 \longrightarrow z^2 - 56z + 768 = 0. \tag{III.20}$$

[4]La ecuación $z^2 - (b + c)z + bc = 0$ es cierta porque sabemos que los valores b y c son soluciones de la ecuación $(z - b)(z - c) = 0$ equivalente a la anterior.

Resolviendo la ecuación tenemos las dos soluciones:

- $$z = \frac{56+\sqrt{56^2-4768}}{2} = \frac{56+\sqrt{64}}{2} = \frac{56+8}{2} = 32, \tag{III.21}$$
- $$z = \frac{56-\sqrt{56^2-4768}}{2} = \frac{56-\sqrt{64}}{2} = \frac{56-8}{2} = 24. \tag{III.22}$$

Entonces los lados del triángulo son 40, 32 y 24. □

Ejercicio. 7.5. (2008, Ver 40 en las Referencias web)
En el triángulo ABC, el área[3] *S y el ángulo $\widehat{C}$ son conocidos. Halla el valor de los lados a y b para que el lado c sea lo más corto posible.*

SOLUCIÓN.
Por el Teorema del Coseno[4.6] tenemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\,\cos\widehat{C} \\ &= (a-b)^2+2ab-2ab\,\cos\widehat{C} \\ &= (a-b)^2+2ab(1-\cos\widehat{C}). \end{aligned}$$

Del área [I.16] del triángulo conociendo dos lados de un triángulo y el ángulo que forman tenemos:

$$S = \frac{1}{2}a\ b\ \operatorname{sen}\widehat{C} \rightarrow ab = \frac{2S}{\operatorname{sen}\widehat{C}}. \tag{III.23}$$

Entonces:

$$c^2 = (a-b)^2+2\frac{2S}{\operatorname{sen}\widehat{C}}(1-\cos\widehat{C}), \quad \text{teniendo en cuenta el valor de ab (véase (III.23))}.$$

Como $(a-b)^2 > 0$ la expresión anterior será mínima cuando $a=b$, entonces volviendo a (III.23) tenemos:

$$a^2 = \frac{2S}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \rightarrow b = a = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{sen}\widehat{C}}}. \tag{III.24}$$

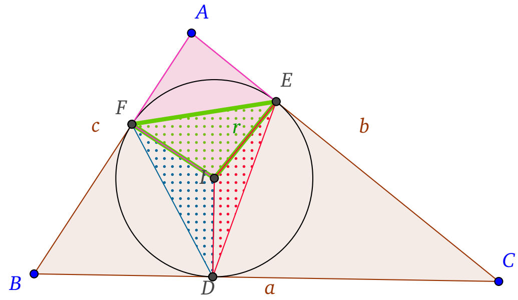
□

Ejercicio. 7.6. (2008, Ver 40 en las Referencias web)
Sean D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita[2.1] *al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que:*

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC}, \tag{III.25}$$

donde S_{XYZ} denota el área[3] *del triángulo XYZ.*

SOLUCIÓN.



Sea I el incentro(1.3) del triángulo ABC. Tenemos que:

- $ID \perp BC$,
- $IE \perp AC$,
- $IF \perp AB$,

por ser D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.

Por otro lado usando el área(1.16) del triángulo conociendo dos lados y el ángulo que lo forman tenemos:

- $$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\ AC\ \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{1}{2} b\ c\ \operatorname{sen}\widehat{A}, \tag{III.26}$$
- $$S_{EIF} = \frac{1}{2} EI\ FI\ \operatorname{sen}\widehat{EIF} = \frac{1}{2} r^2\ \operatorname{sen}\widehat{EIF}, \tag{III.27}$$
- $$S_{FID} = \frac{1}{2} ID\ IF\ \operatorname{sen}\widehat{DIF} = \frac{1}{2} r^2\ \operatorname{sen}\widehat{EIF}, \tag{III.28}$$
- $$S_{EID} = \frac{1}{2} IE\ ID\ \operatorname{sen}\widehat{EID} = \frac{1}{2} r^2\ \operatorname{sen}\widehat{EID}. \tag{III.29}$$

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{EIF}$ son suplementarios[5] (al fijarnos en el cuadrilatero $AFIE$ tenemos que $\widehat{IFA} = \widehat{IEA} = 90^o$ por definición de los puntos F y E, entonces $\widehat{A} + \widehat{EIF} = 360^o - 90^o - 90^o = 180^o$).

Entonces tenemos que:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}\widehat{EIF}, \quad \text{verificando una de las propiedades de los ángulos suplementarios}^6. \tag{III.30}$$

Entonces:

$$\frac{S_{EIF}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{bc}. \tag{III.31}$$

[5]Los **ángulos suplementarios** son aquellos cuyas medidas suman 180^0.
[6]El seno de dos ángulos suplementarios verifica: $\operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

Análogamente tenemos:

$$\frac{S_{EID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{ab}, \tag{III.32}$$

$$\frac{S_{FID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2}{ca}. \tag{III.33}$$

Sumando estas tres fracciones tenemos:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EIF}}{S_{ABC}} + \frac{S_{EID}}{S_{ABC}} + \frac{S_{FID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2(a+c+b)}{abc}. \tag{III.34}$$

Por otro lado:

- Usando el área[I.14] en función del radio de su circunferencia inscrita y el semiperímetro[I.12]:

$$S = pr = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right). \tag{III.35}$$

- Usando el área[I.15] en función del radio de su circunferencia circunscrita:

$$S = \frac{abc}{4R} \longrightarrow 4RS = abc. \tag{III.36}$$

Sustituyendo estas dos últimas igualdades en (III.34) tenemos:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{2rS}{4RS} = \frac{r}{2R}. \tag{III.37}$$

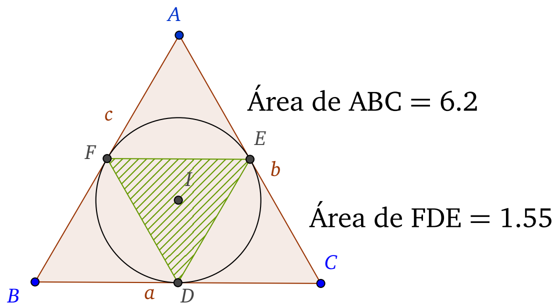
Ahora aplicamos la desigualdad de Euler[II.43] ($R \geq 2r$):

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{2R} \leq \frac{r}{2\,2r} = \frac{1}{4}. \tag{III.38}$$

Por lo que nos queda:

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC}. \tag{III.39}$$

Y la igualdad se verifica cuando ABC es equilátero. Como podemos ver en el dibujo de la derecha, el área del triángulo chico es 1.55, que multiplicada por 4 da 6.2 (correspondiente con el área del triángulo grande).



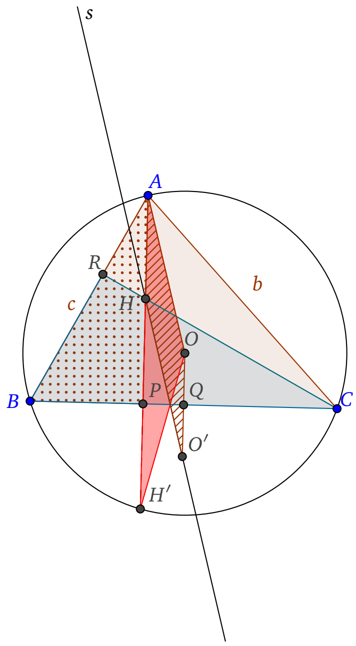
□

Ejercicio. 7.7. (2007, Ver 40 en las Referencias web)
Demostrar que un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro(1.2) *es el doble de la distancia del circuncentro*(1.1) *al lado opuesto a ese vértice.*

SOLUCIÓN.

Sean:

- H el ortocentro del triángulo.
- O el circuncentro del triángulo.
- H' el simétrico de H respecto del lado BC.
- O' el simétrico de O respecto del lado BC.



Como los triángulos BPA y BCR son rectángulos por estar AP y CR en dos de las alturas(1.2) del triángulo ABC, ambos triángulos tienen un ángulo recto. Si a esto le sumamos que ambos triángulos también comparten el ángulo $\widehat{CBA}$ tenemos que ambos triángulos son semejantes aplicando el primer criterio de semejanza de triángulos(5.1).

Esto implica que también su tercer ángulo es igual, es decir:

$$\widehat{BAP} = \widehat{RCB}. \tag{III.40}$$

Equivalentemente mirando el dibujo podemos ver que la igualdad anterior es equivalente a:

$$\widehat{BAH'} = \widehat{HCP}. \tag{III.41}$$

Y por otro lado sabemos de estos dos ángulos que:

- $\widehat{BAH'} = \widehat{BCH'}$ por abarcar ambos ángulos el mismo arco[7].
- $\widehat{HCP} = \widehat{PCH'}$ por ser H' simétrico de H respecto de AB.

Entonces:

$$\widehat{BCH'} = \widehat{PCH'}. \tag{III.42}$$

Y esto último prueba que H' esta en la circunferencia circunscrita(2.2) el triángulo.

Ahora tenemos dos igualdades:

1. Como H' es simétrico de H, tenemos que:

$$OH'H = H'HO'. \tag{III.43}$$

2. Como HH' y OO' son dos paralelas (por estar dentro de la altura(1.2) y de la mediatriz(1.1) respectivamente) cortadas por la secante HO' tenemos que:

$$\widehat{H'HO'} = \widehat{OO'H}, \tag{III.44}$$

por ser ángulos alternos internos [8].

Entonces por (1) y (2) tenemos que:

$$\widehat{OH'H} = \widehat{H'HO'} = \widehat{OO'H}. \tag{III.45}$$

Por otro lado OA y OH' son radios de la circunferencia circunscrita por ser A vértice del triángulo y por estar H' en dicha circunferencia (demostrado anteriormente). Entonces el triángulo $H'OA$ es isósceles , lo que implica que sus ángulos $\widehat{OH'A} = \widehat{OH'H}$ y $\widehat{H'AO} = \widehat{HAO}$ son iguales.

Y teniendo en cuenta (III.45) la anterior igualdad se queda:

$$\widehat{OO'H} = \widehat{HAO}. \tag{III.46}$$

Ya hemos probado que los ángulos opuestos $\widehat{A}$ y $\widehat{O'}$ en el cuadrilátero $AHO'O$ son iguales, nos quedaría ver que también los ángulos $\widehat{O}$ y $\widehat{H}$ son iguales. Tenemos:

1. $$\widehat{O'HA} = 180^o - \widehat{H'HO'}, \quad \text{por ser AP la altura del triángulo.}$$

[7] Los ángulos inscritos[2,5] que abarcan el mismo arco son iguales.

[8] Se les llama **ángulos alternos internos** a los que, en una transversal que corta a dos paralelas (o a dos rectas), son internos a las rectas pero alternos en la transversal.

2.

$$\widehat{O'OA} = \widehat{O'OH'} + \widehat{H'OA}$$
$$= \widehat{OH'H} + \widehat{H'OA}, \quad \text{por (III.45)}$$
$$= \widehat{OH'H} + (180^o - 2\widehat{OH'A}), \quad \text{por ser el triángulo } H'OA \text{ isósceles}$$
$$= \widehat{OH'H} + (180^o - 2\widehat{OH'H}), \quad \text{véase el dibujo}$$
$$= 180^o - \widehat{OH'H}$$
$$= 180^o - \widehat{H'HO'}, \quad \text{por (III.45)}.$$

Entonces el cuadrilátero $AHO'O$ es un paralelogramo[9].

Y por lo tanto por ser paralelogramo:

$$AH = OO'. \tag{III.47}$$

Y como $OO' = 2OQ$ por ser O' simétrico de O respecto de Q tenemos:

$$AH = 2OQ. \tag{III.48}$$

□

Alternativa de uno de los Ejercicios internacionales

Ejercicio. 7.8.
Usando regla y compás construye el triángulo ABC conocidas: h_a, h_b y m_c, donde:

- h_a *es la altura*[1,2] *del triángulo que parte del lado BC (véase (1.2)).*
- h_b *es la altura del triángulo que parte del lado AC (véase (1.2)).*
- m_c *es la mediana del triángulo que parte del vértice C (véase (1.4)).*

SOLUCIÓN. La construcción se podría realizar como sigue:

1. Dibujamos la mediana m_c y trazamos una circunferencia que pase por sus extremos.
2. Con centro en el pie de la mediana M_c, trazamos dos circunferencias, una con radio la semidistancia de H_a (que llamaremos $c1$) y otra con la semidistancia de H_b(que llamaremos $c2$).

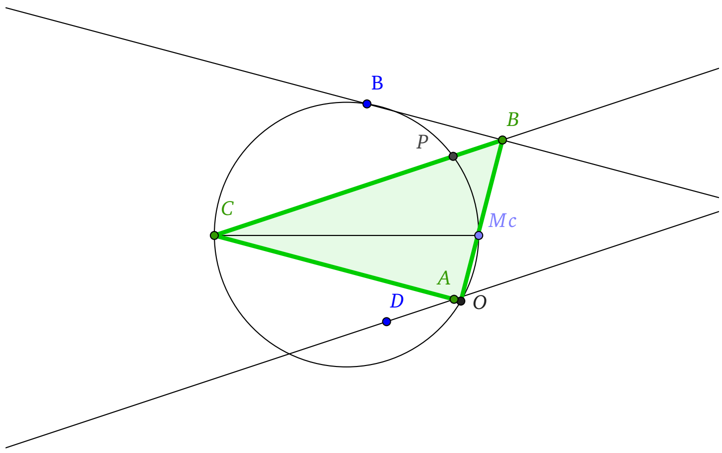
[9] Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

3. Estos circunferencias cortarán a la circunferencia en dos puntos cada una. Nos quedaremos con un punto de cada. Tomaremos el punto superior de la $c1$ (que lo llamaremos P) y el punto inferior de la $c2$ (que lo llamaremos O).

4. Trazaremos una paralela al segmento CO a la distancia H_b. Donde esta paralela corte al lado CP, estará el vértice B buscado.

5. Trazaremos una paralela al segmento CP a la distancia H_a. Donde esta paralela corte al lado CO tendremos el vértice A buscado.

6. Como el vértice C lo tenemos, queda determinado el triángulo ABC.



□

Capítulo IV

Olimpiadas Nacionales

8. Problemas

Ejercicio. 8.1. (Pamplona, 2011, Ver 40 en las Referencias web)
Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ y $\widehat{A} > 90^o$ Sean:

- *D: punto de la recta AB tal que: $CD \perp AC$.*
- *M: punto medio de BC.*

Demuestra que $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$.

SOLUCIÓN.
La recta que pasa por A y es paralela a BC corta a DM y a DC en los puntos N y F respectivamente.

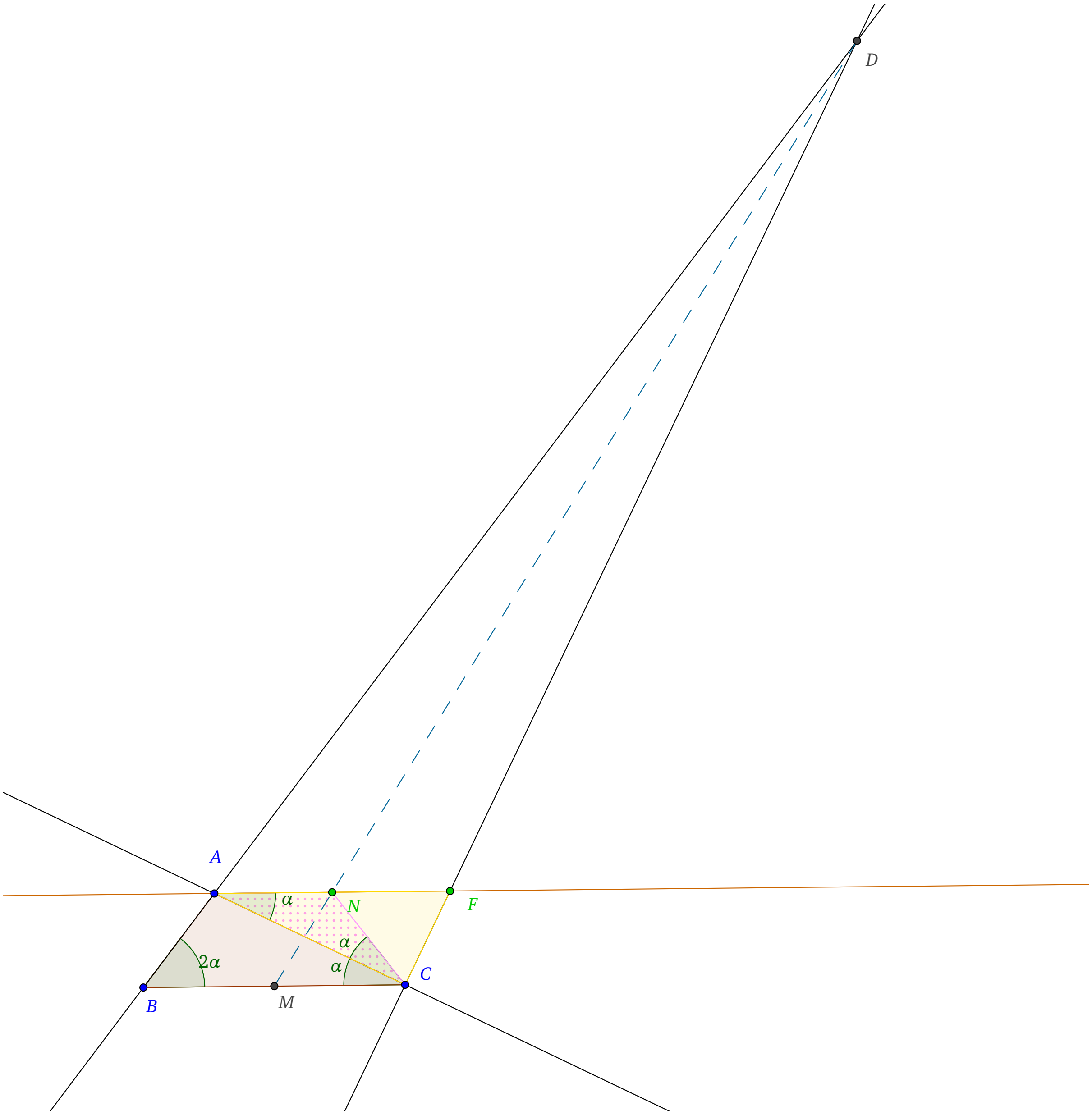
Tenemos:

$$\frac{AN}{BM} = \frac{DN}{DM}, \tag{IV.1}$$

aplicando el Teorema de Thales(4.2) al triángulo DBM, y tenemos:

$$\frac{DN}{DM} = \frac{NF}{MC}, \tag{IV.2}$$

aplicando el Teorema de Thales(4.2) al triángulo MDC.



Combinando las dos últimas igualdades tenemos:

$$\frac{AN}{BM} = \frac{DN}{DM} = \frac{NF}{MC}. \tag{IV.3}$$

$BM = MC$ por ser M el punto medio, por lo que $AN = NF$. Esto implica que NC es la mediana del triángulo AFC (triángulo rectángulo por $CD \perp AC$). Entonces aplicando el Corolario 1 del Teorema de Thales(4.1) tenemos que $NC = AN$.

Esto último implica que el triángulo ANC es isósceles, entonces:

$$\widehat{NAC} = \widehat{NCA}, \quad \text{por ser ANC isósceles}$$
$$= \widehat{ACB}, \quad \text{por ser NCA y ACB ángulos alternos internos}^{1}.$$

Entonces:

$$\widehat{NCB} = 2\widehat{ACB} = \widehat{ABC}, \tag{IV.4}$$

donde en la última igualdad se utilizo la hipótesis: $\widehat{B} = 2\widehat{C}$.

Por otro lado como $AN||BC$ (por construcción) tenemos que el cuadrilátero $ABCN$ es isósceles.

Entonces los otros dos lados del trapecio isósceles son iguales ($AB = NC$) por definición de trapecio isósceles [2].

Entonces por:

- $AB = NC$, por ser los lados iguales del trapecio isósceles anterior.
- $\widehat{NCB} = \widehat{ABC}$, por (IV.4).
- $BM = MC$, por ser M el punto medio de dicho segmento.

podemos usar el tercer criterio de igualdad de triángulos[(5)] y tenemos que:

$$ABM = NMC, \tag{IV.5}$$

por lo que:

$$\widehat{AMB} = \widehat{NMC} = \widehat{DMC}. \tag{IV.6}$$

La última igualdad podemos verla claramente en el dibujo.

Entonces ya tenemos lo que queríamos demostrar:

$$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}. \tag{IV.7}$$

□

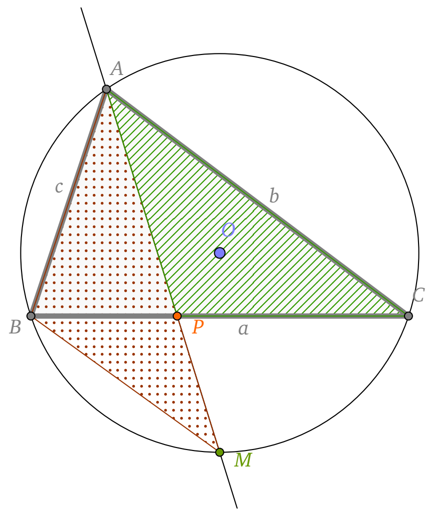
Ejercicio. 8.2. (Torrelodones, 2007, Ver 40 en las Referencias web)
Sea O el circuncentro[1,1] de un triángulo ABC. La bisectriz[1,3] que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc. \tag{IV.8}$$

[1] Se les llama **ángulos internos** a los que, en una transversal que corta a dos paralelas (o a dos rectas), son internos a las rectas pero alternos en la transversal.

[2] Un trapecio isósceles es el que tiene los lados no paralelos de igual medida

Solución.



Dibujamos la circunferencia circunscrita(2.2) al triángulo ABC y prolongamos AP hasta que corte con dicha circunferencia. A este punto de corte le llamamos M.

Por otro lado tenemos que:

- $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ por estar inscritos[2,5] en el mismo arco (véase (2.5)).
- $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ por definición de bisectriz.

Entonces los triángulos ABM y APC son semejantes por el primer criterio de semejanza(5.1), y esto implica que:

$$\frac{c}{AP} = \frac{AM}{b}. \qquad \text{(IV.9)}$$

Despejando cb tenemos que:

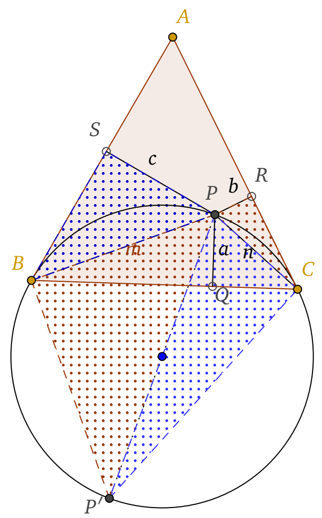
$$\begin{aligned}
cb &= AM\,AP \\
&= (AP + PM)AP, \quad \text{descomponiendo } AM = AP + PM \\
&= AP^2 + PM\,AP \\
&= AP^2 + (OA^2 - OP^2), \quad \text{por ser } PM\ AP \text{ potencia de } P \text{ respecto de la circunferencia, (véase (6))} \\
&= AP^2 + OA^2 - OP^2.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 8.3. (Sevilla, 2006, Ver 40 en las Referencias web)
Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C.
Pongamos a, b, c las distancias desde P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que:

$$a^2 = bc. \tag{IV.10}$$

SOLUCIÓN.



Pongamos:

- $m = PB$ y $n = PC$.
- Sean Q, R, S las proyecciones de P sobre los lados BC, AC y AB respectivamente.
- Sea P' el punto diametralmente opuesto a P.

Vamos a demostrar que PBP' y PBS son semejantes:

- Ambos triángulos son rectángulos por los que ambos tienen un ángulo recto, en concreto:

$$\widehat{PSB} = \widehat{PBP'}. \tag{IV.11}$$

- Si nos fijamos en el triángulo BPB:
  1. Llamamos $u = \widehat{P'PB} = \widehat{OPB}$ donde O es el centro de la circunferencia y a la misma vez vamos a tener en cuenta que $\widehat{OBP} = \widehat{OPB} = u$ por ser el triángulo OBP isósceles, $(OP = OB)$.
  2. Entonces el ángulo que nos queda por conocer de este triángulo es $\widehat{PP'B} = 180^o - 90^o - u = 90^o - u$.
  3. Si nos fijamos ahora en el triángulo SBP tenemos que $\widehat{PBS} = \widehat{OBS} - \widehat{OBP} = 90^o - u$, por tanto este ángulo es igual a $\widehat{PP'B}$.

Entonces los triángulos PBP' y PBS son semejantes aplicando el primer criterio de semejanza de triángulos[(5.1)]:

$$\frac{m}{c} = \frac{2r}{m}, \tag{IV.12}$$

de donde se tiene que:

$$m^2 = 2cr. \tag{IV.13}$$

Análogamente se puede demostrar que los triángulos PCP' y PRC son semejantes y obtenemos:

$$\frac{n}{b} = \frac{2r}{n}, \tag{IV.14}$$

de donde se tiene que:

$$n^2 = 2br. \tag{IV.15}$$

Por otro lado aplicando el Teorema del Seno(II.10) al triángulo PBC tenemos:

$$2r = \frac{n}{\operatorname{sen} \widehat{PBC}}, \tag{IV.16}$$

de donde se tiene:

$$\operatorname{sen} \widehat{PBC} = \frac{n}{2r}. \tag{IV.17}$$

Y del triángulo rectángulo PQB obtenemos:

$$\operatorname{sen} PBC = \operatorname{sen} \widehat{PBQ} = \frac{a}{m}, \tag{IV.18}$$

de donde se tiene despejando a:

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{sen} \widehat{PBC} m \\ &= \frac{nm}{2r}, \quad \text{por (IV.17)}. \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{n^2m^2}{4r^2} \\ &= \frac{2cr2br}{4r^2}, \quad \text{por (IV.13) y (IV.15)} \\ &= bc. \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio. 8.4. (Santiago de Compostela, 2005, Ver 40 en las Referencias web)
En un triángulo de lados a, b, c donde el lado a es la media aritmética de b y c. Probar:

1. $0^o \leq \widehat{A} \leq 60^o$.
2. *La altura relativa al lado a es tres veces el inradio*(2.1) r.
3. *La distancia del circuncentro*(2.2) *al lado a es: $R - r$ (donde R es el radio de la circunferencia circunscrita*(2.2)*).*

SOLUCIÓN.

1. Por la desigualdad triángular(4.8) tenemos:

   - $b \leq a + c = \dfrac{b+c}{2} + c$, de donde se tiene que:

$$\frac{b}{c} \leq 3. \tag{IV.19}$$

   - $c \leq a + b = \dfrac{b+c}{2} + b$, de donde se tiene que:

$$\frac{b}{c} \geq \frac{1}{3}. \tag{IV.20}$$

   Entonces tenemos:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{b}{c} \leq 3. \tag{IV.21}$$

   Por otro lado por el Teorema del coseno(4.6) tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\widehat{A} = \frac{c+b^2}{4} + c^2 - 2bc\, cos\widehat{A},$$

   de donde despejando $cos\widehat{A}$ se tiene:

$$cos\widehat{A} = \frac{-3b^2 - 3c^2 + 2bc}{-8bc}. \tag{IV.22}$$

   Dividimos por c^2 numerador y denominador, llamamos por comodidad $x = \dfrac{b}{c}$ y obtenemos:

$$f(x) = cos\widehat{A} = \frac{-3x^2 + 2x - 3}{-8x} = \frac{3x^2 - 2x + 3}{8x} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{8x} \quad \text{con} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{b}{c} \leq 3. \tag{IV.23}$$

Tenemos que:

- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{8} = 1,$
- $f(3) = \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 1,$
- $f'(x) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{3}{8x^2},$

  de donde igualando a cero obtenemos que hay un mínimo en $x = 1 \left(f(1) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}\right)$.

Entonces nos queda:

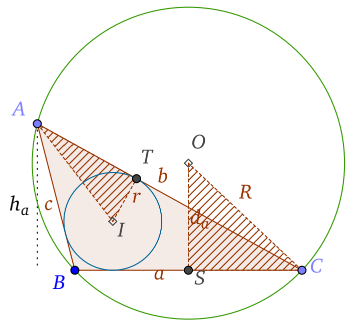
$$\frac{1}{2} \leq \cos\widehat{A} \leq 1. \tag{IV.24}$$

Análogamente:

$$0^{\circ} \leq \widehat{A} \leq 60^{\circ}. \tag{IV.25}$$

2. Designando:

   - A, B y C a los vértices opuestos a los lados a, b y c, respectivamente.
   - I al incentro(1.3).
   - h_a a la altura(1.2) correspondiente al lado a.
   - S al area(3) del triángulo.
   - p al semiperímetro(I.12).
   - r al inradio(2.1).



Tenemos:

-
$$\begin{aligned} S &= pr, \quad \text{ver (I.14)} \\ &= \frac{a+b+c}{2} r, \quad \text{ver semiperímetro (I.12)} \\ &= \left(\frac{a}{2} + a\right) r, \quad \text{usando } a = \frac{b+c}{2} \\ &= \frac{3a}{2} r. \end{aligned}$$

- $$S = \frac{1}{2} a h_a, \text{ ver (I.13)}.$$

Igualando ambas fórmulas tenemos:

$$h_a = 3r. \tag{IV.26}$$

3. Sea d_0 la distancia entre el circuncentro(1.1) y el lado a.
En el triángulo rectángulo SOC sabemos por el Teorema de Pitágoras(4.1) que:

$$R^2 = d_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \tag{IV.27}$$

de donde se tiene:

$$d_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}. \tag{IV.28}$$

Por otro lado en el triángulo rectángulo AIT tenemos:

$$\begin{aligned}
\tan\widehat{A/2} &= \frac{r}{AT} \\
&= \frac{r}{p-a}, \quad \text{ver propiedad de la circunferencia inscrita (2.1)} \\
&= \frac{r}{\frac{a+b+c-2a}{2}}, \quad \text{ver semiperímetro (I.12)} \\
&= \frac{r}{-\frac{a}{2}+a} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{2r}{a}.
\end{aligned}$$

Por lo que nos queda:

$$\tan\widehat{A/2} = \frac{2r}{a}. \tag{IV.29}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{a}{\operatorname{sen} A}, \quad \text{usando el Teorema del Seno generalizado en el triángulo } ABC \text{ (II.10)} \\
&= \frac{a}{\dfrac{2\tan\widehat{A/2}}{1+\left(\tan\widehat{A/2}\right)^2}}, \quad \text{véase el seno en función de la tangente del ángulo mitad [3]} \\
&= a\frac{1+\left(\tan\widehat{A/2}\right)^2}{2\tan\widehat{A/2}} \\
&= a\frac{1+\left(\dfrac{2r}{a}\right)^2}{2\dfrac{2r}{a}}, \quad \text{por (IV.29).} \\
&= a\frac{\dfrac{a^2+4r^2}{a^2}}{\dfrac{4r}{a}} = \frac{a^2+4r^2}{4r} = \frac{a^2}{4r}+r.
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos:

$$\frac{a^2}{4} = r(2R-r). \tag{IV.30}$$

Volviendo a (IV.28) y sustituyendo (IV.30) tenemos:

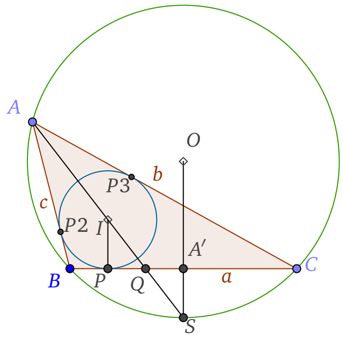
$$d_a^2 = R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2. \tag{IV.31}$$

de donde se tiene:

$$d_a = R - r. \tag{IV.32}$$

[3] Seno en función de la tangente del ángulo mitad: $\operatorname{sen} A = \dfrac{2\tan\widehat{A/2}}{1+\left(\tan\widehat{A/2}\right)^2}$.

Vamos a ver otra solución de este apartado sin usar trigonometría.



Sea S la intersección de la bisectriz de A con la mediatriz de a (que esta en el punto medio del arco BC).

Y sean P, $P2$ y $P3$ los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita(2.1) en el triángulo y los lados a, c y b, respectivamente.

Usando una propiedad de la circunferencia inscrita(2.1) llamamos:

- $x = PB = BP2$
- $y = CP = CP3$
- $z = AP2 = AP3$

y tenemos:

- $a = x + y = \dfrac{b+c}{2}$, por ser a la media aritmética de b y c.
- $b = y + z \rightarrow y = b - z$
- $c = z + x \rightarrow z = c - x$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b+c}{2} - y, \quad \text{despejando } x \text{ en (3)} \\ &= \frac{b+c}{2} - b + z, \quad \text{sustituyendo } y \text{ por su valor (3)} \\ &= \frac{b+c}{2} - b + c - x, \quad \text{sustituyendo } z \text{ por su valor (3)} \\ &= \frac{b+c-2b+2c}{2} - x. \end{aligned}$$

Despejando x se tiene:

$$x = \frac{3c-b}{4}. \tag{IV.33}$$

Aplicando el Teorema de la bisectriz(4.7) al triángulo ABC tenemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{BQ}{CQ}. \tag{IV.34}$$

Sabemos que:

- $$BQ+CQ=a=\frac{b+c}{2}. \tag{IV.35}$$
  Dividimos por BQ y aplicamos (IV.34):
  $$1+\frac{b}{c}=\frac{b+c}{2BQ}. \tag{IV.36}$$
  Despejamos BQ y nos queda:
  $$BQ=\frac{c}{2}. \tag{IV.37}$$
- Como BA' es la mitad de a:
  $$BA'=\frac{a}{2}=\frac{b+c}{4}. \tag{IV.38}$$

Vamos a calcular:

$$\begin{aligned}
QA'-PQ &= (BA'-BQ)-(BQ-BP), \quad \text{(véase el dibujo)}\\
&= \frac{b+c}{4}-2\frac{c}{2}+x, \quad \text{usándose (IV.37) y (IV.38)}\\
&= \frac{b+c}{4}-2\frac{c(b+c)}{2(b+c)}+\frac{3c-b}{4}, \quad \text{usándose (IV.38)}\\
&= \frac{b+c-4c+3c-b}{4}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que $QA'=PQ$.

Y como:

- $\widehat{IPQ}=\widehat{QA'S}=90^{\circ}$.
- $\widehat{IQP}=\widehat{A'QS}$ por ser ángulos alternos internos [4].

Entonces con por las tres últimas igualdades tenemos que los triángulos PIQ y $AS'Q$ son iguales por el primer criterio de igualdad de triángulos[(5)], por tanto $A'S=IP=r$, de donde queda finalmente:

$$OA'=OS-A'S=R-r. \tag{IV.39}$$

□

[4] Se les llama **ángulos internos** a los que, en una transversal que corta a dos paralelas (o a dos rectas), son internos a las rectas pero alternos en la transversal.

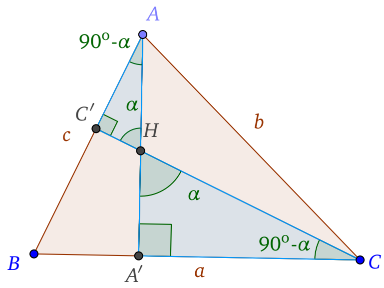
Ejercicio. 8.5. (Canarias, 2003, Ver 40 en las Referencias web)
Las alturas[(1.2)] *del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\widehat{BCA}$.*

SOLUCIÓN. Distinguimos tres casos:

$\widehat{C} < 90^{\mathrm{o}}$**:** Llamemos A' y C' a los puntos en los que las alturas de A y C cortan al lado opuesto respectivamente. Tenemos:

- El ángulo $\widehat{CHA'} = \widehat{AHC}$ porque son ángulos opuestos por el vértice[a].
- En el triángulo $CA'H$ el ángulo $\widehat{CA'H}$ es recto, entonces el ángulo $\widehat{HCA'} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}} - \alpha = 90^{\mathrm{o}} - \alpha$.
- En el triángulo AHC' el ángulo $\widehat{HC'A}$ es recto, entonces el ángulo $\widehat{HAC'} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}} - \alpha = 90^{\mathrm{o}} - \alpha$.

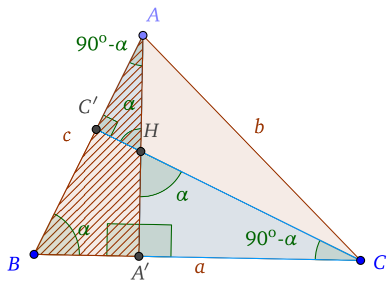
[a]Dadas dos rectas r y s, del plano, que se cortan en el punto P, dos ángulos se dicen **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



Por otro lado tenemos:

El ángulo $\widehat{HAC'}$ es igual al ángulo $\widehat{A'AB}$ del triángulo rectángulo $A'AB$, entonces:

$\widehat{A'BA} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}} - \widehat{HAC'} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}} - (90^{\mathrm{o}} - \alpha) = \alpha.$



Entonces los triángulos CHA' y $A'AB$ son iguales aplicando el primer criterio de igualdad de triángulos[(5)] ($CH = AB$ por ser una condición del enunciado y los ángulos adyacentes de los lados CH y AB son iguales).

Por tanto todos los lados son iguales, en particular $AA' = CA'$.
Si calculamos la tangente del ángulo $\widehat{C}$ en el triángulo $AA'C$ tenemos:

$$\tan \widehat{C} = \frac{AA'}{CA'} = 1. \tag{IV.40}$$

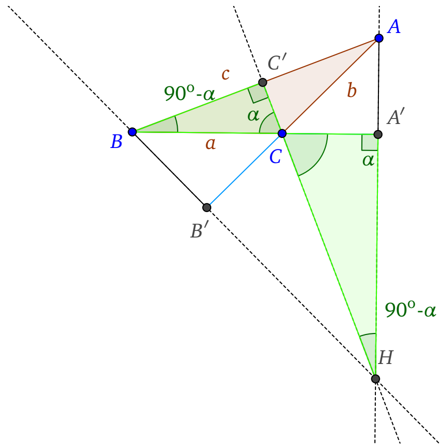
Análogamente:

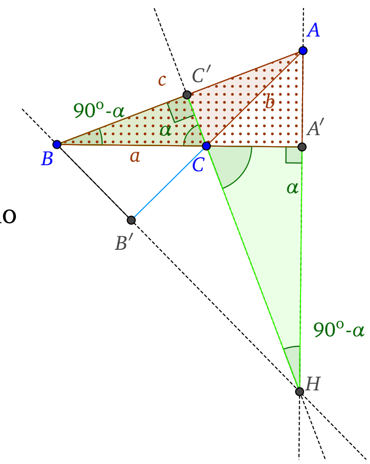
$$\widehat{C} = 45^{\mathrm{o}}. \tag{IV.41}$$

$\widehat{C} > 90^o$**:** Vamos a razonar análogamente al apartado anterior. Llamemos A', B' y C' a los puntos en los que las alturas de A, B y C cortan al lado opuesto respectivamente, tenemos:

- El ángulo $\widehat{A'CH} = \widehat{C'CB}$ porque son ángulos opuestos por el vértice[a].
- En el triángulo $CA'H$ el ángulo $\widehat{CA'H}$ es recto, entonces el ángulo $\widehat{A'HC} = 180^o - 90^o - \alpha = 90^o - \alpha$.
- En el triángulo $CC'H$ el ángulo $\widehat{CC'H}$ es recto, entonces el ángulo $\widehat{C'BC} = 180^o - 90^o - \alpha = 90^o - \alpha$.

[a] Dadas dos rectas r y s, del plano, que se cortan en el punto P, dos ángulos se dicen **opuestos por el vértice**ángulos!opuestos por el vértice cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.





Por otro lado tenemos:

El ángulo $\widehat{C'BC}$ es igual al ángulo $\widehat{ABA'}$ del triángulo rectángulo $AA'B$, entonces:

$\widehat{BAA'} = 180^o - 90^o - \widehat{C'BC} = 180^o - 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$.

Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son iguales aplicando el primer criterio de igualdad de triángulos[5] ($CH = AB$ por ser una condición del enunciado y los ángulos adyacentes de los lados CH y AB son iguales).
Por tanto todos lados son iguales, en particular $AA' = CA'$.

Si calculamos la tangente del ángulo $\widehat{ACA'}$ en el triángulo $\widehat{ACA'}$ tenemos:

$$\tan \widehat{ACA'} = \frac{AA'}{CA'} = 1 \tag{IV.42}$$

Por tanto por una de las propiedades de dos ángulos suplementarios tenemos:

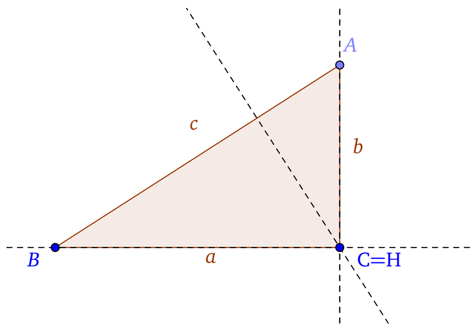
$$\tan(\widehat{C}) = \tan(180^o - \widehat{ACA'}) = -\tan(\widehat{ACA'}) = -1 \tag{IV.43}$$

[4] La tangente de dos ángulos complementarios verifica: $\tan(180^o - \alpha) = -\tan \alpha$.

Análogamente:

$$\widehat{C} = 135^{\circ} \tag{IV.44}$$

$\widehat{C} = 90^{\circ}$**:** En este caso C coincide con H.



Por lo que $CH = 0$.

Como $AB \neq 0$, entonces este valor de $\widehat{C}$ no puede darse, por lo que este caso no es válido.

□

Ejercicio. 8.6. (Ciudad Real, 2004, Ver 40 en las Referencias web)
Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo ABC, la mediana(1.4) *desde B sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita*(2.1) *en el triángulo, es:*

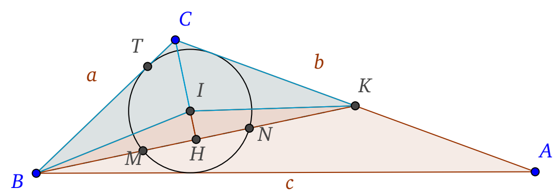
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}. \tag{IV.45}$$

SOLUCIÓN.

1. Primero demostraremos la **condición necesaria**.

   Partimos de un triángulo ABC tal que la mediana CK (donde K es el punto medio de AC) corte a la circunferencia inscrita en dos puntos M y N tales que:

   $$BM = MN = NK = x. \tag{IV.46}$$

   Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita y el lado BC.

   En el triángulo se verifican las siguientes relaciones:

   - $$a + c - b = 2BT. \tag{IV.47}$$

     (Fórmula que deducimos directamente de la propiedad de la circunferencia inscrita(2.1)).

- $$2a^2+2c^2-b^2=4BK^2. \tag{IV.48}$$

  Fórmula de Apolonio(4.9) correspondiente a la mediana del lado b y multiplicada por dos. Y como $BK=3x$ (véase (IV.46)), tenemos:

  $$2a^2+2c^2-b^2=4(3x)^2=36x^2. \tag{IV.49}$$

La potencia del vértice B respecto de la circunferencia inscrita se puede escribir de dos maneras teniendo en cuenta el apartado (6) con su caso especial.

$$BT^2=BMBN. \tag{IV.50}$$

Con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
BT^2&=BMBN\\
\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2&=BMBN,\quad \text{sustituyendo el valor de BT (IV.47)}\\
\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2&=x2x,\quad \text{teniendo en cuenta (IV.46).}
\end{aligned}$$

Con lo que nos queda:

$$(a+c-b)^2=8x^2. \tag{IV.51}$$

En el triángulo ABC, los puntos B y K están igualmente alejados del centro de la circunferencia inscrita. Demostrémoslo:

a) Trazamos la perpendicular a BK que pasa por I.

b) Llamamos H al punto donde esta perpendicular corta a BK.

c) Entonces los triángulos rectángulos en H (IHK, IHB) son semejantes aplicando el tercer criterio de semejanza de triángulos(5.1) por tener el lado IH común y el lado $BH=KH$ (por ser IH perpendicular a un arco de la circunferencia[5]) y además el ángulo comprendido entre los lados iguales ser igual.

Entonces todos los lados son iguales, en particular $BI=KI$.

a) El lado IC es común en ambos triángulos.

b) $BI=KI$ (lo acabamos de demostrar).

c) $\widehat{CIB}=\widehat{CIK}$ porque $\widehat{KIH}=\widehat{BIH}$

d) Entonces los triángulos CKI y CIB son semejantes aplicando el tercer criterio de semejanza de triángulos(5.1).

[5]Cualquier recta perpendicular que pase por el punto medio de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de dicha circunferencia.

Entonces todos los lados son iguales, en particular $BC = KC$. Por lo que tenemos:

$$b = 2a. \tag{IV.52}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (IV.49) y (IV.51) tenemos:

- $2a^2 + 2c^2 - 4a^2 = 36x^2$.

  Simplificando y dividiendo entre dos tenemos:

$$c^2 - a^2 = 18x^2 \rightarrow x^2 = \frac{c^2 - a^2}{18}. \tag{IV.53}$$

- $(a + c - 2a)^2 = 8x^2$.

  Simplificando tenemos:

$$(c - a)^2 = 8x^2 \rightarrow x^2 = \frac{(c - a)^2}{8}. \tag{IV.54}$$

Igualando las dos igualdades de x^2 tenemos:

$\dfrac{c^2 - a^2}{18} = \dfrac{(c - a)^2}{8}$,

y nos queda:

$$\frac{c + a}{c - a} = \frac{9}{4}. \tag{IV.55}$$

Porque sabemos que $c - a \neq 0$ y haciendo cálculos nos queda:

$$\frac{c}{a} = \frac{13}{5}. \tag{IV.56}$$

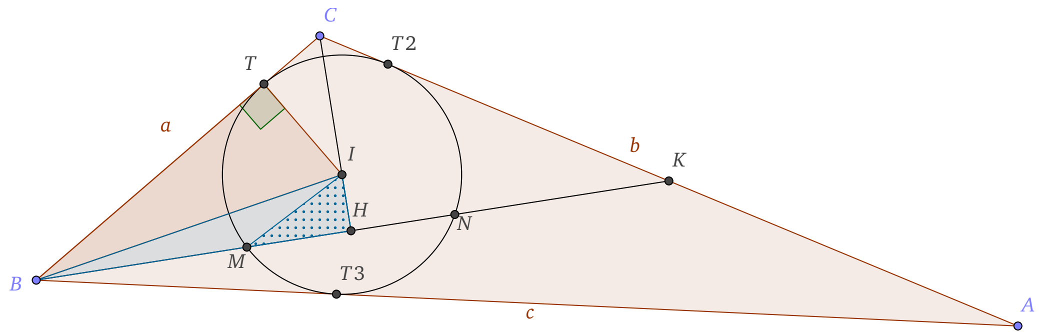
Uniendo esta última igualdad con (IV.52) tenemos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}. \tag{IV.57}$$

2. Ahora demostraremos la **condición suficiente**.

   Podemos suponer sin perdida de generalidad:

   - $a = 5$
   - $b = 10$
   - $c = 13$



Antes de empezar con este apartado vamos a resolver el siguiente sistema (que tiene que ver con una propiedad de la circunferencia inscrita(2.1)):

$$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=10 \\ z+x=13 \end{array}\right\} \text{donde: } x=BT=BT3,\ y=CT=CT2 \text{ y } z=AT2=AT3,$$

cuya solución es: $x=4$, $y=1$ y $z=9$.
Estos valores los usaremos más tarde para terminar el apartado.

Ahora sustituyendo en las fórmulas (IV.48) y (IV.49) usadas en la condición necesaria tenemos:

$$a+c-b=2BT \to 8=2BT \to BT=4 \to BT^2=16. \tag{IV.58}$$

$$2a^2+2c^2-b^2=4BK^2 \to 50-100+338=4BK^2 \to 4BK^2=288 \to BK=6\sqrt{2}. \tag{IV.59}$$

Resumiendo tenemos:

$$BK=6\sqrt{2}, \tag{IV.60}$$

y

$$16=BT^2=BMBN. \tag{IV.61}$$

Si calculamos el semiperímetro(I.12) tenemos que $p=14$ y usando esto calculamos la superficie(3) del triángulo mediante la fórmula de Herón(II.44):

$$S=\sqrt{14(14-5)(14-10)(14-13)}=6\sqrt{14}. \tag{IV.62}$$

Despejando r (radio de la circunferencia inscrita) de la fórmula el área(I.14) de un triángulo en función del radio de su circunferencia inscrita tenemos:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{6\sqrt{14}}{14}=\frac{6}{\sqrt{14}}. \tag{IV.63}$$

El triángulo BCK es isósceles por ser $BC = CK$ (véase (1)) y CI común, entonces la bisectriz del ángulo C es también altura[6]. Llamemos H al pie de dicha altura.

Consideremos el triángulo rectángulo BIT en el ángulo $\widehat{BTI}$ por ser T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita, entonces aplicando el Teorema de Pitágoras[(4.1)] :

$$\begin{aligned} BI^2 &= BT^2 + CI^2 \\ &= r^2 + 4^2 \\ &= \frac{36}{14} + 16, \quad \text{teniendo en cuenta (2)} \\ &= \frac{130}{7}. \end{aligned}$$

Por otra parte el triángulo es rectángulo BIH en el ángulo $\widehat{IHB}$ por ser CH la altura del triángulo CBK. Entonces aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$BI^2 = HB^2 + HI^2. \tag{IV.64}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} HI^2 &= BI^2 - HB^2 \\ &= \frac{130}{7} - HB^2, \quad \text{por (2)} \\ &= \frac{130}{7} - (BK/2)^2, \quad \text{por ser H el punto medio de B y K} \\ &= \frac{130}{7} - (3\sqrt{2})^2, \quad \text{por (IV.59)} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Y finalmente en el triángulo IHM aplicando Pitágoras y (2):

$$HM^2 = IM^2 - IH^2 = \frac{36}{14} - \frac{4}{7} = 2. \tag{IV.65}$$

[6]En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo opuesto a la base, es perpendicular a la base. La bisectriz coincide con la altura correspondiente al lado AB.

Como H es el punto medio de M y N tenemos que $MN = 2\sqrt{2}$, y por otro lado tenemos:

- $$\begin{aligned} BM &= BH - MH \\ &= (BK/2) - MH \\ &= 3\sqrt{2} - MH, \quad \text{usando (IV.59)} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{2}, \quad \text{usando (2)} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} KN &= KN - MH \\ &= (BK/2) - NH \\ &= 3\sqrt{2} - NH, \quad \text{usando (IV.59)} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{2}, \quad \text{usando (2)} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por tanto queda demostrado que $BM = MN = NK$.

□

Ejercicio. 8.7. (Girona, 2009, Ver 40 en las Referencias web)
Sean:

- *ABC un triángulo acutángulo* [7].
- *I el centro de la circunferencia inscrita*(2.1).
- *r el radio de la circunferencia inscrita.*
- *R el radio de la circunferencia circunscrita*(2.2).

Se traza la altura(1.2) *$AD = h_a$ con D perteneciente al lado BC.*
Demuestra:

$$DI^2 = (2R - h_a)(h_a - 2r). \tag{IV.66}$$

SOLUCIÓN. Sean:

- E y M las proyecciones ortogonales de I sobre BC y AD respectivamente.
- F el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC.

Entonces si nos centramos en el triángulo rectángulo AFI tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\frac{r}{AI}, \tag{IV.67}$$

por ser AI una bisectriz del triángulo ABC (al ser I el incentro(1.3)).

Por otro lado vamos a usar dos fórmulas diferentes para el área del triángulo ABC.

1. Vamos a despejar r de la fórmula del área(I.14) en función del inradio:

$$r=\frac{S}{p}. \tag{IV.68}$$

2. Vamos a usar la fórmula del área(I.16) conociendo dos lados y el ángulo que lo forman:

$$S=\frac{b\ c\ \operatorname{sen}A}{2}$$

$$=\frac{bc\dfrac{2\tan\frac{\widehat{A}}{2}}{1+\left(\tan\frac{\widehat{A}}{2}\right)^2}}{2},\quad \text{véase el seno en función de la tangente del ángulo mitad [8]}$$

$$=\frac{b\,c\,\dfrac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}=\frac{b\,c\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=b\,c\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Sustituyendo primero este valor de r y luego el de S en (IV.67), y despejando AI en la misma tenemos:

$$AI=\frac{b\ c\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{p\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}}=\frac{b\ c\ \cos\frac{A}{2}}{p}. \tag{IV.69}$$

Elevamos esta expresión al cuadrado:

$$AI^2=\frac{b^2\ c^2\ \cos^2\frac{A}{2}}{p^2}. \tag{IV.70}$$

[8] Seno en función de la tangente del ángulo mitad: $\operatorname{sen}A=\dfrac{2\tan\widehat{A/2}}{1+\left(\tan\widehat{A/2}\right)^2}$.

Ahora teniendo en cuenta que:

$$cos^2 A/2 = \frac{p(p-a)}{bc}. \tag{IV.71}$$

tenemos:

$$AI^2 = \frac{b^2c^2\dfrac{p(p-a)}{bc}}{p^2} = \frac{bc(p-a)}{p}. \tag{IV.72}$$

Ahora también vamos a tener en cuenta otra serie de cosas:

- Despejando el semiperímetro de la fórmula del área(I.14) del triángulo en función del inradio tenemos:

$$p = \frac{S}{r}. \tag{IV.73}$$

- Despejando la base a de la fórmula clásica del área(I.13) del triángulo tenemos:

$$a = \frac{2S}{h_a}. \tag{IV.74}$$

- Haciendo cálculos en la fórmula del área(I.15) del triángulo en función del circunradio tenemos:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$ah_a = \frac{abc}{4R}.$$

  Despejando bc tenemos:

$$bc = 2Rh_a. \tag{IV.75}$$

Entonces sustituyendo estas tres últimas expresiones la expresión (IV.72) tenemos:

$$\begin{aligned} AI^2 &= \frac{bc(p-a)}{p} \\ &= \frac{2Rh_a\left(\dfrac{S}{r} - \dfrac{2S}{h_a}\right)}{\dfrac{S}{r}} \\ &= \frac{2Rh_a\left(\dfrac{Sh_a - r2S}{rh_a}\right)}{\dfrac{S}{r}} \\ &= 2R(h_a - 2r). \end{aligned}$$

Como el cuadrilátero $IEDM$ es un rectángulo ($MD = IR = r$), aplicando el Teorema de Pitágoras (4.1) a ADI, tenemos:

$$\begin{aligned} DI^2 &= h_a^2 + AI^2 - 2h_a AM \\ &= h_a^2 + AI^2 - 2h_a(h_a - MD), \quad \text{observando el dibujo} \\ &= h_a^2 + 2R(h_a - 2r) - 2h_a(h_a - r), \quad \text{teniendo en cuenta (8)} \\ &= (2R - h_a)(h_a - 2r). \end{aligned}$$

□

Ejercicio. 8.8. (Murcia, 2001, Ver 40 en las Referencias web)
Sea P un punto interior del triángulo ABC, de modo que ABP verifica $AP = BP$.
Sobre cada uno de los otros dos lados se construyen, exteriormente, triángulos BQC y CRA, semejantes al triángulo ABP, cumpliendo $BQ = QC$ y $CR = RA$ respectivamente.
Probar que los puntos P, Q, C y R, o están alineados, o son los vértices de un paralelogramo.

SOLUCIÓN.
Veamos que los triángulos ABC y PBQ son semejantes aplicando el tercer criterio de semejanza(5.1):

- $\widehat{ABP} = \widehat{CBQ}$ por ser los triángulos APB y BQC semejantes. Sumamos la misma cantidad a ambos miembros:

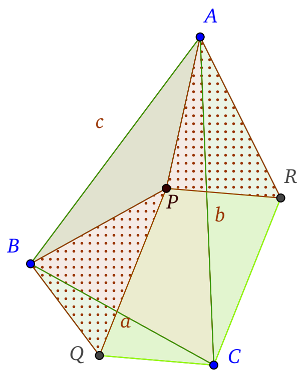
  $$\widehat{ABP} + \widehat{PBC} = \widehat{CBQ} + \widehat{PBC}.$$

  Entonces tenemos:

  $$\widehat{ABC} = \widehat{PBQ}.$$

- Y además los lados que forman dichos ángulos son proporcionales:

  $\dfrac{c}{a} = \dfrac{BP}{BQ}$, por ser los triángulos APB y BQC semejantes.



Entonces ABC y PBQ semejantes, y por ello tenemos que todos sus ángulos son iguales, en particular:

$$\widehat{BQP} = \widehat{ACB}. \tag{IV.76}$$

Análogamente tenemos que ABC es semejante a APR siguiendo el mismo razonamiento. Entonces todos sus ángulos son iguales y en particular:

$$\widehat{ARP} = \widehat{ACB}. \tag{IV.77}$$

Entonces si unimos estas dos semejanzas de triángulos tenemos que los triángulos PBQ y APR son semejantes y como $PB = PA$, entonces todos sus lados tienen que ser iguales y por ello los triángulos son iguales por el tercer criterio de igualdad de triángulos[(5)].

Por otro lado vamos a llamar $\alpha = \widehat{BAP} = \widehat{ABP}$ por ser ABP isósceles al tener dos ángulos iguales. Entonces tenemos que los cuatro ángulos del paralelogramo miden:

- $$\widehat{QCR} = \widehat{C} + 2\alpha.$$

- $$\begin{aligned}\widehat{QPR} &= 360^{\circ} - \widehat{APB} - \widehat{APR} - \widehat{BPQ}\\ &= 360^{\circ} - (180^{\circ} - 2\alpha) - \widehat{APR} - \widehat{BPQ},\\ &\text{teniendo en cuenta que} \quad \widehat{APB} + \widehat{BAP} + \widehat{PBA} = 180^{\circ}.\\ &= 2\alpha + (180^{\circ} - \widehat{B} - \widehat{A}),\\ &\text{por la igualdad de los ángulos de los triángulos semejantes } ABC,\ BPQ \text{ y } APR\\ &= 2\alpha + \widehat{C}\\ &\text{teniendo en cuenta que} \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\widehat{PRC} &= 180^{\circ} - 2\alpha - \widehat{ARP}\\ &= 180^{\circ} - 2\alpha - \widehat{C}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\widehat{PQC} &= 180^{\circ} - 2\alpha - \widehat{BQP}\\ &= 180^{\circ} - 2\alpha - \widehat{C}.\end{aligned}$$

Tenemos que los ángulos opuestos del cuadrilátero $PQCR$ son iguales, entonces $PQCR$ es un paralelogramo[9].

La alineación es un caso particular y se producirá cuando:

$$\widehat{C} + 2\alpha = 180^{\circ} \rightarrow \alpha = \frac{180^{\circ} - \widehat{C}}{2}. \tag{IV.78}$$

□

[9] Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Capítulo V

Olimpiadas Internacionales

9. Problemas

9.1. Segunda Olimpíada Internacional de Matemáticas,1960 (Rumania)

La segunda Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 18 al 25 Julio de 1960 en las ciudades de Sinaia y Bucarest.

Los países participantes fueron: Bulgaria, Checoslovaquia, Alemania Oriental, Hungría y Rumania.

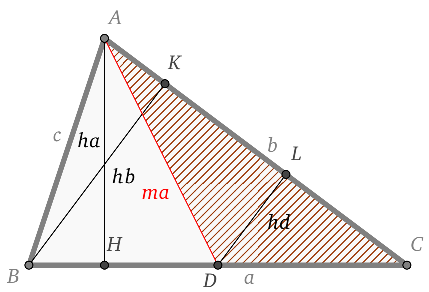
Ejercicio. 9.1. (Hungría,[2, Enunciado, solución: pág 12,15, Ejercicio 2.4])
Usando regla y compás construye el triángulo ABC conocidas: h_a, h_b y m_a, donde:

- h_a*: altura*[1,2] *del triángulo que parte del lado* BC*.*
- h_b*: altura del triángulo que parte del lado* AC*.*
- m_a*: mediana*[1,4] *del triángulo que parte del vértice* A*.*

Solución.

Denotamos:

- $AH = h_a$.
- $BK = h_b$.
- $AD = m_a$.



En el triángulo ADC sea L el pie de la altura que parte del lado AC, h_d.

Entonces:

1. ALD es un triángulo rectángulo por la definición de altura.

2. Consideremos los triángulos ADC y ABC. Entonces:

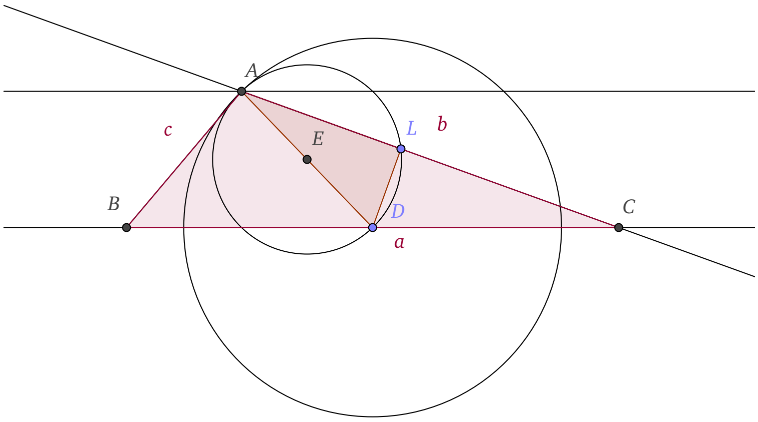
   - El área del triángulo ADC es la mitad que la del triángulo ABC, (véase la propiedad de la mediana (1.4)).
   - Tomemos como base de ambos triángulos el lado AC.

   Entonces la altura del triángulo ADC debe ser la mitad que la del triángulo ABC.

$$DL = \frac{1}{2}h_b. \tag{V.1}$$

Por lo que una construcción del triángulo ABC puede ser la siguiente:

- Trazamos una recta: l.
- Tomamos un punto de la recta l: $D \in l$.
- Trazamos una recta paralela a l y a la distancia h_a de l: l'.
- Dibujamos la circunferencia de centro D y radio m_a siempre que $h_a < m_a$ y obtenemos dos puntos de corte de la circunferencia con la recta l': A y A'.
- Nos quedamos con el punto A.
- Dibujamos otra circunferencia con diámetro AD de centro el punto medio de A y D y radio $\frac{AD}{2}$.
- Inscribimos en esta última circunferencia el triángulo ADL con $DL = \frac{h_b}{2}$ siempre que $\frac{h_b}{2} < m_a$.
- Alargamos el lado AL del triángulo ADL hasta que corte con la recta l. El punto de corte es el punto C.
- El punto D es el punto medio de B y C. Por lo que calculamos el simétrico de C respecto de D y obtenemos el punto B.
- Así queda determinado el triángulo ABC.



□

Si el ejercicio en lugar de dar la mediana que parte del vértice de A, diera la que parte de C, el ejercicio sería mucho más fácil y lo podríamos poner como nivel local. Por lo que podemos encontrarlo en el capitulo de Problemas de Olimpiadas a nivel local (7.8.).

9.2. Tercera Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1961(Hungría)

La tercera Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 18 al 25 de Julio de 1961 en las ciudades de Budapest y Veszprém.

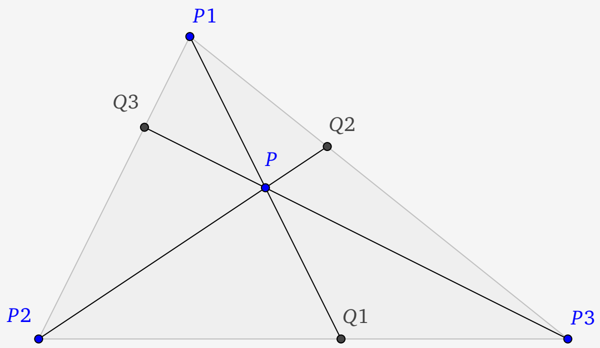
Los países participantes fueron: Bulgaria, Checoslovaquia, Alemania Oriental, Hungría, Polonia y Rumania.

Ejercicio. 9.2. (Alemania oriental,[2, Enunciado, solución: pág 21,23, Ejercicio 3.4])
Sea $P_1P_2P_3$ un triángulo y P un punto interior del mismo.
Denotamos a Q_1, Q_2 y Q_3 los puntos de intersección de P_1P, P_2P, P_3P con los lados opuestos P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, respectivamente.

Demuestra que entre estas tres relaciones:

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3},$$

existe una mayor o igual que dos y otra menor o igual que dos.



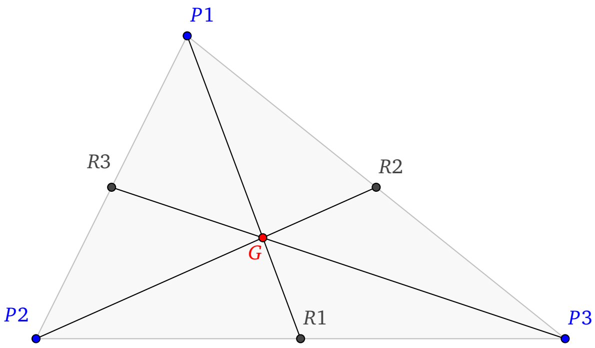
SOLUCIÓN. Sean:

- G el baricentro(1.4) del triángulo $P_1P_2P_3$.
- R_i el punto de intersección de P_iG con el lado opuesto respectivamente, $i = 1, 2, 3$.

Distinguimos dos casos:

1. $\boldsymbol{P = G}$. Entonces $Q_i = R_i$, por lo que tenemos:

   $\dfrac{P_1G}{GR_1} = \dfrac{P_2G}{GR_2} = \dfrac{P_3G}{GR_3} = 2$, véase la propiedad de la mediana (1.4).



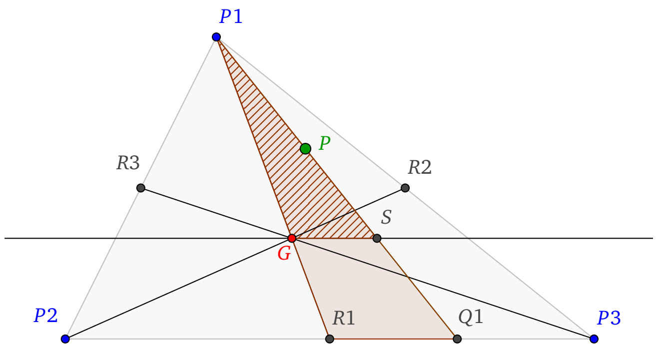
2. $\boldsymbol{P \neq G}$. Entonces P es un punto interior de los seis triángulos que determinan las medianas, pertenece a una de las medianas o es un punto del borde de dichos triángulos.

   Suponemos que $P \in \text{int}(P_1GR_2)$. Entonces:

   - Sea S el punto de intersección de P_1Q_1 y la paralela a P_2P_3 que pasa por el punto G.

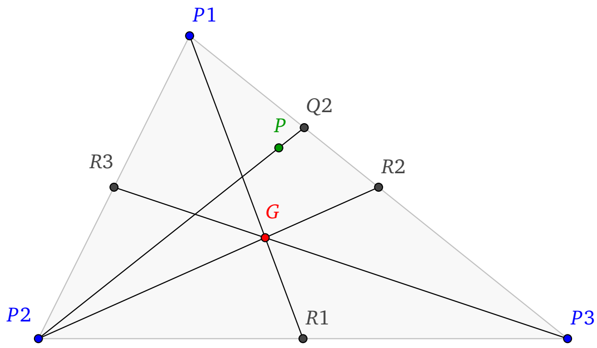
     $$\frac{P_1P}{PQ_1} < \frac{P_1S}{SQ_1} = \frac{P_1G}{GR_1} = 2,$$

     donde la primera igualdad se da por ser los triángulos P_1GS y $P_1R_1Q_1$ semejantes por estar en posición de Thales(5.1) y la última igualdad por una propiedad de la mediana(1.4).



- $\dfrac{P_2P}{PQ_2} > \dfrac{P_2G}{GR_2} = 2,$

  donde la igualdad vuelve a darse por la misma propiedad de la mediana(1.4).

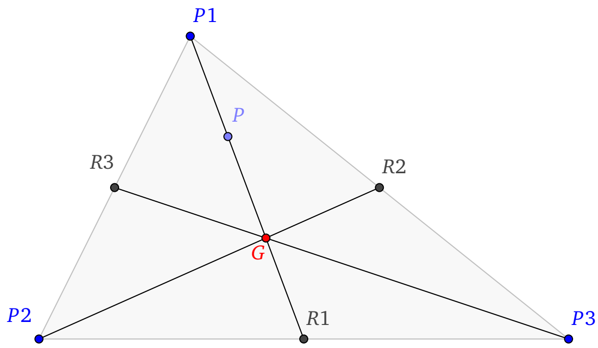


En el caso de que el punto P estuviera dentro de otro de los triángulos, la demostración sería análoga.

Supongamos que P esté en el borde del triángulo P_1GR_2 (es decir, en la mediana del triángulo que parte de P_1). Entonces $Q_1 = R_1$, y por tanto:

- $\dfrac{P_1P}{PR_1} > \dfrac{P_1G}{GR_1} = 2,$

donde la igualdad vuelve a darse por la misma propiedad de la mediana.



□

9.3. Sexta Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1964 (URSS, Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas)

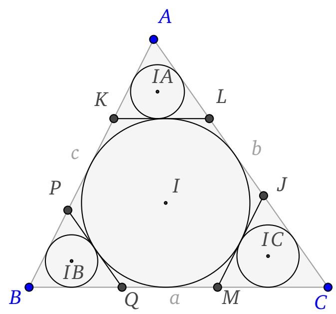
La sexta Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 30 de Junio al 10 de Julio de 1964 en las ciudades de Moscú.

Los países participantes fueron: Bulgaria, Checoslovaquia, Alemania Oriental, Hungría, Mongolia, Polonia, Rumanía y Yugoslavia.

Ejercicio. 9.3. (Yugoslavia,[2, Enunciado, solución: pág 39,41, Ejercicio 6.3])
Sea ABC un triángulo y a,b,c las longitudes de sus lados. Las rectas tangentes a la circunferencia inscrita[2,1] en el triángulo, las cuáles son paralelas a los lados, dividen a ABC en tres pequeños triángulos. En cada triángulo pequeño consideramos la circunferencia inscrita.
Calcula la suma de las áreas de las cuatro circunferencias inscritas.

SOLUCIÓN.

Sea KL la recta tangente a la circunferencia inscrita del triángulo ABC, la cuál es paralela al lado BC y sea r_A el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo AKL.



De la misma forma, sean:

- r_B el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo PBQ.
- r_C el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo JMC.

Y sea r el inradio[(2.1)] del triángulo ABC.

Los triángulos ABC y AKL son semejantes porque están en posición de Thales[(5.1)] , por lo que la razón de semejanza es:

$$\frac{r}{r_A}. \tag{V.2}$$

Esta razón de semejanza coincide con la correspondiente a las alturas de los triángulos:

$$\frac{h}{h-2r} = \frac{r}{r_A}, \tag{V.3}$$

donde:

- h es la altura[1,2] del triángulo ABC.
- $2r$ coincide con la altura del cuadrilátero $BKLC$.

Entonces:

$$r_A = \frac{r(h-2r)}{h} = \frac{rh-2r^2}{h} = r - \frac{2r^2}{h}. \tag{V.4}$$

Igualando las fórmulas:

- Área[(3)] del triángulo.
- Área[(I.14)] del triángulo en función del radio de la circunferencia inscrita.

y despejando h tenemos:

$$h = \frac{2rp}{a}. \tag{V.5}$$

Entonces:

$$r_A = r - \frac{2r^2}{\frac{2rp}{a}} = r - \frac{2r^2 a}{2rp} = \frac{rp - ra}{p} = \frac{r}{p}(p-a). \tag{V.6}$$

De la misma manera:

- $r_B = \dfrac{r}{p}(p-b)$.
- $r_C = \dfrac{r}{p}(p-c)$.

La suma de las áreas de las cuatro circunferencias inscritas es:

$$\begin{aligned}
T &= \pi\left(r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2\right) \\
&= \pi\left(r^2 + \left(\frac{r}{p}(p-a)\right)^2 + \left(\frac{r}{p}(p-b)\right)^2 + \left(\frac{r}{p}(p-c)\right)^2\right) \\
&= \pi r^2\left(1 + \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{p^2}\right) \\
&= \pi r^2\left(1 + \frac{p^2 - 2ap + a^2 + p^2 - 2ab + b^2 + b^2 + p^2 - 2pc + c^2}{p^2}\right) \\
&= \pi r^2\left(\frac{4p^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2p(a+b+c)}{p^2}\right), \quad \text{usando}(a+b+c) = 2p, \quad \text{(ver semiperímetro}^{(I.12)}) \\
&= \pi r^2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{p^2}\right).
\end{aligned}$$

Igualando las fórmulas:

- Fórmula del Herón(II.44).
- Área(I.14) del triángulo en función del radio de la circunferencia inscrita.

y despejando r^2 tenemos:

$$r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{V.7}$$

por tanto nos queda:

$$
\begin{aligned}
T &= \pi\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}\right), \quad \text{sustituyendo } p \text{ por su valor, ver semiperímetro}^{(I.12)} \\
&= \pi\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{p^3}\right) \\
&= \pi\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3}\right)\right) \\
&= \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}.
\end{aligned}
$$

□

9.4. Octava Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1966 (Bulgaria)

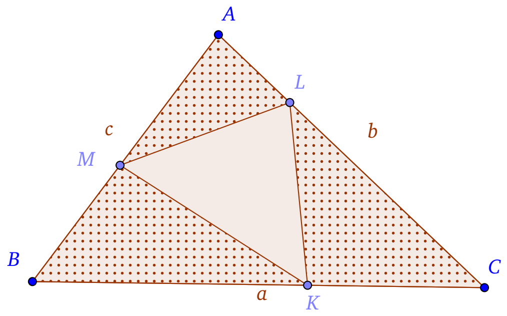
La octava Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 3 al 13 Julio de 1966 en la ciudad de Sofía. Los países participantes fueron: Bulgaria, Checoslovaquia, Alemania Oriental, Hungría, Mongolia, Polonia, Rumania, la URSS y Yugoslavia.

Ejercicio. 9.4. (Polonia,[2, Enunciado, solución: pág 52,54, Ejercicio 8.6])
Sean:

- ABC *un triángulo.*
- M, K *y* L *puntos interiores de los segmentos* AB, BC *y* CA, *respectivamente.*

Demostrar que, entre los triángulos MAL, KBM *y* LCK, *al menos el área de uno de ellos no es superior a la cuarta parte del área del triángulo* ABC.

SOLUCIÓN. Sean a, b, c los lados del triángulo ABC y $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ sus respectivos ángulos.
Si denotamos:



- $AM = p_1 c$ y $BM = p_2 c$,
- $BK = m_1 a$ y $CK = m_2 a$,
- $CL = n_1 b$ y $AL = n_2 b$.

tenemos que:

- $p_1, p_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ son números reales positivos,
- $p_1 + p_2 = n_1 + n_2 = m_1 + m_2 = 1$.

1. Por un lado aplicando la siguiente fórmula:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \widehat{C}, \quad \text{véase (I.16)}, \tag{V.8}$$

tenemos:

$$\frac{S_{KLC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} n_1 b m_2 a \operatorname{sen} \widehat{C}}{\frac{1}{2} ab} = n_1 m_2. \tag{V.9}$$

Análogamente:

- $\dfrac{S_{LMA}}{S_{ABC}} = p_1 n_2,$
- $\dfrac{S_{KLC}}{S_{ABC}} = p_2 m_1.$

Razonemos usando la reducción al absurdo, por lo que vamos a suponer que las áreas de los tres pequeños triángulos son mayores que $\frac{1}{4}$area(ABC). Entonces multiplicando las tres áreas tenemos:

$$p_1 p_2 n_1 n_2 m_1 m_2 > \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}. \tag{V.10}$$

2. Por otro lado aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica: $a + b > 2\sqrt{ab}$, tenemos:

$$1 = p_1 + p_2 > 2\sqrt{p_1 p_2} \tag{V.11}$$

$$1 = m_1 + m_2 > 2\sqrt{m_1 m_2} \tag{V.12}$$

$$1 = n_1 + n_2 > 2\sqrt{n_1 n_2} \tag{V.13}$$

Si multiplicamos estas tres desigualdades tenemos:

$$1 > 8\sqrt{p_1p_2}\sqrt{n_1n_2}\sqrt{m_1m_2} \tag{V.14}$$

$$1 > \left(8\sqrt{p_1p_2}\sqrt{n_1n_2}\sqrt{m_1m_2}\right)^3. \tag{V.15}$$

Entonces hemos llegado a una contradicción, por lo que al menos una de las tres áreas es mayor que $\frac{1}{4}$area(ABC).

□

9.5. Duodécima Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1970 (Hungría)

La segunda Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 8 al 22 Julio de 1970 en las ciudades de Keszthely y Budapest.

Los países participantes fueron: Alemania, Austria, Bulgaria, Checoslovaquia, Francia, Alemania Oriental, Hungría, Mongolia, Países Bajos, Polonia, Rumania, Suecia, Reino Unido, la URSS y Yugoslavia.

Ejercicio. 9.5. (Polonia,[2, Enunciado, solución: pág ,79,80 Ejercicio 12.1])
Sea ABC un triángulo y M un punto interior del lado AB.
Sean:

- r_1, r_2, r *los radios de las circunferencias inscritas*[2,1] *a los triángulos AMC, BMC, ABC, respectivamente.*
- ρ_1, ρ_2, ρ *los radios de las circunferencias exinscritas*[2,3] *a los triángulos AMC, BMC, ABC, respectivamente.*

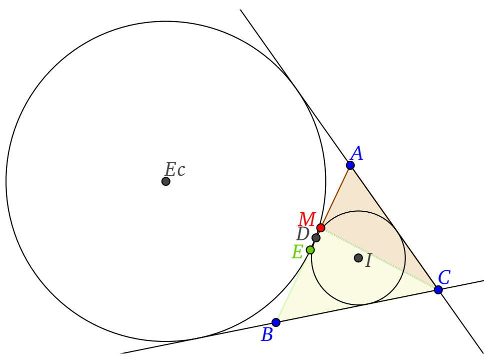
Probar la igualdad:

$$\frac{r_1r_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{r}{\rho}. \tag{V.16}$$

SOLUCIÓN.

Sean:

- I el incentro(1.3) del triángulo ABC.
- D el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC y el lado AB.
- E el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita en el triángulo ABC y el lado AB.



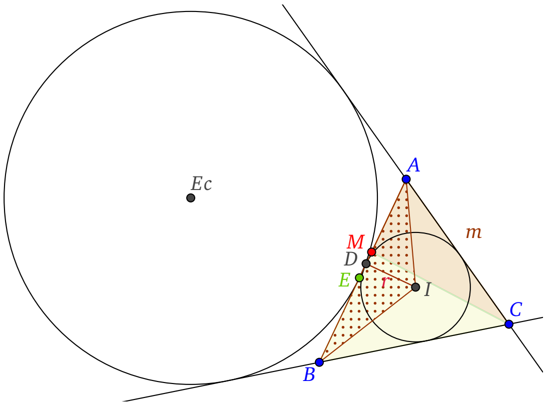
Sabemos que:

$$AD = p - a, \qquad BD = p - b, \qquad \text{(véase (2.1))}, \tag{V.17}$$

$$BE = p - a, \qquad AE = p - b, \qquad \text{(véase (2.3))}. \tag{V.18}$$

Por tanto a partir de la tangente de los triángulos rectángulos IDA y IDB tenemos:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{AD} = \frac{r}{p-a}, \quad \text{aplicándo (IV.67)},$$
$$\tan\frac{B}{2} = \frac{r}{BD} = \frac{r}{p-b}, \quad \text{aplicándo (IV.67)}.$$

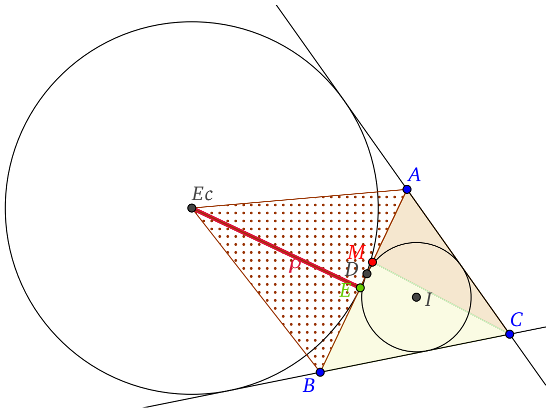


Entonces nos queda:

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2}. \tag{V.19}$$

Análogamente a partir de la cotangente de los triángulos rectángulos E_cBE y E_cAE tenemos:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{AE}{\rho} = \frac{p-b}{\rho}, \quad \text{aplicándo (V.18)},$$
$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{BE}{\rho} = \frac{p-a}{\rho}, \quad \text{aplicándo (V.18)}.$$



Entonces nos queda:

$$\rho = (p-b)\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = (p-a)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}. \tag{V.20}$$

Por lo tanto:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{(p-a)\tan\frac{A}{2}}{(p-a)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} = \frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}. \tag{V.21}$$

Por otro lado, aplicando todo este procedimiento a los triángulos CAM y CMB, tenemos:

- $\dfrac{r_1}{\rho_1} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{\angle AMC}{2}$,
- $\dfrac{r_2}{\rho_2} = \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{\angle CMB}{2}$.

Además sabemos:

$$\angle AMC = \pi - \angle CMB, \tag{V.22}$$

por lo que:

$$\frac{\angle AMC}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle CMB}{2}. \tag{V.23}$$

Si aplicamos tangente en esta última igualdad tenemos:

$$\tan\left(\frac{\angle AMC}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle CMB}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\angle CMB}{2}\right), \quad \text{aplicando la tangente del ángulo complementario}^{1}.$$

Entonces tenemos:

$$\tan\left(\frac{\angle AMC}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\angle CMB}{2}\right). \tag{V.24}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{r_1 r_2}{\rho_1\rho_2} &= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{\angle AMC}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\angle CMB}{2}\\
&= \tan\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{\angle CMB}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{\angle CMB}{2}, \quad \text{véase (V.24)}\\
&= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrada la igualdad pedida. □

9.6. Décima Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1968 (URSS, Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas)

La décima Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 5 al 18 Julio de 1968 en las ciudades de Moscú y Leningrado (San Petersburgo).

Los países participantes fueron: Bulgaria, Checoslovaquia, Alemania Oriental, Hungría, Italia, Mongolia, Polonia, Rumania, Suecia, Reino Unido, la URSS y Yugoslavia.

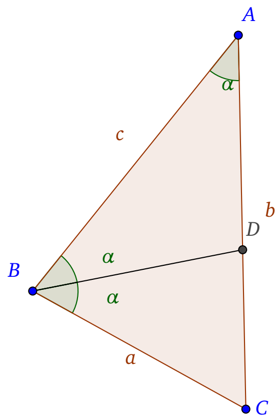
[1] Tangente del ángulo complementario: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$.

Ejercicio. 9.6. (Rumania,[2, Enunciado, solución: pág ,63,64 Ejercicio 10.1])
Demuestra que solo existe un triángulo cuyos lados vienen dados por tres enteros positivos consecutivos y un ángulo es dos veces otro ángulo.

SOLUCIÓN.

Sean:

- $\widehat{B} = 2\widehat{A}$.
- BD la bisectriz interior del ángulo $\widehat{B}$.



Usando el Teorema de la bisectriz(4.7) tenemos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \qquad \text{(V.25)}$$

lo que es igual a:

$$\frac{c}{a} = \frac{AD}{DC} \qquad \text{(V.26)}$$

Expresando DC como $b - AD$ y AD como $b - DC$, tenemos:

- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{AD}{b - AD}$,
- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b - DC}{DC}$.

Despejando AD y DC, respectivamente, tenemos:

- $AD = \dfrac{cb}{a+b}$,
- $DC = \dfrac{ab}{a+c}$.

Además tenemos que el triángulo ABD es isósceles porque tiene dos ángulos iguales, por lo tanto tenemos que $AD = BD$.
Por otro lado los triángulos ABC y BDC son semejantes por el siguiente razonamiento. Demostremoslo:

ABD Sabemos que $\widehat{ABD} = \widehat{BAD} = \alpha$, por lo tanto:

$$\widehat{BDA} = 180^{o} - 2\alpha. \qquad \text{(V.27)}$$

BDC Sabemos que $\widehat{CBD} = \alpha$ y tenemos que $\widehat{BDC} = 180^o - (180^o - 2\alpha) = 2\alpha$ por (V.27).

Ahora, si nos centramos en los dos triángulos ABC y BDC, tenemos:

$\boldsymbol{ABC}$: $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = 2\alpha$.

$\boldsymbol{BCD}$: $\widehat{DBC} = \alpha$ y $\widehat{BDC} = 2\alpha$.

Entonces aplicando el primer criterio de semejanza[(5.1)], tenemos que los triángulos ABC y BDC son semejantes

Entonces tenemos que:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BD}. \tag{V.28}$$

Centrándonos en la primera igualdad y sustituyendo DC por su valor (véase (9.6)), tenemos:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{b}{a}. \tag{V.29}$$

Despejando obtenemos la relación clave para el ejercicio:

$$a(a+c) = b^2. \tag{V.30}$$

Ahora consideramos tres casos:

$\boldsymbol{A < B < C}$: Entonces $b = a + 1$ y $c = a + 2$. En este caso, sustituyendo en (V.30), tenemos que $a = 1$, por lo que $b = 2$ y $c = 3$.

Entonces el triángulo no verifica la desigualdad triangular[(4.8)].

$\boldsymbol{A < C < B}$: Entonces $c = a + 1$ y $b = a + 2$. En este caso, sustituyendo en (V.30), tenemos que $a = 4$, por lo que $b = 6$ y $c = 5$.

$\boldsymbol{C < A < B}$: Entonces $c = a - 1$ y $b = a + 1$. En este caso, sustituyendo en (V.30), no tenemos soluciones enteras.

Por tanto sólo existe un triángulo cuyos lados vienen dados por tres enteros positivos consecutivos y un ángulo es dos veces otro ángulo y es el que cumple:

- $a = 4$
- $b = 6$
- $c = 5$
- $\cos A = \frac{3}{4}$. Valor obtenido aplicando el Teorema del Seno[(4.5)] con los valores a,b y c anteriores.

□

9.7. Decimoséptima Olimpíada Internacional de Matemáticas, 1975 (Bulgaria)

La decimoséptima Olimpíada Internacional de Matemáticas se celebró del 3 al 16 Julio de 1975 en las ciudades de Burgas y Sofía.

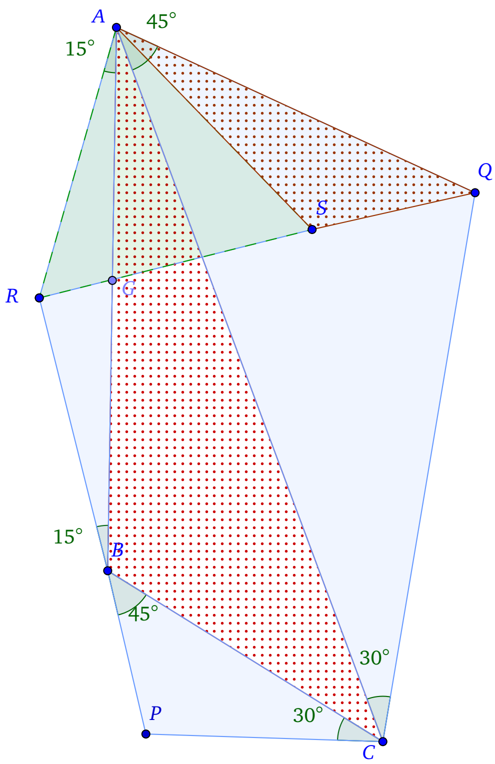
Los países participantes fueron: Austria, Bulgaria, Checoslovaquia, Francia, Alemania Oriental, Grecia, Hungría, Mongolia, Países Bajos, Polonia, Rumania, Suecia, Reino Unido, Estados Unidos, la URSS, Vietnam y Yugoslavia.

Ejercicio. 9.7. (Países Bajos,[2, Enunciado, solución: pág ,116,118 Ejercicio 17.3])
Sea ABC un triángulo. Los triángulos ABR, BCP y CAQ son dibujados externamente en los lados AB, BC y CA, respectivamente, de forma que:

- $\angle PBC = \angle CAQ = 45^o$,
- $\angle BCP = \angle QCA = 30^o$,
- $\angle RBA = \angle RAB = 15^o$.

Demuestra que $\angle QRP = 90^o$ y $QR = RP$.

SOLUCIÓN.



Sea RS el segmento obtenido al rotar RB sobre R un ángulo de 90^o.
Como el triángulo ABR es isósceles porque tiene dos ángulos iguales, tenemos que $AR = BR$ y entonces $RS = RA$.
Por otro lado sabemos:

$$\widehat{SRA} = \widehat{R} - 90^o = (180^o - 30^o) - 90^o = 60^o.$$

Entonces el triángulo RSA es equilátero por tener dos lados iguales y el ángulo que los une tener valor 60^o, por lo que tenemos:

$$AS = RA = AS. \qquad \text{(V.31)}$$

Por otro lado tenemos:

$$\widehat{SAQ} = \widehat{BAC}. \tag{V.32}$$

Para demostrar esta igualdad, si nos centraremos primero en el triángulo AGR, tenemos:

$\widehat{RGA} = 180^{\circ} - \widehat{ARG} - \widehat{RAG} = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 15^{\circ} = 105^{\circ}$.

Fijándonos ahora en el triángulo AGS, tenemos:

$\widehat{AGS} = 180^{\circ} - \widehat{RGA} = 75^{\circ}$ y $\widehat{GAS} = 180^{\circ} - \widehat{AGS} - \widehat{ASG} = 180^{\circ} - 75^{\circ} - 60^{\circ} = 45^{\circ}$.

Entonces resulta $\widehat{GAS} = \widehat{BAQ}$, y restándole a ambos ángulos el ángulo $\widehat{BAS}$ nos queda la igualdad que buscábamos.

Ahora vamos a usar el Teorema del Seno (4.5) en los triángulos AQC y ARB:

$\boldsymbol{AQC}$: $\dfrac{AQ}{\operatorname{sen} 30^{\circ}} = \dfrac{AC}{\operatorname{sen} 105^{\circ}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
AQ &= AC\,\frac{\operatorname{sen} 30^{\circ}}{\operatorname{sen} 105^{\circ}} \\
&= AC\,\frac{\operatorname{sen}(2\cdot 15^{\circ})}{\operatorname{sen}(90^{\circ}+15^{\circ})} \\
&= AC\,\frac{2\operatorname{sen} 15^{\circ}\cos 15^{\circ}}{\cos 90^{\circ}\cos 15^{\circ} + \operatorname{sen} 90^{\circ}\operatorname{sen} 15^{\circ}}, \quad \text{ver coseno de la suma y seno del ángulo doble[2]} \\
&= AC\,\frac{2\operatorname{sen} 15^{\circ}\cos 15^{\circ}}{1\cos 15^{\circ} + 0\operatorname{sen} 15^{\circ}} \\
&= 2AC\operatorname{sen} 15^{\circ}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{ARB}$: $\dfrac{AR}{\operatorname{sen} 15^{\circ}} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen} 150^{\circ}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
AR &= AB\,\frac{\operatorname{sen} 15^{\circ}}{\operatorname{sen} 150^{\circ}} \\
&= AB\,\frac{\operatorname{sen} 15^{\circ}}{\frac{1}{2}} \\
&= 2AB\operatorname{sen} 15^{\circ}.
\end{aligned}$$

[2] Coseno de la suma: $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$. Seno del ángulo doble: $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$.

Teniendo en cuenta estas dos últimas igualdades tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{AS} &= \frac{AQ}{AR}, \quad \text{por (V.31)}\\ &= \frac{2AC \operatorname{sen} 15^{\circ}}{2AB \operatorname{sen} 15^{\circ}}\\ &= \frac{AC}{AB},\end{aligned}$$

lo que es igual que:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AS}{AB}. \tag{V.33}$$

Entonces con (V.32) y (V.33) tenemos que los triángulos CAB y QAS son semejantes[(5.1)] y, aplicando de nuevo semejanza de triángulos, podemos decir que:

- $\widehat{ABC} = \widehat{ASQ}$.
- $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{BC}{SQ}$ de donde despejando y aplicando (V.31) tenemos:

$$SQ = 2BC \operatorname{sen} 15^{\circ}. \tag{V.34}$$

Aplicando nuevamente el Teorema del Seno en el triángulo BPC, obtenemos:

$$BP = 2BC \operatorname{sen} 15^{\circ} \tag{V.35}$$

Entonces tenemos que $SQ = BP$.

Sabemos:

- $\widehat{RBP} = \widehat{ABC} + 45^{\circ} + 15^{\circ} = \widehat{ABC} + 60^{\circ}$,
- $\widehat{RSQ} = \widehat{ASQ} + 60^{\circ}$, por ser el triángulo RSA equilátero.

Por (9.7) tenemos:

$$\widehat{RBP} = \widehat{RSQ}. \tag{V.36}$$

Por lo que podemos concluir que la linea poligonal RSQ es obtenida por una rotación de 90° de centro R de la linea poligonal RBP, entonces el segmento RQ es obtenido del segmento RP por la misma rotación. Esto prueba:

- $PR = RQ$
- $\widehat{PRQ} = 90^{\circ}$.

$\square$

Bibliografía

[1] N. E: Aguilera, *Tópicos de geometría euclidiana plana*, Olimpiada Matemática Argentina, 2012.

[2] M. Becheanu, *International Mathematical Olympiads. 1959–2000*, The Academic Distribution Center, 2001. 9.1., 9.2., 9.3., 9.4., 9.5., 9.6., 9.7.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley, 2nd. Ed., 1969.

[4] H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.

[5] A. Engel, *Problem–solving strategies*, Springer.

[6] Cristóbal Sánchez-Rubio and Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, Universitat Jaume I. Castellón, 2000.

[7] *Sessions de preparació per l'olimpiada matemàtica*, Soc. Cat. Mat. Barcelona, 2000.

Refencias Web:

Sobre conceptos básicos del triángulo:

1. http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo
2. http://www.ditutor.com/geometria/perimetro_triangulo.html
3. http://www.geoka.net/triangulos/area_triangulo.html
4. http://www.vitutor.net/1/22.html
5. http://www.ditutor.com/geometria/area_triangulo.html
6. http://www.ditutor.com/geometria/triangulos_iguales.html
7. http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/s/similartriangles.htm
8. http://jorge-fernandez.es/proyectos/angulo/temas/temad/index.html
9. http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_3.html
10. http://jorge-fernandez.es/proyectos/angulo/temas/temad/index.html
11. http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/triangulo-acutangulo.html

Sobre los puntos notables de un triángulo:

12. http://www.vitutor.com/geo/eso/pl_5.html
13. http://gaussianos.com/inradio-y-semiperimetro/
14. http://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_circunscrita
15. http://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_inscrita
16. http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_exinscrites_c.html
17. Triángulos isósceles

Sobre relaciones métricas en el triángulo:

18. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras
19. http://siguiendoathales.blogspot.com.es/

20. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Tales

21. http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html

22. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_seno

23. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno

24. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_bisectriz

25. http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/guia-4.pdf

26. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Apolonio

27. https://www.youtube.com/watch?v=mKXU01rHWOs

Sobre trigonometria:

28. http://www.aritor.com/trigonometria/tangente.html

29. http://www.aritor.com/trigonometria/angulo_mitad.html

30. Tabla de fórmulas trigonométricas

31. http://www.vadenumeros.es/cuarto/relacion-razones-de-angulos.htm

Sobre los puntos notables de un triángulo:

32. http://www.jorge-fernandez.es/proyectos/angulo/temas/temab/

33. http://es.wikipedia.org/wiki/Arco_capaz

34. http://es.wikipedia.org/wiki/Puntos_coc%C3%ADclicos

35. http://perso.ya.com/jmreyes/lugaresgeometricos.html

36. http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/circunferencias/angcap.html

37. http://es.slideshare.net/iaespino/propiedades-angulares-de-la-circunferencia

38. http://www.matetam.com/glosario/definicion/angulos-alternos-internos

39. http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81ngulos_opuestos_por_el_v%C3%A9rtice

Sobre los ejercicios locales y nacionales de las olimpiadas matemáticas:

40. http://platea.pntic.mec.es/$\sim$csanchez/olimprab.htm

Índice alfabético