PROBLEMAS SOBRE GEOMETRÍA

Relaciones métricas en la circunferencia. Lugares geométricos

MARÍA DEL CARMEN RODRÍGUEZ MARÍN

Máster en Matemáticas

Universidad de Granada. 2014

Problemas sobre Geometría

Relaciones métricas en la circunferencia. Lugares geométricos

María del Carmen Rodríguez Marín

Trabajo dirigido por el prof. Pascual Jara
Departamento de Álgebra

Máster en Matemáticas
Universidad de Granada. 2014

Dedicatoria.

Este trabajo se lo quiero dedicar a “Sapillo”, mi sobrina Leire, por la motivación que me ha transmitido a lo largo de este proyecto.

Agradecimientos

Este trabajo no hubiese sido posible sin los conocimientos adquiridos durante mi licenciatura en la Universidad de Granada y los proporcionamos por este máster.

Además, agradecer a cada uno de los profesores que me han ayudado y en especial al profesor Pascual Jara Martínez, tutor de este proyecto, por su dedicación durante estos meses.

Finalmente, quiero agradecer a mis padres, que me han permitido cursar estos estudios y han confiado siempre en mí, a mi hermano por apoyarme en todo momento y mi compañera de piso que siempre ha estado dándome ánimos cuando más lo necesitaba.

Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo principal el desarrollo del pensamiento y habilidades matemáticas tanto para aquellos que quieran aprender sobre los temas tratados, como aquellos que quieran prepararse para el reto de las olimpiadas matemáticas. Este material puede permitir fortalecer el potencial de los alumnos y ayudarlos en sus debilidades, generando estrategias de aprendizaje.

Las olimpiadas matemáticas, además de ser un concurso, permiten acercar éstas a aquellos jóvenes inquietos en su educación. Su finalidad es estimular el estudio de la Matemática y el desarrollo de jóvenes talentos en esta Ciencia.

Hemos considerado en la olimpíada tres fases: local, nacional e internacional. Para resolver los problemas de cada fase el alumno debe conocer conocimientos específicos a un determinado nivel, sin olvidar que la finalidad última de la resolución de los problemas es desarrollar capacidades y habilidades que le permitan enfrentarse a otras situaciones.

En este trabajo se ha realizado el estudio de dos temas fundamentales de la Geometría: relaciones métricas en la circunferencia y lugares geométricos, y se han enfocado para ayudar al alumno en su preparación para las olimpiadas de matemáticas en sus diferentes fases.

Como parte teórica se incluyen dos temas en los que se han recopilado los resultados que han sido necesarios en la resolución de los problemas tratados, por esta razón puede no ser exhaustivo su contenido. Esta introducción teórica se acompaña de ejemplos que ilustran sobre las nociones tratadas.

El último epígrafe, trata sobre la resolución y análisis de problemas en los tres niveles antes mencionados. Los más sencillos se organizan bajo el rótulo de “Fase Local”, y pueden servir de ejercicios de introducción a los temas tratados. Como siempre, su dificultad depende de los conocimientos previos, y de ahí la importancia de las nociones incluidas en los primeros temas. Más elaborados, en su resolución, son los problemas que aparecen bajo el rótulo de “Fase Nacional”; se trata de problemas en los que el proceso de resolución requiere varios pasos, lo que incrementa su dificultad. Finalmente en la “Fase Internacional” hemos incluido los problemas de una mayor complejidad, tanto en su resolución como en las nociones que involucran. La ubicación en uno u otro apartado es simplemente cuestión del bagaje del lector, y el redactor, por lo que la clasificación que aquí aparece es solamente una forma de estructurar la materia tratada.

Con la aparición de nuevas herramientas de computación, y el uso de sistemas gráficos los problemas en Geometría pueden ser estudiados de una forma más rápida a como se hacía en el pasado; además el uso de estas herramientas permite la simulación y por lo tanto la detección de invariantes en determinadas construcciones. Hemos puesto a prueba uno de estos sistemas y comprobado que el tratar los problemas planteados en competiciones nacionales o internacionales se pueden abordar de forma más elegante tras su análisis en este sistema de cálculo simbólico; lo que reduce la complejidad de los mismos, permite trabajar nuevas soluciones y realizar variaciones, una más sencillas, y otras más complejas. El sistema utilizado ha sido Geogebra, que además permite exportar el código de los dibujos a para ser incluidos en LaTeX, y realizar construcciones dinámicas, mostrando en particular el lugar geométrico de determinados elementos, una de los temas de estudio de este trabajo.

Geogebra es un software de geometría dinámica y cálculo simbólico de uso libre, que permite enseñar y aprender matemáticas desde Primaria a Universidad, con muchos recursos y materiales libres, y mantenido por una amplia comunidad.

Índice general

Capítulo I

Relaciones métricas en la circunferencia

1. Conceptos fundamentales

Circunferencia

Una **circunferencia** se define como el lugar geométrico (Ver página 17) de los puntos del plano equidistantes de otro, llamado **centro** de la circunferencia.

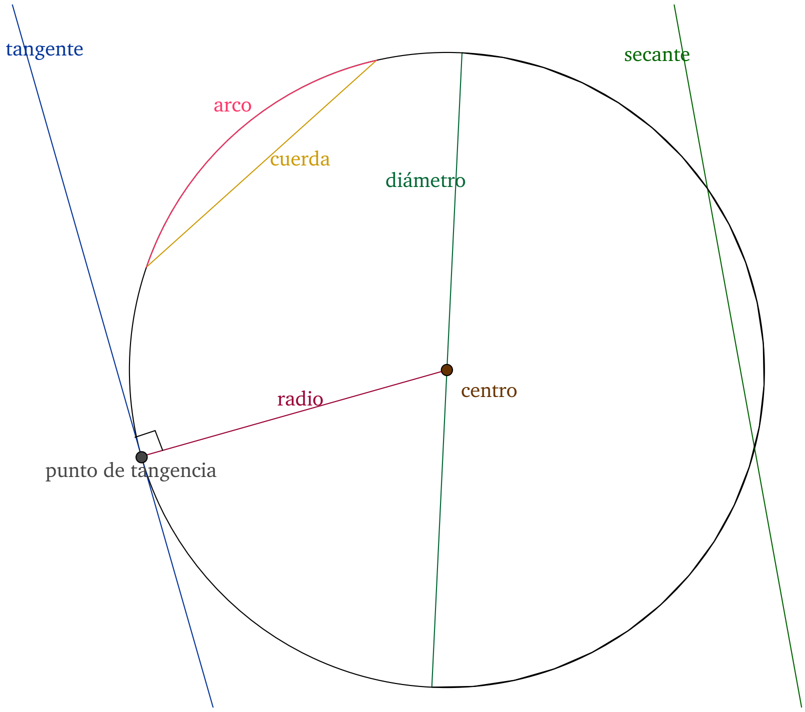
También podemos decir que la circunferencia es la línea formada por todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto, llamado **centro**.

Una circunferencia queda determinada cuando conocemos:

- Tres puntos de la misma.
- El centro y el radio.
- El centro y un punto en ella.
- El centro y una recta tangente a la circunferencia.

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

(I) **Centro**: punto (interior) equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
(II) **Radio**: segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio mide la mitad del diámetro y es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre 2π.
(III) **Diámetro**: segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio y es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre π.
(IV) **Cuerda**: segmento que une dos puntos de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.
(V) **Recta secante**: recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
(VI) **Recta tangente**: recta que toca a la circunferencia en un sólo punto.
(VII) **Punto de tangencia**: punto de contacto de la recta tangente con la circunferencia.
(VIII) **Arco**: cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia.
(IX) **Semicircunferencia**: cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.



Una circunferencia se puede representar, mediante su ecuación ordinaria o su ecuación general.

- **Ecuación ordinaria**

  Para cualquier punto, $P(x, y)$, de una circunferencia cuyo centro es el punto $C(a, b)$ y radio r, la ecuación ordinaria es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{I.1}$$

  En el caso particular en el que el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, $(0, 0)$, la ecuación queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{I.2}$$

- **Ecuación general**

  Una vez que se tiene la ecuación ordinaria de una circunferencia podemos obtener su ecuación general. Para ello eliminamos los paréntesis desarrollando los binomios, pasamos todos los términos al primer miembro e igualamos a cero.

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

  Ordenando dicha ecuación obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

  Para tener una ecuación más sintetizada hacemos las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} -2a &= D, \\ -2b &= E, \\ a^2 + b^2 - r^2 &= F. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación general de la circunferencia quedaría expresada de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{I.3}$$

Ésta debe cumplir una serie de condiciones:

- No existe término en xy.
- Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales.
- Si $D = -2a$ entonces $a = \dfrac{-D}{2}$.
- Si $E = -2b$ entonces $b = \dfrac{-E}{2}$.
- Si $F = a^2 + b^2 - r^2$ entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}$.

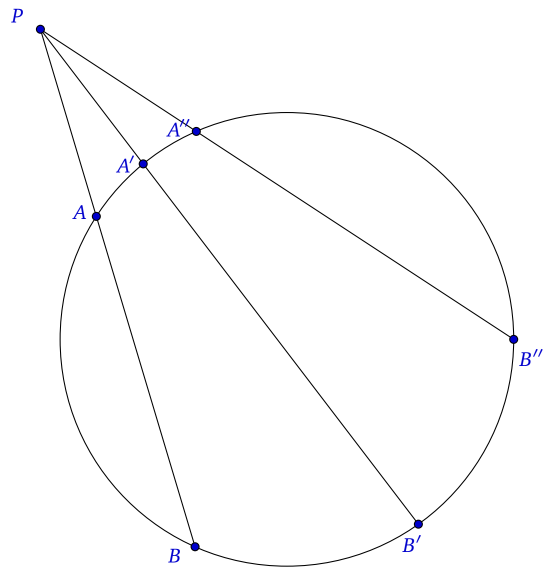
Otra condición necesaria para que una ecuación dada represente una circunferencia es que:

$$a^2 + b^2 - F > 0.$$

Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Dada una circunferencia C y un punto P cualquiera del plano, cada recta que pase por P y corte a C en dos puntos A y B verifica la siguiente propiedad:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PA''} \cdot \overline{PB''} = K,$$



siendo K la **potencia** de P respecto a C.

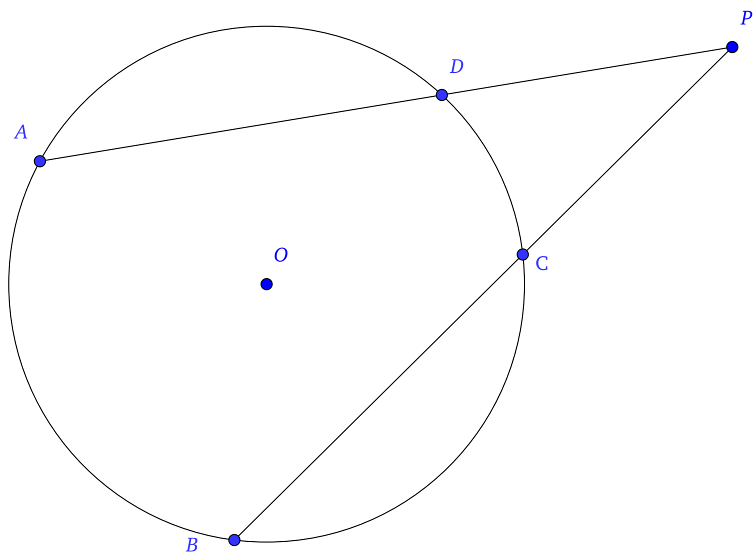
Es decir, el valor del producto es independiente de la recta considerada. La constante K sólo depende de P y C.

Dependiendo de la posición del punto respecto a la circunferencia, la potencia de éste varía, es decir, si el punto es exterior a la circunferencia entonces tendrá potencia positiva, si es interior su potencia será negativa y si está en la circunferencia entonces es nula.

En relación con lo anterior, existen una serie de resultados que caben destacar:

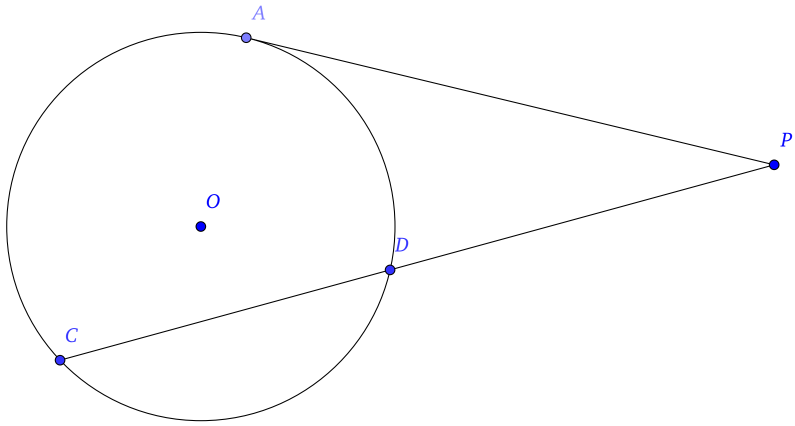
Teorema. 1.1. (Teorema de las secantes)
Sean $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ dos rectas secantes, entonces:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}.$$



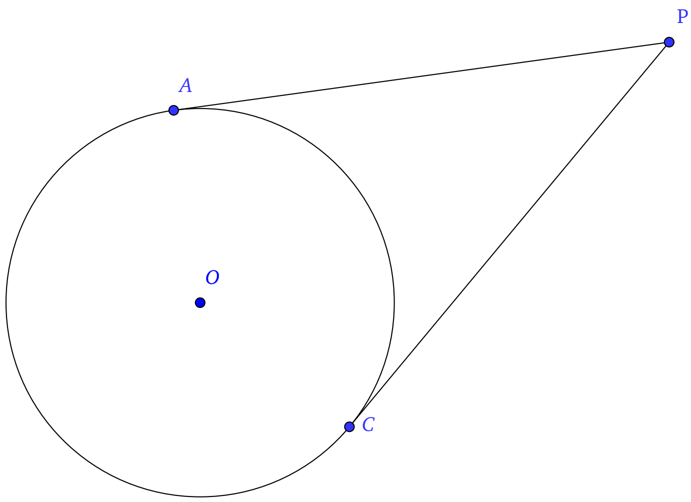
Teorema. 1.2. (Teorema de la tangente y la secante)
Sean $\overline{PA}$ una recta tangente y $\overline{PC}$ una recta secante, entonces:

$$(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$



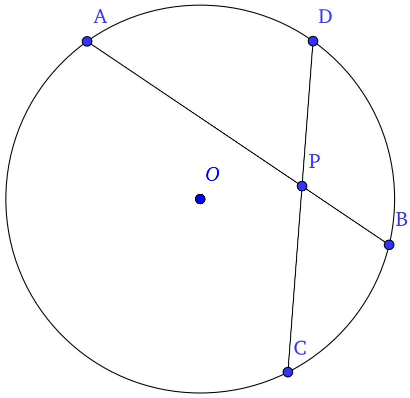
Teorema. 1.3. (Teorema de las tangentes)
Sean $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ dos rectas tangentes, entonces:

$$\overline{PA} = \overline{PC}.$$



Teorema. 1.4. (Teorema de las cuerdas)
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas, entonces:

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$



Eje radical de dos circunferencias

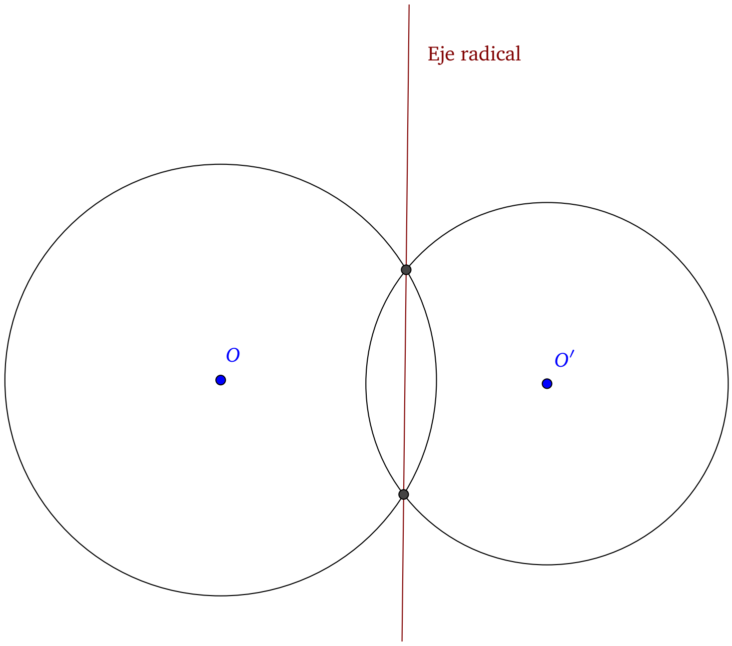
El **eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico (Ver página17) de los puntos que tienen igual potencia con respecto a ambas circunferencias.
Sean las circunferencias C de centro O y radio r y C' de centro O' y radio r'. Llamamos d y d' a las distancias de P a O y O' respectivamente. Entonces un punto P tendrá igual potencia respecto de C y C' si y sólo si:

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2 \Longleftrightarrow d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2 = \text{Cte.}$$

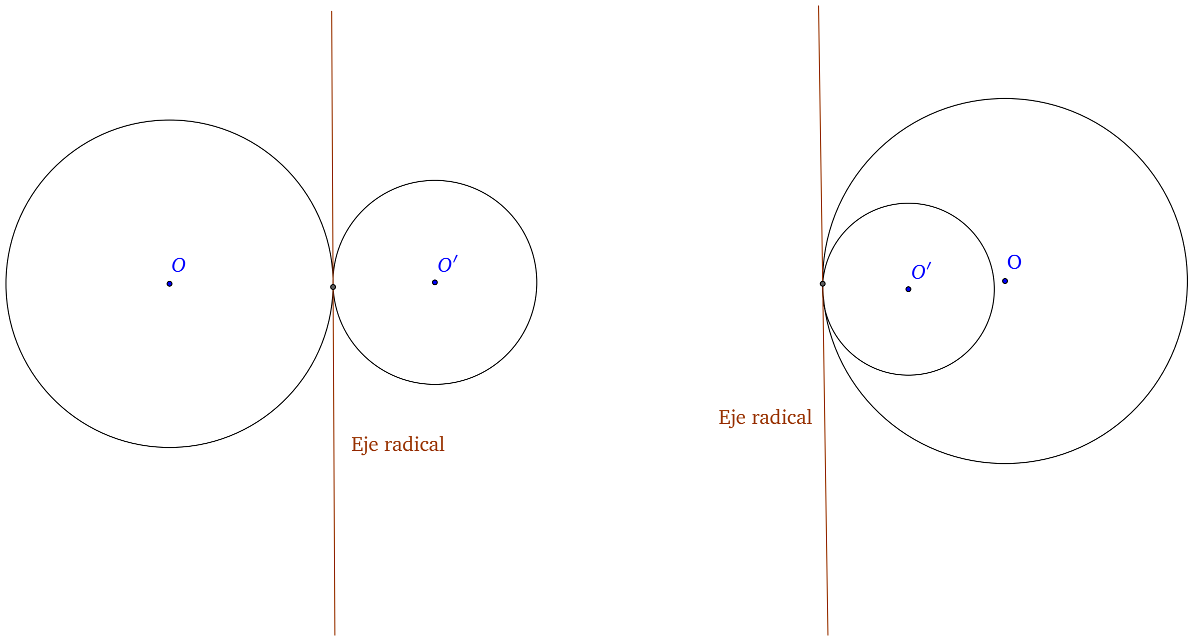
El lugar geométrico de puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos C y C' es constante es una recta perpendicular a la recta que une los puntos O y O'.
En cualquier caso, para construir el eje radical de dos circunferencias bastaría con hallar un punto de igual potencia respecto de ambas circunferencias y por él trazar la recta perpendicular a la línea que une los centros.

Construcción del eje radical

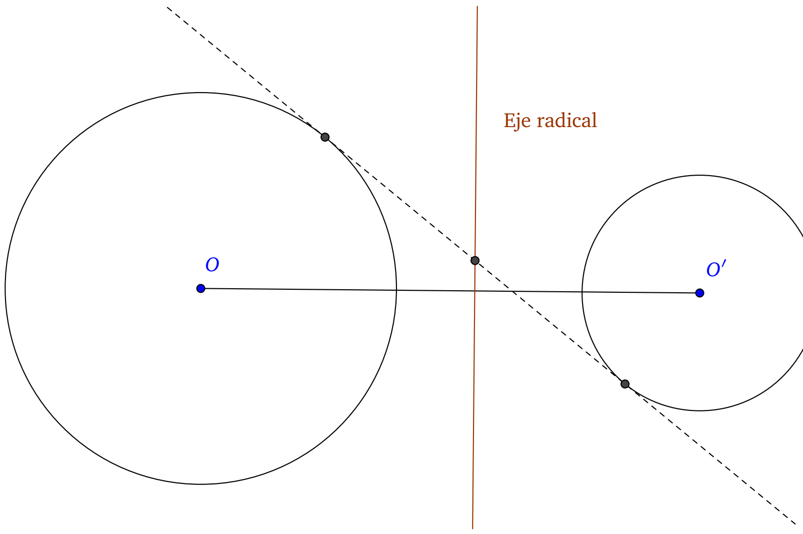
Si las circunferencias son secantes, los puntos de corte tienen potencia nula con respecto a ambas circunferencias y el eje radical será la recta que pasa por esos dos puntos.



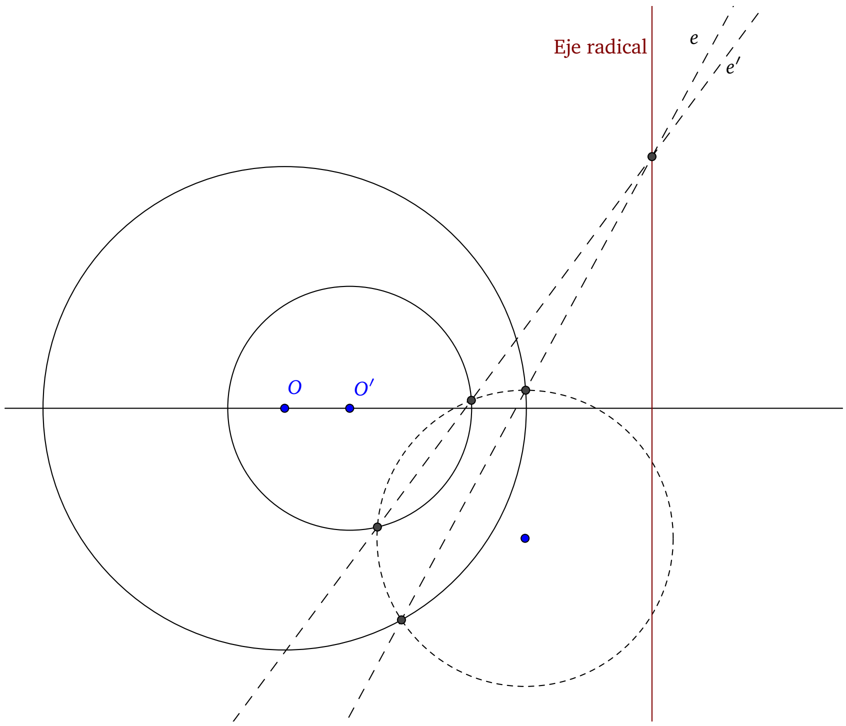
Si las circunferencias son tangentes, el eje radical será la tangente común.



Si las circunferencias son exteriores podemos trazar una tangente común y el punto medio será del eje radical. Trazando la perpendicular a la línea que une los centros por este punto obtendremos el eje radical.



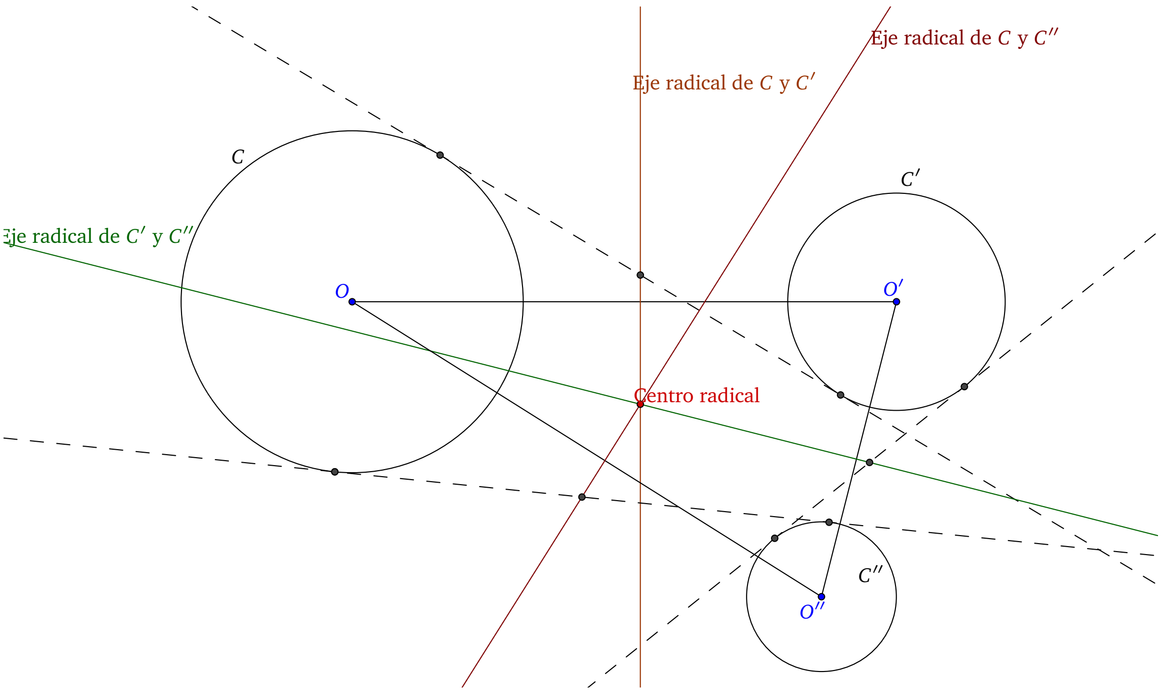
Si las circunferencias son interiores, hay que trazar una circunferencia auxiliar que corte a ambas, obtener los ejes radicales e y e' (no paralelos) de la circunferencia auxiliar con cada una de las dadas. La intersección de ambos ejes radicales nos proporciona un punto del eje que buscamos. Para terminar basta trazar la recta que pase por ese punto y sea perpendicular a la que une los centros de las circunferencias dadas.



Si las circunferencias son concéntricas no existe eje radical.

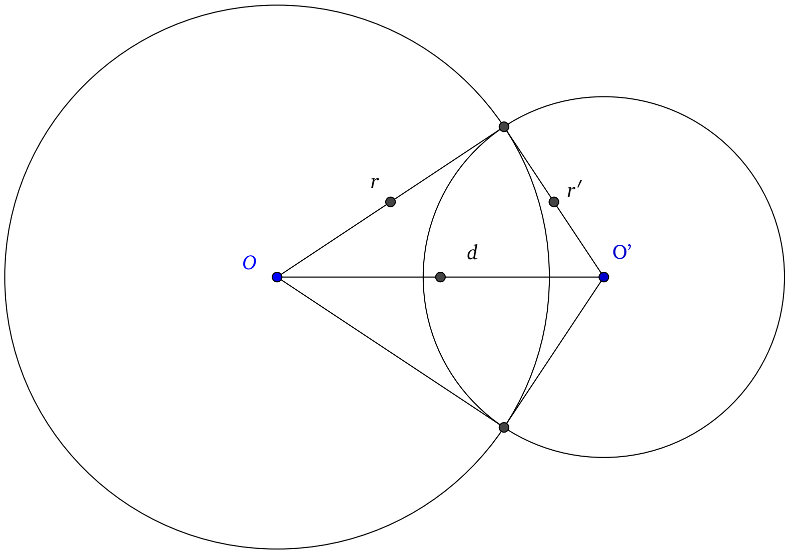
Centro radical de tres circunferencias

Si partimos de tres circunferencias, intentamos buscar todos los puntos que tengan la misma potencia respecto de las tres circunferencias.
Basta hallar los ejes radicales de dos de ellas y buscar su intersección, por ese punto ha de pasar el tercer eje y es el único punto que cumple la condición pedida. Se llama **centro radical** de las tres circunferencias.



Circunferencias ortogonales

Dos circunferencias, C de centro O y radio r y C' de centro O' y radio r', son **ortogonales** si se cortan bajo un ángulo de 90^o.



Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) C y C' son ortogonales.
(2) Los radios de ambas circunferencias en los puntos de intersección son perpendiculares.
(3) Si llamamos d a la distancia entre los centros se cumple:

$$d^2 = r^2 + r'^2.$$

(4) La potencia del centro de cada circunferencia respecto de la otra es su propio radio al cuadrado.

Arco capaz

Un **arco capaz** es el lugar geométrico (Ver página17) de los puntos desde los que un segmento AB se ve con el mismo ángulo, es decir, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.

El arco capaz de un segmento AB, de ángulo λ, es un par de arcos de circunferencia, simétricos a cada lado del segmento AB que contiene los vértices de ángulo λ, unidos por los puntos A y B. El ángulo que subtiende el segmento AB visto desde el centro del círculo es 2λ.

El más utilizado es el arco capaz con ángulo $\lambda = 90^o$. Este caso se corresponde con el segundo teorema de Tales[1], de tal modo que el arco capaz es la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AB.

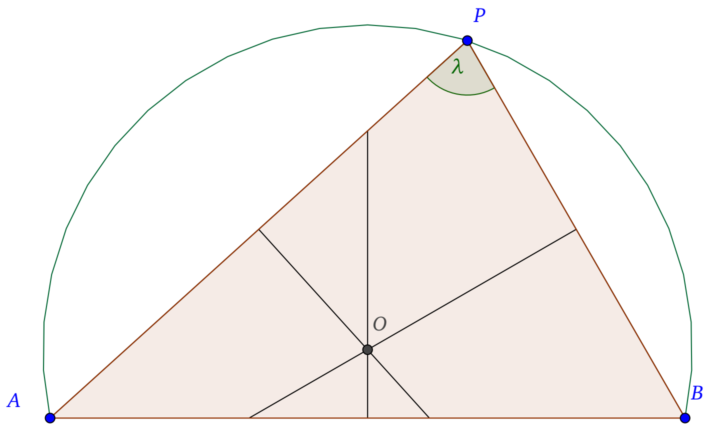
[1]El segundo teorema de Tales afirma que si los tres vértices de un triángulo están sobre una circunferencia dada, siendo uno de sus lados el diámetro de la circunferencia, entonces el ángulo opuesto a este lado es un ángulo recto.

Construcción del arco capaz: Para construir el arco capaz, de ángulo λ, del segmento AB es posible seguir varios métodos:

(I) **Primer método**

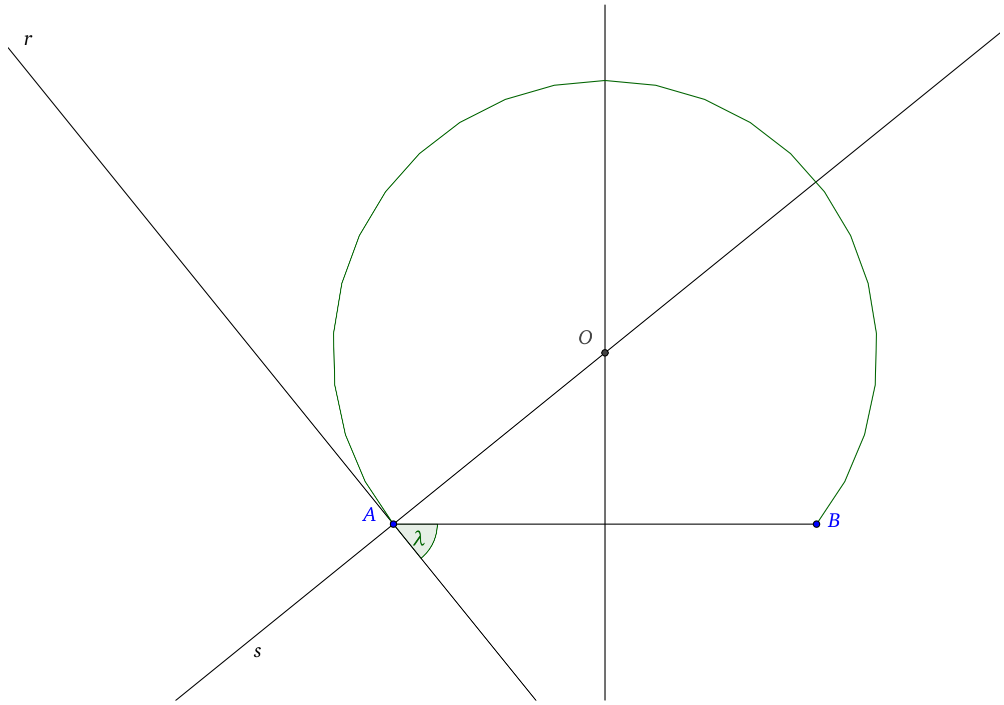
- Se traza un triángulo APB, tal que un lado es AB y su ángulo opuesto de amplitud λ (primero dibujamos el ángulo λ). Después trazamos el segmento AB: sus extremos son dos puntos de los lados del ángulo.
- Se trazan las mediatrices del dicho triángulo.
- Estas mediatrices se cortan en el punto O, que es el centro del arco capaz buscado.
- Bastará con dibujar con el compás un arco de centro O y radio OA.

  El punto O es el **circuncentro**: el centro de la **circunferencia circunscrita**. Equidista del vértice y de los puntos A y B.



(II) **Segundo método**

- Se parte únicamente del segmento AB.
- Se traza la **mediatriz** m de dicho segmento.
- A continuación se traza la recta r que forme un ángulo λ con el segmento AB, con vértice en A.
- Desde A, se dibujará una segunda recta s perpendicular a la recta r.
- El punto de corte O entre la recta s y la mediatriz m es el centro del arco capaz buscado.
- Bastará con dibujar con el compás un arco de centro O y radio OA.



Por semejanza de triángulos, se deduce que:

- El ángulo formado por la recta s y la mediatriz m mide igual que el ángulo λ;
- Por tanto, el ángulo con centro en O, conformado por la recta s y la recta simétrica a s, respecto de la mediatriz m, medirá el doble que el ángulo λ, es decir, AOB medirá 2λ.

Ángulos de la circunferencia

(I) **Ángulo inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos rectas secantes.

Mide la mitad del arco que lo abarca.

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}.$$

(II) **Ángulo semiinscrito**: es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente.

Mide la mitad del arco que lo abarca.

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}.$$

(III) **Ángulo interior**: es aquel que tiene su vértice en un punto interior de la circunferencia y los lados son dos secantes.

Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

$$\angle AOB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}}).$$

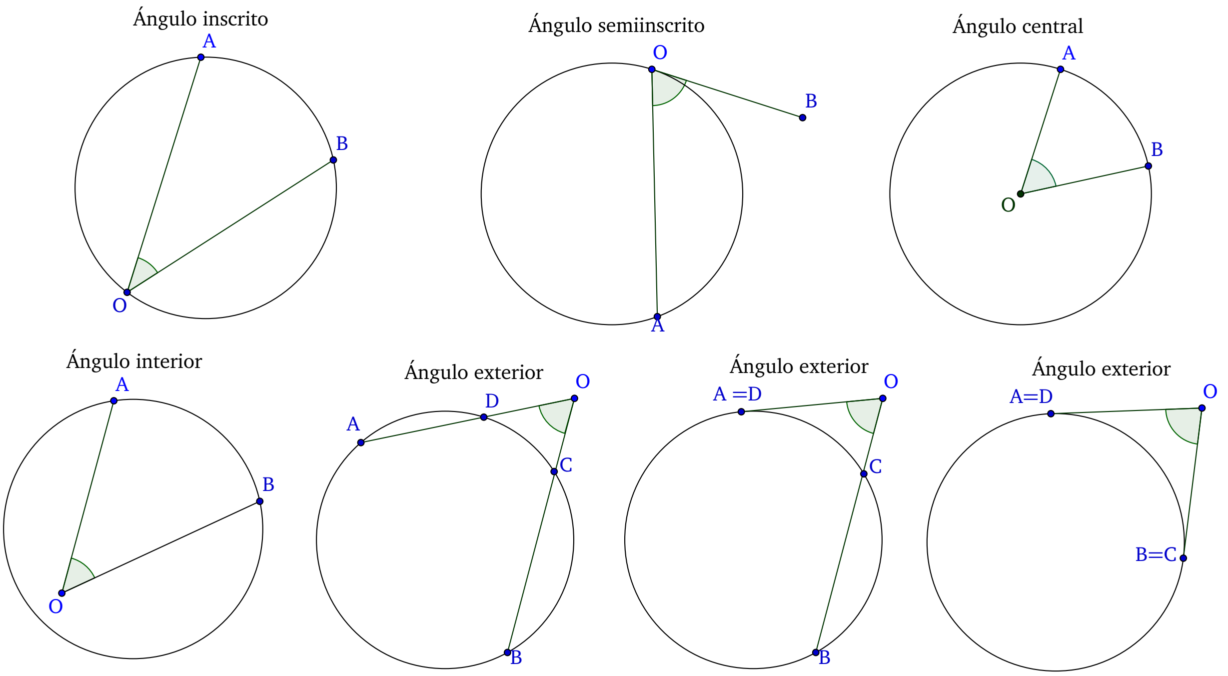
(IV) **Ángulo central**: es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados lo forman dos radios.

La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

$$\angle AOB = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}.$$

(V) **Ángulo exterior**: es aquel que tiene su vértice fuera de la circunferencia y los lados son dos secantes o dos tangentes de la circunferencia o uno tangente y otro secante.

$$\angle AOB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\mathrm{AB}} - \overset{\frown}{\mathrm{CD}}).$$

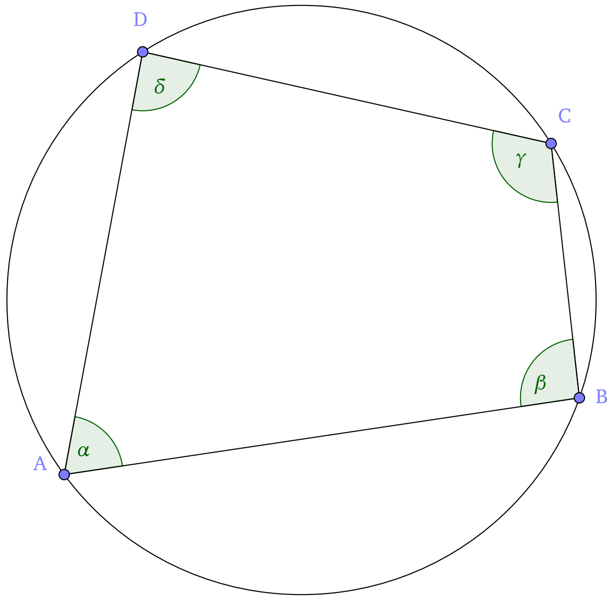


Cuadrilátero

Un cuadrilátero está **circunscrito** a una circunferencia cuando sus lados son tangentes a ella. Desde otro punto de vista la circunferencia quedará **inscrita** en el cuadrilátero cuando en cada lado existe un punto y sólo uno que pertenece a la circunferencia.

Un cuadrilátero está **inscrito** en una circunferencia cuando sus vértices son puntos de la circunferencia.

Proposición. 1.5.
En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios, esto es, $(\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^o)$.



DEMOSTRACIÓN. Sean $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$ dos ángulos opuestos. Entonces:

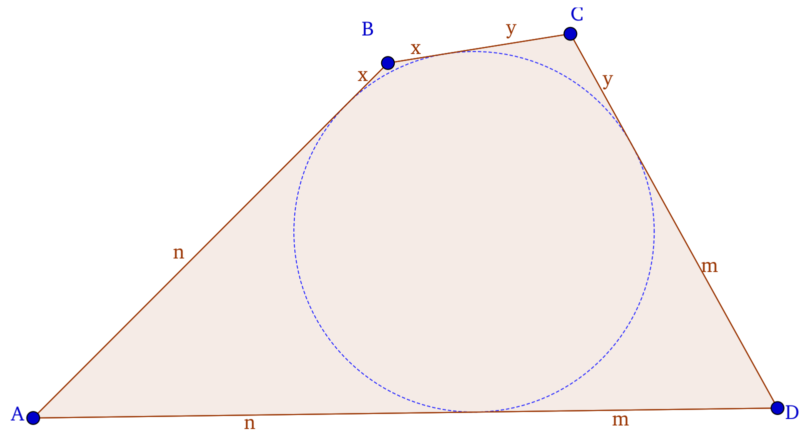
$$\widehat{D}+\widehat{B}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\text{CDA}}+\overset{\frown}{\text{ABC}}),$$

es decir, la suma de estos dos ángulos opuestos es la mitad de la circunferencia o lo que es lo mismo, la suma es 180^o.

Un razonamiento análogo se puede aplicar para cualquier par de ángulos opuestos del cuadrilátero.

□

Teorema. 1.6. (Teorema de Pitot)
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se cumple que la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados: $AB + CD = BC + AD$.



DEMOSTRACIÓN. Definimos los segmentos AB, BC, CD, AD:

$$\begin{aligned} AB &= x + n, \\ BC &= x + y, \\ CD &= y + m, \\ AD &= n + m. \end{aligned}$$

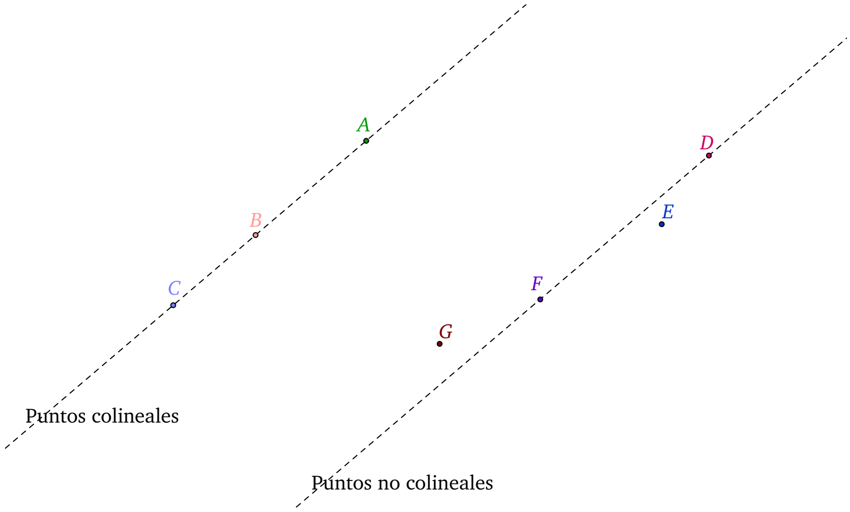
Sumando:

$$AB + CD = x + n + y + m = x + y + n + m = BC + AD.$$

□

Se llama **trapecio** a un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos que no lo son. En concreto, un **trapecio isósceles** es el que tiene los lados no paralelos de igual longitud, dos ángulos internos agudos y dos obtusos, iguales entre sí, las diagonales son congruentes y la suma de los ángulos opuestos es 180º.

Dos o más puntos son **colineales** cuando todos están sobre la misma recta, i.e., existe una recta que pasa por todos los puntos. Son **no colineales** si al menos uno de los puntos se encuentra fuera de la recta que definen dos de los restantes.



Proposición. 1.7.
*Un polígono **convexo** es una figura en la que:*

1. *todos los ángulos interiores miden menos de* 180^o *o* π *radianes y todas sus diagonales son interiores.*
2. *cualquier recta que pase por un lado del polígono convexo deja a todo el polígono completamente en uno de los semiplanos definidos por la recta.*
3. *cualquier segmento entre dos puntos que estén dentro del mismo está dentro, es decir, el segmento no corta los lados.*
4. *todos los vértices apuntan hacia el exterior del polígono.*

Todos los triángulos son polígonos convexos. Todos los polígonos regulares son convexos.

Capítulo II

Lugares geométricos

2. Lugares geométricos

Se denomina **lugar geométrico** al conjunto de puntos que verifican una determinada propiedad.

(I) **En el plano.**

Ejemplos de lugares geométricos en el plano.

- El lugar geométrico de los puntos que equidistan a otros dos puntos fijos A y B es una recta o eje de simetría de dichos dos puntos. Si los dos puntos son los extremos de un segmento AB, dicha recta o lugar geométrico, se llamada **mediatriz** y es la recta que se interseca perpendicularmente a AB en su punto medio.
- La bisectriz es también un lugar geométrico. Dado un ángulo, la **bisectriz** cumple la propiedad de que todos sus puntos equidistan a los lados de dicho ángulo, convirtiéndose la bisectriz en un caso particular del lugar geométrico que sigue a continuación.
- Generalizando la propiedad de equidistancia a dos rectas, obtenemos que la paralela media es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas paralelas. Se observa que, bajo el punto de vista de que las rectas paralelas se cortan en el infinito (se elimina, pues, la noción de paralelismo), pasa a ser un sinónimo de la bisectriz, donde el ángulo ha tomado valor nulo. Si, por el contrario, se diferencia el concepto de paralelismo, la bisectriz vuelve a ser, como se ha dicho antes, un caso particular de esta definición y el caso de rectas paralelas, con ángulo 0, es disjunto al de las bisectrices (ángulo no nulo).

Secciones cónicas.

Las secciones cónicas pueden ser descritas mediante sus lugares geométricos:

- La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto determinado, el **centro**, es un valor dado (el **radio**).
- La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, los **focos**, es una constante dada (equivalente a la longitud del **semieje mayor** de la elipse).

- La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un **foco** equivale a su distancia a una recta llamada **directriz**.
- La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos, los **focos**, es igual a una constante (positiva), que equivale a la distancia entre los vértices.

(II) **En el espacio.** Figuras geométricas muy complejas pueden ser descritas mediante el lugar geométrico generado por los ceros de una función o de un polinomio. Por ejemplo, las **cuádricas** están definidas como el lugar geométrico de los ceros de polinomios cuadráticos.

En general, los lugares geométricos generados por los ceros del conjunto de polinomios reciben el nombre de **conjunto algebraico**, las propiedades de dichas variedades se estudian en Geometría algebraica.

2.1. Técnicas habituales para hallar un lugar geométrico

Muchos de los problemas de lugares geoḿetricos salen por más de un método, pero siempre hay que saber elegir el que resulte más interesante y rápido para revolver un problema concreto.

2.1.1. Método paramétrico

Consite en expresar analíticamente las condiciones expuestas en el enunciado para determinar las coordenadas (x, y) de un punto genérico del lugar en función de un parámetro que expresa la variación del punto en el lugar.
En este método es importante la elección de la posición de los ejes y la del parámetro.

2.1.2. Método de transformaciones geométricas

Este método consiste en identificar el lugar pedido como la imagen de algún lugar conocido mediante una transformación geométrica también conocida.

Las transformaciones más usuales son traslaciones, giros, simetrías, homotecias e inversiones.

Para establecer el método se intenta ligar los puntos pedidos con otros que pertenezcan a un lugar geométrico conocido mediante alguna relación que exprese una transformación de las anteriores o una sucesión (producto) de ellas.

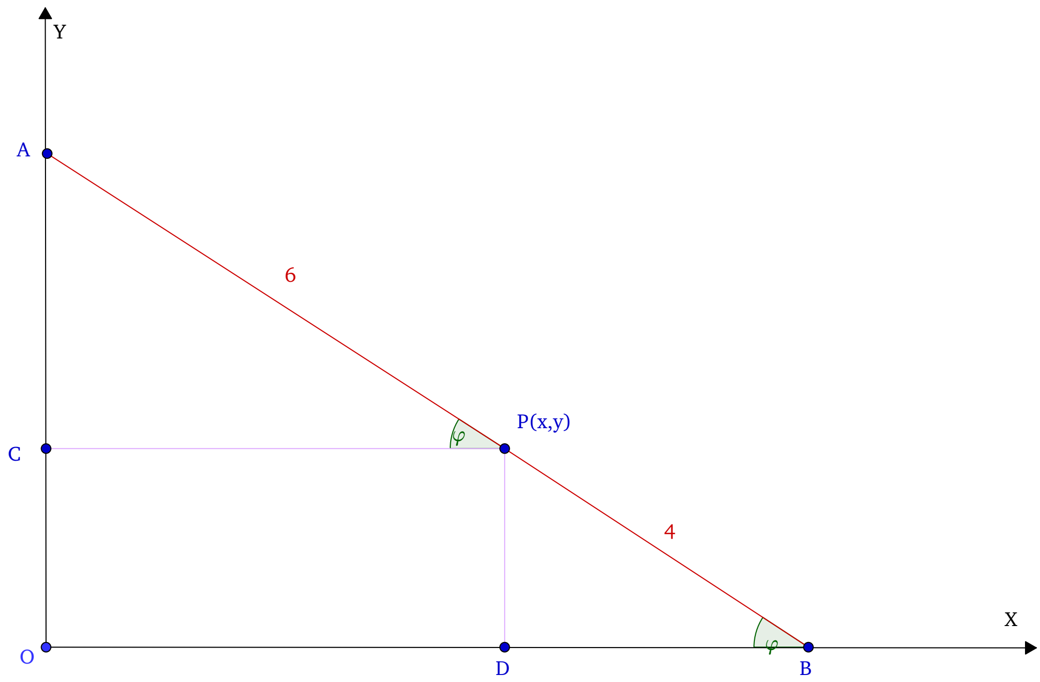
2.1.3. Método analítico directo

Dicho método consiste en obtener la ecuación implícita del lugar pedido imponiendo a un punto genérico $P(x, y)$ la condición definitoria expresada en el enunciado.
De nuevo resulta crítica la elección de los ejes.

2.2. Ejemplos

Ejemplo. 2.1.
Un segmento de recta de 10 cm de longitud se mueve apoyando sus extremos en los ejes de coordenadas. Determinar el lugar geométrico descrito por un punto $P(x, y)$ situado sobre el segmento AB a 4 cm del extremo que se apoya sobre el eje OX, como se muestra en la figura siguiente:

Ver: Referencia Web.



SOLUCIÓN. A partir de la figura podemos obtener las funciones trigonométricas:

- $\cos\varphi = \dfrac{x}{6}$,
- $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{y}{4}$.

Estas son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico que estamos buscando, pero necesitamos transformarlas para que podemos identificar que las dos ecuaciones anteriores representan una sola curva.
Elevamos al cuadrado las dos ecuaciones:

- $\cos^2\varphi = \dfrac{x^2}{36}$,

- $\operatorname{sen}^2\varphi = \dfrac{y^2}{16}$.

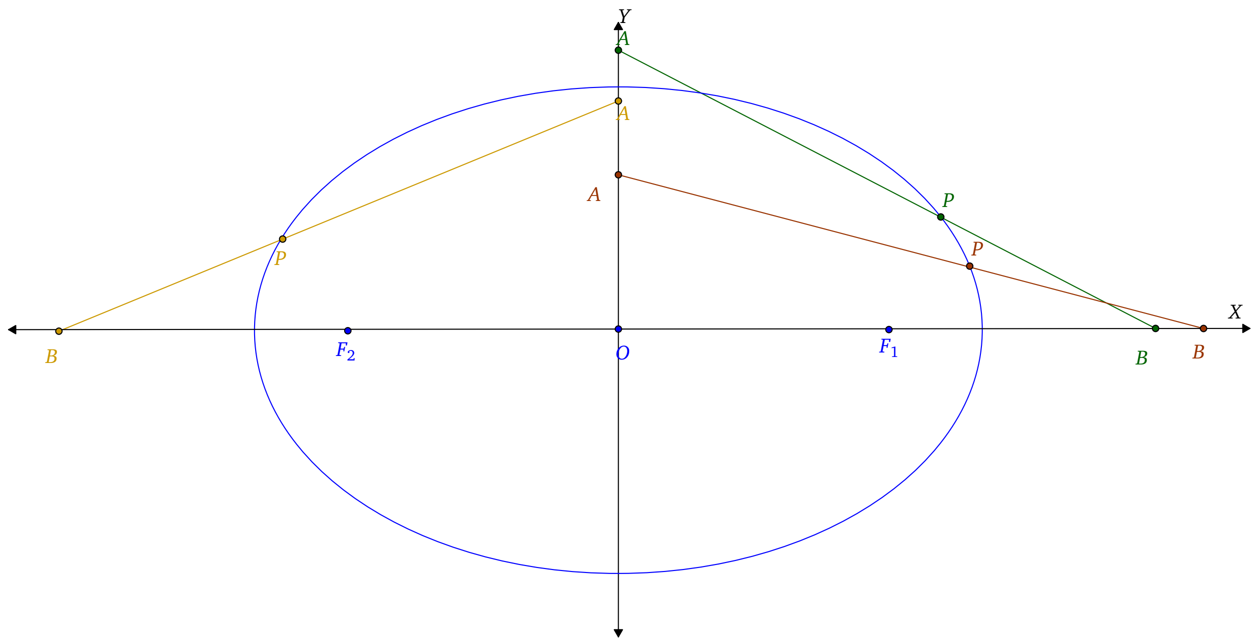
Sumando miembro a miembro:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi.$$

Por la propiedad de que $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, sustiyendo tenemos:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Por tanto, el lugar geométrico descrito por P es una elipse horizontal, con centro en el origen y cuyos semiejes miden 6 y 4.



□

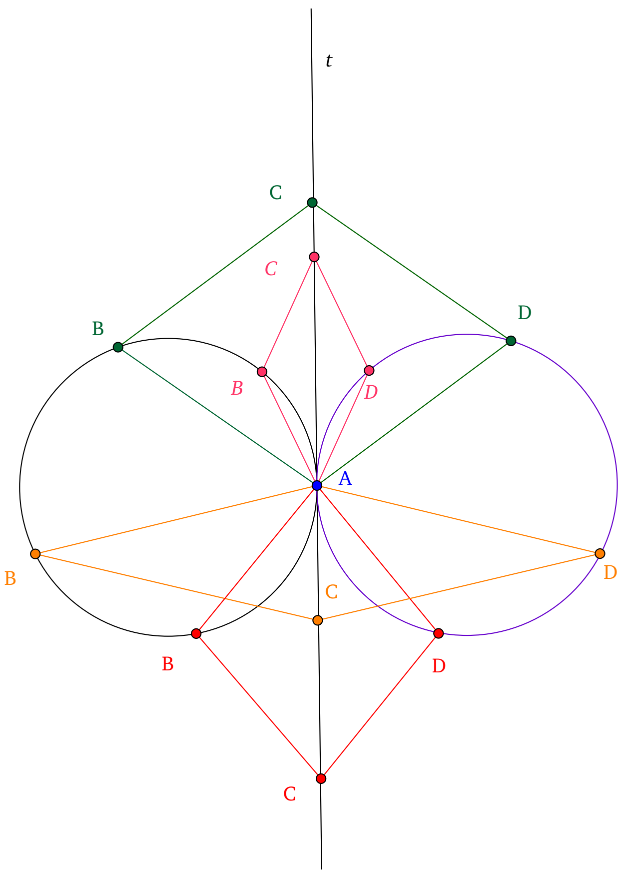
Ejemplo. 2.2.
En una circunferencia $\mathcal{C}$ se considera un punto fijo A y uno variable B. Se traza la tangente t a $\mathcal{C}$ en A y se construyen los rombos $ABCD$ que tienen la diagonal AC contenida en t. Hallar el lugar geométrico del vértice D al variar B en $\mathcal{C}$.

Ver: Referencia Web.

SOLUCIÓN. La recta t, tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en A, contiene a la diagonal AC de los rombos $ABCD$. Por tanto, los puntos D son simétricos a los puntos B con respecto a la recta t.

Así, al variar B en $\mathcal{C}$, los puntos D son simétricos de puntos de la circunferencia C, con respecto a t.

Por tanto, el lugar geométrico de D es la circunferencia simétrica, circunferencia lila, de $\mathcal{C}$ respecto a la recta t.



□

Ejemplo. 2.3.
Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6,0)$ y $N(-2,0)$ es 3 (es decir, $\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3$).

Ver: Referencia Web.

Solución. Si $P(x,y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces se cumple que:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2} = 3\left[\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right].$$

Elevamos al cuadrado la igualdad, para que las raíces desaparezcan:

$$(x-6)^2+y^2 = 9\left[(x+2)^2+y^2\right] \Rightarrow x^2-12x+36+y^2 = 9\left[x^2+4x+4+y^2\right]$$

$$\Rightarrow x^2-12x+36+y^2 = 9x^2+36x+36+9y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2+48x = 0.$$

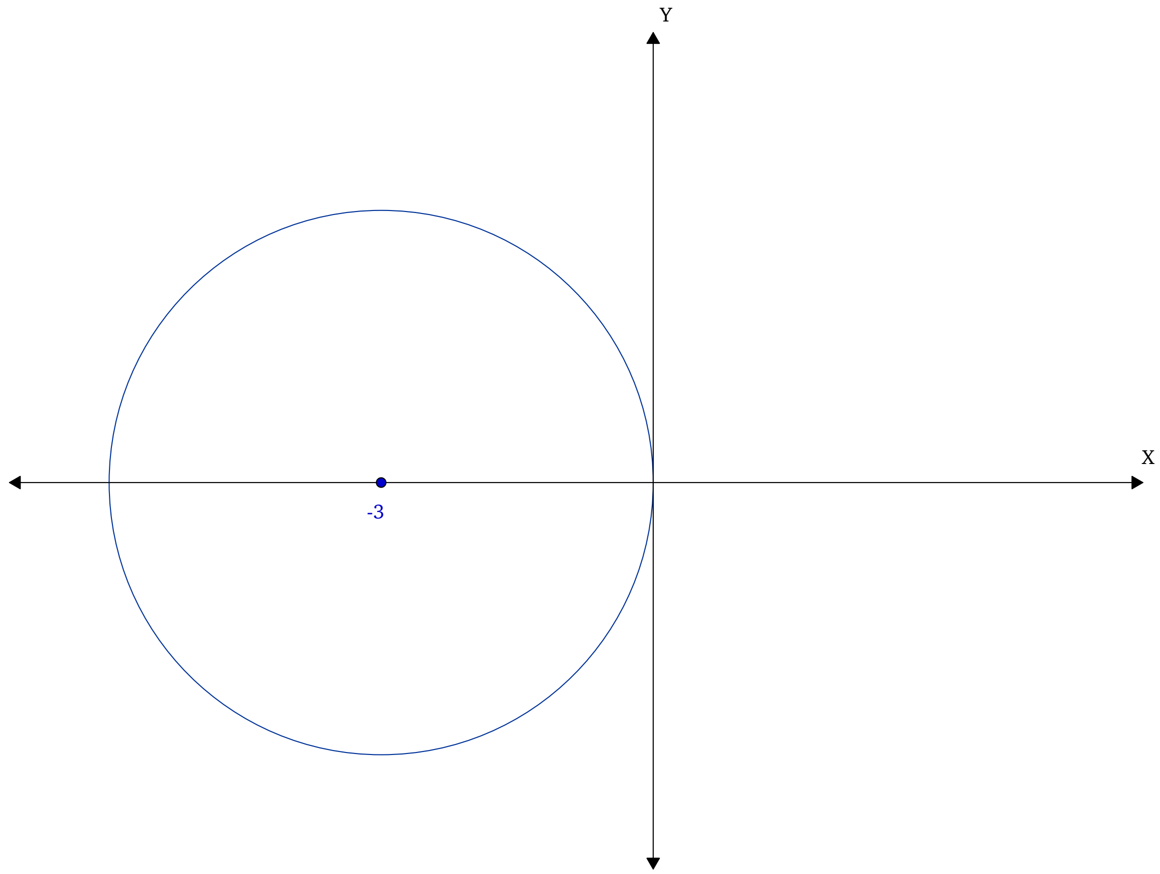
Simplificando:

$$x^2+y^2+6x = 0.$$

Esta es la ecuacion general de una circunferencia, que es de la forma(I.3). Tenemos que en este caso concreto $D=6$, $E=0$ y $F=0$. Entonces:

- $a = \frac{-D}{2} \Rightarrow = \frac{-6}{2} = -3,$
- $b = \frac{-E}{2} \Rightarrow = \frac{0}{2} = 0,$
- $r = \sqrt{(a^2+b^2-F)} \Rightarrow r = \sqrt{9+0-0} = 3.$

Por tanto, el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6,0)$ y $N(-2,0)$ es 3, es una circunferencia de centro $(-3,0)$ y radio 3.


Y
X
-3

□

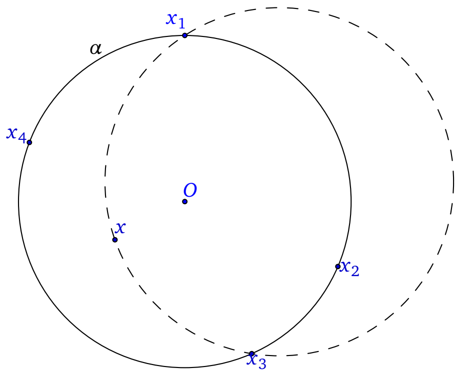
Capítulo III

Problemas y otros desarrollos

3. Problemas de Olimpiadas. Fase Local

Ejercicio. 3.1. (2007-2008, Ver 30 en las Referencias Web)
Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN. Sea $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un subconjunto de P con cuatro elementos. Por hipótesis existe una circunferencia α que pasa por estos cuatro puntos. Supongamos que existe un punto $x \in P$ tal que $x \notin \alpha$. Por la condición del enunciado existe una circunferencia β que pasa por los puntos x, x_2, x_3 y x_4. Entonces las circunferencias α y β tienen tres puntos comunes, lo que implica que deben coincidir, puesto que como se vio en teoría, una circunferencia queda determinada cuando conocemos tres puntos de esta (Ver página 1) y si dos circunferencias tienen tres puntos comunes, estas son la misma. Por tanto, se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia.



□

Ejercicio. 3.2. (2002-2003, Ver 30 en las Referencias Web)
Dibuja un semicircunferencia con centro en O y diámetro AB y, en su interior, otra, con diámetro OA. Traza por un punto C de OA una recta perpendicular a dicho radio OA, que cortará a la semicircunferencia pequeña en D y a la grande en E y, finalmente, la recta AD que cortará a la semicircunferencia grande en F. Demuestra que el circunferencia circunscrita al triángulo DEF es tangente a la cuerda AE en E.

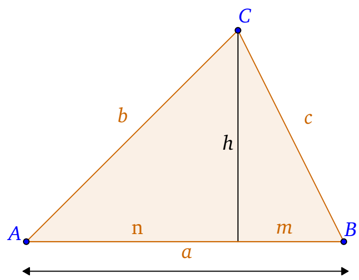
SOLUCIÓN. Sea AEB un triángulo rectángulo, ya que el segundo teorema de Tales afirma que si los tres vértices de un triángulo están sobre una circunferencia dada, siendo uno de sus lados el diámetro de la circunferencia, entonces el ángulo opuesto a este lado es un ángulo recto. Además la semicircunferencia de diámetro OA coincide con el arco de capaz de ángulo 90^o, entonces $\widehat{E} = 90^o$.

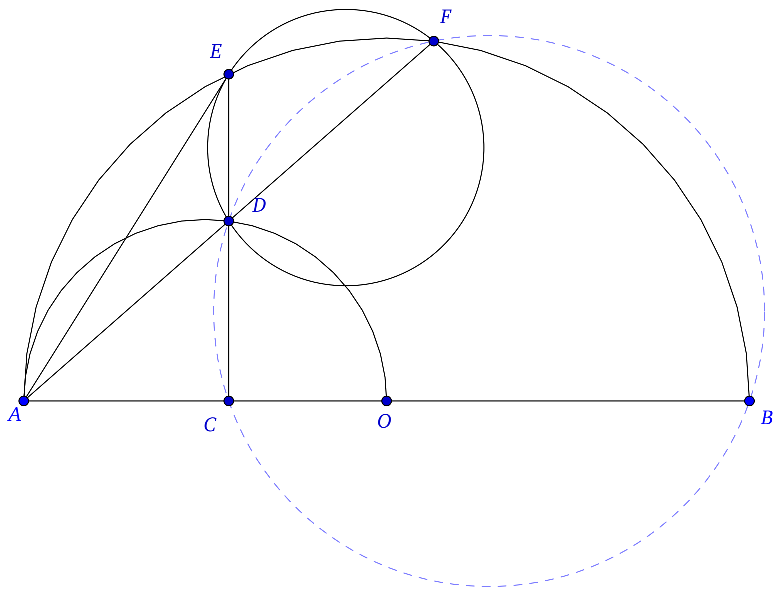
Por el Teorema del Cateto:[1]

$$AE^2 = AC \cdot AB \tag{III.1}$$

El cuadrilátero $BCDF$ es inscriptible en una circunferencia ya que sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, su suma es 180^o. En este caso C y F son rectos. Por tanto, su suma es $90^o + 90^o = 180^o$. Luego los otros dos ángulos del cuadrilátero sumarán 180^o, y por tanto, son suplementarios, ya que la suma de todos los ángulos de un cuadrilátero es 360^o.

[1] **Teorema del cateto** para triángulos se enuncia de la siguiente forma:
El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la hipotenusa, es decir, $b^2 = na$ y $c^2 = ma$.





Así, las rectas ACB y ADF son secantes a la circunferencia que lo circunscribe.
La potencia del punto A respecto de esa circunferencia nos da:

$$AC \cdot AB = AD \cdot AF.$$

Por tanto, $AE^2 \stackrel{(\text{III.1})}{=} AD \cdot AF$.
Y esto quiere decir, por potencia de A respecto a la circunferencia que circunscribe al triángulo DEF, que la recta AE es tangente a dicha circunferencia en E. □

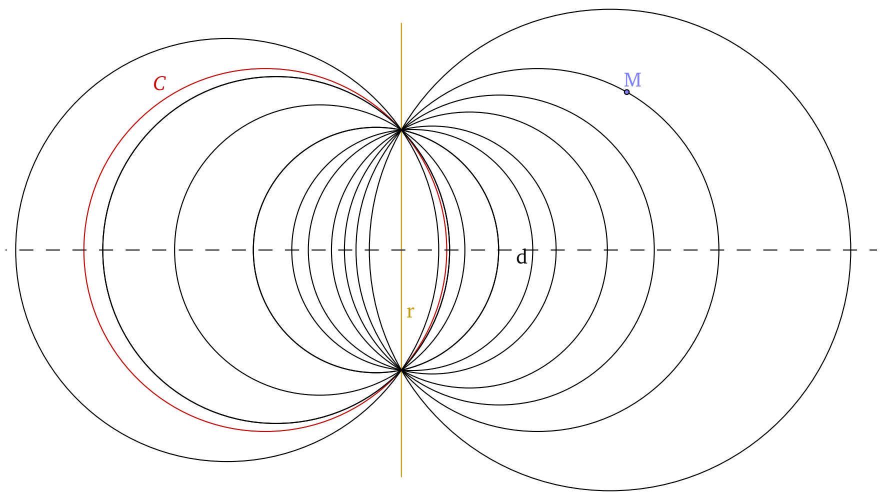
Ejercicio. 3.3. ([2, página 257])
Dada una circunferencia C y una recta r, hallar todas las circunferencias cuyo eje radical con C sea r.

SOLUCIÓN. En este ejercicio lo que tenemos que encontrar es el conjunto de circunferencias que cumplan lo que nos pide el enunciado. A tal conjunto le llamaremos **haz de circunferencias** y su posición geométrica depende de la posición relativa de C y r.
Estudiamos entonces cada uno de los casos.

- r y C secantes. Toda circunferencia que pase por los puntos de corte de r y C cumple la condición pedida, luego es del haz.

  Si llamamos d a la mediatriz del segmento definido por los puntos de corte de r y C, todas las circunferencias pedidas tienen centro en la recta d y todo punto de d es centro de una circunferencia del haz.

  Por cada punto M del plano no perteneciente a r pasa una y sólo una circunferencia del haz, la determinada por M y los dos puntos de corte de r y C.

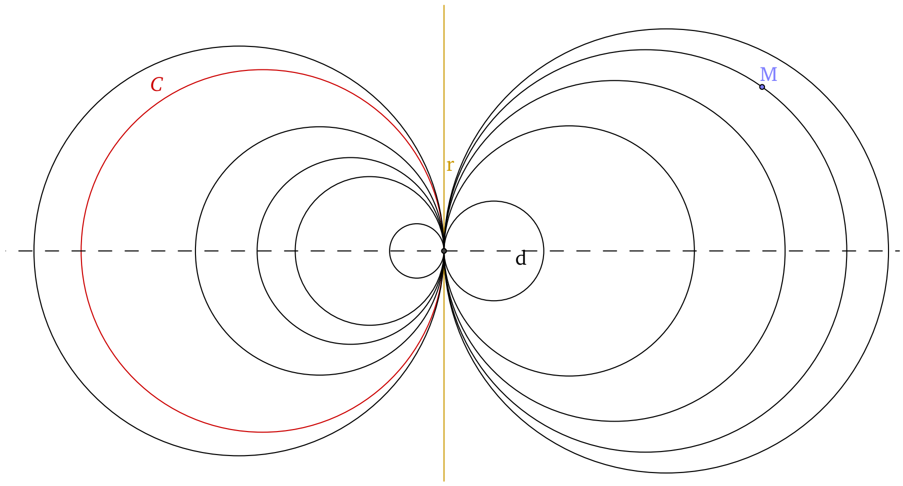


- r y C tangentes. Este caso puede considerarse el caso límite del anterior cuando los dos puntos de corte de r y C tienden a confundirse.

  Como antes, todas las circunferencias del haz son tangentes a r en el mismo punto.

  Todas ellas tienen centro en la recta d perpendicular a r por el punto de contacto.

  Por cualquier punto M del plano no perteneciente a r pasa una y sólo una circunferencia del haz cuyo centro se determina por la intersección con d de la mediatriz del segmento que une M con el punto de contacto.

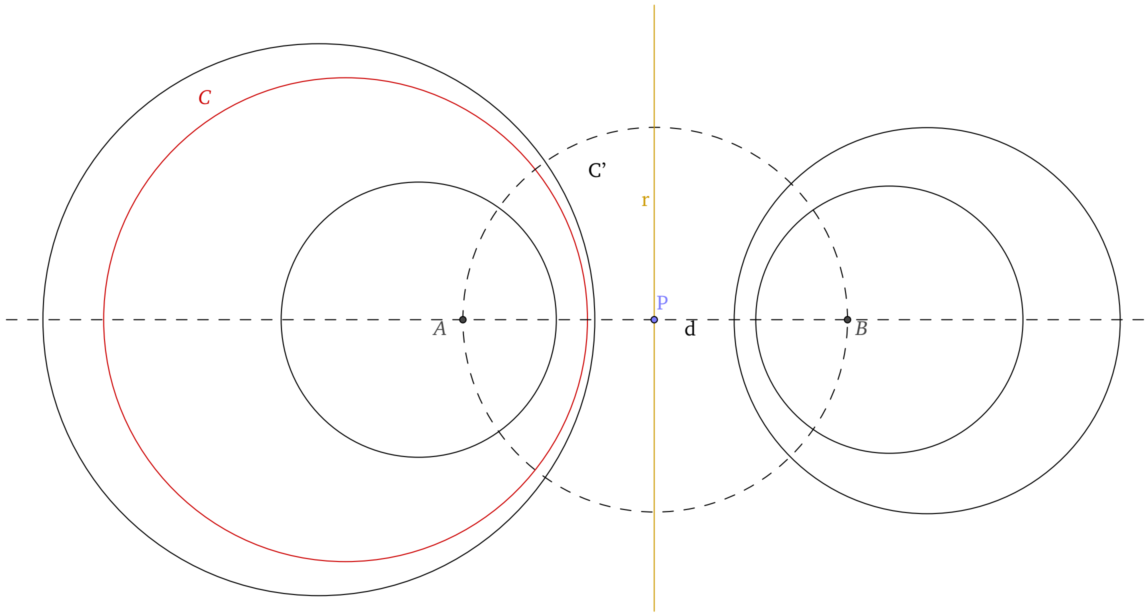


- r exterior a C. En este caso para obtener las circunferencias del haz trazaremos una circunferencia auxiliar C' con centro en P (intersección de r y d) y ortogonal a C.

  Cualquier circunferencia con centro en d y ortogonal a C' es del haz ya que P tendrá la misma potencia respecto de C y de ella (el cuadrado del radio de C').

  Todo punto de d exterior al segmento AB es centro de una circunferencia del haz.

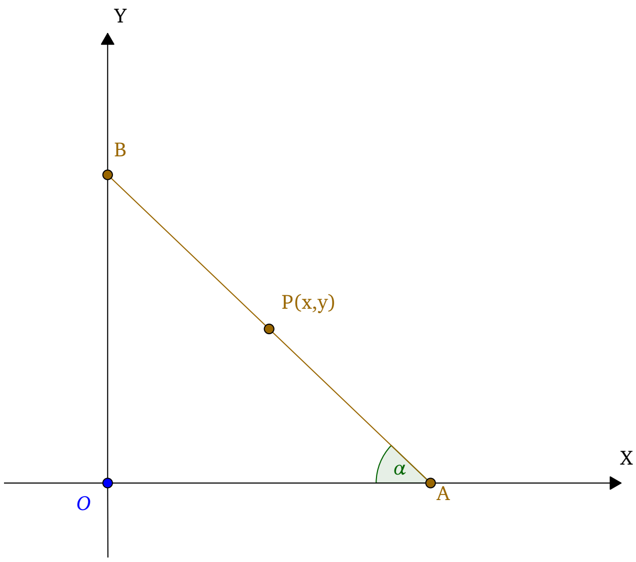
  A y B se llaman **polos del haz**.



□

Ejercicio. 3.4. ([2, página 326, Ejercicio 1])
Hallar el lugar geométrico del punto medio de un segmento de longitud a que se apoya continuamente en los ejes.

SOLUCIÓN. Tomamos los ejes como se muestra en la siguiente figura:



Llamamos α al parámetro que representa al ángulo formado por el segmento y el eje OX.
Tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{OA}{a} \Rightarrow OA = a\cos\alpha,$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{OB}{a} \Rightarrow OB = a\operatorname{sen}\alpha.$$

Entonces, las coordenadas de los extremos, y las del punto medio P son, respectivamente:

$$A(a\cos\alpha, 0),\ \ B(0, a\operatorname{sen}\alpha),$$

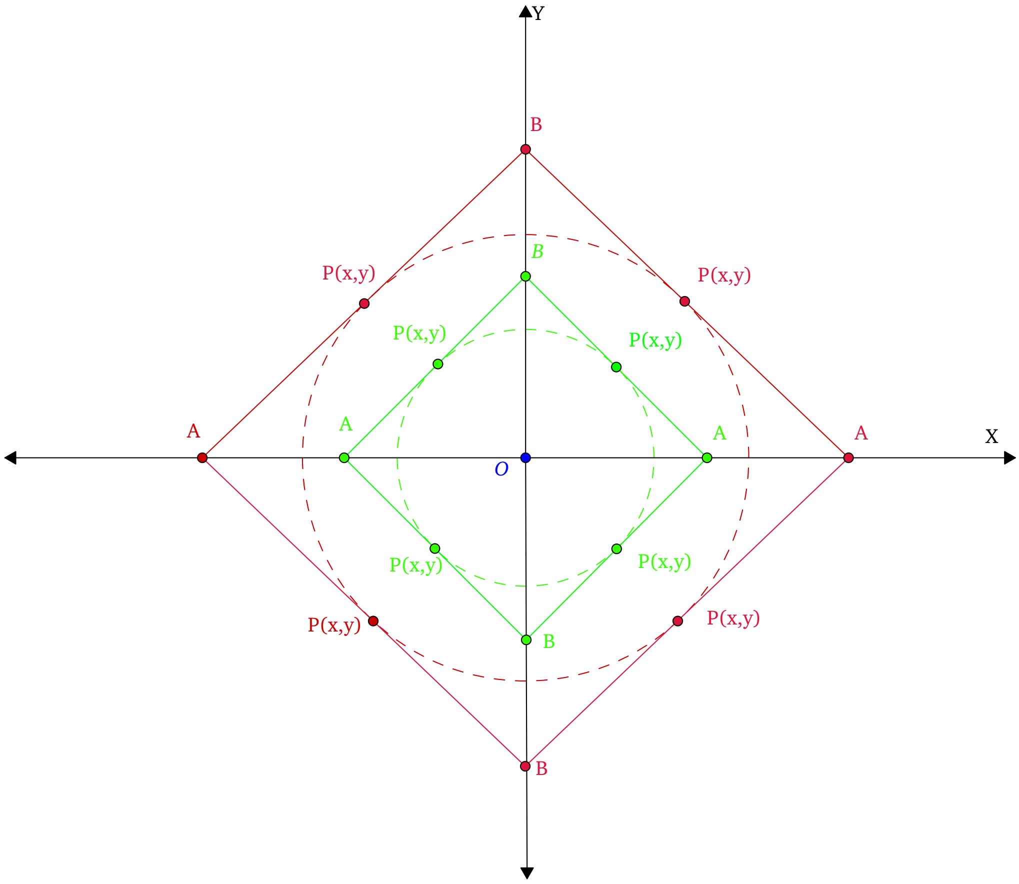
$$\begin{cases} x = \dfrac{a\cos\alpha}{2} \\[2ex] y = \dfrac{a\operatorname{sen}\alpha}{2} \end{cases}$$

Las igualdades anteriores representan las ecuaciones paramétricas del lugar pedido. Para encontrar la ecuación cartesiana basta eliminar el parámetro.

Elevando al cuadrado, sumando y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, nos queda:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio la mitad de la longitud a del segmento dado.



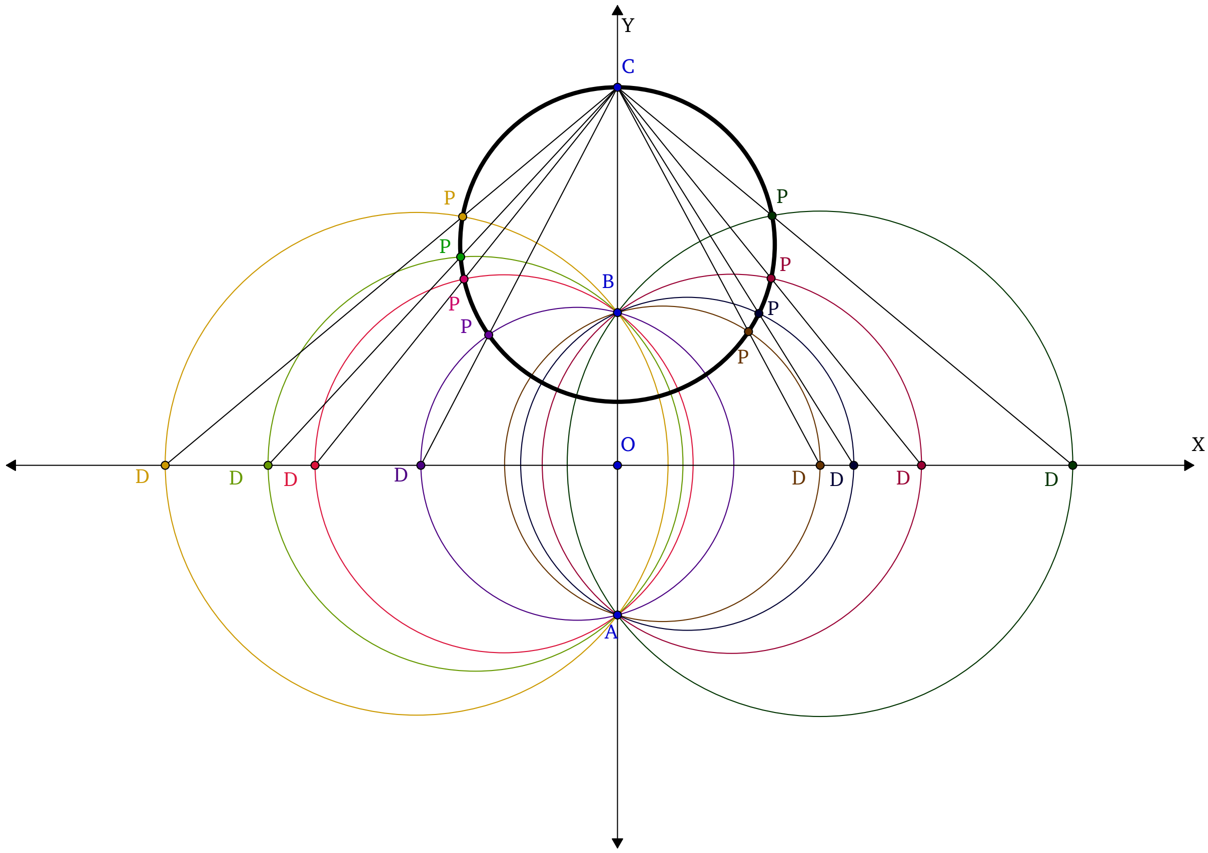
$\square$

Ejercicio. 3.5. ([2, página 329, Ejercicio 3])
Dados tres puntos alineados A, B, C se toma un punto variable D sobre la mediatriz de AB. Se traza la circunferencia que pasa por A, B y D. Se traza la recta CD que corta a la circunferencia en un segundo punto P. Hallar el lugar geométrico de P al variar D en la mediatriz.

SOLUCIÓN. Tomamos los ejes de modo que el eje OY coincida con la recta dada que contiene a A, B, C. El eje OX coincide con la mediatriz del segmento AB.
Todas las circunferencias pasan por A y B, luego forman un haz con el eje radical común, que es la recta definida por A y B.
Como C está en el eje radical común, la potencia de C respecto de cualquier circunferencia es la misma y por ello:

$$\overline{CP} \cdot \overline{CD} = Cte.$$

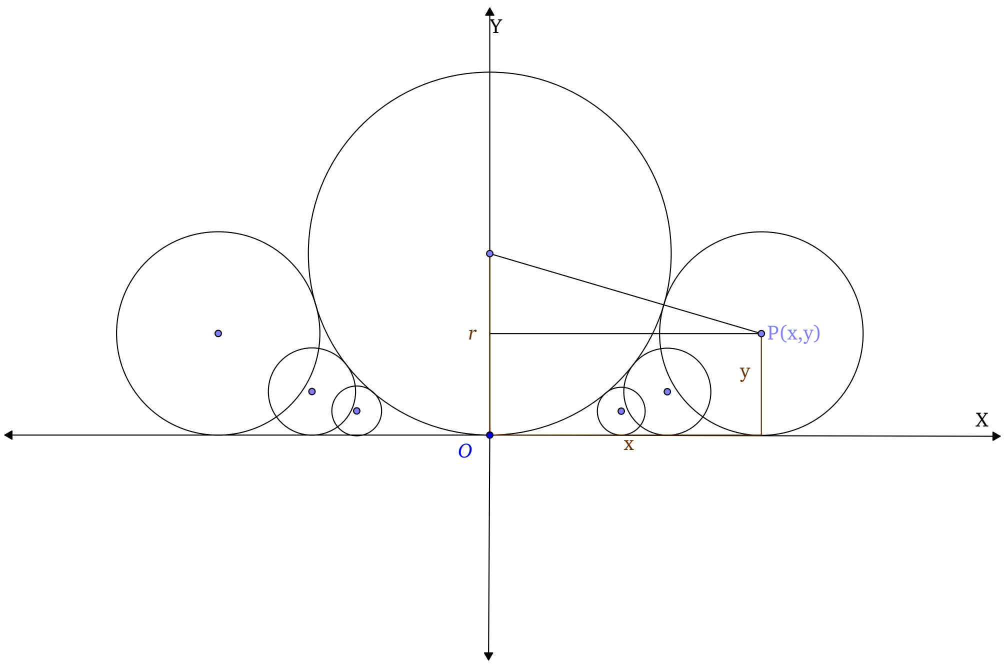
Dicho de otro modo, P es el inverso de D en un inversión de polo C y potencia el valor de la constante. Como D recorre una recta, el lugar geométrico pedido es la figura inversa a esa recta, que, al no pasar por el polo, es un circunferencia que pasa por el polo.



□

Ejercicio. 3.6. ([2, página 331, Ejercicio 4])
Dada una circunferencia y una recta tangente a ella, hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a ambas.

SOLUCIÓN. En primer lugar tomamos los ejes como se muestra en la figura, coincidiendo la recta tangente a la circunferencia con el eje OX.



Denotamos x e y a las coordenadas del centro P de una circunferencia variable cualquiera. Es obvio, que el radio de esta circunferencia es y.
Si llamamos r al radio de la circunferencia dada, se cumple (teorema de Pitágoras):

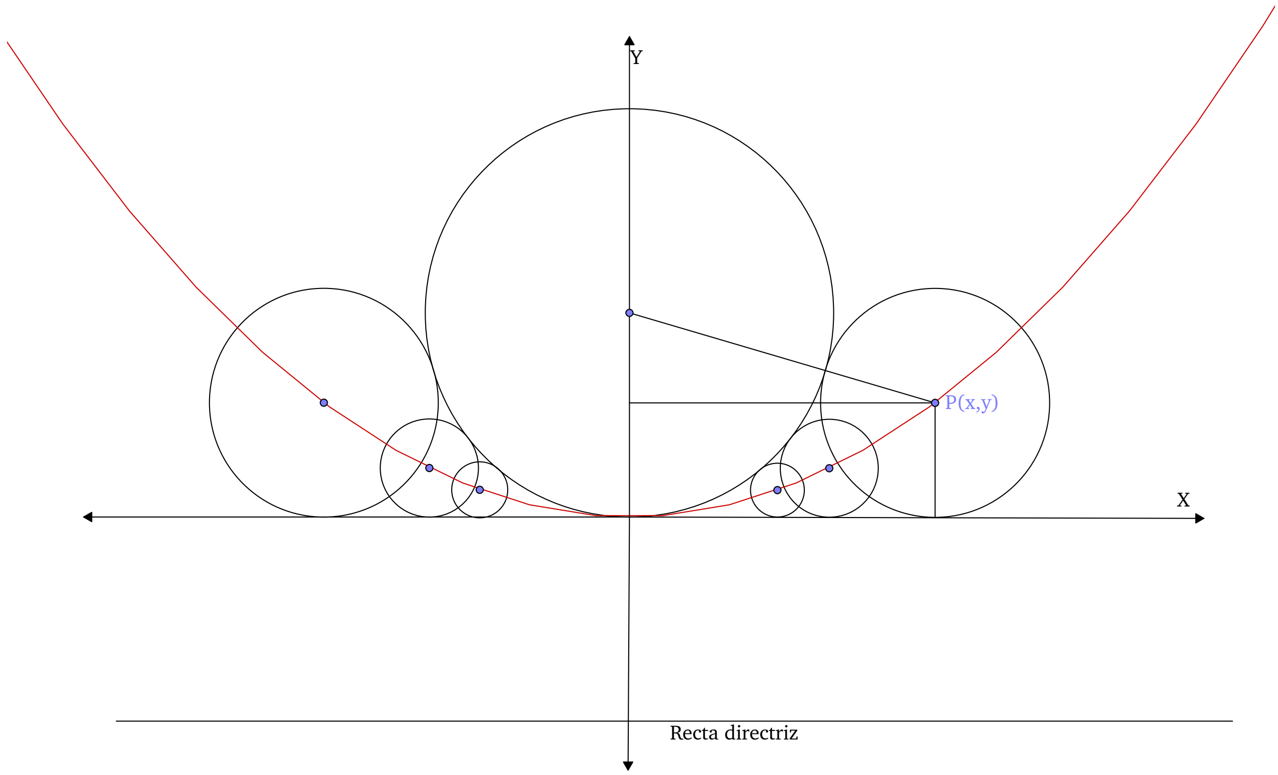
$$(r+y)^2 = x^2 + (r-y)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4ry.$$

Esta es la ecuación de una parábola[2] de vértice $(0,0)$, foco $F(0,r)$, ya que en nuestro caso $2p = 4r \Rightarrow p = 2r$, y directriz la recta de ecuación $y = -\dfrac{2r}{2} = -r$.

[2]La ecuación general de la parábola es:

$$(x-a)^2 = 2p(y-b).$$

Tenemos $V(a,b)$ el vértice, $F(a, b+\dfrac{p}{2})$ el foco e $y = b - \dfrac{p}{2}$ la recta directriz.


Y
P(x,y)
X
Recta directriz

□

Ejercicio. 3.7. (1998-1999, Ver 30 en las Referencias Web)
Sea ABC un triángulo con baricentro G.

(a) Prueba que para cualquier punto del plano M se verifica:

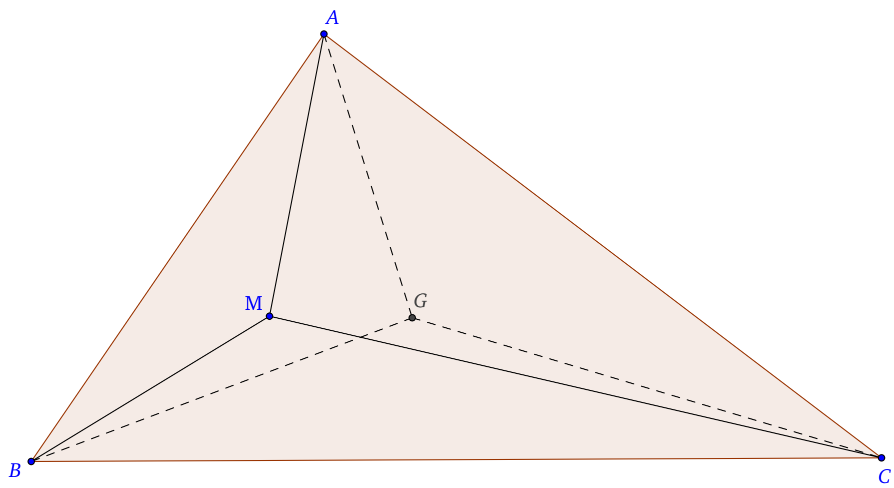
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \geq \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2,$$

obteniéndose la igualdad si y solamente si $M = G$.

(b) Fijado un número $k > \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$, halla el lugar geométrico de los puntos M tales que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k.$$

SOLUCIÓN.



En el primer apartado, se trata de minimizar la expresión: $f(M) = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$.
Sean $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ los vértices del triángulo dado. Para un punto genérico $M = (x, y)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2x(a_1+b_1+c_1) - 2y(a_2+b_2+c_2) + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2 \\ &= 3\left[\left(x - \frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2\right] + g, \end{aligned} \tag{III.2}$$

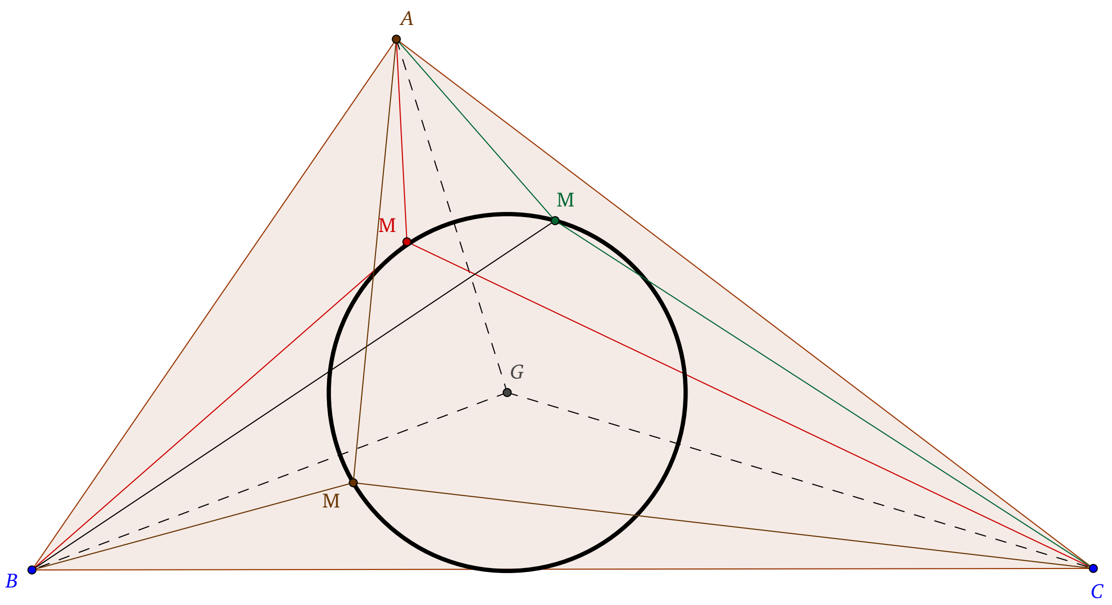
donde g es una determinada constante real.

Por lo tanto, esta cantidad resultará mínima si y sólo si los cuadrados que aparecen en la expresión son cero, es decir, cuando $M = (x, y) = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$, que corresponde precisamente al baricentro G.

Para resolver el segundo apartado es necesario encontrar el lugar geométrico de los puntos M tales que $f(M) = k$. Para ello determinaremos en primer lugar la constante g. Tomando $M = G$ en (III.2) se obtiene $g = f(G) = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
& f(M) = k \\
\Longleftrightarrow\ & 3\left(x - \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)^2 + g = k \\
\Longleftrightarrow\ & \left(x - \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)^2 = \frac{k - g}{3},
\end{aligned}
$$

que es exactamente la ecuación de la circunferencia de centro G y radio $r = \sqrt{\frac{k-g}{3}}$.

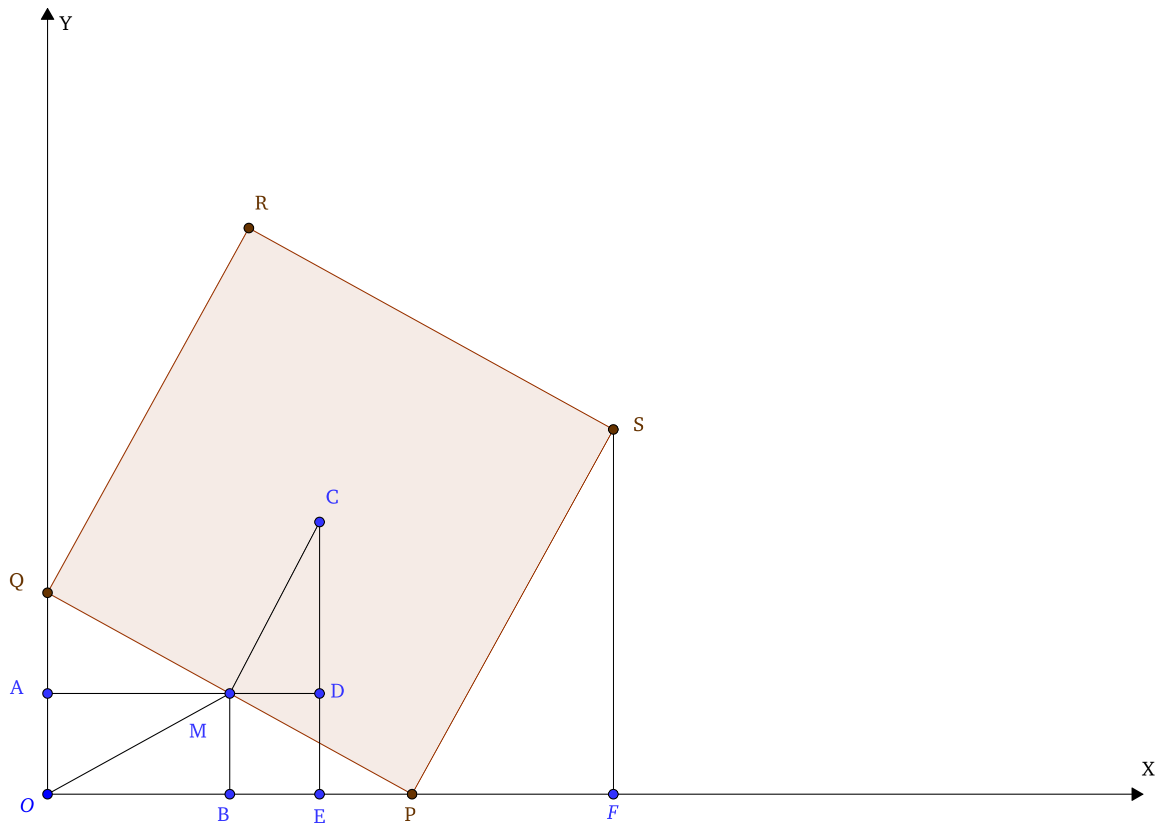


□

Ejercicio. 3.8. (2012-2013, Ver 30 en las Referencias Web)
Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano OXY de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje OX y otro con el eje OY. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:

(a) El punto medio del lado de contacto con los ejes.
(b) El centro del cuadrado.
(c) Los vértices del lado de contacto y del lado opuesto en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN. Sean $PQRS$ el cuadrado de lado 10 cm, PQ el lado de apoyo, $M(m_1, m_2)$ el punto medio de dicho lado y $C(c_1, c_2)$ el centro del cuadrado, como se muestra en la figura, además señalamos los puntos A, B, D y E.



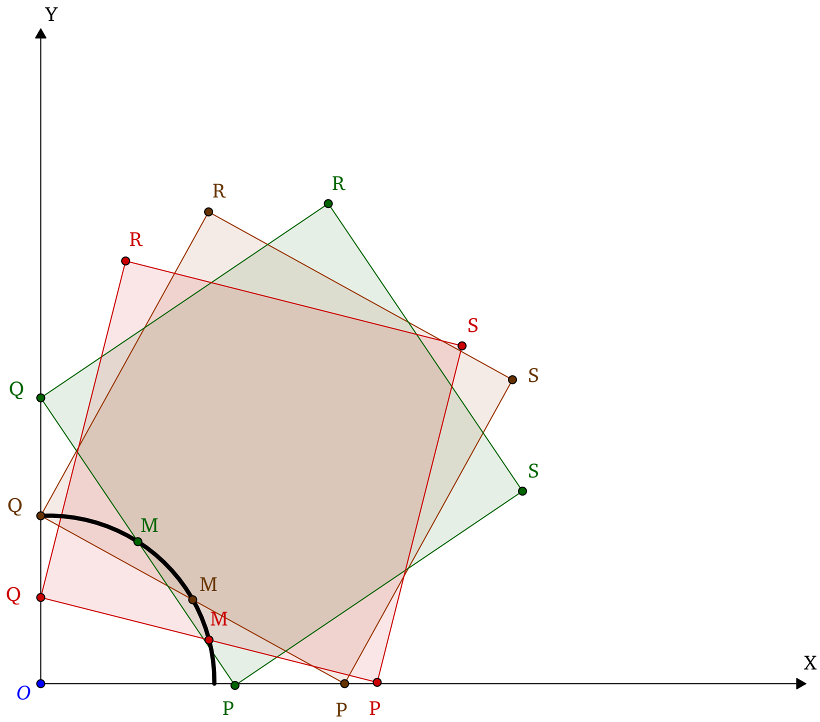
(a) Caso del punto medio M.

Tenemos que

$$OM = PM = \frac{1}{2}PQ = 5,$$

luego ${m_1}^2 + {m_2}^2 = 25$.

Además, sabemos que $m_1, m_2 \geq 0$, entonces el lugar geométrico sería el cuarto de circunferencia situado en el primer cuadrante.



(b) Caso del centro del cuadrado C.

Los triángulos AQM, AOM, BMO y DMC son congruentes[3]

$$AM = OB = DC,$$

$$AQ = OA = MD = BM,$$

$$OM = MQ = MC = 5.$$

Así, resulta que las coordenadas del centro del cuadrado, en su deslizamiento, son iguales

$$c_1 = OE = OB + BE = m_1 + MD = m_1 + m_2,$$

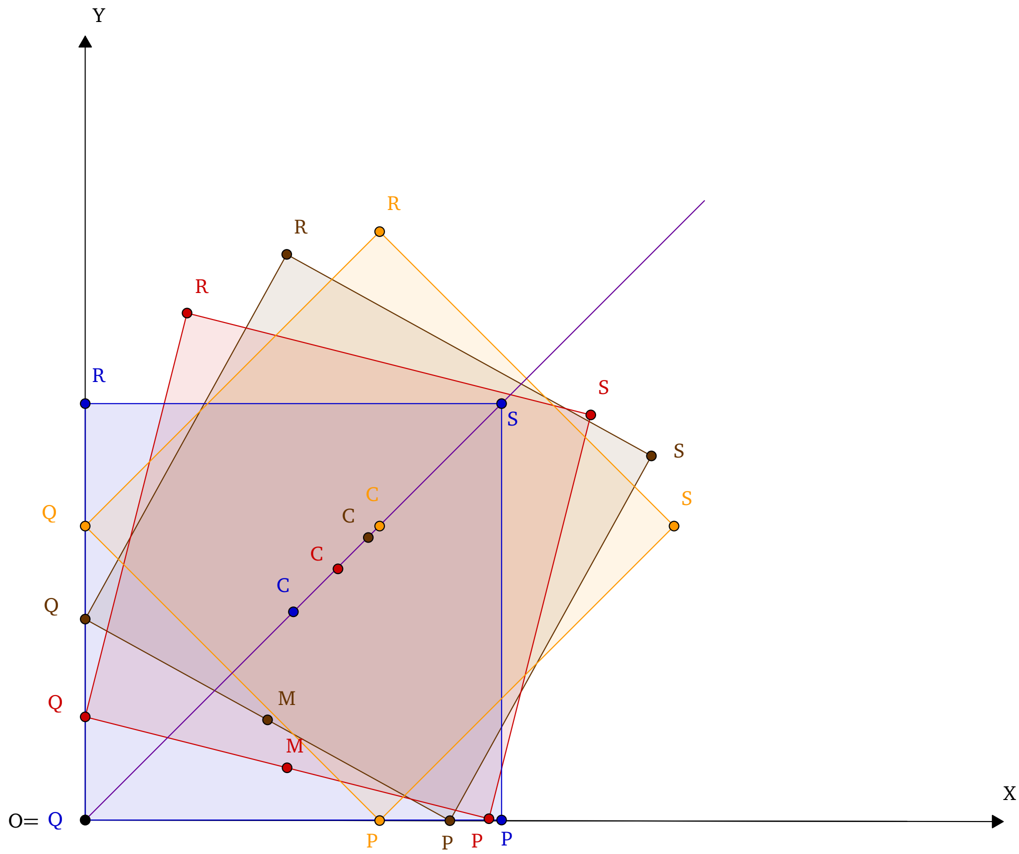
$$c_2 = EC = ED + DC = OA + AM = m_2 + m_1.$$

Luego, el centro del cuadrado se mueve, en este primer cuadrante, sobre un segmento de la línea bisectriz. Las posiciones extremas se dan cuando el lado PQ se apoya sobre alguno de los ejes, $C(5,5)$, y cuando forma una escuadra, esto es, un triángulo rectángulo isósceles, con ellos, $C(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.

[3] Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas.

Aplicando un razonamiento análogo en los demás cuadrantes podemos afirmar que el centro del cuadrado recorre el segmento de sus bisectrices que viene dado por la expresión

$$C(c_1, c_2) = (\pm 5\lambda, \pm 5\lambda),\ \lambda \in [1, \sqrt{2}].$$



(c) Caso de los vértices del cuadrado del lado de contacto: P y Q.

Los vértices P y Q se mueven sobre segmentos de los ejes coordenados, esto es, de las líneas $x = 0$ y $y = 0$.

Los casos extremos se dan cuando el lado de contacto descansa sobre los ejes.

Así, si las coordenadas de uno son $(0, \lambda)$, las del otro $\left(\pm\sqrt{100-\lambda^2}, 0\right)$ y si las coordenadas de uno son $(\lambda, 0)$, las del otro son $\left(0, \pm\sqrt{100-\lambda^2}\right)$ con $\lambda \in [-10, 10]$.

Caso de los vértices del cuadrado del lado opuesto al lado de contacto: R y S.

Apoyándonos en la figura del principio, podemos ver que los triángulos OQP, QHR y PFS son congruentes, y a la vez, semejantes a AQM:

$$R(r_1, r_2) r_1 = 2m_2 r_2 = 2m_1 + m_2,$$

de donde $m_1 = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$ y $m_2 = \dfrac{r_1}{2}$.

Sabemos que $m_1^2+m_2^2=25$, entonces tenemos para R:

$$\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2+\left(\frac{r_1}{2}\right)^2=25,$$

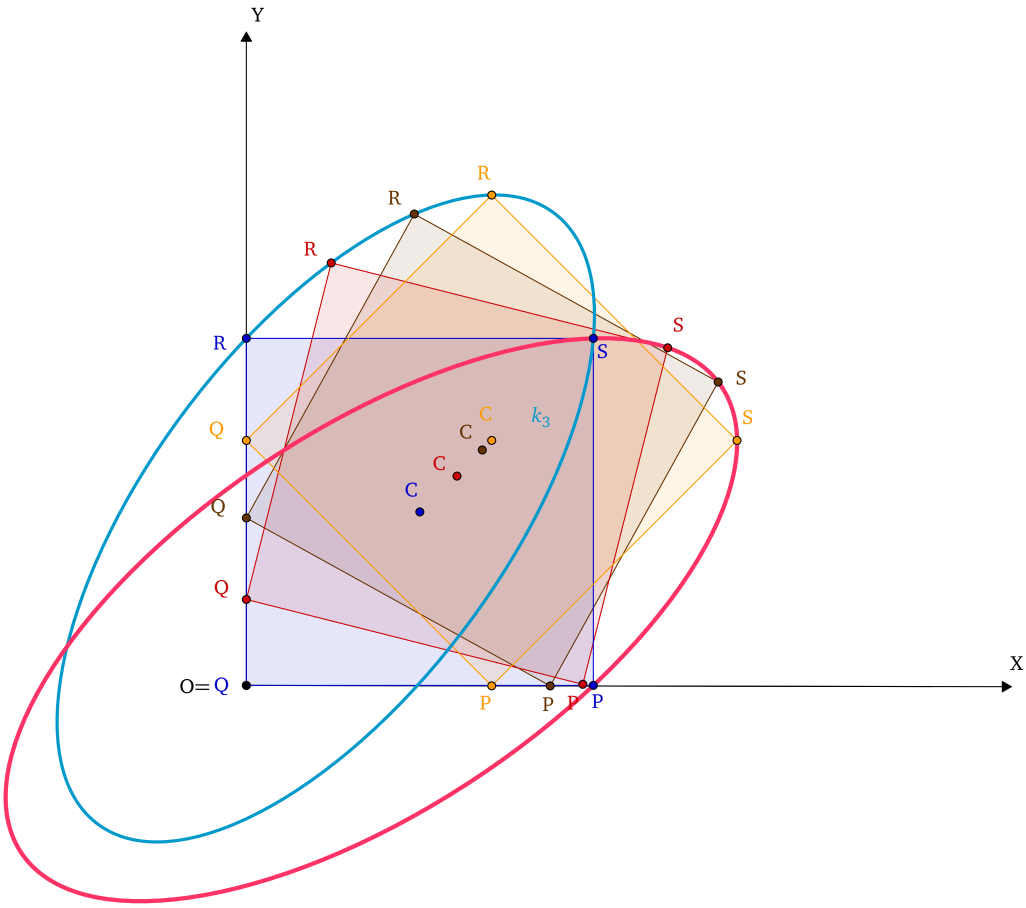
o bien $(r_2-r_1)^2+{r_1}^2=100$.

Entonces el lugar geométrico esta, pues, en la elipse de ecuación $(y-x)^2+x^2=100$, (elipse azul), y es un arco de elipse, (arco azul comprendido entre R y S del cuadrado azul oscuro), que se puede parametrizar como

$(y-x)^2+x^2=100 \Leftrightarrow \sqrt{(y-x)^2}=\sqrt{100-x^2} \Leftrightarrow y-x=\sqrt{100-x^2} \Leftrightarrow y=x+\sqrt{100-x^2}$, con $x\in[0,10]$ e $y\in[10,10\sqrt{2}]$.

Análogamente, para S sale el arco de elipse, (arco rosa comprendido entre S y P del cuadrado azul oscuro), $y^2+(x-y)^2=100$ con

$y^2+(x-y)^2=100 \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{100-y^2} \Leftrightarrow x-y=\sqrt{100-y^2} \Leftrightarrow x=y+\sqrt{100-y^2}$, con $y\in[0,10]$ y $x\in[10,10\sqrt{2}]$.

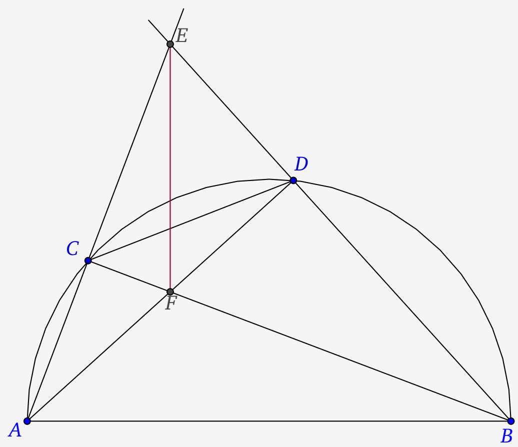


□

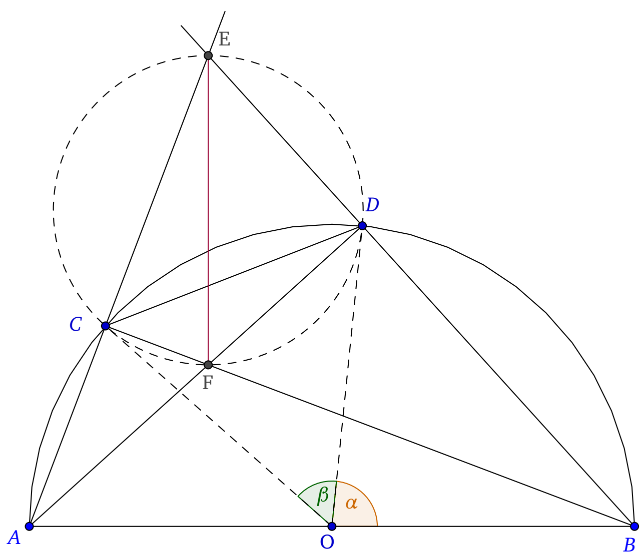
4. Problemas de Olimpiadas. Fase Nacional

Ejercicio. 4.1. (Torredolones, 2007, Ver 30 en las Referencias Web)
Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC.

Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la semicircunferencia.



SOLUCIÓN. Los triángulos EFC y EDF son rectángulos, entonces el cuadrilátero $EDFC$ es inscriptible (1.5.) y EF es el diámetro.



Llamamos r al radio de la semicircunferencia de ECD. Por el teorema del seno[4] en ECD:

$$EF = 2r = \frac{CD}{\operatorname{sen} E} = \frac{c}{\operatorname{sen} E}. \tag{III.3}$$

Pongamos $\alpha = \angle BOD$ y $\beta = \angle COD$. Entonces,

$$\widehat{E} = \frac{180-\beta}{2} = 90 - \frac{\beta}{2}.$$

Esta expresión prueba que el ángulo E es constante al serlo β y además el punto E se mueve en el arco capaz de $90 - \frac{\beta}{2}$ sobre AB.
Sustituyendo en (III.3) nos queda:

$$EF = 2r = \frac{c}{\operatorname{sen}\left(90 - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{c}{\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen} 90 - \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos 90} = \frac{c}{\cos\frac{\beta}{2}}, \tag{III.4}$$

por otra parte

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{c}{2R}. \tag{III.5}$$

Eliminamos β entre (III.4) y (III.5) y despejamos EF. Para ello, realizamos lo siguiente: despejamos $\cos\frac{\beta}{2}$ en (III.4), elevamos al cuadrado la expresión resultante y (III.5), y sumamos ambas expresiones, es decir,

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{c}{EF},$$
$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{c}{2R},$$

entonces,

$$\cos^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2}{EF^2} + \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow 1 = \frac{c^2}{EF^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$
$$\Rightarrow \frac{c^2}{EF^2} = 1 - \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow \frac{c^2}{EF^2} = \frac{4R^2 - c^2}{4R^2} \Rightarrow EF = \frac{2cR}{\sqrt{4R^2 - c^2}}.$$

Esta expresión muestra que EF es constante al serlo c y R.
Además F es el ortocentro del triángulo ABE como intersección de las alturas AD y BC, por ello EF que está sobre la tercera altura es siempre perpendicular a AB. □

[4] Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b, c, entonces:

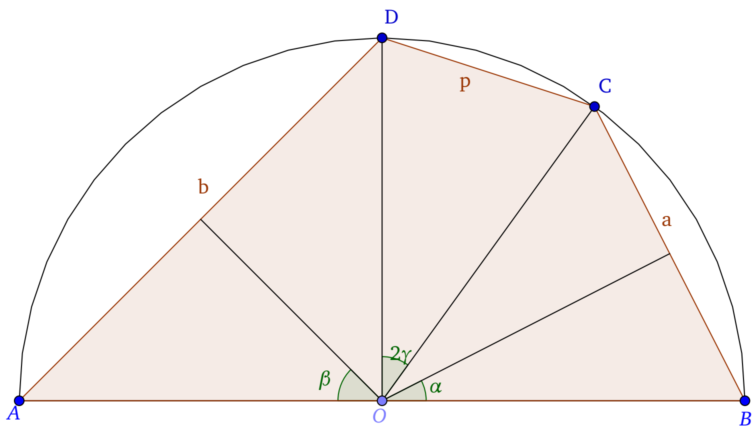
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

Ejercicio. 4.2. (Murcia, 2001, Ver 30 en las Referencias Web)
$ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita. Probar que:

$$CD \leq 2\sqrt{5} - 4.$$

SOLUCIÓN.



Sea O el centro de la semicircunferencia. Pongamos $a = BC$, $b = AD$, $p = CD$, $2\alpha = \angle BOC$, $2\beta = \angle AOD$, $2\gamma = \angle COD$.
La condición necesaria y suficiente para que $ABCD$ admita una circunferencia inscrita (1.6.) es:

$$p + 2 = a + b \tag{III.6}$$

Puesto que la suma de los ángulos centrales de una semicircunferencia es 180^o, en este caso tenemos que $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^o$, entonces

$$\beta = 90 - (\alpha + \gamma).$$

Además

$$a = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ p = 2\,\mathrm{sen}\,\gamma,$$

$$\begin{aligned} b &= 2\,\mathrm{sen}\,\beta = 2[\mathrm{sen}\,90\cos(\alpha+\gamma) - \mathrm{sen}(\alpha+\gamma)\cos 90] \\ &= 2\cos(\alpha+\gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma. \end{aligned} \tag{III.7}$$

Vamos a expresar la condición (III.6) en función del ángulo α y el dato p que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos^2\gamma + \mathrm{sen}^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = 1 - \mathrm{sen}^2\gamma \Rightarrow \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Entonces,

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-p^2}}{2},$$

sustituyendo en (III.7), y teniendo en cuenta la siguiente propiedad, obtenemos b,

$$\operatorname{sen}^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = 1-1+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{p}{2},$$

entonces,

$$b = 2\left(\frac{\sqrt{4-p^2}}{2}\right)\cos\alpha - 2\left(\frac{p}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{4-p^2}\cos\alpha - p\operatorname{sen}\alpha,$$

y sustituyendo en (III.6), queda:

$$p+2 = 2\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{4-p^2}\cos\alpha - p\operatorname{sen}\alpha,$$

o lo que es lo mismo:

$$p+2 = \sqrt{4-p^2}\cos\alpha + (2-p)\operatorname{sen}\alpha. \tag{III.8}$$

Por tanto, existirá circunferencia inscrita para los valores de p que hagan compatible la ecuación (III.8) en la incógnita α.
Interpretando la ecuación (III.8) como el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{u}(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ de módulo 1 y $\overrightarrow{v}\left(\sqrt{4-p^2}, 2-p\right)$. La condición (III.8) queda:

$$\left|\overrightarrow{v}\right|\cos\delta = p+2, \tag{III.9}$$

siendo δ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
Para que (III.9) sea compatible debe cumplirse $p+2 \leqslant |\overrightarrow{v}| = \sqrt{4-p^2+(2-p)^2}$, elevando al cuadrado y operando queda:

$$p^2+8p-4 \leqslant 0.$$

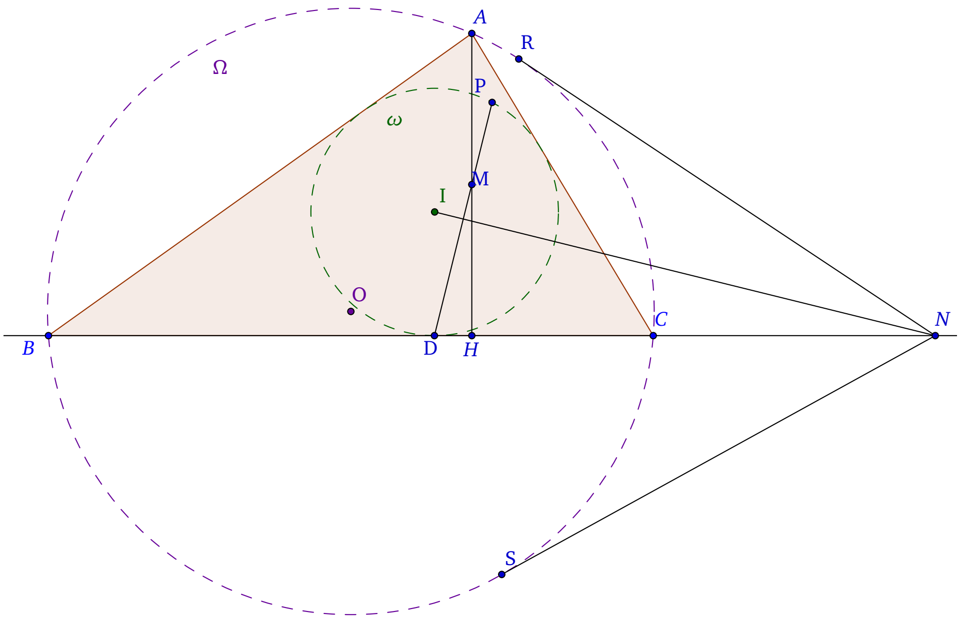
Las raíces de la ecuación son $p = \pm 2\sqrt{5}-4$. Como p es positivo la condición final es:

$$0 \leqslant p \leqslant 2\sqrt{5}-4.$$

□

Ejercicio. 4.3. (Santander, 2012, Ver 30 en las Referencias Web)
Sea ABC un triángulo acutángulo (tiene todos sus águlos menores de 90^o), ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

SOLUCIÓN.



Supongamos que $b = c$. Entonces, el pie de la altura H coincide con el punto de tangencia D, luego DM es perpendicular a BC y N no está definido.

Asumimos entonces sin pérdida de generalidad que $b < c$.

Sea U el punto de la recta BC cuya potencia es la misma respecto de ω y Ω. Para obtener este punto, basta con construir el eje radical de las dos circunferencias y cualquier punto de este eje tendrá igual potencia respecto a una u otra circunferencia.

Obviamente, hay exactamente dos tangentes a cada una de ambas circunferencias que pasan por U, siendo D el punto de tangencia de una de ellas con ω. Llamamos E al punto de tangencia con ω de la segunda recta que pasa por U. La distancia de U a los cuatro puntos de tangencia es la misma, luego existe una circunferencia de centro U que pasa por los cuatro puntos, es decir, si demostramos que $U = N$, el problema quedaría resuelto.

El eje radical de la circunferencia descrita con centro U y ω, es claramente la recta DE y la perpendicular a esta recta por I es la mediatriz de la cuerda DE, luego pasa por U.

Basta entonces con demostrar que el punto W de la altura AH cuya potencia es la misma respecto a la circunferencia de centro U por D y por E, y respecto a ω es el punto medio de AH, con lo que sería $P=E$ y $N=U$. Ahora bien, dicha potencia es

$$UD^2-UW^2=ID^2-IW^2$$

Pero $UW^2=UH^2+WH^2$, $IW^2=(WH-ID)^2+HD^2$, con lo que la anterior condición es equivalente a

$$UD^2-2WH\cdot ID=UH^2-HD^2=UD(UD-2HD),\quad WH=\frac{HD\cdot UD}{ID},$$

y el problema se reduce a demostrar que esta última expresión es la mitad de la altura.

Llamando s al semiperímetro de ABC, tenemos que $BD=s-b$, $CD=s-c$, $BH=c\cos B$, y al estar U definido como el punto sobre BC tal que su potencia es la misma respecto de ω y Ω y llamando $\sum$ al área de ABC y usando la fórmula de Herón[5] para la misma, tenemos

$$UD^2=(UD-BD)(UD+CD),$$

$$UD=\frac{BD\cdot CD}{CD-BD}=\frac{(s-b)(s-c)}{b-c}=\frac{\sum^2}{s(b-c)(s-a)}.$$

Luego

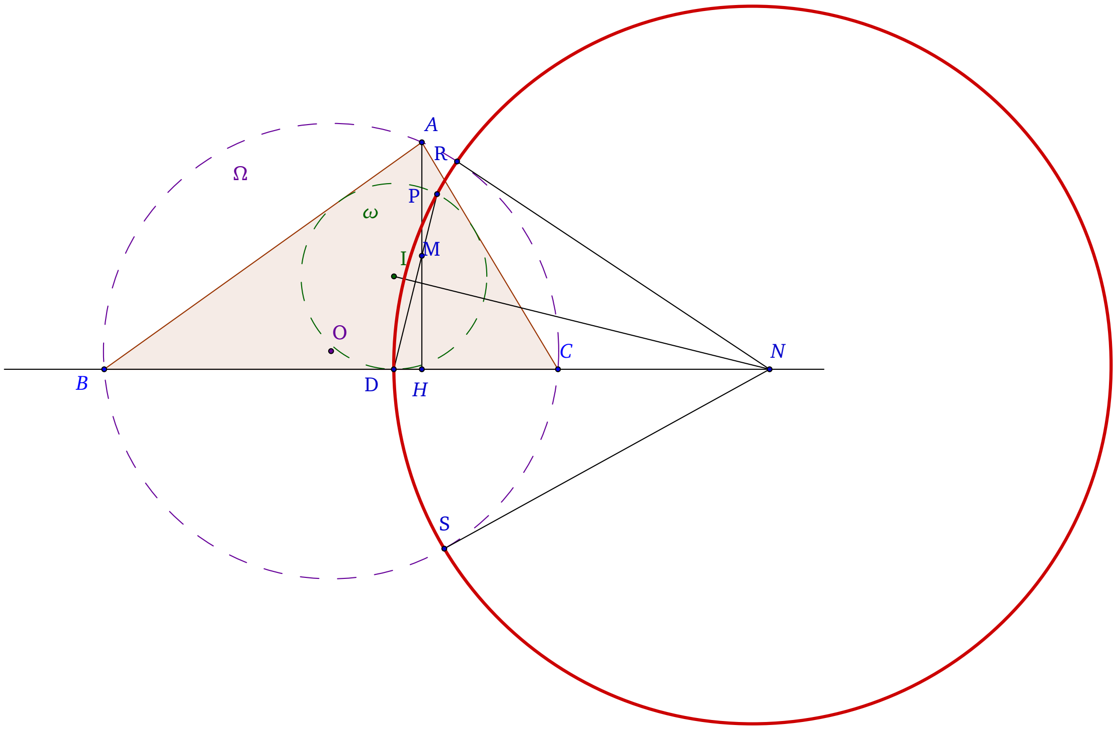
$$\begin{aligned}WH=\frac{h}{2}\frac{a(s-b-c\cos B)}{(b-c)(s-a)}&=\frac{h}{2}\frac{\left(a(a+b+c)-2ab-a^2-c^2+b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)}\\=\frac{h}{2}\frac{\left(ac-ab-c^2+b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)}&=\frac{h}{2},\end{aligned}\tag{III.10}$$

que es lo que queríamos demostrar.

[5]La **fórmula de Herón** relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados a, b y c:

$$\sum=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

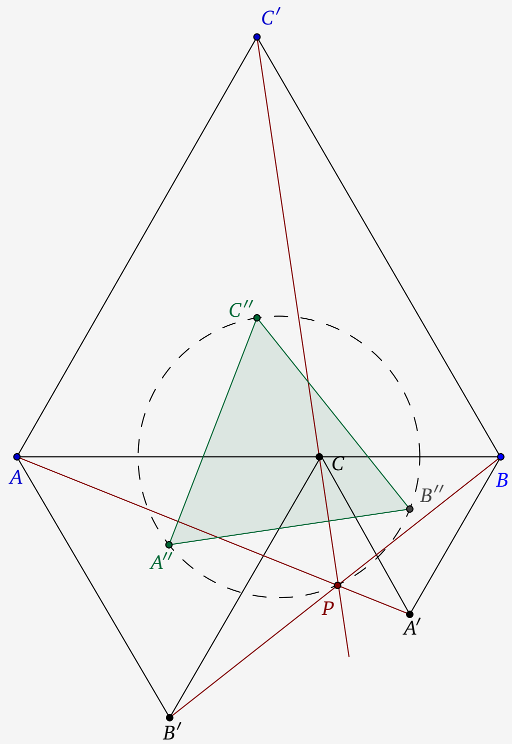
donde s es el semiperímetro del triángulo:


A
R
Ω
P
ω
M
I
O
C
N
B
D
H
S

□

Ejercicio. 4.4. (Castellón, 1995, Ver 30 en las Referencias Web)
En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros ACB' y CBA', de lados AC y CB, respectivamente, en el mismo semiplano definido por AB, y otro ABC', de lado AB, en el semiplano opuesto. Demuestra:

(a) Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.
(b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado (a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.
(c) Los centros A'', B'' y C'' de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.
(d) Los puntos A'', B'', C'' y P están sobre una circunferencia.

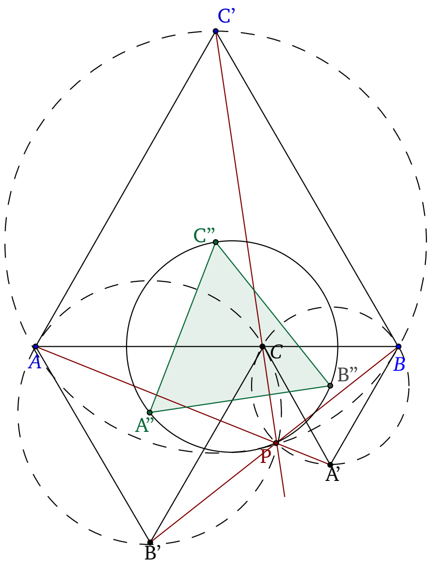


Solución.

(a) Se traza la circunferencia circunscrita al triángulo ABC' y se llama P a la intersección de CC' con ella.

Evidentemente (arco capaz) $\angle APB = 120^o$ y PC' es su bisectriz con lo que $\angle APC = \angle CPB = 60^o$ y P ha de estar en las circunferencias circunscritas a los triángulos ACB' y BCA'.

Por tanto las tres circunferencias se cortan en P.

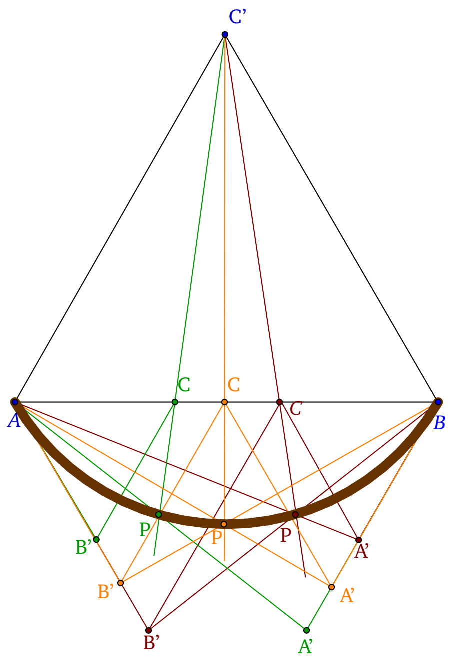


Como $\angle CPB' = 120^o$ y $\angle CPB = 60^o$ sumando queda que $\angle BPB' = 180^o$ y P está alineado con BB'.

Como $\angle CPA' = 120^o$ y $\angle CPA = 60^o$ sumando queda que $\angle APA' = 180^o$ y P está alineado con AA'.

Por tanto, AA', BB' y CC' son concurrentes y se cortan en el punto P.

(b) Como P está definido por la intersección de la recta CC' con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC' el lugar pedido es el arco APB de esa circunferencia.



(c) Los lados del triángulo son perpendiculares a las cuerdas PA, PB y PC que forman ángulos de 60^o o 120^o. Por ello, entre sí forman ángulos iguales de 60^o.

(d) Basta comprobar que los centros C'', B'', A'' y P verifican el Teorema de Ptolomeo:[6]

$$\overline{PC''}\cdot\overline{A''B''}=\overline{PA''}\cdot\overline{B''C''}+\overline{PB''}\cdot\overline{A''C''}\Longleftrightarrow\overline{PC''}=\overline{PA''}+\overline{PB''}\Longleftrightarrow\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}.$$

La primera implicación es clara, ya que $A''B''C''$ forman un triángulo equilátero, y por tanto los lados $A''B''$, $B''C''$, $A''C''$ son iguales.

La segunda implicación es cierta si se da:

$$\frac{AB}{PC''}=\frac{AC}{PA''}=\frac{CB}{PB''}. \tag{III.11}$$

Vamos a demostrar las anteriores igualdades.

(1) $\widehat{A''PA}=\widehat{C''PC}=\widehat{C''PC'}=\widehat{B''PB}$.

(2) Giramos en sentido horario de las agujas del reloj, con centro P, el ángulo $A''PA$. Entonces, P, A'' y A están alineados.
P, C'' y C están alineados.
P, B'' y B están alineados.

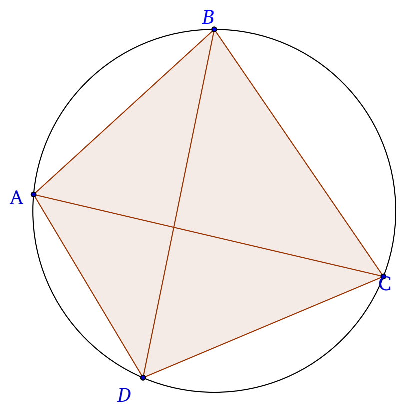
(3) Entonces, el segmento $B''C''$ es paralelo a el segmente BC', ya que tenemos dos triángulos equiláteros con un lado común.

(4) Entonces $\widehat{PC''B''}$ y $\widehat{PC'B}$ son iguales.

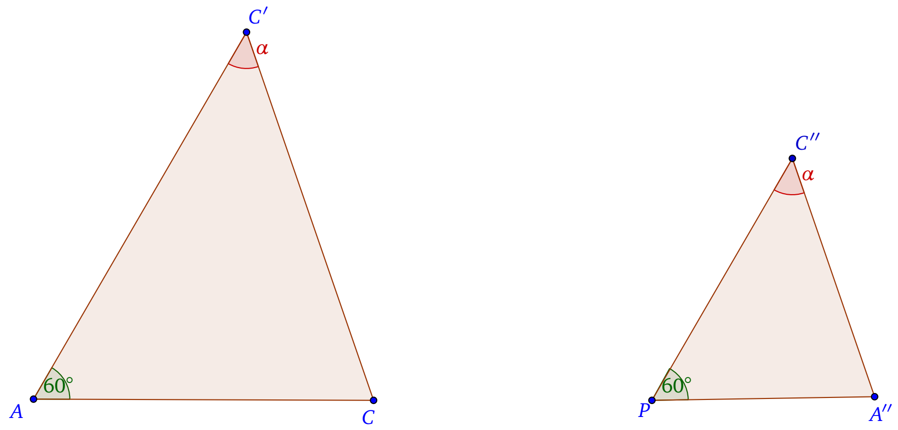
(5) Por tanto, $\widehat{AC'P}=\widehat{A''C''P}$, y $\widehat{AC'P}=\widehat{AC'P}$, luego $\widehat{AC'C}=\widehat{A''C''P}$.
Entonces los triángulos $A''C''P$ y $A''C''C$ son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales, uno es $\widehat{AC'C}=\widehat{A''C''P}$ y el otro es $\widehat{C'AC}=60^o=\widehat{A''PC''}$.

[6]El **Teorema de Ptolomeo** afirma que en todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales, es decir,

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}.$$



Tendríamos entonces la siguiente situación:



Entonces,

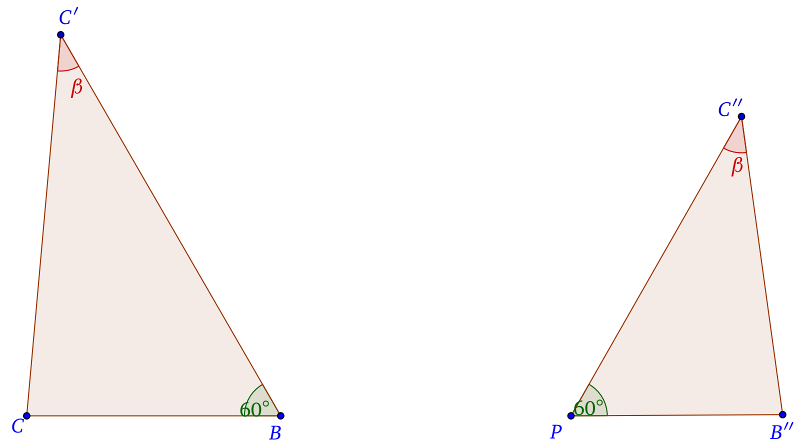
$$\frac{AC}{PA''} = \frac{AC'}{PC''} = \frac{CC'}{A''C''},$$

y como $AB = AC'$, tenemos que:

$$\frac{AC}{PA''} = \frac{AB}{PC''} = \frac{CC'}{A''C''}.$$

Nos quedaría por demostrar la segunda igualdad en (III.11), y así tendríamos probado lo que queríamos.

Para ello, desarrollamos un razonamiento análogo al anterior y llegamos a la situación:



Entonces,

$$\frac{BC'}{PC''} = \frac{BC}{PB''} = \frac{CC'}{C''B''},$$

y como $AB = BC'$, tenemos que:

$$\frac{AC}{PA''} = \frac{AB}{PC''} = \frac{BC}{PB''}.$$

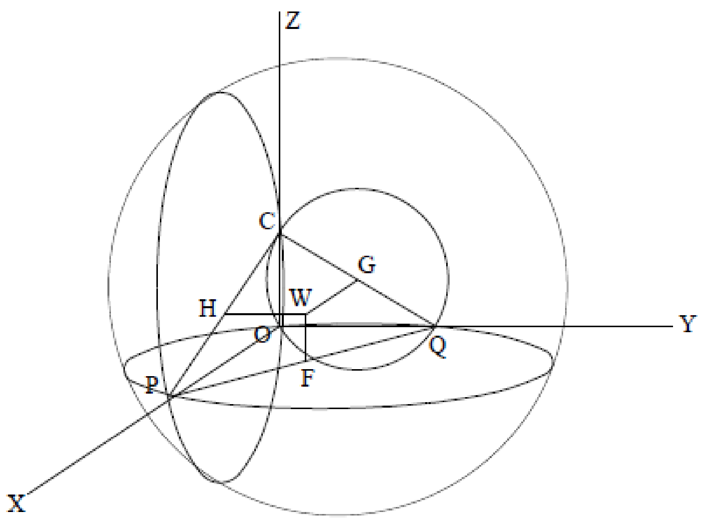
Por tanto, uniendo los resultados de ambos razonamientos, demostramos lo que se quería, es decir, hemos probado que

$$\frac{AB}{PC''} = \frac{AC}{PA''} = \frac{CB}{PB''}.$$

□

Ejercicio. 4.5. (Madrid, 1994, Ver 30 en las Referencias Web)
Sea $OXYZ$ un triedro trirectángulo de vértice O y aristas X, Y, Z. Sobre la arista Z se toma un punto fijo C, tal que $OC = c$. Sobre X e Y se toman respectivamente dos puntos variables P y Q de modo que la suma $OP + OQ$ sea una constante dada k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos O, C, P, Q están en una esfera, cuyo centro W se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

SOLUCIÓN. Sean tres circunferencias resultantes de intersecar la esfera con los planos coordenados. Las proyecciones del centro W de la esfera sobre estos planos coinciden con los centros de estas circunferencias (denotados F, G y H) y al ser el triedro trirectángulo, F, G y H están en los puntos medios de los segmentos PQ, QC y CP que son diámetros de sus circunferencias.



Parametrizando con la distancia $OP = \lambda$ y teniendo en cuenta que $OP + OQ = k$ y $OC = c$, tenemos con respecto a $OXYZ$ la siguientes coordenadas:

$$P(\lambda, 0, 0); Q(0, k - \lambda, 0); C(0, 0, c);$$

$$F\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},0\right);G\left(0,\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right);H\left(\frac{\lambda}{2},0,\frac{c}{2}\right);W\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right)$$

Por tanto, el lugar geométrico de F es la recta $x+y=\frac{\lambda}{2}+\frac{k-\lambda}{2}=\frac{k}{2}$ del plano XOY.

Estudiamos ahora el caso del punto W.

A partir de los datos que se tienen, podemos obtener la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} x & \frac{1}{2} \\ 2y-k & -1 \\ z & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Para que tenga rango 1, se debe cumplir:

$$\begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} \\ 2y-k & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-y+\frac{k}{2}=0 \Rightarrow x+y=\frac{k}{2},$$

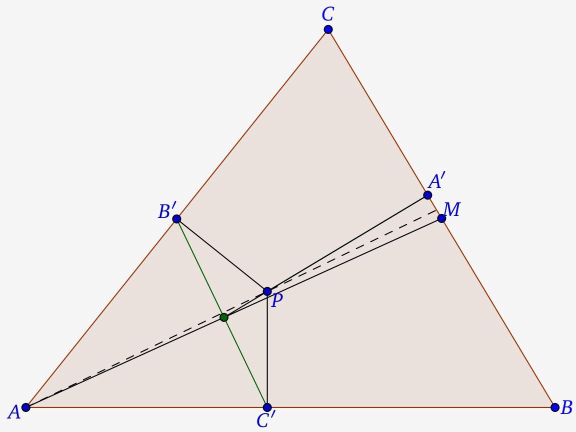
$$\begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} \\ z-\frac{c}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{z}{2}+\frac{c}{4}=0 \Rightarrow z=\frac{c}{2}.$$

Por tanto, el lugar geométrico de W es la intersección de los planos:

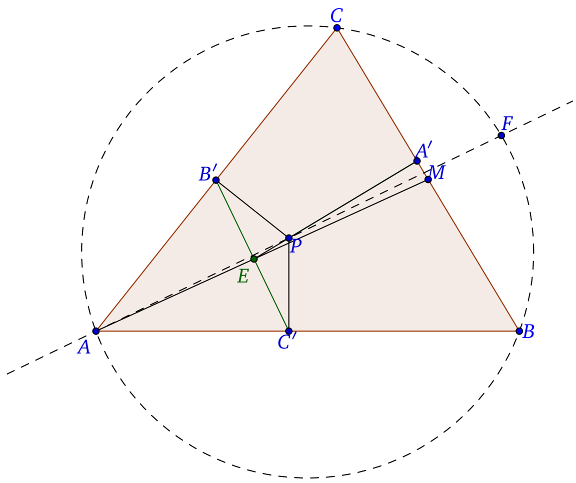
$$\begin{cases} x+y=\frac{k}{2} \\ z \quad\;\; =\frac{c}{2} \end{cases}$$

$\square$

Ejercicio. 4.6. (Valladolid, 2010, Ver 30 en las Referencias Web)
Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC, y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB, tales que PA' es perpendicular a BC, PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB. Demuestra que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM, siendo M el punto medio de BC.

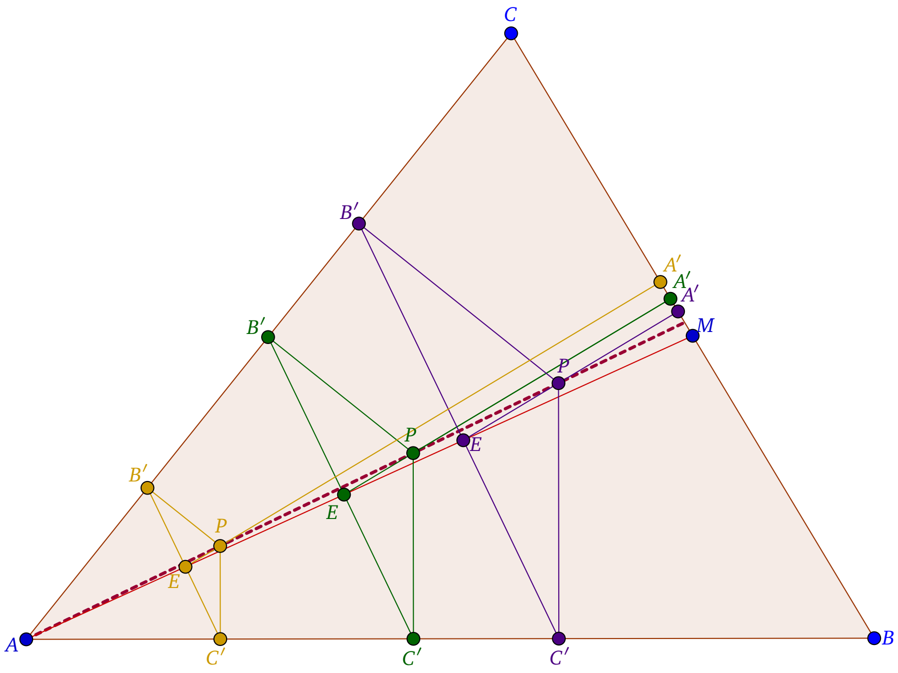


SOLUCIÓN. Sea E el punto de intersección de PA' y $B'C'$. Demostrar que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM cuando P se mueve sobre la bisectriz AI (I en el incentro) equivale a demostrar que el lugar geométrico de E cuando P se mueve sobre AI es la mediana AM.



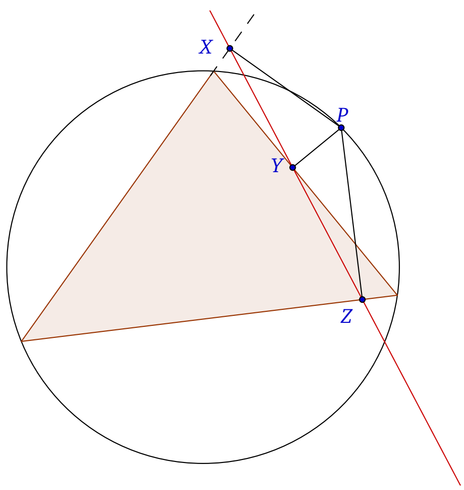
Si P se mueve sobre la bisectriz AI (I es el incentro), la figura $PB'C'E$ es homotética de sí misma con respecto al punto A. Luego E describe una recta que pasa por A. La bisectriz AI corta a la circunferencia circunscrita a ABC en F, que se proyecta en el punto medio M de BC.

Si $P = F$, la recta $B'C'$ es la recta de Simson[7] de F. Luego el lugar geométrico de E es la mediana AM.



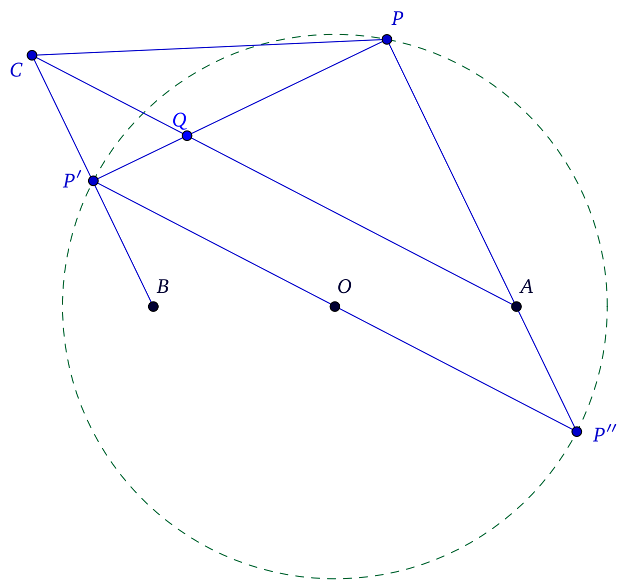
□

[7]Una **recta de Simson** en un triángulo es cualquier recta que une los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo, trazadas desde un punto de la circunferencia circunscrita.



Ejercicio. 4.7. (Girona, 2009, Ver 30 en las Referencias Web)
En el interior de una circunferencia de centro O y radio r se toman dos puntos A y B, simétricos respecto de O. Se considera un punto variable P sobre esta circunferencia y se traza la cuerda PP', perpendicular a AP. Sea C el punto simétrico de B respecto de PP'. Halla el lugar geométrico del punto Q, intersección de PP' con AC, al variar P sobre la circunferencia.

SOLUCIÓN. **Primera solución:**



Tomamos $r = 1$ y unos ejes de coordenadas en los que la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2 = 1$, es decir, con centro $(0,0)$, y las coordenadas de $A(a,0)$, $B(-a,0)$, con $0 < a < 1$.
Sea $P'(x_0, y_0)$ punto de la circunferencia, entonces ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$. Por las condiciones del problema (C simétrico a B), P' es el punto medio de BC.
Llamando (x_1, y_1) a las coordenadas de C, se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 + a, \\ y_1 &= 2y_0. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la recta[8] CA es

$$\frac{x-a}{2x_0+a-a} = \frac{y-0}{2y_0-0} \Rightarrow x_0y - y_0x + y_0a = 0.$$

[8] Sea r una recta que pasa por dos puntos, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Su ecuación se obtiene:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

La pendiente[9] de $P'B$ es $\dfrac{y_0}{x_0+a}$ y la de $P'P$ es $-\dfrac{x_0+a}{y_0}$, ya que las rectas $P'P$ y $P'B$ forman un ángulo recto, entonces la pendiente de $P'P$ es $-\dfrac{1}{m}$ siendo m la pendiente de $P'B$.
Ahora obtenemos la ecuación de $P'P$.
Sea $y = mx+b$ la ecuación general de una recta donde m es su pendiente. En nuestro caso, tomamos el punto $P'(x_0, y_0)$ y la pendiente es $-\dfrac{x_0+a}{y_0}$.
Calculamos b:

$$y_0 = -\frac{x_0+a}{y_0}x_0 + b \Rightarrow b = y_0 + \frac{x_0+a}{y_0}x_0.$$

Una vez obtenido b, sustituimos en la ecuación general:

$$y = -\frac{x_0+a}{y_0}x + y_0 + \frac{x_0+a}{y_0}x_0 \Leftrightarrow y_0 y = -(x_0+a)x + {y_0}^2 + {x_0}^2 + x_0 a$$
$$\overset{{x_0}^2+{y_0}^2=1}{\Leftrightarrow} \quad y_0 y = -(x_0+a)x + 1 + x_0 a \Leftrightarrow y_0 y + (x_0+a)x - x_0 a - 1 = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 y - y_0 x + y_0 a & = 0 \\ y_0 y + (x_0+a)x - x_0 a - 1 & = 0 \end{cases}$$

obtenemos las coordenadas del punto Q, intersección de AC y $P'P$:

$$Q\left(\frac{x_0+a}{1+x_0 a}, \frac{y_0(1-a^2)}{1+x_0 a}\right).$$

Denotando por x, y a las coordenadas de Q y despejando los valores de x_0 e y_0 se obtiene

$$x_0 = \frac{a-x}{ax-1}, \; y_0 = \frac{-y}{ax-1}.$$

Imponiendo ahora la condición ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$, se llega a

$$\frac{(a-x)^2}{(ax-1)^2} + \frac{y^2}{(ax-1)^2} = 1,$$

y mediante operaciones se transforma en la ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{1-a^2} = 1$, que es la ecuación de una elipse.

[9] Pendiente de una recta dados dos puntos, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Segunda solución:

Demostramos primero que dados dos puntos A, B del plano, el conjunto de los puntos P (del mismo plano) tales que $PA^2 + PB^2$ es constante y mayor o igual que AB^2, es una circunferencia de centro el punto medio de AB y que tiene a los puntos A y B en su interior.

Supongamos $A = (d, 0)$, $B = (-d, 0)$ y sea $P = (x, y)$ cualquier punto. Se tiene entonces

$$PA^2 + PB^2 = (x-d)^2 + (x+d)^2 + (y-0)^2 + (y-0)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2d^2.$$

Así que si por hipótesis $PA^2 + PB^2 = k \geq AB^2 = (d-(-d))^2 = 4d^2$, se tiene que $2x^2 + 2y^2 + 2d^2 = k \geq 4d^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - d^2 \geq d^2$.

Sea R el punto donde BC corta a PP' (que es perpendicular a BC). Aplicando el Teorema de Pitógoras, vemos que el punto R satisface

$$PR^2 = BP^2 - BR^2 = AR^2 - AP^2,$$

luego R está en la circunferencia y es distinto de P, con lo que $R = P'$.

Ahora bien, se tiene

$$AP \cdot BP' = \frac{AP^2 + BP'^2 - (AP - BP')^2}{2} = \frac{k - PP'^2 - (AP - BP')^2}{2} = \frac{k - AB^2}{2},$$

donde $k = AP^2 + BP^2 = AP'^2 + BP'^2$.

Además, la potencia de A respecto de la circunferencia es

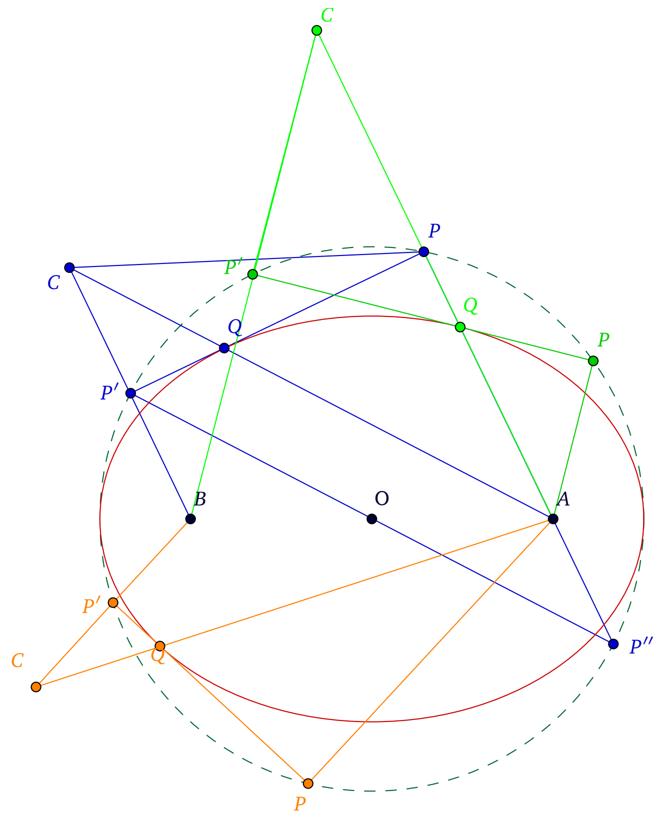
$$r^2 - d^2 = \frac{k}{2} - 2d^2 = \frac{k - AB^2}{2},$$

con lo que el segundo punto S en el que AP corta a la circunferencia es tal que $AS = BP' = CP'$. Como $CP' \perp PP' \perp AP$ se tiene que AS es paralelo a CP' y $ASP'C$ es un paralelogramo.

Finalmente,

$$PP'^2 + PS^2 = AP'^2 + AS^2 + 2 \cdot AS \cdot AP = AP'^2 + BP'^2 + k - AB^2 = 2k - 4d^2 = 4r^2,$$

es decir, $P'S = AC = 2r$. Como $AQ + BQ = AC = 2r$, el lugar de Q es la elipse interiormente tangente a la circunferencia dada, con A y B como focos.

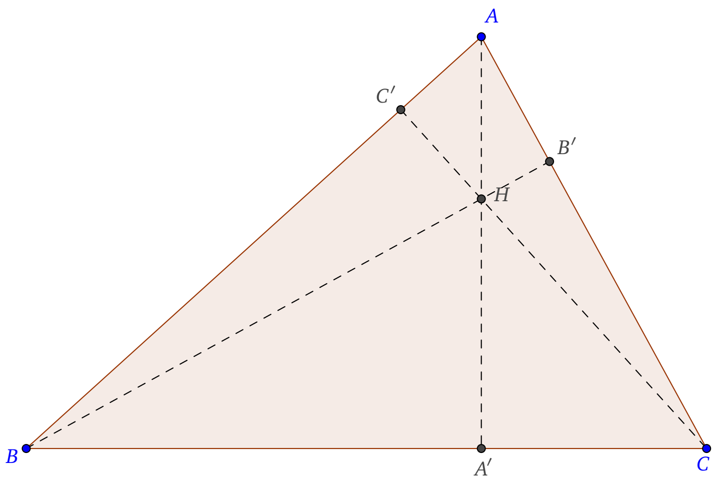

C
P
C
P'
Q
Q
P
P'
B
O
A
P'
Q
C
P''
P

□

Ejercicio. 4.8. (La Rioja, 2002, Ver 30 en las Referencias Web)
En un triángulo ABC, A' es el pie de la altura relativa al vértice A y H el ortocentro.

(a) Dado un número real positivo k tal que $\dfrac{AA'}{HA'} = k$, encontrar la relación entre los ángulos B y C en función de k.
(b) Si B y C son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice A para cada valor de k.

SOLUCIÓN.



Tenemos:

$$BA' = c\cos B;\ AA' = c\,\mathrm{sen}\,B,$$

$$\tan HBA' = \frac{HA'}{BA'} = \frac{HA'}{c\cos B} = \frac{\frac{AA'}{k}}{c\cos B} = \frac{\frac{AA'}{c}}{k\cos B} = \frac{\mathrm{sen}\,B}{k\cos B} = \frac{1}{k}\tan B.$$

También tenemos que $\tan B = \dfrac{1}{\tan HCA'}$ y por tanto, $\tan C = \dfrac{1}{\tan HBA'}$. Entonces,

$$\tan HBA' = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{k}\tan B \Rightarrow k = \tan B \cdot \tan C. \tag{III.12}$$

Para el segundo apartado, tomamos $a = BC$, unos ejes con origen en el punto medio de BC y eje OX sobre el lado BC.
Por tanto, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ y $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Sea $A(x,y)$, entonces la condición (III.12) se escribe:

$$\frac{y}{\frac{a}{2}-x}\cdot\frac{y}{\frac{a}{2}+x}=k \Leftrightarrow y^2=k\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right).$$

Entonces,

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{ka^2}{4}}=1,$$

es la ecuación de una elipse.

Para la ecuación general de la elipse, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, podemos distinguir dos casos:

(1) $a>b \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$.

La semidistancia focal es c y el semieje mayor es a.

En este caso se trata de una elipse horizontal.

(2) $a<b \Rightarrow b^2=a^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{b^2-a^2}$.

La semidistancia focal es c y el semieje mayor es b.

En este caso se trata de una elipse vertical.

En nuestro caso concreto tenemos:

- Si $k<1$, estamos en el primer caso, entonces tenemos una elipse horizontal con eje mayor sobre OX.

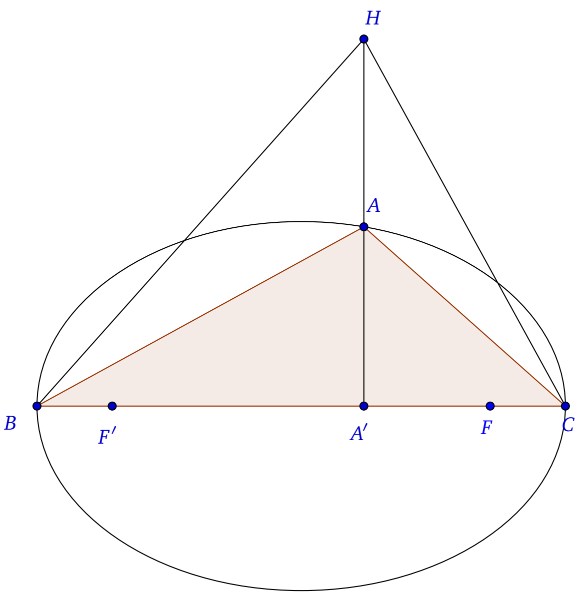
$$c=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{ka^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{1-k},$$

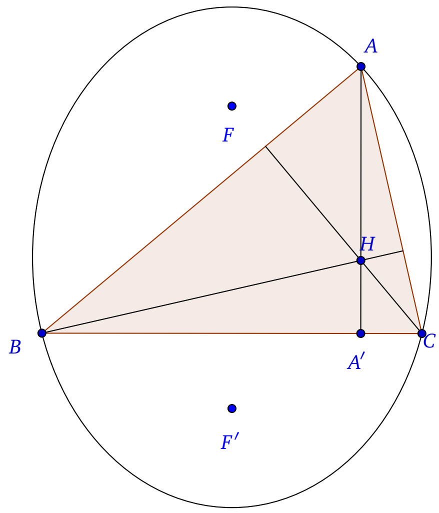
siendo c la semidistancia focal y semieje mayor $\frac{a}{2}$.

- Si $k>1$, estamos en el segundo caso, entonces tenemos una elipse vertical con eje mayor sobre OY,

$$c=\sqrt{\frac{ka^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{k-1},$$

siendo c la semidistancia focal y semieje mayor $\frac{a}{2}\sqrt{k}$.

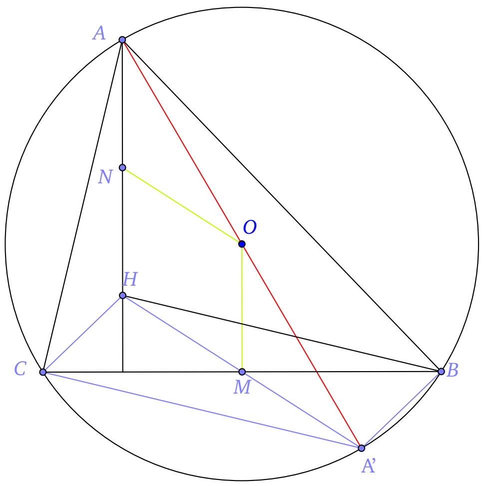


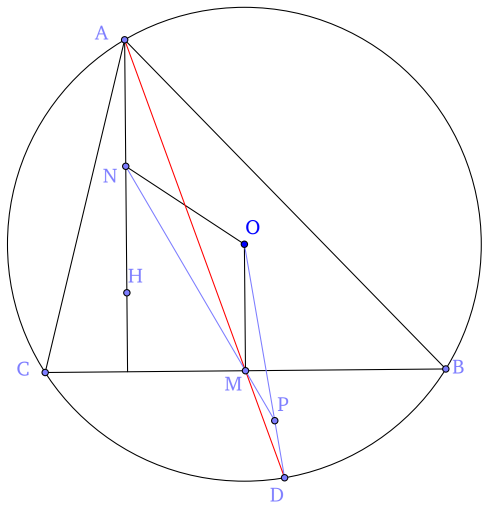


□

Ejercicio. 4.9. (Requena, 2014, Ver 30 en las Referencias Web)
Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia de centro O, que no sean diametralmente opuestos. Sea A un punto variable sobre la circunferencia, distinto de B y C, y que no pertenece a la mediatriz de BC. Sean H, el ortocentro del triángulo ABC; y M y N los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La recta AM corta de nuevo a la circunferencia en D, y, finalmente, NM y OD se cortan en un punto P. Determinar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

SOLUCIÓN. Consideramos el caso en el que $\triangle ABC$ es acutángulo. En primer lugar, denotaremos por A' el punto diametralmente opuesto a A con lo que los triángulos ACA' y ABA' son rectángulos. Los segmentos HB y CA' son paralelos por ser perpendiculares a AC. Igualmente, HC y BA' también son paralelos por ser perpendiculares a AB.





Entonces, $CHBA'$ es un paralelogramo y, por tanto, M es el punto medio de HA'. Los triángulos $AA'H$ y $OA'M$ son semejantes con razón de semejanza conocida. Es decir, tenemos que

$$\frac{OM}{AH} = \frac{MA'}{HA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{AH}{2} = AN = NH.$$

Luego $OMHN$ es otro paralelogramo.

Sea D la intersección de AM con la circunferencia y sea P el punto de corte de OD con NM. Puesto que $\triangle AOD$ es isósceles, entonces $\angle OAD = \angle ODA$. Como OM y AN son paralelos, pues ambos son perpendiculares al lado BC, además de iguales, entonces $AOMN$ es también un paralelogramo. Y, de aquí, tenemos que $\angle OAM = \angle AMN = \angle PMD$ por ser opuesto por el vértice.

Sintetizando, tenemos que

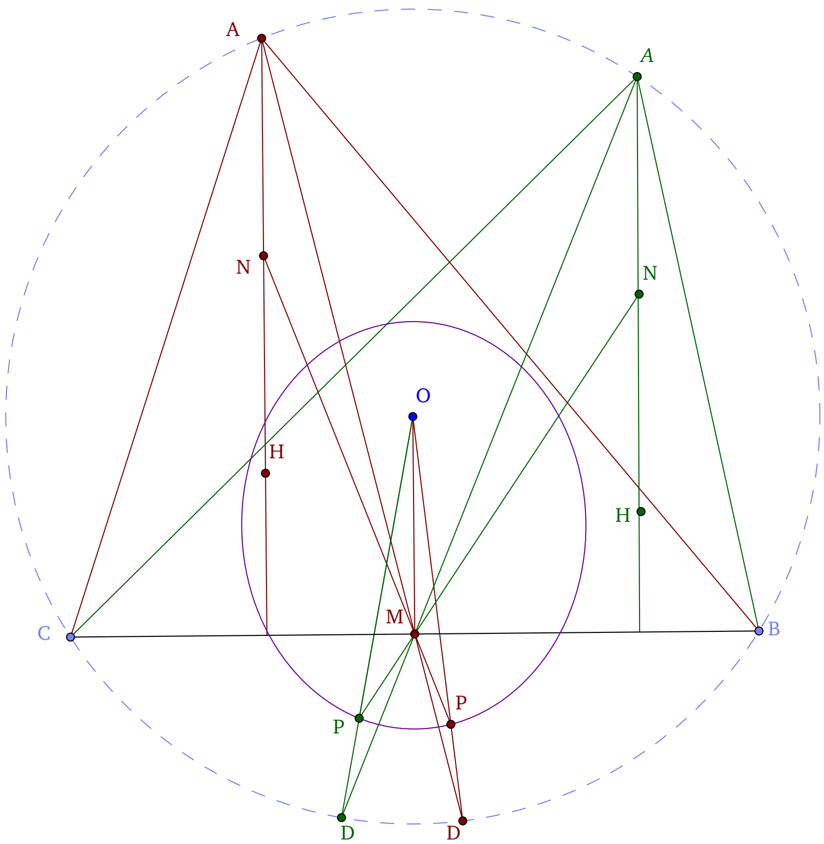
$$\angle PMD = \angle OAM = \angle OAD = \angle ODA = \angle PDM,$$

con lo que $\triangle PDM$ es isósceles y, por tanto, $PM = PD$.

Finalmente, tenemos que

$$OP + PM = OP + PD = OD = r = \text{Cte}.$$

Es decir, con A variable, el punto P se mueve sobre una elipse incompleta con focos en O y M, y eje mayor el radio de la circunferencia. En esta elipse hay que descartar los cuatro vértices. En efecto, si el punto P estuviese sobre el eje mayor de la elipse, tambien estaría D y por tanto A, lo cual está excluido del enunciado ya que en este caso AD y NM son coincidentes. Si el punto P fuese uno de los vértices del eje menor de la elipse, tendríamos $OP = PM = \frac{r}{2}$. Como $OD = r$, entonces $PD = \frac{r}{2}$. Supongamos que P está del lado de B, entonces la paralela a BM por el punto medio de OB es el eje menor de la elipse, con lo que el punto medio de OB es precisamente P y D coincide con B, lo que implicará que A coincide con C, lo cual está excluido del enunciado ya que ABC sería degenerado. El resto de puntos de la elipse se pueden obtener cuando A es distinto de B y C y no está en la mediatriz de BC.


A
A
N
N
O
H
H
M
C
B
P
P
D
D

□

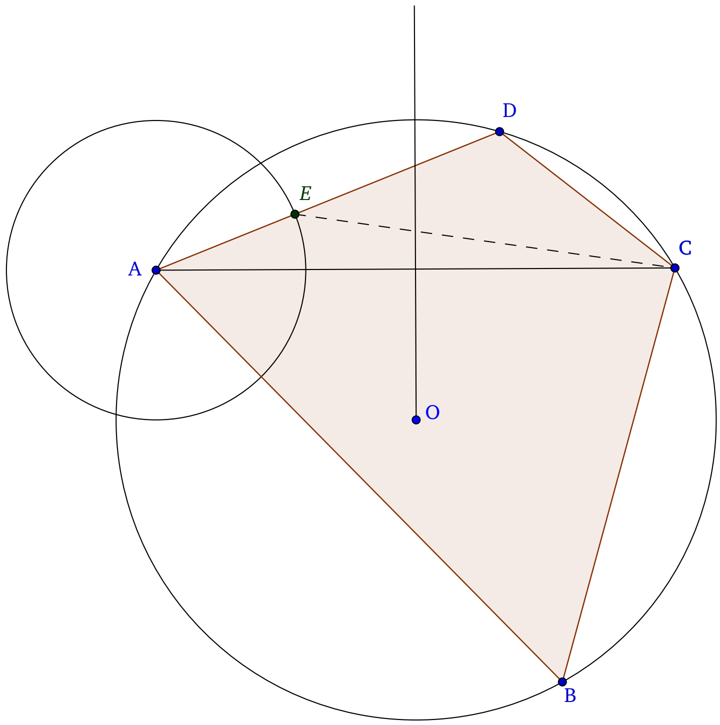
5. Problemas de Olimpiadas. Fase Internacional

Ejercicio. 5.1. (Checoslovaquia,1962, [1, Enunciado, solución: páginas 26, 29, Ejercicio 4.5]) *Sean A, B, C puntos distintos de una circunferencia K. Dibujar con regla y compás un cuarto punto D en la circunferencia K tal que una circunferencia se puede inscribir en el cuadrilátero $ABCD$.*

SOLUCIÓN. Sea $AB \geq BC$ y D el cuarto punto que se necesita. El punto D pertenece al arco AC, que no contiene B. A partir de la condición $AB + CD = AD + BC$ (1.6.) se deduce que

$$AB - BC = AD - CD \geq 0. \tag{III.13}$$

Entonces, el punto D pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y B y D se encuentran en el mismo lado de la línea bisectriz del segmento AC.



Sea E un punto del segmento AD tal que $DE = DC$. Entonces EDC es un triángulo isósceles cuyo ángulo en E es: $\angle DEC = \dfrac{\pi - \hat{D}}{2} \overset{Prop.\ (1.5.)}{=} \dfrac{\angle ABC}{2}$.

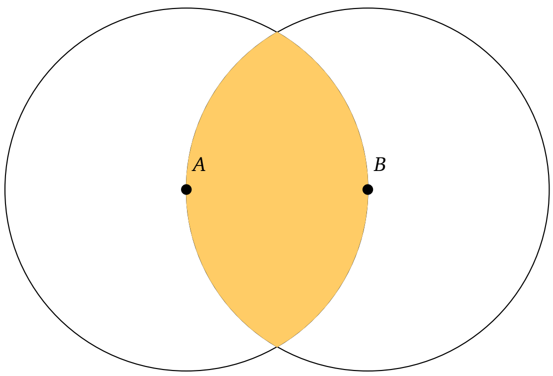
Resulta que $\angle AEC = \pi - \dfrac{\angle ABC}{2}$, ya que los ángulos AEC y DEC son adyacentes[10], y por tanto suplementarios.

[10]Dos ańgulos son adyacentes si tienen un lado en común y los otros dos están en la misma recta.

Obtenemos que E es el punto de intersección de la circunferencia de radio $r = AB - BC$[11] y centro A, y la circunferencia que pasa por los puntos A, C, que define el ángulo $\angle AEC = \pi - \frac{\hat{B}}{2}$. Se obtiene de esta manera el punto E. Y a partir de esto, se obtiene obviamente el punto D buscado. □

Ejercicio. 5.2. (Alemania del Este, 1965, [1, Enunciado, solución: páginas 45, 49, Ejercicio 7.6])
Sea n puntos en un plano, $n \geq 3$, y d la distancia máxima entre dos puntos de este conjunto. Demostrar que a lo sumo n parejas de puntos están situados a una distancia d.

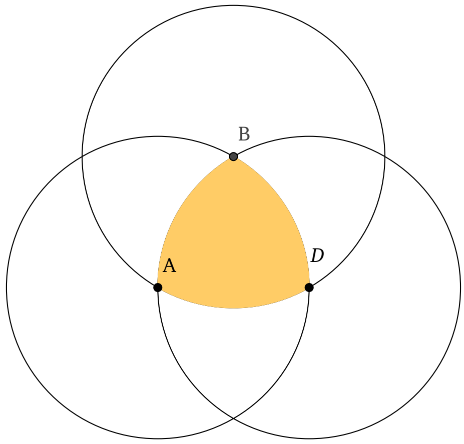
SOLUCIÓN. Sea M el conjunto de puntos dados. Llamamos diámetro de M al segmento XY de longitud d, donde $X, Y \in M$. Para cualquier punto $X \in M$, $\mathcal{C}(X)$ es el disco circular de centro X y radio d. Si AB es un diámetro de M, entonces cualquier punto $X \in M$ es un punto interior del dominio $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ o es un punto de los arcos que definen esto.



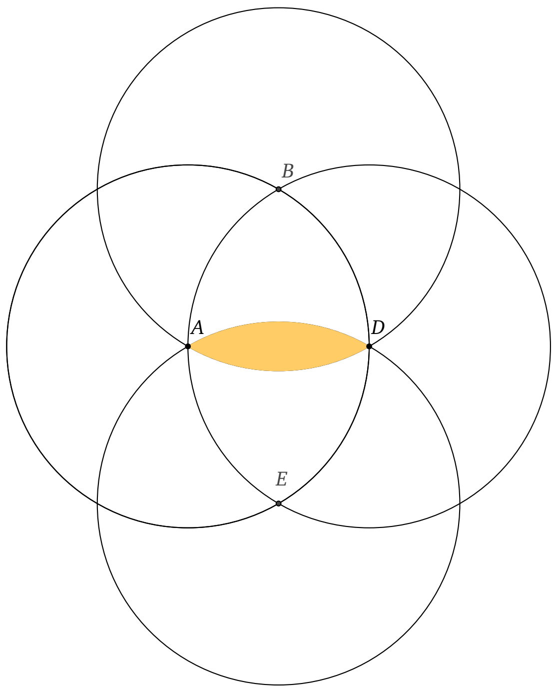
Si AB, AD son diámetros del conjunto M, cualquier punto X es un punto interior del dominio $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}(C)$ o un punto de los arcos que lo definen.

11

$$AD = DE + EA \Rightarrow EA = AD - DE \overset{DE=DC}{\Rightarrow} EA = AD - DC \overset{(III.13)}{\Rightarrow} EA = r = AB - BC.$$



Supongamos que AB, AD, AE son diámetros del conjunto M y que B, D, E se encuentran en $\mathcal{C}(A)$, en el orden las agujas del reloj. Entonces $arc(BE) \leq 60^o$. Aplicando el argumento anterior se deduce que AD es el único diámetro que termina en D, como se ilustra en el dibujo siguiente.

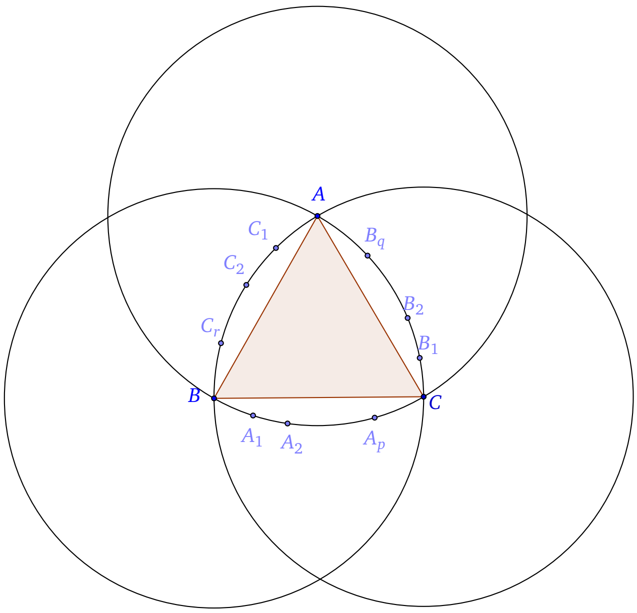


Por tanto, se deben considerar los siguientes casos:

(1) Existe un punto A, $A \in M$, de manera que al menos dos diámetros AB, AD acaban en A. El conjunto $\{A, B, D\}$ contiene a lo sumo 3 diámetros y cualquier otro punto $E \in M$ contribuye al conjunto de diámetros con un elemento, como máximo.

(2) Cada punto A, $A \in M$, es un punto final de como máximo un diámetro. Si quitamos el punto D del diámetro AD te siguen quedando todos los puntos de dentro del dominio, pero estos no se encuentran a distancia d de A.

El siguiente ejemplo muestra un conjunto M para el que el máximo n es conocido.
Tomamos un triángulo equilátero ABC de lados d y describimos tres circunferencias iguales de radio d y centros en A, B, C. Tomamos en los arcos AB, BC, AC diferentes puntos en el orden de $n-3$.



□

Ejercicio. 5.3. (Rumanía, 1969, [1, Enunciado, solución: páginas 70, 74, Ejercicio 11.4])
Sea AB el diámetro de la semicircunferencia Γ y sea C un punto de Γ, C diferente de A y B. La proyección perpendicular de C en el diámetro es D. Las circunferencias $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ se dibujan de la siguiente manera: son tangentes a AB, Γ_1 está inscrita en el triángulo ABC y Γ_2, Γ_3 son ambas tangentes al segmento CD y Γ. Demostrar que las circunferencias $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, tienen una segunda tangente común.

SOLUCIÓN. Usaremos coordenadas para demostrar este problema.
Sea O el centro de Γ y supongamos que OB es el eje OX. Podemos considerar que:

- El radio de Γ es 1.
- Las coordenadas de C son $C(a, b)$.

  Esto es, $OD = a$, $CD = b$ y $a^2 + b^2 = 1$ (I.2).

Sean O_1, O_2, O_3 los centros de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ respectivamente. Las circunferencias $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tienen una segunda tangente común si y sólo si O_1, O_2, O_3 son puntos colineales, ver página 16, y en este caso la recta tangente requerida es el reflejo de AB en la recta O_1O_3.

Sean r_1, r_2, r_3 los radios de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ respectivamente, T_2, T_3 los puntos de tangencia de Γ y Γ_2, Γ_3 respectivamente y S_1, S_2, S_3 las proyecciones de O_1, O_2, O_3 en AB, respectivamente.

El centro O_2 tiene coordenadas $x_2 = a + r_2$, $y_2 = r_2$ donde r_2 se puede obtener usando la condición $OO_2 + O_2T_2 = OT_2 \overset{r_{\Gamma=1}}{=} 1$.

$$OO_2{}^2 \overset{\text{T. Pitágoras}}{=} r_2{}^2 + (a + r_2)^2 \Rightarrow OO_2 = \sqrt{r_2{}^2 + (a + r_2)^2},$$

$$O_2T_2 = r_2.$$

Entonces,

$$\sqrt{(a + r_2)^2 + r_2^2} + r_2 = 1 \Rightarrow r_2 = -(a + 1) + \sqrt{2(1 + a)}.$$

Otra forma de obtener el valor de r_2 sin utilizar la condición anterior, sería aplicando un corolario del Teorema de Pitágoras[12].

$$1 - r_2 = \sqrt{(a + r_2)^2 + r_2^2} \Rightarrow \sqrt{(a + r_2)^2 + r_2^2} + r_2 = 1 \Rightarrow r_2 = -(a + 1) + \sqrt{2(1 + a)}.$$

El centro O_3 tiene coordenadas $x_3 = a - r_3$, $y_3 = r_3$ donde r_3 se puede obtener usando la condición $OO_3 + O_3T_3 = OT_3 = 1$.

$$OO_3{}^2 \overset{\text{T. Pitágoras}}{=} r_3{}^2 + (a - r_3)^2 \Rightarrow OO_3 = \sqrt{r_3{}^2 + (a - r_3)^2},$$

$$O_3T_3 = r_3.$$

Entonces,

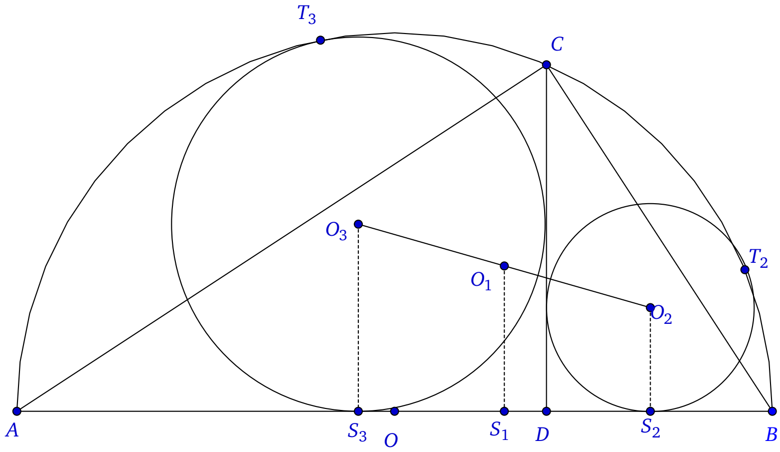
$$\sqrt{(a - r_3)^2 + r_3^2} + r_3 = 1 \Rightarrow r_3 = -(1 - a) + \sqrt{2(1 - a)}.$$

[12] Del **Teorema de Pitágoras** se deduce una serie de corolarios, siendo de ayuda uno de ellos en este ejercicio, el cual establece que:

$$h = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2},$$

siendo h la hipotenusa de un triángulo rectángulo y c_1, c_2 sus respectivos catetos.

En este caso, tomamos OS_2O_2 triángulo rectángulo, $h = 1 - r_2, c_1 = a + r_2$ y $c_2 = r_2$



El centro O_1 tiene coordenadas $x_1 = 1 - BS_1$, $y_1 = r_1$.

Sea S el área y p el semiperímetro de ΔABC. Luego $S = \dfrac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow S = \dfrac{(1+1)b}{2} \Rightarrow S = b = \sqrt{1-a^2}$ [13].

Los lados AC, BC se pueden obtener por el Teorema del cateto:[14]

$$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AC^2 = 2(1+a) \Rightarrow AC = \sqrt{2(1+a)},$$

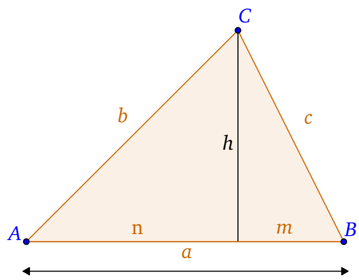
$$BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow BC^2 = 2(1-a) \Rightarrow BC = \sqrt{2(1-a)}.$$

[13]Tomando el triángulo rectángulo ODC y aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$1 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{1-a^2}.$$

[14]**Teorema del cateto** para triángulos se enuncia de la siguiente forma:

El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la hipotenusa, es decir, $b^2 = na$ y $c^2 = ma$.



Luego

$$p = \frac{2+\sqrt{2(1+a)}+\sqrt{2(1-a)}}{2} = 1+\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}.$$

Usando la fórmula $r_1 = \dfrac{S}{p}$ (ya que Γ_1 está inscrito en ΔABC), obtenemos:

$$y_1 = r_1 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}} = -1+\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}.$$

O_1 es el incentro de ABC. En el dibujo se puede observar que $p = AC + BS_1$, siendo S_1 la proyección del incentro sobre el lado AB, entonces,

$$BS_1 = p - AC = 1+\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}-\sqrt{2(1+a)} = 1-\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1+a}{2}}-\sqrt{\frac{1-a}{2}}.$$

La condición determinante de puntos colineales puede ser verificada.
Podemos probar además que: $x_1 = \dfrac{x_2+x_3}{2}$ y $y_1 = \dfrac{y_2+y_3}{2}$.
Por tanto, O_1 es el punto medio del segmente O_2O_3.
En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{x_2+x_3}{2} &= a+\frac{r_2-r_3}{2}\\ &= a+\frac{-(1+a)+\sqrt{2(1+a)}+(1-a)-\sqrt{2(1-a)}}{2}\\ &= a-a+\sqrt{\frac{1+a}{2}}-\sqrt{\frac{1-a}{2}}\\ &= x_1\end{aligned}$$

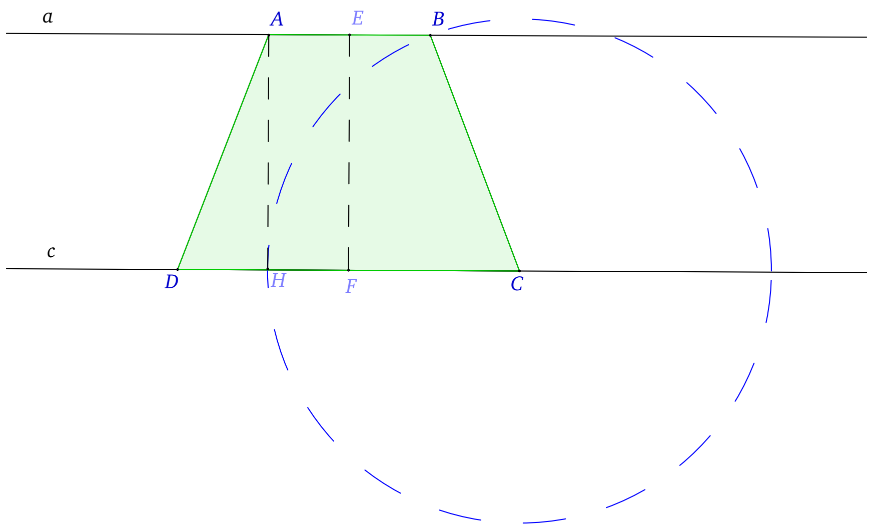
$$\begin{aligned}\frac{y_2+y_3}{2} &= \frac{r_2+r_3}{2}\\ &= \frac{-(1+a)+\sqrt{2(1+a)}-(1-a)+\sqrt{2(1-a)}}{2}\\ &= -1+\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\\ &= r_1\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 5.4. (Rumanía, 1959, [1, Enunciado, solución: páginas 8, 11, Ejercicio 1.6])
Sean P y Q planos que se cortan a lo largo de una recta p. Los puntos A, C se encuentran en P, Q, respectivamente, pero no en la recta p. Encontrar el punto B en P y D en Q tal que $ABCD$ es un trapecio isósceles ($AB \parallel CD$) en el que una circunferencia puede ser inscrita.

SOLUCIÓN. Sean a, c rectas paralelas a p en los planos P, Q, respectivamente, tal que $A \in a$ y $C \in c$. Entonces $B \in a$ y $D \in c$, ya que por hipótesis $AB \parallel CD$. El trapecio $ABCD$ se encuentra en el plano definido por las rectas a y c.
Una circunferencia está inscrita en $ABCD$ (Mira el Teorema (1.6.).) si y sólo si:

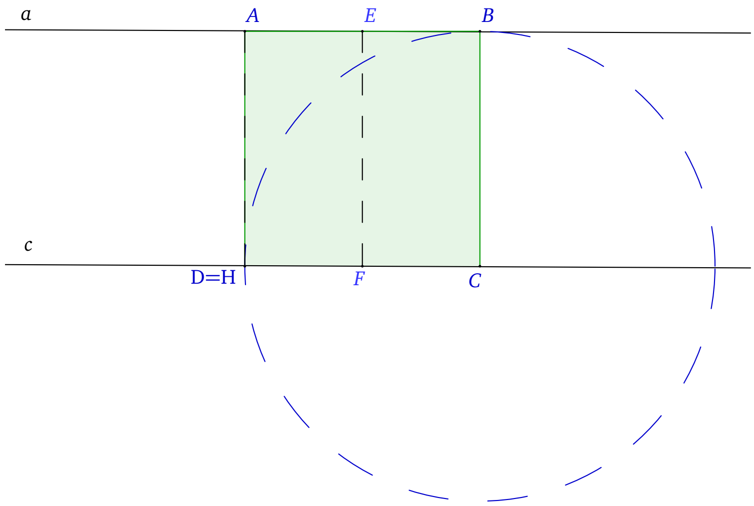
$$AB + CD = BC + AD \overset{BC=AD}{=} 2AD \overset{despejando}{\iff} \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = AD = BC. \tag{III.14}$$



Sea H la proyección de A en c y sea EF la bisectriz perpendicular a los segmentos AB y CD. La condición anterior es equivalente a:

$$\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = AE + CF = CH \overset{(III.14)}{=} AD = BC.$$

Por lo tanto, los puntos B y D se pueden dibujar con compás, considerando la circunferencia de centro C y radio CH.
Una solución del problema existe si y sólo si $CB > EF$. Equivalente, $CH > AH$, o $\angle ADH \leq 45°$.
Cuando ocurre la igualdad $\angle ADH = 45°$, el trapecio pasa a ser un cuadrado.



∎

Ejercicio. 5.5. (Rumanía, 1959, [1, Enunciado, solución: páginas 7, 9, Ejercicio 1.5])
Sea AB un segmento dado y M un punto del segmento. Sean $AMCD$ y $MBEF$ cuadrados tomados en el segmento AB. Las circunferencias circunscritas de estos cuadrados tienen centros en P y Q, respectivamente, y se cruzan entre sí en los puntos M y N.

(a) Demostrar que las rectas AF y BC se cortan en el punto N.
(b) Demostrar que, para cualquier punto M, la recta MN contiene un punto fijo.
(c) Determinar el lugar geométrico del punto medio del segmento PQ cuando el punto M es variable en el segmento AB.

SOLUCIÓN. Comenzamos demostrando el primer apartado.

Sea N el punto de intersección de AF y BC. Vamos a demostrar que N se encuentra en ambas circunferencias.

Para demostrar esto, es suficiente comprobar que AN y BN son perpendiculares.

Denotamos:

$$\begin{aligned} AB &= a, \\ AM &= x, \\ \angle FAM &= \alpha, \\ \angle MBN &= \beta. \end{aligned}$$

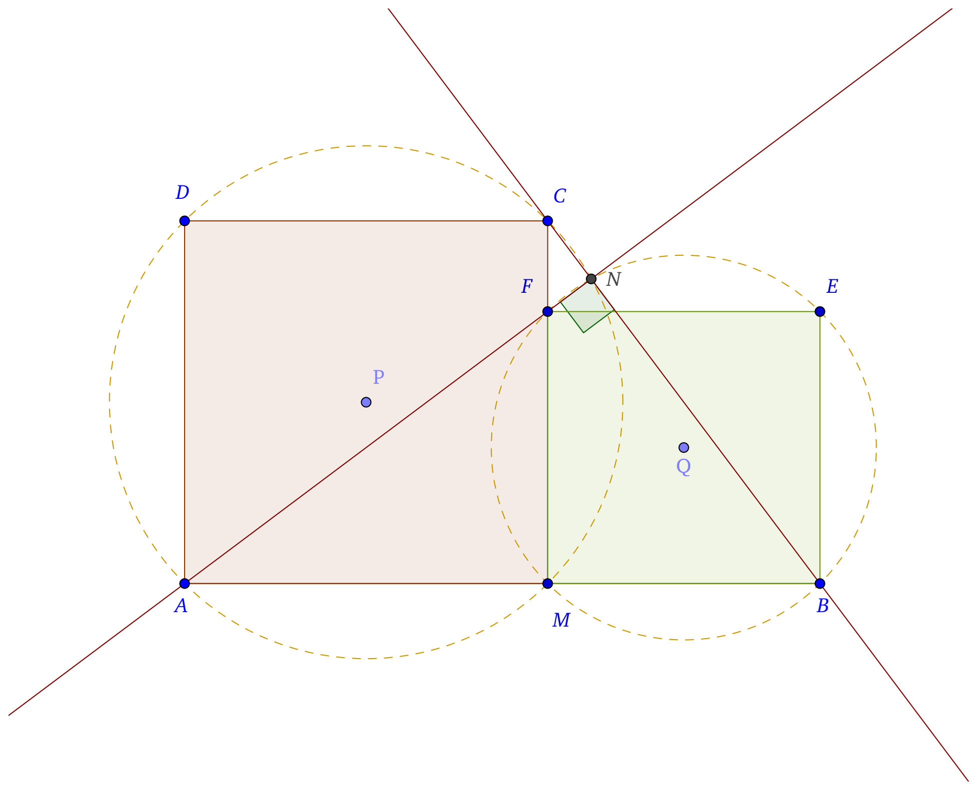
Entonces

$$MB = MF = a - x,$$

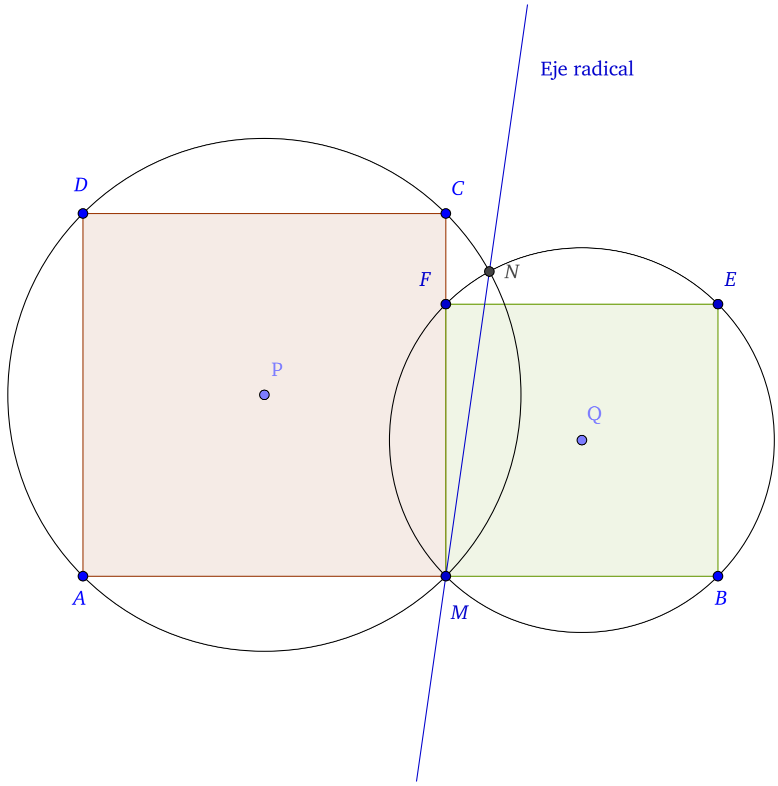
$$\tan\alpha = \frac{a-x}{x}$$

$$\tan\beta = \frac{x}{a-x}.$$

Resulta que $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$ y esto implica que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Entonces, $\angle ANB = \frac{\pi}{2}$, ya que la suma de los ángulos de un triángulo es 180^o.



Otra forma de ver que N se encuentra en ambas circunferencias es estudiando el eje radical. Como vemos en el dibujo siguiente, el eje radical de dos circunferencias secantes (como es el caso), pasa por sus dos puntos comunes, los cuales pertenecen a ambas. En este caso pasa por N y M, y por tanto ambos puntos pertenecen a las dos circunferencias.



En el segundo apartado, denotamos S como el punto medio del segmento AB.
La mediatriz del segmento AB se corta con la recta MN en el punto T. El ángulo entre las rectas MN y AB es:

$$\angle BMN = 180^o - \angle AMN = 180^o - (180^o - \angle MAN - \angle ANM) = \angle MAN + \angle ANM = \alpha + \frac{\pi}{4}.$$

Para entender esta serie de igualdades, hay que tener en cuenta una serie de propiedades:

(I) Los ángulos BMN y AMN son adyacentes[15]. Los ángulos adyacentes son suplementarios. Así tenemos que $\angle BMN + \angle AMN = 180^o \Rightarrow \angle BMN = 180^o - \angle AMN$.

(II) La suma de los ángulos de un triángulo es 180^o. De ahí, que $\angle AMN = 180^o - \angle MAN - \angle ANM$.

(III) El ángulo MAN coincide con el ángulo FAM, que por hipótesis es α.

(IV) El ángulo ANM es la mitad del ángulo ANB, que hemos calculado en el primer apartado que era $\frac{\pi}{2}$.

Tenemos que $\tan \angle SMT = \tan \angle BMN$ ya que son ángulos opuestos por el vértice.

[15] Dos ańgulos son adyacentes si tienen un lado en común y los otros dos están en la misma recta.

Entonces,

$$\tan \angle SMT = \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = \frac{\frac{a-x}{x} + 1}{1 - \frac{a-x}{x}} = \frac{a}{2x-a}.$$

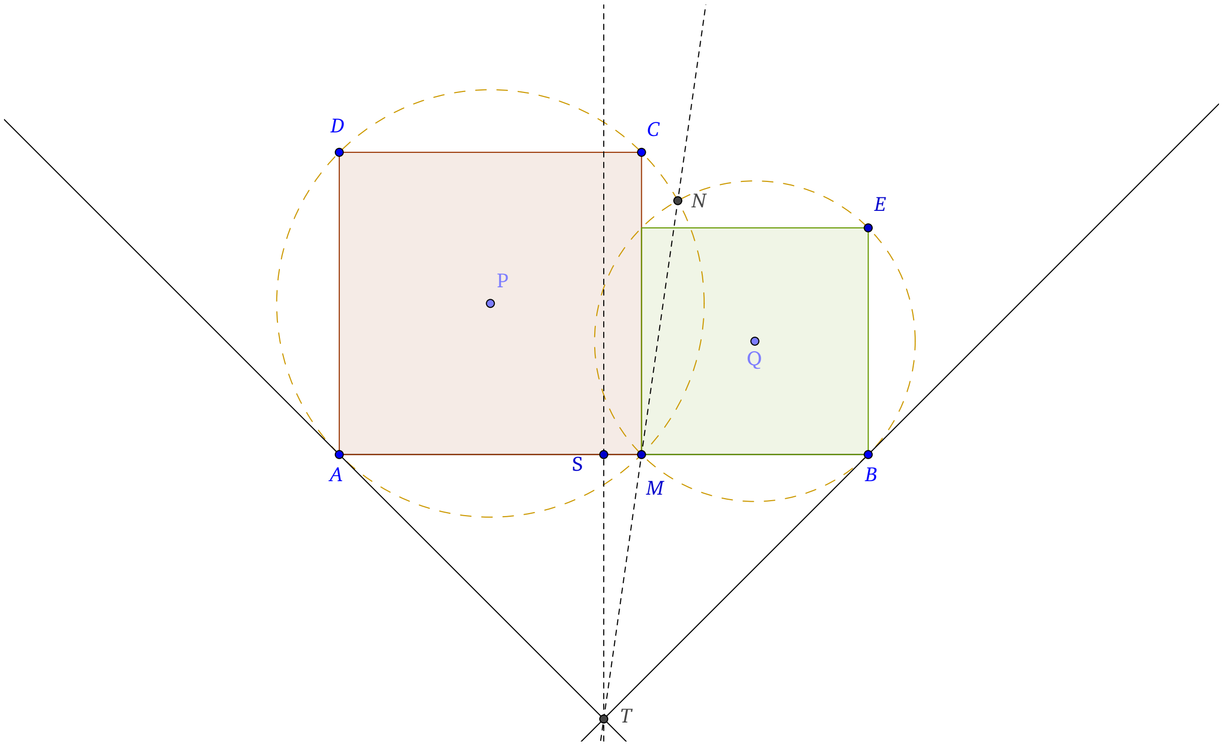
Por otro lado

$$\tan \angle SMT = \frac{ST}{SM} = \frac{ST}{AM - AS} = \frac{ST}{x - \frac{a}{2}} = \frac{2ST}{2x-a}.$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$\frac{a}{2x-a} = \frac{2ST}{2x-a} \Rightarrow a = 2ST \Rightarrow ST = \frac{a}{2}.$$

Así que llegamos $ST = \frac{a}{2}$, y por lo tanto T es un punto fijo.

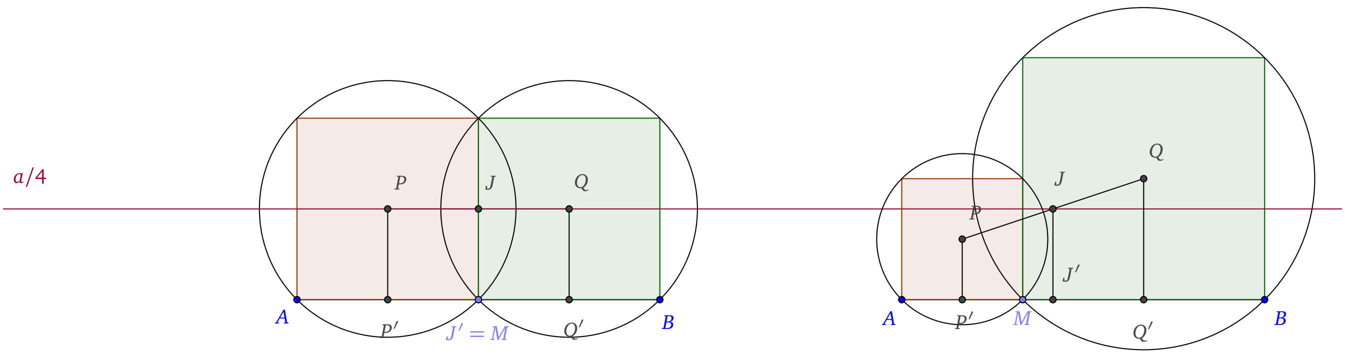


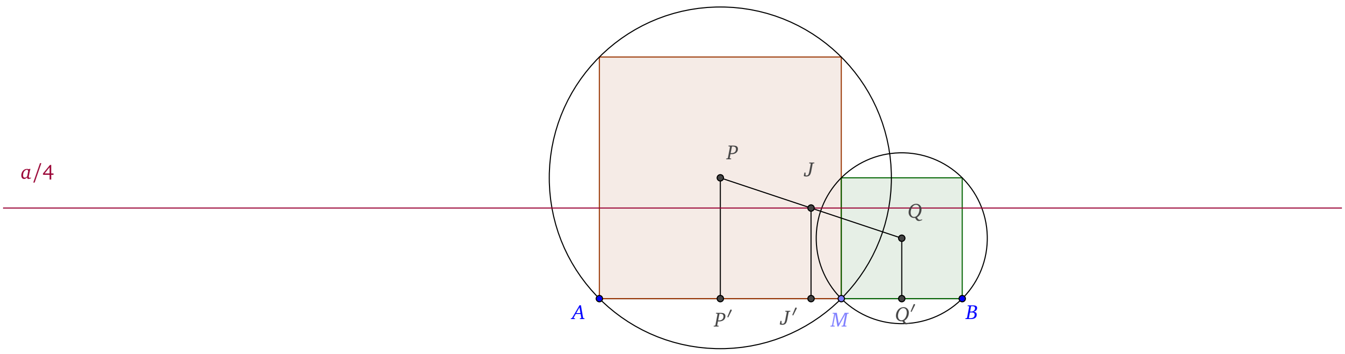
Otra forma de realizar este apartado sería aplicando el Teorema de la tangente y de la secante, para cada una de las circunferencias dadas. Tomamos una tangente en cada una de las circunferencias y la recta secante común a ambas. Aplicando el teorema, tenemos:

$$(\overline{TA})^2 = \overline{TM} \cdot \overline{TN},$$

$$(\overline{TB})^2 = \overline{TM} \cdot \overline{TN}.$$

Igualando tenemos que $\overline{TA} = \overline{TB}$, entonces el punto T tiene igual potencia respecto a ambas circunferencias y por tanto T es fijo.
El tercer apartado no depende de ninguno de los anteriores.
Sea J el punto medio del segmento PQ. Sea P', Q' y J' las proyecciones perpendiculares en AB de P, Q y J, respectivamente. Entonces es obvio que JJ' es la mediana del trapecio $PQQ'P'$.
Luego $JJ' = \dfrac{a}{4}$. Por tanto, el lugar geométrico del punto J cuando M varía en AB, es un segmento paralelo a AB a distancia $\dfrac{a}{4}$.





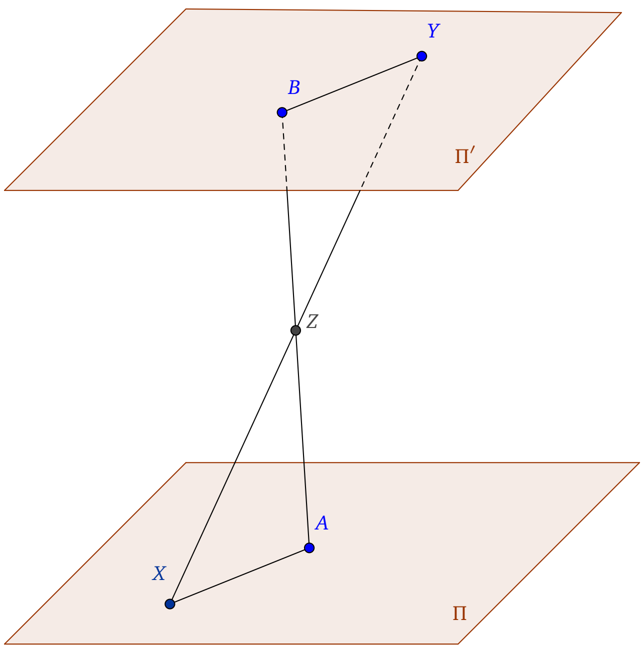
□

Ejercicio. 5.6. (Rumanía, 1960, [1, Enunciado, solución: páginas 12, 16, Ejercicio 2.5])
Sea $ABCDA'B'C'D'$ un cubo, X un punto variable del segmento AC e Y un punto variable del segmento $B'D'$.

(a) Encontrar el lugar geométrico del punto medio del segmento XY.
(b) Encontrar el lugar geométrico del punto Z, Z en el segmento XY, tal que

$$ZY = 2XZ.$$

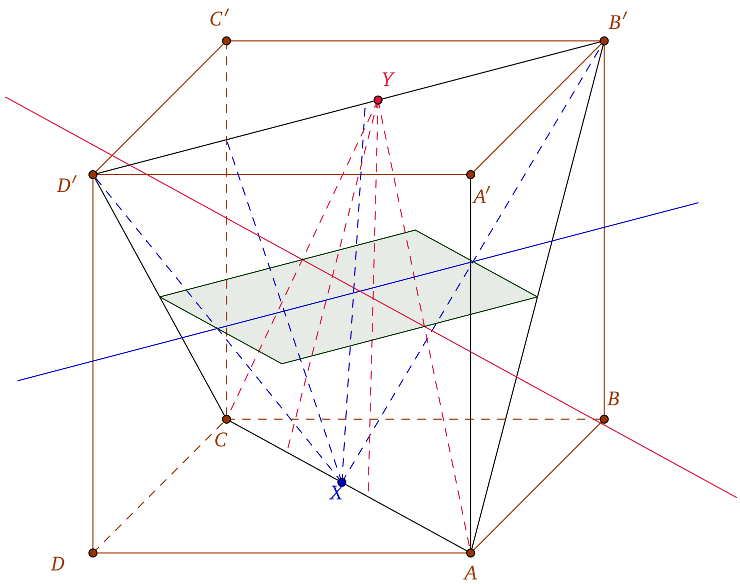
SOLUCIÓN. Consideramos el primer caso. Sea Z el punto medio del segmento XY. Es obvio que si π, π' son planos paralelos, X un punto variable en π e Y un punto variable en π', entonces el lugar geométrico del punto medio del segmento XY es un plano paralelo a la misma distancia de π y π'.



En nuestro caso, el lugar geométrico está contenido en un plano paralelo con $ABCD$ y $A'B'C'D'$ a la misma distancia, $\frac{a}{2}$, de estos planos, donde $AA' = a$.

Fijamos un punto arbitrario X en AC y sea Y un punto variable en el segmento $B'D'$. Entonces, el lugar geométrico de Z es la línea media del triángulo $D'XB'$. Tiene longitud $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cuando X se

mueve en el segmento AC, la línea media se mueve paralelamente a distancia $\frac{a}{2}$ respecto de las dos bases.
Considerando las posiciones límite, $X = A$ y $X = C$, concluimos que el lugar geométrico de Z es el cuadrado cuyos vértices están en los centros de las caras laterales del cubo. El lado del cuadrado tiene una longitud $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



También, es posible dar la solución mediante coordenadas.
Supongamos

$$\begin{array}{ll} A = (0,0,0), & A' = (0,0,1), \\ B = (1,0,0), & B' = (1,0,1), \\ C = (1,1,0), & C' = (1,1,1), \\ D = (0,1,0), & D' = (0,1,1). \end{array}$$

Entonces $X = (\alpha, \alpha, 0)$ e $Y = (\beta, 1-\beta, 1)$ donde $0 \leq \alpha,\ \beta \leq 1$.
Supongamos $\frac{ZX}{ZY} = c$, siendo c una constante real positiva. Entonces Z tiene coordenadas[16]:

$$Z\left(\frac{\alpha + c\beta}{1+c}, \frac{\alpha + c(1-\beta)}{1+c}, \frac{c}{1+c}\right).$$

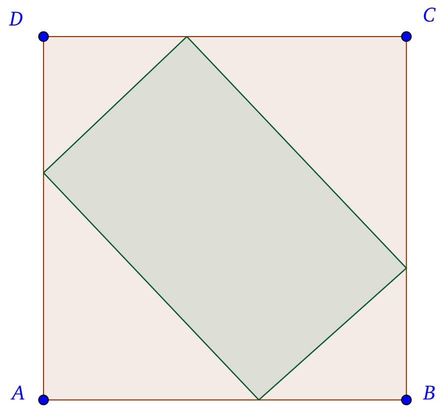
[16] Las coordenadas de un punto $P(x_p, y_p, z_p)$ que divide un segmento $\overline{AB}$ según una razón r son:

$$x_p = \frac{x_A + r x_B}{1+r}, y_p = \frac{y_A + r y_B}{1+r}, z_p = \frac{z_A + r z_B}{1+r}$$

Entonces Z pertenece al plano $z = \frac{c}{1+c}$. Para precisar el lugar geométrico de Z en este plano tenemos que estudiar el problema para el conjunto de puntos

$$M = \left\{(x,y)|x = \frac{\alpha + c\beta}{1+c}, y = \frac{\alpha + c(1-\beta)}{1+c}, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\right\}.$$

El conjunto M sería un rectángulo, como se representa en la figura siguiente:



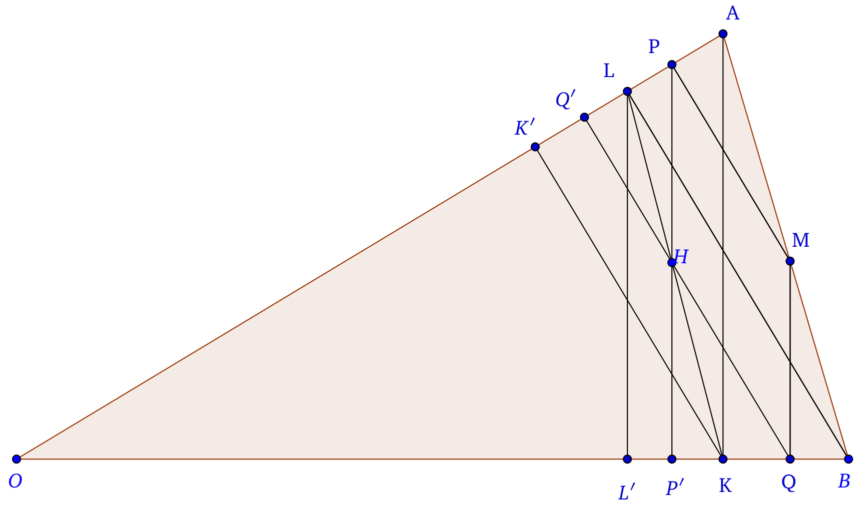
Este sería un método general, donde c toma valores según la relación entre ZX y ZY. La resolución del segundo apartado, se puede obtener siguiendo un razonamiento análogo al método anterior, solo tendríamos que tener en cuenta que $c = \frac{1}{2}$. □

Ejercicio. 5.7. (Alemania del Este, 1965, [1, Enunciado, solución: páginas 44, 47, Ejercicio 7.5])
Sea OAB un triángulo tal que $\angle AOB = \alpha$, $\alpha < 90^o$. Para cualquier punto M del plano, $M \neq 0$, P y Q son los pies de las perpendiculares de M en OA y OB, respectivamente. El punto H es el ortocentro del triángulo OPQ. Encontrar el lugar geométrico del punto H en los siguientes casos:

(a) M es un punto variable sobre el segmento AB.
(b) M es un punto variable dentro del triángulo AOB.

SOLUCIÓN.
Sean K, L los pies de altura desde A, B, respectivamente, en el triángulo OAB.

Vamos a demostrar que el lugar geométrico del punto H es el segmento KL, cuando M es un punto variable del segmento AB.

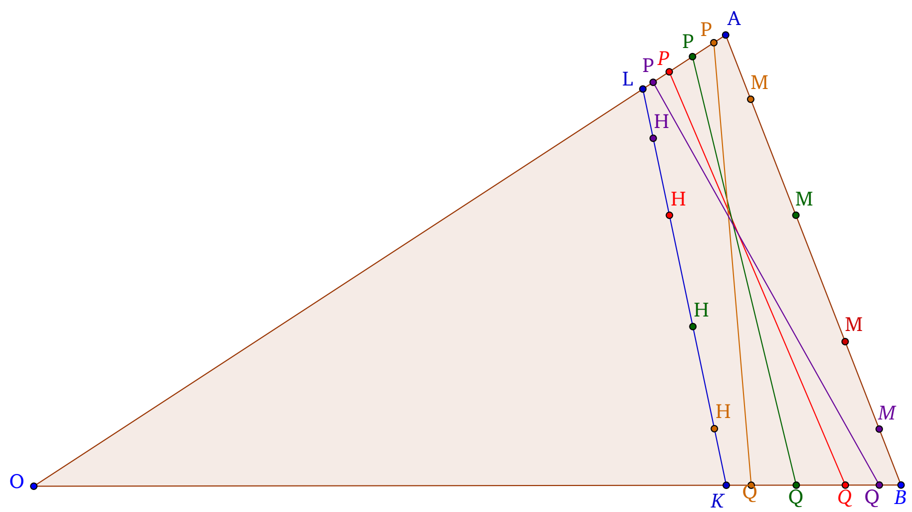


Sean Q', K' los pies de las perpendiculares de Q, K, respectivamente, en la recta OA y P', L' los pies de las perpendiculares de P, L, respectivamente, en la recta OB.

Sea $\dfrac{AM}{MB} = k$. Entonces $\dfrac{KQ}{QB} = \dfrac{K'Q'}{Q'L} = k$. De ello se deduce que la recta paralela QQ' a KK' en el triángulo $LK'K$ divide el lado LK con razón k. De la misma manera PP' divide LK con razón:

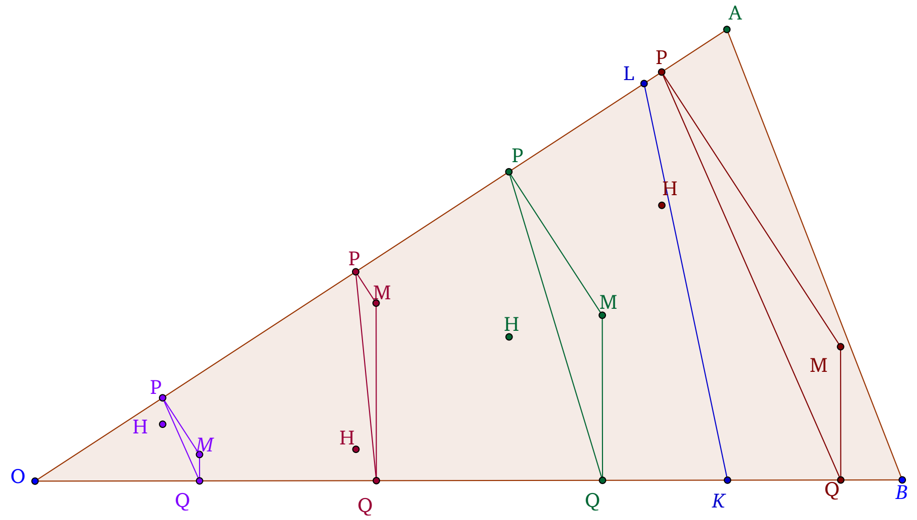
$$\frac{KP'}{P'L'} = \frac{AP}{PL} = \frac{AM}{MB} = k.$$

Luego QQ' y PP' intersecan el segmento KL en el mismo punto. Cuando M es uno de los puntos A, B se obtienen los puntos finales K, L, respectivamente.



Para la segunda parte del problema, cuando M es un punto interior del triángulo OAB, demostraremos que el lugar geométrico de H es el conjunto de puntos interiores del triángulo OKL.

Sea $A'B'$ el segmento paralelo a AB a través del punto M. Entonces $\Delta OA'B'$ es la imagen de ΔOAB bajo una transformación de homotecia de razón λ[17], $\lambda < 1$, y centro O. Cuando M es un punto variable sobre el segmento $A'B'$, el lugar geométrico de H es la imagen de LK en virtud de la transformación considerada. De esta manera obtenemos el interior del triángulo OKL.



□

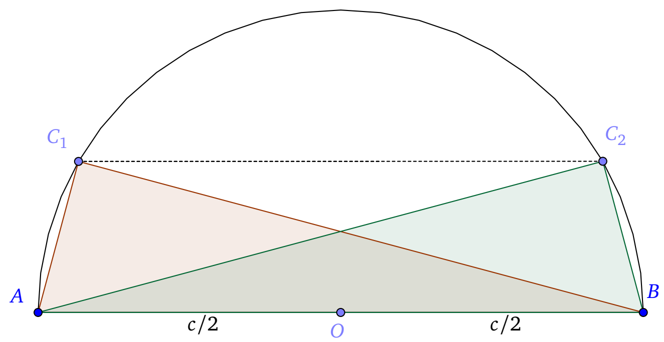
Ejercicio. 5.8. (Rumania, 1959, [1, Enunciado, solución: páginas 7, 9, Ejercicio 1.4])
La hipotenusa AB de un triángulo rectángulo ABC tiene una longitud c y la mediana correspondiente al vértice C es la media geométrica de los lados AC y BC. Construir el triángulo ABC usando regla y compás.

Solución. El triángulo está inscrito en una semicircunferencia de diámetro AB, $AB = c$. Ésta corresponde con el arco capaz de ángulo 90^o.
Sea O el centro de la circunferencia y al ser ésta circunscrita a un triángulo, O coincide con el circuncentro del triángulo inscrito. O es el punto medio del segmento AB, situado a una distancia $\frac{c}{2}$, tanto del vértice A como de B. Luego, la mediana OC tiene longitud $\frac{c}{2}$, ya que el circuncentro se encuentra a igual distancia de todos los vértices.
Por el enunciado sabemos que $\sqrt{ab} = \frac{c}{2}$, entonces $ab = \frac{c^2}{4}$. Usamos la fórmula del área del triángulo[18], tenemos que $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$, donde h es la altura desde el vértice C. Por lo tanto, $h = \frac{c}{4}$.

[17] Una **homotecia** es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor. En general una homotecia de razón λ diferente de 1 deja un único punto fijo, llamado centro.

[18] $S = \dfrac{base \cdot altura}{2}$

Para construir el punto C es suficiente dibujar una línea paralela a AB a una distancia $\frac{c}{4}$. Corta al arco capaz en dos puntos: C_1 y C_2. De esta manera, hemos calculado dos lugares geométricos, es decir, dos conjuntos de puntos que verifican las condiciones que nos pedía el enunciado. En este caso son dos triángulos cuyos puntos cumplen las características pedidas.



□

Ejercicio. 5.9. (Rumanía,1960, [1, Enunciado, solución: páginas 12, 15, Ejercicio 2.3])
Sea ABC un triángulo rectángulo, h la longitud de su altura desde el vértice A (el ángulo recto) y n un entero positivo impar. La hipotenusa BC tiene longitud a y está divida en n segmentos iguales. El segmento que contiene el punto medio de BC es visible desde el punto A bajo un ángulo α. Demostrar que

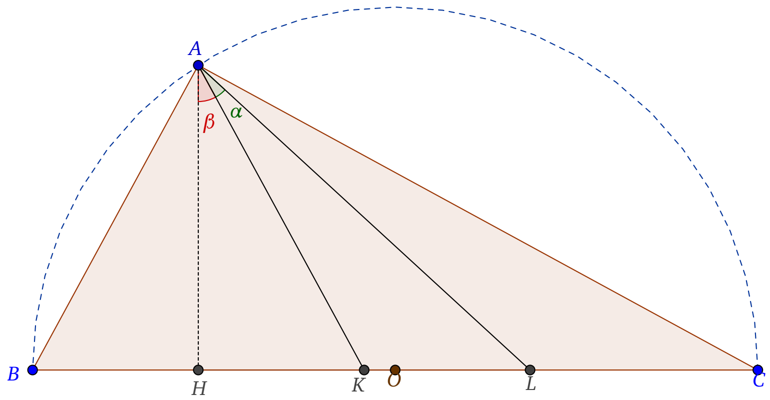
$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

SOLUCIÓN. En este caso, el arco capaz de ángulo 90^o coincide con la semicircunferencia cuyo diámetro es el segmento BC, ya que estamos trabajando con un triángulo rectángulo.
Sea H el pie de la altura desde el vértice A. Por conveniencia introducimos las notaciones $BH = x$ y $\angle HAK = \beta$. Es posible determinar x a partir de la ecuación:

$$h^2 = x(a-x). \tag{III.15}$$

la cual se obtiene por el Teorema de la altura para triángulos rectángulos.[19]

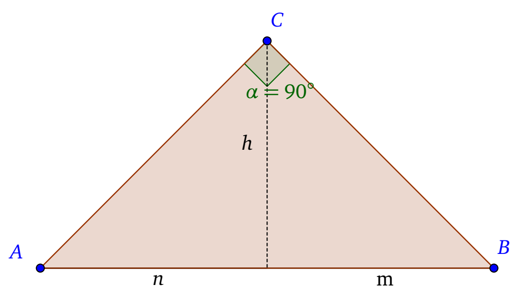
[19]**Teorema de la altura**. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, es decir, $h^2 = m \cdot n$.



Luego, $\tan\alpha$ se puede determinar a partir de los triángulos HAK y HAL. Para ello utilizamos la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos.[20]

$$\tan\alpha = \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta} = \frac{\left(\frac{LH}{h}\right)-\left(\frac{KH}{h}\right)}{1+\left(\frac{LH}{h}\cdot\frac{KH}{h}\right)} = \frac{h(LH-KH)}{h^2+LH\cdot KH} \overset{LH-KH=LK}{=} \frac{h\cdot LK}{h^2+LH\cdot KH}. \quad \text{(III.16)}$$

Los segmentos LH, KH y LK están dados por las fórmulas:



[20] $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\cdot\tan\beta = \tan\alpha+\tan\beta.$
Agrupando términos:
$\tan\alpha(1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta) = \tan(\alpha+\beta)-\tan\beta \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}.$

$$LK = \frac{a}{n},$$

$$LH = \frac{n+1}{2n}a - x,$$

$$KH = \frac{n-1}{2n}a - x.$$

Aplicando estas fórmulas a la ecuación (III.16) tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{h \cdot \frac{a}{n}}{h^2 + \left(\frac{n+1}{2n}a - x\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2n}a - x\right)} = \frac{4anh}{4n^2h^2 + a^2n^2 - a^2 - 4axn^2 + 4n^2x^2}$$

$$\overset{(\text{III.15})}{=} \frac{4anh}{4n^2x(a-x) + a^2n^2 - a^2 - 4axn^2 + 4n^2x^2} = \frac{4anh}{4n^2x(a-x) + a^2n^2 - a^2 - 4axn^2 + 4n^2x^2}$$

$$= \frac{4nh}{an^2 - a} = \frac{4nh}{a\left(n^2 - 1\right)}.$$

□

Bibliografía

[1] M. Becheanu, *International Mathematical Olympiads. 1959–2000*, The Academic Distribution Center, 2001. 5.1., 5.2., 5.3., 5.4., 5.5., 5.6., 5.7., 5.8., 5.9.

[2] Cristóbal Sánchez-Rubio and Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica*, Universitat Jaume I. Castellón, 2000. 3.3., 3.4., 3.5., 3.6.

Refencias Web:

Sobre relaciones métricas en la circunferencia:

1. http://www.sangakoo.com/es/temas/definicion-y-elementos-basicos-de-la-circunferencia
2. http://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia
3. http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Ecuacion_Circunferencia.html
4. http://es.slideshare.net/natacha1313/circunferencia-25521537?next_slideshow=1
5. http://es.slideshare.net/sitayanis1/relaciones-metricas-en-la-circunferencia-21712522
6. http://es.wikipedia.org/wiki/Potencia_de_un_punto
7. http://piziadas.com/2012/03/geometria-metrica-arco-capaz-sobre-un-segmento.html
8. http://es.wikipedia.org/wiki/Arco_capaz
9. http://www.dmae.upct.es/~pepemar/angulo/home.htm
10. http://www.vitutor.com/geo/eso/ac_4.html
11. http://matematica.pe/category/cuadrilatero-inscriptible/
12. http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Ptolomeo
13. http://apuntes123.blogspot.com.es/2007/12/puntos-colineales-y-no-colineales.html
14. http://es.wikipedia.org/wiki/Trapecio_(geometría)
15. http://www.ditutor.com/geometria/trapecio_isosceles.html

Sobre ángulos y rectas:

16. http://www.profesorenlinea.cl/geometria/angulos_y_rectas.html

Sobre rectas:

17. http://www.vitutor.com/geo/rec/d_4.html

18. http://www.vitutor.com/geo/rec/d_7.html

19. http://es.wikipedia.org/wiki/Recta_de_Simson

Sobre triángulos:

20. http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso14triangulo.pdf

21. http://www.vitutor.com/geo/eso/s_6.html

22. http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/tema4/Teoremas1.html

Sobre elipses:

23. http://es.wikipedia.org/wiki/Elipse

24. http://www.vitutor.com/geo/coni/g_1.html

25. http://clasesdeapoyonuevo.s3.amazonaws.com/capitulos/apuntes/2.6.2.1.pdf

Sobre lugares geométricos:

26. http://es.wikipedia.org/wiki/Lugar_geometrico

27. http://www.amolasmates.es/pdf/Temas/1BachCT/Lugar%20Geometrico.pdf

28. http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/unidad3/archivos/ecuacionesparametricasconicas.pdf

29. http://matematica.50webs.com/lugar-geometrico-2.html

Problemas fase local y nacional:

30. http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimprab.htm

Índice alfabético