Universidad de Granada

Trabajo Fin de Máster

PROBLEMAS DE COMPETICIÓN SOBRE COMBINATORIA

Araceli Arjona Muñoz

Máster en Matemáticas

Departamento de Álgebra

Curso 2013–2014

Problemas de competición sobre combinatoria

Trabajo Fin de Máster presentado en el
Máster Interuniversitario de Matemáticas

Realizado por:

D^a. Araceli Arjona Muñoz

Dirigido por el:

Prof. Dr. D. Pascual Jara Martínez

Máster en Matemáticas
Departamento de Álgebra
Curso 2013–2014

Agradecimientos

Me gustaría dedicar estas líneas para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial al Dr. D. Pascual Jara Martínez, tutor del mismo, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de su realización.

Introducción

La palabra *problema* proviene del griego y significa "lanzar adelante". Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada.

Todos vivimos resolviendo problemas: desde el más básico de asegurar la cotidiana subsistencia, común a todos los seres vivos, hasta los más complejos desafíos planteados por la ciencia y la tecnología. La importancia de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No es de extrañar por lo tanto que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de psicólogos, ingenieros, matemáticos, especialistas en inteligencia artificial y científicos de todas las disciplinas. En el campo educativo se ha reconocido ampliamente su importancia, y en muchas Universidades el desarrollo de la creatividad y de la habilidad para resolver problemas es una parte integral del curriculum.

El principal objetivo de este trabajo es ayudar al lector a desarrollar su habilidad para resolver problemas. Es bueno dejar claro desde el principio que el desarrollo de esta habilidad es el resultado del trabajo personal, de la práctica adquirida resolviendo problemas y de la reflexión sobre esa práctica. No es posible convertirse en un *solucionista* experto mediante la mera de lectura pasiva de un libro, del mismo modo que no es posible convertirse en un buen nadador o pianista simplemente leyendo. Sin embargo el conocimiento de las técnicas apropiadas y de los errores típicos que es preciso evitar puede ser tan útil para el *solucionista* como lo es para el nadador o el pianista.

Las Olimpiadas Matemáticas son competiciones dirigidas principalmente a jóvenes estudiantes de secundaria y bachillerato, e incluso de Universidad. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de la Matemática y en la detección precoz de jóvenes con talento para el estudio de esta Ciencia. La Olimpíada Internacional de Matemáticas celebra anualmente desde el año 1965 y consiste en resolver diversos problemas de alta dificultad, para los que necesario conocer y trabajar con técnicas específicas.

Son muy numerosas las apariciones de ejercicios de combinatoria en estos certámenes. Por ello, este trabajo es un instrumento de ayuda para todos aquellos jóvenes que se animen a participar, ya que consiste en la recopilación de información necesaria para resolver estos problemas, a lo largo del mismo se ha tratado de dar numerosos ejemplos y ejercicios con dificultad creciente. Esperamos que no solo sea útil como preparación para las olimpiadas, sino que también sea una oportunidad para que los estudiantes interesados disfruten empezando a manipular conceptos matemáticos nuevos.

En el texto no aparece un solo problema; todos son ejercicios. Hemos preferido hacerlo así para indicar que casi todos ellos se presentan junto con una solución y una discusión, y su objetivo es mostrar al lector como elaborar su resolución. Para resolver un problema el lector debería echar mano de todos sus conocimientos y técnicas y elaborar su propia resolución; esperamos que tras la lectura del texto el lector se sienta motivado para abordar por su cuenta, y riesgo, la resolución de otros problemas en esta misma área.

Este trabajo se estructura en tres capítulos; en el primero se tratan las nociones elementales de combinatoria y se plantean ejercicios elementales en la misma, hemos tratado que sea, hasta cierto punto, exhaustiva para que sea una herramienta de utilidad para en varios niveles educativos. Damos pues en él los ejemplos necesarios para explicar y comprender los diferentes problemas de enumeración.

El segundo capítulo se centra en el estudio de las funciones generatrices, y en sus aplicaciones en la resolución de problemas. Aquí hemos tratado de mantener una aproximación elemental a este tema, omitiendo el uso de teorías más elaboradas, que sin duda exceden el objetivo marcado en la elaboración de este texto. Por último el capítulo tercero se dedica al estudio y discusión de algunos problemas que han aparecido en algunas olimpiadas en cualquier de sus fases: local, nacional o internacional. A partir de una primera elección se ha reelaborado su resolución y en aquellos casos que nos han parecido de interés se han incluido nuevas versiones o modificaciones de los mismos con objeto de alcanzar una exposición más amena y didáctica, o simplemente para mostrar al lector caso particulares que pueden ser de interés.

Índice general

Capítulo I

Combinatoria

En este capítulo se abordan las técnicas básicas para contar elementos de un conjunto. Si el conjunto es pequeño y sin regla de formación fija, se trata simplemente de enumerarlos. Si el conjunto tiene demasiados elementos como para poder enumerarlos exhaustivamente, pero el número de elementos obedece a una regla de formación fija, pueden construirse métodos indirectos para conocer cuántos elementos efectivamente tiene. La parte de la Matemática que se encarga de estudiar y aplicar estas técnicas es la **Combinatoria**.

1. Conceptos fundamentales

Un primer resultado que proporciona un método fundamental para contar es el siguiente:

Proposición. 1.1. (Principio de multiplicación o de elección)
Al elegir n objetos de manera que en la primera elección se escoge un elemento de un subconjunto de m_1 objetos, en la segunda se selecciona otro elemento de un subconjunto de m_2 objetos, y así sucesivamente hasta la n-ésima elección, en la que se dispone de m_n objetos, la elección se puede realizar de $m_1 m_2 \cdots m_n$ formas diferentes.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata y se realiza por inducción sobre el número n de objetos a elegir. $\square$

1.1. Permutaciones

Como aplicación de esta Proposición podemos determinar el número de formas en las que n objetos (*distinguibles entre sí*[1]) pueden ser ordenados en fila[2].

Sea S un conjunto finito y no vacío con n elementos[3]. Una **permutación** de S es una ordenación de todos los elementos de S; esto es, una aplicación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en el conjunto S que es una biyección.

Proposición. 1.2.
Si S es un conjunto no vacío con n elementos, el número de permutaciones de S se representa por P_n y se calcula como:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Si es $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto, a cada ordenación $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ de los elementos de S se le puede asociar la biyección $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ dada por $\tau(k) = i_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Recíprocamente, a cada biyección $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ se le puede asociar la ordenación $(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \ldots, a_{\tau(n)})$ de los elementos de S. En consecuencia, las permutaciones del conjunto S están en correspondencia biyectiva con las biyecciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y de ello deducimos:

Proposición. 1.3.
El número de aplicaciones biyectivas entre dos conjuntos finitos del mismo cardinal n es $n!$

1.2. Permutaciones con repetición

Dado un conjunto $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ con k objetos, queremos formar filas de n objetos de S permitiendo la repetición de estos. Si n_i es el número de repeticiones del elementos s_i, entonces se debe verificar $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

[1] Vamos a utilizar *objetos numerados* para indicar que los objetos son distinguibles unos de otros, y *objetos no numerados* para indicar que no es posible distinguirlos. Por ejemplo, un conjunto de diez bolas blancas está formado por diez objetos que no se pueden distinguir unos de otros, y un conjuntos de diez bolas blancas numeradas del 0 al 9 está formado por diez objetos perfectamente diferenciados.

[2] Existen diversas ordenaciones; *ordenar en una fila* significa que a cada objeto en la ordenación le asignamos un puesto: primero, segundo, tercero, etc., o equivalentemente un número: 1, 2, 3, etc. o una letra: A, B, C, etc. *Ordenar en una circunferencia* es similar, pero ahora no tenemos primer elemento ni último; en particular no tenemos una relación de orden.

[3] Cuando hablemos de un *conjunto* y un elemento de un conjunto, estamos considerando que los elementos son distinguibles, pues un conjunto no puede tener elementos repetidos. Cuando admitamos que los elementos se pueden repetir, en vez de usar la palabra conjunto hablaremos de *familia* y también de *multiconjunto*.

Si los n objetos fuesen diferentes y $k = n$, no habría dificultad en resolver el problema: habría $n!$ maneras de ordenarlos. En caso contrario, fijada una ordenación con objetos repetidos, podrían construirse $n_1!$ ordenaciones en las que los objetos iguales a s_1 permutan entre sí. Para cada una de estas ordenaciones habría $n_2!$ ordenaciones con los objetos iguales a s_2. Siguiendo con este razonamiento, encontramos que, cada ordenación en la que hay $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objetos iguales y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, da lugar a $n_1!n_2! \cdots n_k!$ ordenaciones. Por lo que el número de ordenaciones que pueden formarse es: $\dfrac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$.

Se llama **permutación con repetición** de n objetos, de los cuales $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son iguales entre sí y $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, a cualquier ordenación en fila de dichos n elementos.

Proposición. 1.4.
El número de permutaciones con repetición de n objetos de los cuales $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son iguales enter sí y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, se representa por $PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ó $PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k}$, y se calcula como:

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_k!}$$

1.3. Variaciones

Contemos ahora las ordenaciones de k objetos distintos elegidos en un conjunto de n elementos. El primer objeto de la k-tupla ordenada puede elegirse de n maneras; elegido el primer objeto, el segundo puede ser cualquiera de los $n-1$ restantes, y así sucesivamente; elegidos los $k-1$ primeros objetos, el k-ésimo se puede elegir entre los $n-(k-1)$ restantes. Hay así $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ ordenaciones distintas.

Sea S un conjunto finito de n elementos y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k \leq n$. Una **variación** de orden k de S es una ordenación de k elementos distintos de S. Se representa por V_n^k ó $V_{n,k}$ al número de variaciones de orden k de un conjunto S de n elementos, y se calcula como:

$$V_n^k = V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{(k}.$$

A estas variaciones se les llama usualmente variaciones de n elementos tomados de k en k.

Proposición. 1.5.
Sean $k \leq n$ números enteros positivos; el número de aplicaciones inyectivas de un conjunto X de k elementos a un conjunto Y de n elementos es: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Consideramos ahora el problema de determinar el número de ordenaciones de k objetos, distintos o no, que se pueden formar a partir de un conjunto de cardinal n. Para cada una de las k posiciones, dentro de cada ordenación, hay n elecciones posibles, y por lo tanto, según el Principio de multiplicación, el número de ordenaciones posibles es: $n \overset{k}{\cdots} n = n^k$.
Sea S un conjunto finito con n elementos y sea $k \in \mathbb{N}$ un entero positivo. Una **variación con repetición** de orden k de S es una ordenación de k elementos de S, no necesariamente distintos. El número de estas variaciones se representa por VR_n^k ó $VR_{n,k}$, y se calcula como:

$$VR_n^k = VR_{n,k} = n^k.$$

A estas variaciones se les llama variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Proposición. 1.6.
El número de aplicaciones de un conjunto X de k elementos a otro conjunto Y de n elementos es n^k.

1.4. Combinaciones

Un problema diferente se plantea cuando lo que queremos es contar todos los subconjuntos de k objetos de un conjunto X con n elementos y $0 \leq k \leq n$. Puesto que se trata de elegir un subconjunto, dos de estas elecciones serán distintas cuando los subconjuntos elegidos lo sean, es decir, cuando difieran en algún elemento. Teniendo en cuenta que cada subconjunto de k objetos da lugar a $k!$ ordenaciones distintas de esos k objetos y que el número total de ordenaciones de k objetos distintos elegidos entre los n es $\frac{n!}{(n-k)!}$, resulta que el número de subconjuntos de k elementos es $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
Sea S un conjunto finito de n elementos y sea $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$. Una **combinación** de orden k de S es un subconjunto formado por k elementos de S.

Proposición. 1.7.
El número de combinaciones de orden k de un conjunto S con n elementos es igual al número de subconjuntos de S que tienen k elementos, y se representa por C_n^k, por $C_{n,k}$ o por $\binom{n}{k}$, y se calcula como:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

A estas combinaciones se les llama también combinaciones de n elementos tomados de k en k.

1.5. Combinaciones con repetición

Vamos a calcular el número de formas de repartir k bolas idénticas en n cajas numeradas o, equivalentemente, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.
Cada reparto de k bolas iguales en n cajas se identifica con una ordenación de k puntos y $n-1$ barras. Uno de estos repartos se puede simular mediante una sucesión de puntos, que representan las bolas, y barras, que representan la separación entre cajas. Por ejemplo, la sucesión "$\cdot \mid \cdot \mid \cdot\cdot \mid\mid \cdot\cdot\cdot \mid$" representa el reparto de $k = 7$ bolas en $n = 6$ cajas que deja una bola en la primera caja, una en la segunda, dos en la tercera, ninguna en la cuarta, tres en la quinta y ninguna en la sexta.
Hay tantas configuraciones de k bolas idénticas en n cajas como ordenaciones distintas de k puntos y $n-1$ barras, que son las formas de elegir k lugares entre $n+k-1$ para que en ellos aparezca el punto, o sea $\binom{n+k-1}{k}$.
Sea S un conjunto finito con n elementos y $0 < k \in \mathbb{N}$ un entero positivo. Una **combinación con repetición** de orden k de S es una elección de k elementos de S, no necesariamente distintos.

Proposición. 1.8.
El número de combinaciones con repetición de orden k de n elementos se representa por CR_n^k ó por $CR_{n,k}$, y se calcula como:

$$CR_n^k = CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Se dice que $CR_{n,k}$ es el número de combinaciones con repetición de orden k de n elementos.

1.6. Cuadro resumen

Tipo	¿Importa el orden?	¿Entran todos?	¿Se repiten?	Fórmula
Variación	Sí	No	No	$V_n^k = V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Variación con repetición	Sí	No	Sí	$VR_n^k = VR_{n,k} = n^k$
Permutación	Sí	Sí	No	$P_n = n!$
Permutación con repetición	Sí	Sí	Sí	$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$
Combinación	No	No	No	$C_n^k = C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Combinación con repetición	No	No	Sí	$CR_n^k = CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

1.7. Problemas

Ejercicio. 1.9.
¿De cuántas formas se puede rellenar una quiniela de fútbol si ésta consta de 15 casillas, y cada una puede rellenarse con los signos 1, X ó 2?

SOLUCIÓN. Tenemos 15 casillas, y en cada una puede rellenarse con un elemento del conjunto $\{1, X, 2\}$, por lo tanto el número pedido es $3^{15} = 14\,348\,907$. □

Ejercicio. 1.10.
En el sistema español de matrículas, que consiste en un número de cuadro dígitos y una palabras de tres letras, tomando éstas en el conjunto $\{B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z\}$, ¿cuántas matrículas distintas se pueden formar?

SOLUCIÓN. Tenemos 10^4 posibles números y 20^3 palabras distintas, por lo tanto el número total de matrículas distintas es: $10^4 \times 20^3 = 20\,000\,000$. □

Ejercicio. 1.11.
(1). ¿Cuántos números de seis dígitos, significativos, se pueden escribir en un sistema binario?
(2). ¿Cuántos hay que contengan la sucesión 01*?*

SOLUCIÓN. (1). Observa que el primer dígito siempre es 1, por lo tanto tenemos que ver las formas posibles de formar listas de 5 elementos con los dígitos 0 y 1: el total es $2^5 = 32$.
(2). Si queremos ver cuántos de éstos contiene la sucesión 01, observa que esta sucesión puede ocupar una de las siguientes posiciones:

$$1\,0\,1\,\_\,\_\,\_, \quad 1\,\_\,0\,1\,\_\,\_, \quad 1\,\_\,\_\,0\,1\,\_, \quad 1\,\_\,\_\,\_\,0\,1.$$

Cada uno de estos casos tiene tres huecos, que se pueden rellenar con cualquiera de los dígitos 0 ó 1. Por lo tanto cada uno produce 2^3 números. Llamamos A_1 a los números del tipo $1\,0\,1\,\_\,\_\,\_$, A_2 a los del tipo $1\,\_\,0\,1\,\_\,\_$, A_3 a los del tipo $1\,\_\,\_\,0\,1\,\_$, y A_4 a los del tipo $1\,\_\,\_\,\_\,0\,1$. Tenemos entonces, por el principio de inclusión–exclusión:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4|.$$

Se tiene $|A_i| = 2^3$, y $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4| = 2$. Por lo tanto

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \times 2^3 - 3 \times 2 = 32 - 6 = 26.$$

□

Ejercicio. 1.12.
En una sociedad, que consta de 40 miembros, hay que elegir la junta directiva que está formada por tres cargos: presidente, tesorero y secretario, los cuales deben recaer en personas distintas. ¿De cuántas formas se puede formar la junta directiva?

SOLUCIÓN. Es claro de el número de posibles formas distintas es: $40 \times 39 \times 38 = 59\,280$. □

Observa que si quitamos la condición de que los cargos recaigan en personas distintas, una misma persona puede ocupar uno o varios cargos, y por tanto el problema es de variaciones con repetición.

Ejercicio. 1.13.
En la sociedad anterior hay que elegir un conjunto de tres representantes, indistinguibles entre sí. ¿De cuántas formas se pueden elegir éstos?

SOLUCIÓN. La solución es $40^3 = 64\,000$. □

Ejercicio. 1.14.
*Leticia ha comprado un coche cuya matrícula es: 1234XYZ. ¿Cuántos coches habrá que tengan una matrícula del tipo ****XYZ formada con los números de la matriculo de Leticia?*

SOLUCIÓN. Es claro que basta reordenar la lista $1, 2, 3, 4$, y por tanto habrá $4!$ □

Ejercicio. 1.15.
*Leticia ha comprado un coche cuya matrícula es: 1231XYZ. ¿Cuántos coches habrá que tengan una matrícula del tipo ****XYZ formada con los números de la matriculo de Leticia?*

SOLUCIÓN. En este caso tenemos que considerar las permutaciones de cuatro elementos, de los cuales dos son iguales, tenemos por tanto $\frac{4!}{2!} = 12$. □

Ejercicio. 1.16.
Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que

- *La primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive.*
- *La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive.*
- *Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9. ambos inclusive.*

¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?

SOLUCIÓN. Para la primera cifra tenemos 8 casos. Para la segunda y la tercera juntas tenemos $VR_{9,2}$ y las restantes serán $VR_{10,4}$. En consecuencia, el número de teléfonos es: $8 \times 9^2 \times 10^4 = 6\,480\,000$. □

Ejercicio. 1.17.
Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?

SOLUCIÓN. Una posible combinación sería 1, 23, 45 que sería distinta de 23, 1, 45, por lo que importa el orden. Por otra parte el número no puede aparecer más de una vez, por lo que no hay repetición. Se trata de $V_{100,3} = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$. □

Ejercicio. 1.18.
El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación? Si tres miembros del consejo son ingenieros en informática, ¿cuántas de las anteriores listas tienen:

(1) Un ingeniero propuesto para la presidencia?
(2) Exactamente un ingeniero en la lista?
(3) Al menos un ingeniero en la lista?

SOLUCIÓN. Llamemos a los miembros 1,2,3,...,10. Una lista sería 1,2,3,4. Otra sería 4,5,3,1, donde el orden importa ya que el primero sería el presidente, el segundo el vicepresidente, el tercero el secretario y el cuarto el tesorero, es decir que la lista 1,2,3,4, no sería la misma que la 4,3,2,1, ya que en el primer caso el presidente sería el 1 y en el segundo sería el 4. Obviamente no hay repetición. Así pues el número de listas es $V_{10,4} = 10\,000$.
(1). Fijamos el presidente (3 casos) y variamos a los restantes. Tendríamos entonces $3 \times V_{9,3} = 3 \times 9 \times 8 \times 7$.
(2). Tenemos 3 ingenieros para 4 posiciones y los 7 miembros restantes los variamos de 3 en 3, es decir, $4 \times 3 \times V_{7,3}$.
(3). Calculamos todas las que no tienen ningún ingeniero y las restamos del total, es decir, $V_{10,4} - V_{7,4}$. □

Ejercicio. 1.19.
Con las cifras 1,2,3,4,5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.
(1) ¿Cuántos números se pueden formar?
(2) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

SOLUCIÓN. (1). Importa el orden y no hay repetición $V_{6,5} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$.
(2). Son múltiplos de 4 los que acaban 12, 24, 32, 44, 52 y 72. El caso 44 no nos vale por haber repetición.
Acaban en 12, $V_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Por tanto, los múltiplos de 4 son $5 \times 24 = 120$. Como hay 720 casos, de éstos $720/6 = 120$ acaban en una cifra concreta de las 6, y como para ser pares tienen que acabar en 2 o en 4, el número de pares que hay es 240. □

Ejercicio. 1.20.
Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:
(1) no hay restricciones?
(2) debe contestar las dos primeras preguntas?
(3) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas?

SOLUCIÓN. (1). Si las preguntas las numeramos del 1 al 10, una posible respuesta sería 9834567, que es la misma aunque alteremos el orden y no hay posible repetición. Se trata de combinaciones de 10 tomadas de 7 a 7, es decir, $C_{10,7}$.
(2). Si debe responder a las dos primeras, todos los casos comenzarán por $12\cdots$, y quedan cinco preguntas por responder de las 8 restantes, por tanto serán $C_{8,5}$.
(3). Si tienes que responder al menos cuatro de las seis primeras tenemos:

- Que responda exactamente 4 de las 6 primeras: $C_{6,4} \times C_{4,3}$.
- Que responda exactamente 5 de las 6 primeras: $C_{6,5} \times C_{4,2}$.
- Que responda exactamente 6 de las 6 primeras: $C_{6,6} \times C_{4,1}$.

El resultado por tanto será: $6C_{6,4} + 6C_{6,5} + 4$. □

2. Aplicaciones. Números combinatorios

En esta sección vamos a platear como ejercicios algunas propiedades de los números combinatorios.

Ejercicio. 2.1.
Si k y n son números enteros tales que $0 < k \leq n$, se verifica:

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

(3) ***Fórmula de Pascal:*** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$

SOLUCIÓN. (1). Por un lado se tiene $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$; y por otro lado $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$
(2). Es claro que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$
(3). Desarrollamos la suma se tiene:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$$

□

La fórmula de Pascal permite calcular, de forma iterativa, los distintos números combinatorios que se distribuyen en el llamado **Triángulo de Tartaglia**[4]:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \cdots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Observa que la Fórmula de Pascal nos dice que el término k de la fila $n+1$ se calcula sumando los términos $k-1$ y k de la fila n.

Ejercicio. 2.2.
Si k y n son números enteros tales que $0 < k \leq n$, se verifica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}.$$

SOLUCIÓN. Basta aplicar la Fórmula de Pascal e inducción sobre k. □

Ejercicio. 2.3.
Prueba que para $n \geq 2$ se verifica: $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$.

Aplica el Ejercicio (2.2.) *para dar una expresión sencilla de la suma de los cuadrados de los t primeros números naturales.*

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

[4] Se llama **triángulo de Pascal** al triángulo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & a & & b & & & & \\
 & & & a & & a+b & & b & & & \\
 & & a & & 2a+b & & a+2b & & b & & \\
 & a & & 3a+b & & 3a+3b & & a+3b & & b & \\
a & & 4a+b & & 6a+4b & & 4a+6b & & a+4b & & b \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
a & 5a+b & 10a+5b & 10a+10b & 5a+10b & a+5b & b
\end{array}$$

Por lo tanto el triángulo de Tartaglia se obtiene del triángulo de Pascal tomando $a = 1$ y $b = 1$.

Se verifica entonces:

$$\sum_{k=0}^{t} k^2 = \sum_{k=0}^{t}\binom{n+1}{2} + \sum_{k=0}^{t}\binom{n}{2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Ejercicio. 2.4.
Si k y n son números enteros tales que $0 \leq k \leq n$, se verifica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el ejercicio (2.2.) tenemos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} &= \binom{n-1}{n-k-1} + \binom{n-2}{n-k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{n-k-1} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0}.\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 2.5.
Si k y n son números enteros tales que $0 \leq k \leq n$, se verifica:

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{n}{k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un conjunto $\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\}$, al tomar k elementos podemos tomar $t \leq k$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada una de estas elecciones podemos tomar $k - t$ elementos de $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. □

Ejercicio. 2.6. (Teorema del Binomio de Tartaglia)
Sean $x, y \in \mathbb{R}$, no nulos, para cada $n \in \mathbb{N}$ es cierta la igualdad:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Solución. Hacemos inducción sobre n. Si $n = 0, 1$, el resultado es cierto. Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$; vamos a estudiar $(x + y)^{n+1}$. Por la hipótesis se tiene:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Observa que en el desarrollo del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,n!}x^k y^{n-k},$$

El factor $\frac{n!}{k!\,n!}$ indica cuantos factores hay del tipo $x^k y^{n-k}$, esto es, cuantas permutaciones con repetición de orden n se pueden construir con dos elementos. Esta es la idea que subyace en el siguiente desarrollo de la potencia n–ésima de un polinomio $x_1 + \cdots + x_t$.

Ejercicio. 2.7. (Formula de Leibniz)
Prueba que para un polinomio $x_1 + \cdots + x_t$, con $t \geq 1$, y para cada entero positivo n se tiene:

$$(x_1 + \cdots + x_t)^n = \sum_{e_1+\cdots+e_t=n}\frac{n!}{e_1!\,\cdots\,e_t!}x_1^{e_1}\cdots x_t^{e_t}.$$

Ejercicio. 2.8.
Sea $x \in \mathbb{R}$ no nulo y distinto de -1, y $n \in \mathbb{N}$ un número natural. Se verifica:

(1) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

(2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

SOLUCIÓN. Basta desarrollar los binomios: $(x+1)^n$, $(1+1)^n$ y $(-1+1)^n$. □

Ejercicio. 2.9.
Prueba que para cada número entero $n \geq 1$ se verifica la igualdad

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

SOLUCIÓN. Desarrolla el binomio $(1-1)^n$. □

Ejercicio. 2.10.
Prueba que para cualquier número natural n se verifica la igualdad

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

SOLUCIÓN. Ver el Ejercicio (2.5.). □

Ejercicio. 2.11.
Si n es un entero impar mayor que 1, prueba que se verifica:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2} = 2^{n-1} - 1.$$

SOLUCIÓN. Tenemos $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, por tanto $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2} = 2^{n-1} - 1 = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n+1)/2}$. Si llamamos S a este número, se verifica:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \binom{n}{0} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2}\right] + \left[\binom{n}{(n+1)/2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right] + \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0} + S + S + \binom{n}{n} \\ &= 1 + S + S + 1 = 2 + 2S. \end{aligned}$$

Entonces $2^{n-1} = 1 + 2S$, y tenemos el resultado. □

Ejercicio. 2.12.
Prueba que para cualquier número natural n se verifica: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} k = n2^{2n-1}$.

SOLUCIÓN. El número $\binom{2n}{k} k$ puede interpretarse como la forma de elegir k elementos de un conjunto de $2n$ elementos, y adicionalmente elegir de entre los k elementos un destacado: el líder. Por tanto $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} k$ es el número de hacer ésto para $k = 0, 1, \ldots, n$.
Estas posibles elecciones las podemos hacer también eligiendo primero al líder, para lo que tenemos $2n$ posibilidades, y ahora elegir el resto de los elementos. Vamos a tratar todos los valores de k simultáneamente. Tenemos que ver cuantos conjuntos de $k-1$ elementos podemos elegir, para $k = 1, \ldots, n$. Cada subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ determina uno de estos conjuntos si tiene $n-1$ elementos o menos, y si tiene más de $n-1$ elementos, su complemento tiene menos de $n-1$; como $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ tiene 2^{2n-1} subconjuntos, el número de conjuntos de $k-1$ elementos, para $k = 1, \ldots, n$ es: 2^{2n-2}. En consecuencia el número de posibles elecciones es: $2n2^{2n-2} = n2^{2n-1}$.
<u>Método alternativo</u>. Primero observamos que se tiene $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$, para cualesquiera m, k. En efecto, se verifica:

$$k\binom{m}{k} = k\frac{n!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = m\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = m\binom{m-1}{k-1}.$$

So desarrollamos ahora la sumatoria tenemos:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} k = 2n\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{k-1} = 2n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = 2n\frac{2^{2n-1}}{2} = n2^{2n-1}.$$

En donde hemos utilizado el resultado del Ejercicio (2.11.). □

Ejercicio. 2.13.
Prueba que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = 2^n - 1.$

SOLUCIÓN. Tenemos la expresión $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, y podemos manipular hasta llegar a:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{0}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k \\ &= \textstyle\binom{0}{0} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}x^{k+1} = \binom{0}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}\end{aligned}$$

Si tomamos $x =!$, se tiene $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1.$ □

Ejercicio. 2.14.
Calcula, para cualquier número natural n, el valor de $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

SOLUCIÓN. Al igual que en el Ejercicio (2.13.), al desarrollar $(1-x)^n$ se tiene:

$$(1-x)^n = \binom{0}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(-x)^{k+1}.$$

Tomando $x = 1$ se tiene $0 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}$, y de aquí se tiene:

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

□

Ejercicio. 2.15.
Prueba que para cada entero positivo n se verifica: $\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$

SOLUCIÓN. Hacemos inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es correcto, ya que $\binom{2}{1} = 2 = \frac{2^{2-1}}{\sqrt{1}}$. Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$, y veamos qué ocurre con $n+1$.

Tenemos:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}.$$

$$\frac{2^{2(n+1)-1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}$$

Basta probar que

$$\begin{aligned}
&\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \geq \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.\\
&\frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.\\
&\frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Basta probar que

$$\begin{aligned}
&\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} \geq \frac{4n}{n+1}.\\
&(2n+1)^2(n+1) \geq 4n(n+1)^2.\\
&(2n+1)^2 \geq 4n(n+1).\\
&1 \geq 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio. 2.16.
Para enteros positivos $0 \leq r \leq k \leq n$ prueba que se verifica:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

SOLUCIÓN. Desarrolla los números combinatorios. $\square$

Del triángulo de Tartaglia podemos obtener algunas relaciones de interés. La primera se observó en el Ejercicio (2.8.), que indica que la suma de todos los términos de la fila n–ésima del triángulo es igual a 2^n. Veamos algunas otras, esta vez sobre las diagonales.

Ejercicio. 2.17. (Diagonales en el triángulo de Tartaglia)
(1) La primera diagonal $\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}, \ldots$ es la sucesión constante igual a 1.

(2) *La segunda diagonal* $\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \ldots$ *es la sucesión* $1, 2, 3, \ldots$ *de los números naturales no nulos.*

(3) *La tercera diagonal* $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \ldots$ *es la sucesión* $1, 3, 6, 10, \ldots$ *de los* ***números triangulares****; el valor que ocupa la posición* t *es* $\binom{t+1}{2} = \frac{(t+1)t}{2}$*, que es el número de puntos de un triángulo equilátero en una red exomética con* t *puntos en la base. Forman una sucesión* $\{a_n\}_n$*, con* $a_{n+1} = a_n + (n+1)$*.*

(4) *La cuarta diagonal* $\binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \ldots$ *es la sucesión* $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ *de los* ***números piramidales****; el valor que ocupa la posición* t *es* $\binom{t+2}{3} = \frac{(t+2)(t+1t}{3}$*, que es el número de puntos de un tetraedro en una red exométrica con arista formada por* t *puntos. Forman una sucesión* $\{a_n\}_n$ *con* $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + (3+n)$*.*

Ejercicio. 2.18.
Las sumas de estas diagonales también son de interés debido al ejercicio (2.2.).

(1) *La suma de la primera diagonal es* $\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \ldots + \binom{t}{0} = \binom{t+1}{1} = t+1$*.*

(2) *La suma de la segunda diagonal es* $\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{t}{1} = \binom{t+1}{2} = \frac{(t+1)t}{2}$*.*

(3) *La suma de la tercera diagonal es* $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{t}{2} = \binom{t+1}{3} = \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}$*.*

(4) *La suma de la cuarta diagonal es* $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{t}{3} = \binom{t+1}{4} = \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}$*.*

Del triángulo de Pascal, dando valores particulares a a y a b se tienen otras sucesiones que también son de interés.

Ejercicio. 2.19.
Para valores genéricos de a *y* b *tenemos:*

(1) *La primera sucesión es constante igual a* a*.*

(2) *La segunda sucesión es:* $b, a+b, 2a+b, 3a+b, \ldots$*; el término general es* $a_n = \binom{n}{n-1}a + \binom{n}{n}b$*,*

$n \geq 0$, si suponemos que $\binom{0}{-1} = 0$. Su suma es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{t} \left[\binom{n}{n-1}a + \binom{n}{n}b\right] &= a\sum_{n=0}^{t} \binom{n}{n-1} + b\sum_{n=0}^{t} \binom{n}{n} \\
&= a\binom{t+1}{t-1} + b\binom{t+1}{t} \\
&= a\binom{t+1}{2} + b\binom{t}{1} \\
&= a\frac{(t+1)t}{2} + bt.
\end{aligned}$$

(3) La tercera sucesión es: $b, a+2b, 3a+3b, 6a+4b, \ldots$; el término general es $a_n = \binom{n}{n-2}a + \binom{n}{n-1}$, $n \geq 1$, si suponemos que $\binom{1}{-1} = 0$. Su suma es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{t} \left[\binom{n}{n-2}a + \binom{n}{n-1}\right] &= a\sum_{n=1}^{t} \binom{n}{n-2} + b\sum_{n=1}^{t} \binom{n}{n-1} \\
&= a\binom{t+1}{t-2} + b\binom{t+1}{t-1} \\
&= a\binom{t+1}{3} + b\binom{t+1}{2}.
\end{aligned}$$

(4) La cuarta sucesión es: $b, a+3b, 4a+6b, 10a+10b, \ldots$; el término general es $a_n = \binom{n}{n-3}a + \binom{n}{n-2}$, $n \geq 2$, si suponemos que $\binom{2}{-1} = 0$. Su suma es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{t} \left[\binom{n}{n-3}a + \binom{n}{n-2}\right] &= a\sum_{n=2}^{t} \binom{n}{n-3} + b\sum_{n=2}^{t} \binom{n}{n-2} \\
&= a\binom{t+1}{t-3} + b\binom{t+1}{t-2} \\
&= a\binom{t+1}{4} + b\binom{t+1}{3}.
\end{aligned}$$

Cuando $a = 2$ y $b = 1$ tenemos que la segunda diagonal es la sucesión de los enteros positivos impares, y su suma es:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{t} \binom{n}{n-1}a + \binom{n}{n}b &= \sum_{n=0}^{t} \binom{n}{n-1}2 + \binom{n}{n} \\
&= 2\binom{t+1}{2} + \binom{t}{1} \\
&= (t+1)^2.
\end{aligned}$$

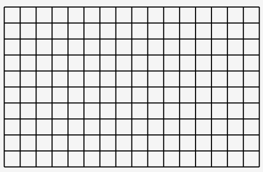
*La tercera diagonal es la sucesión de los cuadrados de los enteros positivos, los **números cuadrángulares**, y su suma es:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{t} \left[\binom{n}{n-2}a + \binom{n}{n-1}\right] &= 2\sum_{n=1}^{t} \binom{n}{n-2} + \sum_{n=1}^{t} \binom{n}{n-1} \\
&= 2\binom{t+1}{3} + b\binom{t+1}{2} \\
&= \frac{(t+1)t(2t+1)}{6}.
\end{aligned}$$

La cuarta diagonal es la sucesión de los ***números cuadrángulo–piramidales****, y su suma sabemos cómo calcularla.*
Cuando $a = 3$ *y* $b = 1$ *se obtendrían los* ***números pentagonales*** *y los* ***números pentágono–piramidales****, etc.*

Veamos una aplicación de los números combinatorios a un problema de conteo.

Ejercicio. 2.20.
Consideramos una cuadrícula rectangular con n *filas y* m *columnas y dos puntos:* A *situado en el vértices inferior izquierda y* B *un punto situado en el vértice superior derecha. Se atara de averiguar cuál es el número de caminos mínimos que hay de* A *a* B*. Aquí un camino mínimo de* A *a* B *es uno que sigue las líneas de la retícula y avanza siempre a hacia la izquierda ó hacia arriba, nunca a la derecha ni hacia abajo.*



SOLUCIÓN. Es claro que necesitaremos m avances hacia la derecha, representados por D y n avances hacia arriba, representados por V. Un camino es pues una sucesión de m letras iguales a D y n letras iguales a V. Como el total es $n+m$, se trata de calcular el número de permutaciones de dos letras de orden $n+m$ en las que n son iguales y m son iguales. Sabemos que la solución es $\frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \binom{n+m}{n}$. □

Una modificación de este problema se plantea cuando se elige un punto P en la cuadrícula de coordenadas (p, q), siendo las coordenadas de A iguales a $(0, 0)$ y las de B iguales a (m, n).

Ejercicio. 2.21.
En la situación del Ejercicio (2.20.)*, determinar el número de caminos mínimos que hay de* A *a* B *si éstos tienen que pasar por el punto* P *de coordenadas* (p, q)*.*

SOLUCIÓN. El problema es ahora determinar el número de caminos mínimos que hay de A a P, y el número de caminos mínimos que hay de P a B. El resultado será el producto de los dos números elegidos.

El número de caminos mínimos de A a P es $\binom{p+q}{p}$, y el número de caminos mínimos que hay de P a B es $\binom{m+n-p-q}{m-p}$. El total de caminos mínimos que pasan por P es: $\binom{p+q-2}{p-1}\binom{m+n-p-q}{m-p}$. □

Ejercicio. 2.22.
Se considera el conjunto $\{1, 2, \dots, 20\}$. ¿De cuántas formas se puede elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

SOLUCIÓN. Si hacemos una elección de cinco elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, que podemos suponer ordenados de menor a mayor, entre los que no hay dos consecutivos, resulta:

$$x_5 > x_4 + 1, \quad x_4 > x_3 + 1, \quad x_3 > x_2 + 1, \quad x_2 > x_1 + 1,$$

y por tanto, el conjunto $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4\}$ está formado por cinco elementos distintos. Y recíprocamente, dado un conjunto $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ de cinco elementos distintos, que podemos suponer ordenados de menor a mayor, resulta que el conjunto $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4\}$ está formado por cinco elementos entre los que no hay dos consecutivos.
Para contar los conjuntos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ en los que no hay dos elementos consecutivos podemos contar los conjuntos $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ formados por cinco elementos distintos. El valor mínimo de x_1 es 1, y el valor máximo de x_5 es 20, por lo tanto el valor mínimo de y_1 es 1, y el valor máximo de y_5 es $20 - 4 = 16$. El número de conjuntos de cinco elementos que nos pide el enunciado es $\binom{16}{5} = 4368$. □

Ejercicio. 2.23.
Hay 20 personas sentadas a una mesa (redonda), y queremos elegir cinco de ellas de forma que no haya dos que se sienten en lugares vecinos. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

SOLUCIÓN. Podemos numerar las personas del 1 al 20 correlativamente según el lugar que ocupan. Si éstas estuviesen en una fila, la resolución sería justo la del Ejercicio (2.22.); pero al estar sentadas a una mesa resulta que el 1 y el 20 son vecinos, y por tanto todos aquellos conjuntos que contengan 1 y 20 debemos excluirlos. Si un conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, ordenados de menor a mayor, contiene a 1 y a 20, resulta $x_1 = 1$ y $x_5 = 20$. Al igual que en el ejercicio antes mencionado, tenemos un conjunto de $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, ordenado de menor a mayor, de elementos distintos, en donde $y_1 = 1$ e $y_5 = 16$; quedan pues por fijar los elementos y_2, y_3 e y_4, los cuales se deben de tomar del conjunto $\{2, 3, \dots, 15\}$. Como este conjunto tiene 14 elementos, las formas de tomar tres de ellos distintos son $\binom{14}{3}$, y el número pedido en el enunciado es:

$$\binom{16}{5} - \binom{14}{3} = 4368 - 264 = 4004.$$

□

Ejercicio. 2.24.
Determina el valor de $\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

SOLUCIÓN. Vamos a considerar ω una raíz del polinomio $X^2 + X + 1$; observa que se verifica $\omega + \omega^2 + 1 = 0$, y también que ω es una raíz cúbica de la unidad, esto es, $\omega^3 = 1$.
Consideramos los desarrollos:

$$(1+1)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k},$$

$$(1+\omega)^{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}\omega + \sum_{3k+2}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}\omega^2,$$

$$(1+\omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}\omega^2 + \sum_{3k+2}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}\omega,$$

La suma $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$ es igual a la suma $\sum_{3k+2}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$, ya que $(3k+1)+3(n-k-1)+2 = 3n$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Tenemos $(1+1)^{3n} = 2^{3n}$; $(1+\omega)^{3n} = ((-\omega^2)^3)^n = (-1)^n = (1+\omega^2)^{3n}$. Por lo tanto, si sumamos estas tres expresiones, de los miembros de la derecha los únicos términos que sobreviven son los que tienen $3k$, entonces:

$$2^{3n} + 2(-1)^n = 3\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k},$$

de donde $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{2^{3n}+2(-1)^n}{3} = \frac{8^n+2(-1)^n}{3}$. □

Ejercicio. 2.25.
Prueba que para cada entero positivo n se verifica

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{3k} \leq \frac{1}{3}(2^n + 2).$$

SOLUCIÓN. Consideramos la función $F(X) = (1+X)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$, y ω una raíz cúbica primitiva de la unidad, esto es, una raíz del polinomio X^2+X+1. Se verifica:

$$\begin{aligned}
F(1)+F(\omega)+F(\omega^2) &= \tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}+\cdots\\
&\quad+\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}\omega+\tbinom{n}{2}\omega^2+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}\omega+\cdots\\
&\quad+\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}\omega^2+\tbinom{n}{2}\omega+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}\omega^2+\cdots\\
&= 3\left(\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{6}+\cdots\right) = 3\sum_{k\geq 0}\tbinom{n}{3k}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\tbinom{n}{3k} &= \tfrac{1}{3}\left(F(1)+F(\omega)+F(\omega^2)\right)\\
&= \tfrac{1}{3}\left(2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n\right)\\
&= \tfrac{1}{3}\left(2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n\right)\\
&= \tfrac{1}{3}\left(2^n+(-1)^n\omega^{2n}+(-1)^n\omega^n\right)\\
&= \tfrac{1}{3}\left(2^n+(-1)^n(\omega^{2n}+\omega^n)\right)
\end{aligned}$$

Veamos los diferentes valores que puede tomar:

n	$\frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^n(\omega^{2n}+\omega^n)\right)$
$n\equiv 0 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n+2) \leq \frac{1}{3}(2^n+2)$
$n\equiv 1 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n+1) < \frac{1}{3}(2^n+2)$
$n\equiv 2 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n-1) < \frac{1}{3}(2^n+2)$
$n\equiv 3 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n-2) < \frac{1}{3}(2^n+2)$
$n\equiv 4 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n-1) < \frac{1}{3}(2^n+2)$
$n\equiv 5 \pmod 6$	$\frac{1}{3}(2^n+1) < \frac{1}{3}(2^n+2)$

□

Ejercicio. 2.26.
Dada la ecuación $X+Y+Z+T=13$, determinar cuántas soluciones tiene en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

SOLUCIÓN. Este problema se puede interpretar como colocar un total de 13 bolas en cuatro cajas: U_1, U_2, U_3 y U_4, y como hemos visto, el número de posibles distribuciones en el número de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de 13 en 13. El valor es:

$$\binom{13+4-1}{4-1} = \binom{13+4-1}{13} = \binom{16}{3} = 560.$$

$\square$

En general podemos enunciar

Proposición. 2.27.
Dada la ecuación $X_1 + \cdots + X_k = n$, el número de soluciones en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es:

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Una variación es este tipo de ejercicios se tiene cuando se consideran sólo las soluciones positivas.

Ejercicio. 2.28.
Dada la ecuación $X + Y + Z + T = 13$, determinar cuántas soluciones enteras positivas tiene.

SOLUCIÓN. Este problema se puede interpretar como colocar un total de 13 bolas en cuatro cajas: U_1, U_2, U_3 y U_4, colocando al menos una bola en cada caja. Tenemos pues $13 - 4 = 9$ bolas que repartir en las cuatro cajas. Este problema es idéntico al anterior, y si solución es el número de posibles distribuciones en el número de combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de 9 en 9. El valor es:

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{3} = 220.$$

$\square$

En general podemos enunciar

Proposición. 2.29.
Dada la ecuación $X_1 + \cdots + X_k = n$, el número de soluciones en el conjunto $\mathbb{N}^*$ de los números naturales positivos es:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Finalmente podemos calcular en número de soluciones de la ecuación en las que al menos uno de los valores es igual a cero; la solución será la diferencia entre los valores antes determinados:

$$560 - 220 = 340.$$

Ejercicio. 2.30.
Dada la ecuación $X + Y + Z + T = 13$, determinar cuántas soluciones tiene en los números naturales de forma que al menos un valor es igual a cero.

La Proposición (2.29.), y los anteriores resultados se puede generalizar en el siguiente sentido.

Proposición. 2.31.
Dada la ecuación $X_1 + \cdots + X_k = n$, el número de soluciones enteras (!), verificando $x_i \geq h_i$, para $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{Z}$ es:

$$\binom{(n - (h_1 + \cdots + h_t)) + k - 1}{k - 1}$$

DEMOSTRACIÓN. Si definimos $Y_i = X_i - h_i$, para $i = 1, \ldots, k$, la ecuación del enunciado se escribe en la siguiente forma:

$$Y_1 + \cdots + Y_k = n - (h_1 + \cdots + h_k).$$

Observa que como $x_i \geq h_i$, se tiene $x_i - h_i \geq 0$, y por tanto en una solución se tendría $y_i = x_i - h_i \geq 0$, luego las soluciones a la ecuación son enteros no negativos (números naturales); en particular debe de ser $n - (h_1 + \cdots + h_k) \geq 0$. De aquí se deduce que si éste último número fuese negativo, la ecuación no tendría soluciones verificando las condiciones impuestas.

$\square$

Ejercicio. 2.32.
Dados enteros positivos n y k, estamos interesados en el siguiente problema: Determinar el número de k–uplas $(x_1, \ldots, x_k)$ que podemos formar de manera que $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k \leq n$.

SOLUCIÓN. (1). Vamos a buscar un modelo que nos permita resolver el problema. Tenemos que utilizar números del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, pot lo tanto primero elegimos t elementos distintos de este conjunto; si $1 \leq t \leq k$. Una vez ordenados estos números, repitiendo algunos de estos números podremos obtener una k–upla admisible, por ejemplo basta repetir el último $k-t$ veces más. Pero esta no es la única forma de obtener k–uplas admisibles.

Veamos el método general. Podemos considerar que tenemos k cajas ordenadas en una fila; tenemos que descomponer esta lista en t bloques y rellenar el primer bloque con el primer número, el segunda bloque con el segundo número, el tercer bloque ... Podemos ahora contar de cuantas formas podemos hacer estos bloques, para ello basta colocar $t-1$ separadores en la lista de k cajas; tenemos que elegir $t-1$ elemento de $k-1$ (los espacios entre cajas). El número es $\binom{k-1}{t-1}$. Como los t números se pueden elegir de $\binom{n}{t}$ formas distintas, en resultado es $\binom{k-1}{t-1}$ *inomnt*. Ya sólo basta suma según los valores de t.

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{k-1}{t-1}\binom{n}{t}=\sum_{t=0}^{k}\binom{k-1}{k-t}\binom{n}{t}=\binom{n+k-1}{k}.$$

(2). Una forma alternativa de resolver este problema es hacer una cambio de variables; si definimos nuevas variables

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2+1, \quad \dots \quad y_k = x_k+(k-1)$$

Ahora podemos elegir una k–upla $(y_1,\dots,y_k)$ en el conjunto $\{1,\dots,n,n+1,\dots,n+(k-1)\}$, y por tanto el total de k que podemos formar es: $\binom{n+k-1}{k}$.

Esto prueba que la relación $\sum_{t=0}^{k}\binom{k-1}{t-1}\binom{n}{t}=\sum_{t=0}^{k}\binom{k-1}{k-t}\binom{n}{t}=\binom{n+k-1}{k}$, antes mencionada, es cierta. □

Pensar en el siguiente problema.

Ejercicio. 2.33.
Dada la ecuación $X_1+\cdots+X_k=n$, determinar el número de soluciones $(x_1,\dots,x_k)$, formadas por números enteros positivos, que verifican $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_k$.

3. El principio de inclusión–exclusión

El "principio de inclusión–exclusión" es una herramienta que nos permite contar los elementos de una unión finita de conjuntos finitos no necesariamente disjuntos. Recogemos este resultado en la siguiente proposición.

Proposición. 3.1. (Principio de inclusión–exclusión)
Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ conjuntos finitos. Entonces, si llamamos $|S_i|$ al cardinal del conjunto S_i, se tiene que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |S_i\cap S_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |S_i\cap S_j\cap S_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n| \quad \text{(I.1)}$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que cada elemento de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ se cuenta una única vez por la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |S_i\cap S_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |S_i\cap S_j\cap S_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n| \quad \text{(I.2)}$$

Sea $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ y supongamos que a pertenece a exactamente r de los n conjuntos $S_1, S_2, \cdots, S_n$, entonces a se cuenta $\binom{r}{1}$ veces por la expresión $\sum_i |S_i|$; es contado $\binom{r}{2}$ veces por la expresión $\sum_{i,j} |S_i\cap S_j|$; y en general, es contado $\binom{r}{m}$ veces por la expresión $\sum_{i_1,\ldots,i_m} |S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_m}|$. De este modo, el número de veces que será contado dicho elemento por la expresión (I.2) es:

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r} = 1 - \left[\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \cdots + (-1)^r\binom{r}{r}\right] = 1 - 0 = 1.$$

□

Corolario. 3.2.
Sea S un conjunto finito y $P_1, P_2, \ldots, P_n$ propiedades que cada uno de los elementos de S puede o no satisfacer. Denotemos por $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k})$ al número de elementos de S que

verifican las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$, por $N(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n)$ al número de elementos que no verifican ninguna de las propiedades y por N al cardinal de S, entonces

$$N(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1\leq i\leq j\leq n} N(P_i, P_j) - \sum_{1\leq i\leq j\leq k\leq n} N(P_i, P_j, P_k) - \cdots + (-1)^n N(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Un caso particular el principio de inclusión–exclusión se tiene cuando los conjuntos S_i son disjuntos dos a dos; en este se la fórmula en (I.1) es: $\left|\bigcup_{i=1}^n S_i\right| = \sum_{i=1}^n |S_i|$. Llamamos a este resultado “principio de la suma”.

Proposición. 3.3. (Principio de la suma)
Si $S_1, \ldots, S_n$ son subconjuntos disjuntos de un conjunto S, se verifica:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$$

Ejercicio. 3.4.
¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son múltiplos de 2 ó de 3?

SOLUCIÓN. Llamamos S al conjunto de los enteros positivos menores que 120, $S_2 = \{x \in S \mid 2 \text{ divide a } x\}$, y $S_3 = \{x \in S \mid 3 \text{ divide a } x\}$. Tenemos que contar los elementos del conjunto $S_2 \cup S_3$, y en este caso tenemos:

$$|S_2 \cup S_3| = |S_2| + |S_3| - |S_2 \cap S_3|.$$

Como se tiene $S_2 = \{2k \mid 1 \leq k < 60\}$, entonces $|S_2| = 59$; $S_3 = \{3k \mid 1 \leq k < 40\}$, entonces $|S_3| = 39$, y $S_2 \cap S_3 = \{6k \mid 1 \leq k < 20\}$, entonces $|S_2 \cap S_3| = 19$. Como consecuencia: $|S_2 \cup S_3| = |S_2| + |S_3| - |S_2 \cap S_3| = 59 + 39 - 19 = 79$. □

Ejercicio. 3.5.
¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son primos?

SOLUCIÓN. Los números primos que aportarán números compuestos son: 2, 3, 5 y 7, ya que $11^2 = 121 > 120$. Podemos entonces calcular los números primos menores que 120 que son múltiplos de 2, 3, 5, ó 7; el número de elementos de este conjunto es:

$$\begin{aligned}
|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = {} & (|S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|) - (|S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_5| + |S_2 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5| \\
& + |S_3 \cap S_7| + |S_5 \cap S_7|) + (|S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7| + \\
& |S_3 \cap S_5 \cap S_7|) - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7| \\
= {} & (\lfloor \tfrac{120-1}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{3} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{5} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{7} \rfloor) - (\lfloor \tfrac{120-1}{6} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{10} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{14} \rfloor \\
& + \lfloor \tfrac{120-1}{15} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{21} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{35} \rfloor) + (\lfloor \tfrac{120-1}{30} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{42} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{70} \rfloor + \lfloor \tfrac{120-1}{105} \rfloor) \\
& - \lfloor \tfrac{120-1}{210} \rfloor \\
= {} & 138 - 53 + 7 - 0 = 92.
\end{aligned}$$

De éstos tenemos que excluir los números 2, 3, 5 y 7, y como el número 1 no es primo, el número de enteros primos positivos menores que 120 es: $119 - (92 - 4) - 1 = 30$. Podemos comprobar el resultado, ya que los enteros primos pedidos son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,$$
$$67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.$$

□

Ejercicio. 3.6.
¿Cuántos enteros positivos, menores o iguales que 10 000 000, hay que sean múltiplos de 3 ó de 7?

SOLUCIÓN. Llamamos S al conjunto de números enteros positivos menores que 10 000 000. Se tiene $|S| = 10\,000\,000$. Llamamos S_t al subconjunto de S formado por los números que son múltiplos de t; se tiene $|S_3| = \lfloor \frac{10000000}{3} \rfloor = 3\,333\,333$, $|S_7| = \lfloor \frac{10000000}{7} \rfloor = 1\,428\,591$ y

$S_{21} = \lfloor \frac{10000000}{21} \rfloor = 476\,190$. El conjunto de los números menores o iguales que 10 000 000 que son múltiplos de 3 ó de 7 es: $S_3 \cup S_7$, que tiene

$$|S_3 \cup S_7 = |S_3| + |S_7| - |S_3 \cap S_7| = 3,333\,333 + 1\,428\,591 - 476\,190 = 4\,285\,714.$$

elementos. □

Ejercicio. 3.7.
El conjunto de los alumnos de una clase está formado por 10 mujeres y 9 hombres, se quiere elegir un equipo de 6 personas entre las que haya al menos un hombre y una mujer. ¿De cuántas formas se podrá formar el equipo?

SOLUCIÓN. Primero calculamos el número de equipos en los haya únicamente mujeres; es: $\binom{10}{6}$, y ahora el número de equipo en los que haya únicamente hombres; es: $\binom{9}{6}$. Como el número total de equipos es $\binom{19}{6}$; por el principio de la suma, el número pedido es: $\binom{19}{6} - \binom{10}{6} - \binom{9}{6} = 26\,838$. □

Tres tipos de números.

Ejercicio. 3.8.
Un número se llama ***rumboso*** *si todas sus cifras están ordenadas de menor a mayor de izquierda a derecha. Por ejemplo el número 247 es rumboso, y el número 231 no lo es. ¿Cuántos números rumbosos de cuatro cifras podemos construir?*

Ejercicio. 3.9.
Un número se llama ***aburrido*** *si todas sus cifras, salvo a lo más una de ellas, son iguales. Por ejemplo todo número de una y dos cifras es aburrido; los números 877 ó 7877 so aburridos, y el número 8778 no lo es. ¿Cuántos números aburridos de cuatro cifras podemos construir?*

Ejercicio. 3.10.
Un número se llama ***inquieto*** *si dos cifras contiguas son siempre distintas. Por ejemplo los números 7, 18, 181, ó 1234 son números inquietos, en cambio el 188 no lo es. ¿Cuántos números inquietos de cuatro cifras podemos construir?*

Llamamos una **reordenación** de una lista a otra lista que tiene exactamente los mismos elementos, y llamamos **desordenación** de una lista a una lista que contiene los mismos elementos pero ninguno ocupa la posición que ocupaba en la lista original. Por ejemplo, dada la lista $\{A, B, C\}$ reordenaciones son: ABC, BCA ó BAC, y desordenaciones son BCA ó CAB, pero no BAC ó ABC.

Ejercicio. 3.11.
Calcula las reordenaciones y las desordenaciones de las listas

(1) $\{A, B\}$.

(2) $\{A, B, C\}$.

(3) $\{A, B, C, D\}$.

(4) $\{A, B, C, D, E\}$.

Ejercicio. 3.12.
¿Cuántas reordenaciones de la lista $\{A, B, C, D\}$ *existen en las que:*

(1) B ocupe siempre la posición segunda,

(2) B no ocupe la posición segunda,

(3) A no ocupe las posiciones primera o segunda,

(4) A no ocupe las posiciones primera o segunda ni B ocupe las posiciones primera o tercera,

(5) A no ocupe la posición primera, B no ocupe la posición segunda, C no ocupe la posición tercera y D no ocupe la posición cuarta.

Ejercicio. 3.13. (Permutaciones circulares)
Un problema clásico es determinar la forma en que se pueden ordenar n personas alrededor de un círculo.

SOLUCIÓN. Si tenemos n personas que queremos ordenar alrededor de un círculo, basta con elegir una de ellas y asignarle un lugar; el resto de podrían ordenar en el sentido de las agujas del reloj a partir de esta que ya está fija. Tenemos por tanto $(n-1)!$ posibilidades distintas.

□

Ejercicio. 3.14.
Vamos a jugar al dominó.

(1) Recuerda que una ficha de dominó está formada por dos cuadrados y cada uno de ellos contiene un número del cero a seis. Como podemos girar la ficha el orden en el que aparecen estos números es irrelevante, pero recuerda que en una ficha puede haber dos números iguales. Determinada el número total de fichas de un juego de dominó.

(2) Normalmente cada jugador dispone de siete fichas para el juego, vamos a llamar a cada uno de ellos un juego. ¿Cuñantos juegos distintos hay?

(3) ¿Cuántos juegos distintos tienen exactamente dos fichas dobles?

(4) ¿Cuántos juegos distintos tienen al menos dos fichas dobles?

SOLUCIÓN. (1). El número de fichas en las que los dos números son distintos es $\binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 7 \times 3 = 21$. Las fichas que tienen los dos números iguales son 7. En total el número de fichas distintas es: 28.
(2). Basta considerar el número combinatorio $\binom{28}{7} = 1\,184\,040$.
(3). Primero averiguamos de cuántas formas distintas se pueden tener dos fichas dobles: $\binom{7}{2} = 21$. Ahora sólo falta ver de cuántas formas distintas se pueden elegir las restantes cinco fichas: $\binom{21}{5} = 20\,349$. El número total es: 427 329.
(4). Basta contar los juegos que tienen dos, tres, cuatro, ..., fichas dobles. Para dos este número es: $\binom{7}{2}\binom{21}{5}$; para t será $\binom{7}{t}\binom{21}{7-t}$, y luego sumamos todos ellos. El resultado es:

$$\binom{7}{2}\binom{21}{5} + \binom{7}{3}\binom{21}{3} + \binom{7}{4}\binom{21}{4} + \binom{7}{5}\binom{21}{2} + \binom{7}{6}\binom{21}{1} + \binom{7}{7}\binom{21}{0}$$

$$= 427\,329 + 209\,475 + 46\,550 + 4\,410 + 147 + 1 = 687\,912.$$

□

Ejercicio. 3.15. (Dominó triangular)
Se trata ahora de diseñar un nuevo juego: el dominó triangular; aunque mejor llamarlo triminó. Cada ficha es un triángulo equilátero que por una de sus caras de completamente negra, y blanca por la otra; en ésta aparecen, en los vértices tres números del cero al seis.

(1) ¿Cuántas fichas distintas tiene un triminó? Observa que las fichas del triminó las podemos girar, manteniendo la cara negra sobre la mesa, pero si las volteamos vemos sólo la cara negra. Este significa que cada ficha permanece invariante antes rotaciones, pero no por simetría.

(2) ¿Cuantas de ellas tienen los tres números distintos?

(3) Con los tres números iguales hay exactamente siete, por tanto, ¿con sólo dos números iguales hay?

4. Bolas y cajas

En este capítulo vamos a estudiar el problema del reparto de bolas, sean éstas distinguibles (numeradas) o no, en cajas, también éstas distinguibles (numeradas), o no.

Trataremos pues de completar el siguiente cuadro:

k Bolas $\downarrow$ $-n$ Cajas $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas		
No numeradas		

Y de forma análoga completaremos el cuadro correspondiente al mismo reparto, pero esta vez imponiendo la condición de que cada caja contenga al menos una bola.

k Bolas $\downarrow$ $-n$ Cajas no vacías $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas		
No numeradas		

4.1. k bolas numeradas en n cajas numeradas.

Es un ejemplo del principio del producto; la bola número 1 puede ir a cualquier caja, luego hay n posibilidades; lo mismo ocurre para la bola 2, la bola 3, etc. El resultado es: n^k.

k Bolas $\downarrow$ $-n$ Cajas $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	n^k	
No numeradas		

Si imponemos la condición de que no haya cajas vacías la situación es completamente distinta. Vamos a llamar X al conjunto de casos en los que las k bolas se distribuyen en las n cajas: $|X| = n^k$. Ahora consideramos X_i el conjunto de casos en los que la caja número i está vacía; es claro que $|X_i| = (n-1)^k$. Observa que los casos que tenemos que considerar son los del conjunto $X \setminus \cup_{i=1}^n X_i$; para lo que tendremos que calcular el número de elementos de las intersecciones $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_t}$, para $i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, n\}$. Pero, como en el caso de X_i, se tiene $|X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_t}| = (n-t)^k$. Como consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned}
|X| - \left|\cup_{j=1}^n X_j\right| &= n^k - \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} |X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_j}|\right) \\
&= n^k - \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} (n-j)^k\right) \\
&= n^k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.
\end{aligned}$$

k Bolas $\downarrow -n$ Cajas no vacías $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$	
No numeradas		

4.2. k bolas no numeradas en n cajas numeradas.

Este es el caso de las combinaciones con repetición; las n cajas numeradas podemos representarlas por $n-1$ separadores en la forma

$$|\,,|\,,\dots,|\,,|$$

Ahora cada reparto de las k bolas consiste en distribuir éstas entre los separadores anteriores, indicando el número de bolas a la izquierda del primer separador el número de bolas en la primera caja, y así para las restantes. Tenemos pues que ordenar $k+n-1$ objetos de los cuales k son iguales y $n-1$ son también iguales; por lo tanto el número buscado es:

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}=\binom{k+n-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}=CR_{n,k}.$$

k Bolas $\downarrow -n$ Cajas $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	n^k	
No numeradas	$CR_{n,k}=\binom{k+n-1}{n-1}$	

El caso en el que no hay cajas vacías es sencillo, ya que basta considerar la misma situación, en cuanto a separadores, colocar una bola en cada caja, y ver cómo se pueden distribuir las restantes $k-n$ bolas. Tenemos pues:

$$CR_{n,k-n}=\binom{k-n+n-1}{n-1}=\binom{k-1}{n-1}.$$

k Bolas $\downarrow -n$ Cajas no vacías $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$	
No numeradas	$\binom{k-1}{n-1}$	

4.3. k bolas no numeradas en n cajas no numeradas.

Para estudiar este problema consideramos un conjunto X con k elementos; dada una partición de X en n conjuntos no vacíos: $X_1, \ldots, X_n$, para cada X_i consideramos los $|X_i|$ y la n–upla $(|X_1|, \ldots, |X_n|)$. Para cada n–upla $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^*$, llamamos **tipo** de a a la n–upla $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$,formada por los a_i de forma que $a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_n}$. Observa que cada distribución de k bolas no numeradas en n cajas no numeradas corresponde a un tipo de una partición de un conjunto de k elementos formada por n conjuntos no vacíos. Llamamos $\Pi(k, n)$ an número de tipos de particiones de un conjunto de k elementos formadas por n conjuntos.

Si $k = 4$ los tipos de particiones en dos conjuntos son: $(1, 3)$ y $(2, 2)$, luego $\Pi(4, 2) = 2$; y si $k = 6$ y $n = 3$, los tipos de particiones son: $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$, luego $\Pi(6, 3) = 3$.

Si hacemos variar n podemos definir $\Pi(k) = \sum_{n=1}^{k} \Pi(k, n)$, que es el número de tipos de particiones de un conjunto de k elementos.

Ahora el problema es determinar el valor de $\Pi(k, n)$; para esto nos pueden ayudar las siguientes relaciones:

Proposición. 4.1.
(1) $\Pi(k, n) = 0$ *si* $n > k$.

(2) $\Pi(k, n) = \Pi(k, 1) = 1$.

(3) $\Pi(k) = \Pi(2k, k)$

(4) $\Pi(k, n) = \sum_{i=1}^{n} \Pi(k - n, i)$.

(5) $\Pi(k, n) = \Pi(k - 1, n - 1) + \Pi(k - n, n)$

DEMOSTRACIÓN. (1), (2). Son inmediatos.

(3). Dado un tipo $(a_1, \ldots, a_k)$ de una partición de $2k$ en k subconjuntos, tenemos que $(a_1 - 1, \ldots, a_k - 1)$, eliminando las componentes nulas, es un tipo de una partición de k. Por otro lado de cada tipo $(a_1, \ldots, a_i)$ de una partición de k, podemos completar $(1, \ldots, a_1 + 1, \ldots, a_i + 1)$, un tipo de una partición de $2k$ en k subconjuntos.

(4). Para cada tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ de una partición de k en n subconjuntos, tenemos que $(a_1 - 1, \ldots, a_n - 1)$, eliminando las componentes nulas, es un tipo de una partición de $k - n$. De cada tipo $(a_1, \ldots, a_i)$, con $i \leq n$, de una partición de $k - n$ podemos obtener $(1, \ldots, a_1 + 1, \ldots, a_n + 1)$, un tipo de una partición de k en n subconjuntos.

(5). Dado un tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ de una partición de k en n subconjuntos; si $a_1 = 1$ podemos considera $(a_2, \ldots, a_n)$, que es un tipo de una partición de $k - 1$ en $n - 1$ subconjuntos; si $a_1 \neq 1$, entonces $(a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1)$ es una tipo de partición de $k - n$ en n subconjuntos. □

Podemos pues completar la siguiente tabla:

k Bolas $\downarrow -n$ Cajas no vacías $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$	
No numeradas	$\binom{k-1}{n-1}$	$\Pi(k,n)$

Para estudiar el caso en el que pueden quedar cajas vacías basta con agregar n bolas, que se repartirán una a cada caja, así el problema queda reducido al ya resuelto; teniendo pues la siguiente tabla:

k Bolas $\downarrow -n$ Cajas $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	n^k	
No numeradas	$CR_{n,k}=\binom{k+n-1}{n-1}$	$\Pi(k+n,n)$

4.4. k bolas numeradas en n cajas no numeradas.

Si tenemos k bolas numeradas y n cajas no numeradas y repartimos las bolas en las cajas, vamos a considerar primero el caso en el que no hay cajas vacías. Este problema ya lo habíamos resuelto cuando las cajas no estaban numeradas; el valor obtenido era $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$. Observa que basta con borrar el número de cada caja, es decir, no considerar el orden, esto es, tendremos que dividir por n! De forma que el valor que estamos buscando es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{(n-j)^k}{j!\,(n-j)!}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{(n-j)^k}{j!\,(n-j)!} \quad [h=n-j]\\
&= \sum_{h=n}^{1}(-1)^{n-h}\frac{h^k}{h!\,(n-h)!}\\
&= \sum_{h=1}^{n}(-1)^{n-h}\frac{n!\,h^k}{h!\,(n-h)\,n!}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{n-h}\frac{n!\,h^k}{h!\,(n-h)}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{n-h}\binom{n}{h}\,h^k\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{h=0}^{n}(-1)^{n-h}\binom{n}{h}\,h^k.\\
\\
&= \sum_{h=0}^{n}(-1)^{n-h}\frac{h^{k-1}}{(h-1)!\,(n-h)!}.
\end{aligned}$$

Llamamos a este número el número de Stirling de segunda clase, y lo representamos por $\left\{ k \atop n \right\}$.
Necesitamos ahora algunas propiedades de estos números para poder calcularlos.

Proposición. 4.2.
Se verifica:

(1) $\left\{ k \atop 1 \right\} = 1 = \left\{ k \atop k \right\}$.

(2) $\left\{ k \atop n \right\} = \left\{ k-1 \atop n-1 \right\} + n\left\{ k-1 \atop n \right\}$.

DEMOSTRACIÓN. (1). Es inmediato, ya que si tenemos k bolas numeradas y una sola caja, sólo hay una posible distribución. En cambio si disponemos de k cajas, como éstas no están numeradas, también hay una única posible distribución.

(2). Si tenemos k bolas numeradas y n cajas, consideramos la bola k–ésima y la retiramos. Si ésta bola era la única de una caja; las $k-1$ restantes se pueden distribuir de $\left\{ {k-1 \atop n-1} \right\}$ formas distintas. En cambio si no es la única, el resto de las bolas se pueden distribuir de $\left\{ {k-1 \atop n} \right\}$ formas distintas; y como tenemos n posibilidades para colocar esta bola, una por cada caja, tendremos $n\left\{ {k-1 \atop n} \right\}$ formas distintas. El resultado será: $\left\{ {k-1 \atop n-1} \right\} + n\left\{ {k-1 \atop n} \right\}$. □

Tenemos entonces:

k Bolas $\downarrow$ $-n$ Cajas no vacías $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k$	$\left\{ {k \atop n} \right\}$
No numeradas	$\binom{k-1}{n-1}$	$\Pi(k,n)$

Cuando no imponemos la condición de que no haya cajas vacías consideramos los casos excluyentes en los que tenemos una, dos , tres, ..., n cajas, en ningún caso ninguna vacía; por lo tanto el número requerido es:

$$\left\{ {k \atop 1} \right\} + \left\{ {k \atop 2} \right\} + \cdots + \left\{ {k \atop n} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}.$$

La tabla queda pues:

k Bolas $\downarrow$ $-n$ Cajas $\rightarrow$	Numeradas	No numeradas
Numeradas	n^k	$\sum_{i=1}^{n}\left\{ {k \atop i} \right\}$
No numeradas	$CR_{n,k} = \binom{k+n-1}{n-1}$	$\Pi(k+n,n)$

Capítulo II

Funciones generatrices

5. Introducción a las funciones generatrices

El método simbólico es un procedimiento de representación o, si se quiere, de codificación, que aplicaremos al análisis de las soluciones de familias de problemas combinatorios, como por ejemplo, cuántos multiconjuntos[1] de determinadas características podemos formar con n elementos. Aquí n es el índice de la familia en cuestión; cada valor de n nos sitúa ante un problema distinto, pero estos problemas están, claro, muy relacionados. Nuestro objetivo es trabajarlos todos a la vez, codificándolos en un único objeto, que sera una serie de potencias.

Particiones de enteros, composiciones, permutaciones, etc., son ejemplos de estas familias. En todas ellas veremos la utilidad del método simbólico; pero ahora, para descubrir el método, vamos a centrarnos en multiconjuntos.

Recordemos que el número de k-multiconjuntos, multiconjuntos con $k \geq 0$ elementos, que se pueden formar con elementos del conjunto no vacío $\{1, 2, \ldots, n\}$ está dado por el número combinatorio

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{\text{multiconjuntos con } k}{\text{elementos de } \{1,2,\ldots,n\}}, \quad n \geq 1,\ k \geq 0. \quad \text{(II.1)}$$

Podríamos también imponer condiciones a los multiconjuntos (por ejemplo que el elemento 1 aparezca un número determinado de veces, o que los elementos se repitan a lo sumo un número de veces, ...). Si reflexionamos sobre el argumento combinatorio que nos da la fórmula anterior nos damos cuenta de que no es fácil hacer estos cálculos. Sin embargo el método simbólico nos permitirá, por lo menos, representarlos de manera ágil y flexible.

Empecemos estudiando un ejemplo. Consideramos el conjunto $\{1, 2, 3\}$. Nos interesan todos los multiconjuntos distintos que se pueden formar con los elementos de $\{1, 2, 3\}$ en los que el 1 aparece a lo sumo dos veces, el 2 a lo sumo una vez y el 3 a lo sumo dos veces. Para ver cómo tenemos que trabajar hagamos un listado de todos los multiconjuntos que cumplen estas condiciones:

[1]Empleamos la palabra multiconjunto en contraposición a conjunto, ya que en aquellos podemos encontrarnos con elementos repetidos, por ejemplo $\{1, 1, 2\}$, algo que es imposible si trabajamos con conjuntos.

$$\text{Muticonjuntos} = \begin{cases} \text{tamaño 0:} & \emptyset \\ \text{tamaño 1:} & \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \\ \text{tamaño 2:} & \{1,1\} \quad \{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{2,3\} \quad \{3,3\} \\ \text{tamaño 3:} & \{1,1,2\} \quad \{1,1,3\} \quad \{1,2,3\}\,\{1,3,3\}\,\{2,3,3\} \\ \text{tamaño 4:} & \{1,1,2,3\}\,\{1,1,3,3\}\,\{1,2,3,3\} \\ \text{tamaño 5:} & \{1,1,2,3,3\} \end{cases}$$

Observamos que todos estos multiconjuntos se pueden describir de forma compacta e informativa de la siguiente manera:

$$\{1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 2, \;\; 0 \leq \beta \leq 1, \;\; 0 \leq \gamma \leq 2$$

donde α indica el número de veces que aparece el elemento 1 en el multiconjunto; β el número de veces que lo hace el 2 y γ, el 3.
Por otro lado, si consideramos el producto de polinomios

$$(1 + X_1 + X_1^2)(1 + X_2)(1 + X_3 + X_3^2),$$

lo desarrollamos y agrupamos los términos según su grado total (la suma de los grados con que aparezcan las variables X_1, X_2, X_3), obtenemos:

$$\text{Sumandos} = \begin{cases} \text{grado 0:} & 1 \\ \text{grado 1:} & X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\ \text{grado 2:} & X_1^2 \quad X_1X_2 \quad X_1X_3 \quad X_2X_3 \quad X_3^2 \\ \text{grado 3:} & X_1^2X_2 \quad X_1^2X_3 \quad X_1X_2X_3 \quad X_1X_3^2 \quad X_2X_3^2 \\ \text{grado 4:} & X_1^2X_2X_3 \quad X_1^2X_3^2 \quad X_1X_2X_3^2 \\ \text{grado 5:} & X_1^2X_2X_3^2 \end{cases}$$

en donde todos los sumandos son de la forma:

$$X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma, \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 2, \; 0 \leq \beta \leq 1, \; 0 \leq \gamma \leq 2. \tag{II.2}$$

Por lo tanto los multiconjuntos y los monomios están en biyección, y basta con dar una lista de tres números: (α, β, γ), que cumplan las restricciones señaladas en (II.2), para tener, en un caso, un multiconjunto admisible, y en el otro un sumando en el desarrollo del polinomio. La biyección está establecida por

$$X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma \mapsto \{1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma\} = \{1, \overset{\alpha}{\ldots}, 1, 2, \overset{\beta}{\ldots}, 2, 3, \overset{\gamma}{\ldots}, 3\}.$$

Donde el grado total de cada monomio coincide con el tamaño del multiconjunto que tiene asociado.
La esencia el método simbólico consiste en trasladar el problema de contar el número de multiconjuntos de un tipo dado al problema de contar cuántos términos de un cierto grado total aparecen en el desarrollo de un producto de polinomios ó series.

Una observación útil es la siguiente. Si lo que nos interesa es el número de multiconjuntos con una determinadas características, y no una lista con todos ellos, podríamos, en el producto

$$(1 + X_1 + X_1^2)(1 + X_2)(1 + X_3 + X_3^2)$$

tomar $X_1 = X_2 = X_3 = X$, y por tanto todos los monomios de grado k aparecen como X^k: el coeficiente de X^k en

$$(1 + X + X^2)(1 + X)(1 + X + X^2),$$

que indicará cuántos k–multiconjuntos hay con las restricciones impuestas.

Podemos ahora formular la idea que se oculta tras estos desarrollos y que consiste en contar el número de multiconjuntos que se pueden formar con los elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ en los que el elemento j aparece, a lo sumo, r_j veces.

Proposición. 5.1.
Dado el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ consideramos las variables $X_1, \dots, X_n$. Si el número de apariciones permitidas del elemento j varía entre 0 y r_j, consideramos el polinomio en la variable X_j que tiene como sumandos todas la potencias de X_j, desde 0 hasa r_j. El número de k–multiconjuntos formados a partir de $\{1, 2, \dots, n\}$, en los que cada elemento j aparece, a lo sumo, r_j veces será el coeficiente de X^k en la expansión de

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + X + X^2 + \cdots + X^{r^j})$$

Si no queremos imponer restricciones sobre el número máximo de repeticiones de cada elemento deberemos considerar el producto de series formales:

$$(1 + X_1 + X_1^2 + \cdots)(1 + X_2 + X_2^2 + \cdots) \cdots (1 + X_n + X_n^2 + \cdots),$$

El resultado es una serie formal en la que sus términos controlan los multiconjuntos obtenidos a partir del conjunto $\{1, ..., n\}$.

Al igual que antes, si sustituimos cada una de las variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ por la única variable X, el coeficiente de X^k en la serie producto: $(1 + X + X^2 + ...)^n$ indica el número de multiconjuntos de tamaño k.

Ejercicio. 5.2.
Calcula el número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ que tienen tamaño k.

SOLUCIÓN. Como estamo hablando de conjuntos, sabemos que los elementos no parecen repetidos; tenemos pues que desarrollar el producto $(1 + X_1)(1 + X_2)(1 + X_3)\cdots(1 + X_n)$. Éste tiene 2^n sumandos, que se corresponden con los multiconjuntos obtenidos a partir del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en los que no está permitida la repetición. Si lo que se quiere calcular es el número de estos subconjuntos que tienen tamaño k, basta considerar $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ y considerar el coeficiente de X^k en la expansión de $(1 + X)^n$. □

Ejercicio. 5.3. (El cambio de monedas.)
Disponemos de monedas de dos, cinco, veinte y cincuenta céntimos de euro. Contar de cuántas maneras distintas podemos dar el cambio de diez euros.

SOLUCIÓN. En un cambio pueden entrar cero, una, dos, etc., monedas de dos céntimos. Llamemos P_2 al conjunto de todas las posibilidades de devolver monedas de dos céntimos.

$$P_2 \longrightarrow \quad \cancel{\textcircled{2}}\ \textcircled{2}\ \textcircled{2}\textcircled{2}\ \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2}\cdots$$

Hagamos lo mismo con las monedas de cinco céntimos.

$$P_5 \longrightarrow \quad \cancel{\textcircled{5}}\ \textcircled{5}\ \textcircled{5}\textcircled{5}\ \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\cdots$$

Supongamos, por el momento, que se nos permite dar cambio utilizando sólo monedas de dos y cinco céntimos; llamamos $P_{2,5}$ al conjunto de todas las posibilidades.

$$P_{2,5} \longrightarrow \quad \cancel{\textcircled{2}\textcircled{5}} \quad \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5} \quad \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5}\textcircled{5} \quad \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\cdots$$

Obsérvese que el orden de presentación de las monedas no importa.
Vamos a aritmetizar este proceso; asociamos a P_2 un polinomio en la variable X_2:

$$P_2(X_2) = 1 + X_2 + X_2^2 + X_2^3 + \cdots$$

En esta asociación el elemento de P_2 en el que no se devuelve ninguna moneda se corresponde con el término 1 del polinomio; aquel en el que se devuelve una moneda, con el término X_2, etc. Si podemos lo mismo para el caso de las monedas de cinco céntimos, se tiene el polinomio

$$P_5(X_5) = 1 + X_5 + X_5^2 + X_5^3 + \cdots$$

Esta representación será útil ya que podemos reproducir el álgebra de las monedas; es decir, la multiplicación de los polinomios $P_2(X_2)$ y $P_5(X_5)$ nos produce todas las configuraciones de monedas que se pueden obtener al mezclar los dos tipos.

$$P_2(X_2)P_5(X_5) = 1 + X_2 + X_5 + X_2^2 + X_2X_5 + X_5^2 + X_2^3 + X_2^2X_5 + X_2X_5^2 + X_5^3 + \cdots$$

ya que a cada configuración de monedas que puede aparecer le corresponde un término, y sólo uno, de este producto de polinomios. Por ejemplo, a dos monedas de dos céntimos y tres de cinco le corresponde el término $X_2^2 X_5^3$.
Podemos definir, de forma análoga, otros polinomios para cubrir el resto de los casos: para las monedas de veinte, el polinomio $P_{20}(X_{20})$, y para las de cincuenta, $P_{50}(X_{50})$. Tenemos que toda la información sobre las configuraciones de monedas que pueden aparecer usando los cuatro tipos está codificada en el producto de estos cuatro polinomios.

$$P_2(X_2)P_5(X_5)P_{20}(X_{20})P_{50}(X_{50}) = \prod_{j=2,5,20,50} (1 + X_j + X_j^2 + X_j^3 + \cdots)$$

Recordemos que lo que queríamos contar era de cuántas maneras se puede dar cambio de diez euros con estos cuatro tipos de monedas. Consideremos una configuración de monedas cualquiera, y su término asociado, que será de la forma:

$$X_2^a X_5^b X_{20}^c X_{50}^d,$$

donde a, b, c, d son enteros no negativos, que representa a la configuración en la que hay a monedas de dos céntimos, b de cinco, etc. Como su valor en céntimos es:

$$2a + 5b + 20c + 50d,$$

para resolver el problema de devolver diez céntimos tendremos que ver de cuántas maneras distintas se puede obtener

$$2a + 5b + 20c + 50d = 1000,$$

ya que 10 euros son 1000 céntimos. A la solución llegamos haciendo un cambio de variables; esta vez

$$\begin{aligned} X_2 &= X^2; \\ X_5 &= X^5; \\ X_{20} &= X^{20}; \\ X_{50} &= X^{50}, \end{aligned}$$

de manera que, por ejemplo, un factor X_i^{20} se convierte en X^{20i}. Tras este cambio, el producto de las cuatro series es:

$$(1 + X^2 + X^4 + \cdots)(1 + X^5 + X^{10} + \cdots)(1 + X^{20} + X^{40} + \cdots)(1 + X^{50} + X^{100} + \cdots)$$

Y el coeficiente del término de grado 1000 del desarrollo de este producto de polinomios es la respuesta a nuestra pregunta.
Nótese que en esta expansión están codificadas todas las respuestas a los posibles problemas de cambio de monedas con 2, 5, 20 y 50, y no sólo la que corresponde al cambio de 1000.

□

En este desarrollo hemos resuelto el siguiente problema:

Lema. 5.4.
Determina las soluciones enteras positivas de la ecuación $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k = n$*, siendo* $c_1, c_2, \ldots, c_k, n \in \mathbb{N}$ *números naturales.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el siguiente cambio de variables $X_i = X^{c_i}$; de esta forma cada solución de la ecuación aporta una unidad al coeficiente de X_n en el desarrollo de $\prod_{i=1}^{k}(1 + X^{c_i} + X^{2c_i} + \cdots)$. □

Ejercicio. 5.5.
Determina las soluciones enteras positivas de la ecuación $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 2013$.

SOLUCIÓN. Consideramos las series

$$\begin{array}{l} P_1(X) = \sum_{i=0}^{\infty} X^{2i} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + \cdots, \\ P_2(X) = \sum_{i=0}^{\infty} X^{3i} = 1 + X^3 + X^6 + X^9 + \cdots \text{ y} \\ P_3(X) = \sum_{i=0}^{\infty} X^{4i} = 1 + X^4 + X^8 + X^{12} + \cdots. \end{array}$$

Nos interesa el coeficiente de X^{2013} en este desarrollo. En este caso el valor es: 84 672. □

Ejercicio. 5.6.
Consideramos los números enteros del 1000 al 9999.
(1) ¿Cuántos es éstos números satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?
(2) ¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

SOLUCIÓN. (1). Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x+y+z+t = 9$ con $x \geq 1$ e $y, z, t \geq 0$? Por la teoría de funciones generatrices y sería el coeficiente de x^9 en el producto $(x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$, es decir, el coeficiente de x^9 en $x(1 - x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^8 en $x(1 - x)^{-4}$

$$-\binom{-4}{8} = \binom{11}{8} = C_{12,9}.$$

(2). Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x+y+z+t = 9$?, con x, y, z, t enteros positivos.

Por la teoría de funciones generatrices, este número es el coeficiente de x^9 en el producto $(x+x^2+x^3+\cdots)^4$, es decir, el coeficiente de x^9 en $x^4(1-x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-4}$ que es

$$-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5} = C_{8,5}.$$

□

Ejercicio. 5.7.
Sobre resolución de sistemas de ecuaciones con soluciones enteras no negativas.
(1) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=37 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{array}\right\}$$

(2) ¿Cuántas de éstas verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

SOLUCIÓN. (1). El número de soluciones de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=37$ es: $PR_{43;37,6}$. El número de soluciones de $x_1+x_2+x_3=6$ es: $PR_{8;6,2}=28$; por cada una de ellas hemos de resolver la ecuación $x_4+x_5+x_6+x_7=31$, que tiene $PR_{34;31,3}=5\,984$ soluciones. En total el número de soluciones es: $28\times 5\,984 = 167\,552$.
(2). ¿Cuántas de ellas verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$? Éste número es el coeficiente de x^6 en $(x+x^2+x^3+\ldots)^3$, que es el coeficiente de x^3 de $(1-x)^{-3}$, y por tanto éste es $-\binom{-3}{3}=\binom{5}{3}=10$. La solución es $10\times 5\,984 = 59\,840$. □

6. Funciones generatrices

El objetivo de esta sección es asociar series formales a sucesiones finita ó infinitas de números. Dada la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales, definimos una serie formal $F(X)$ mediante $F(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.

La serie $F(X)$ define una función formal, a la que llamamos **función generatriz** de la sucesión $\{a_n\}_n$, que asigna a cada número x el valor $F(x)$; una expresión formal. Es claro que $F(x)$ no es un número salvo que la serie converja, por lo tanto una función generatriz no es necesariamente una función sobre $\mathbb{R}$; sí lo será cuando restrinjamos a un entorno en el que la serie sea convergente. Por lo tanto no utilizaremos en general valores numéricos y sí los desarrollos formales, aunque podamos hacer uso de las propiedades de las funciones usuales en los entornos de convergencia.

Dada la serie $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, para indicar que a_n es el coeficiente de X^n podemos escribir $a_n = \mathrm{coef}_n[F(X)]$. Por ejemplo, y recordando algunos de los ejemplos que vimos en la sección anterior, el número de subconjuntos sin repetición de tamaño k que podemos formar con $\{1, 2, \cdots, n\}$ es el coeficiente k–ésimo de la serie de potencias (un polinomio, en realidad)

$$(1+X)^n.$$

El número de maneras de dar cambio de n céntimos de euro con monedas de 2, 5, 20 y 50 céntimos es el coeficiente $n-$ésimo de la serie de potencias

$$(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^5+X^{10}+\cdots)(1+X^{20}+X^{40}+\cdots)(1+X^{50}+X^{100}+\cdots)$$

Ejercicio. 6.1.
Determina la función generatriz de las siguientes sucesiones:

(1) $1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$

(2) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

(3) $1, 3, 3, 1, 0, 0, \ldots$

(4) $\binom{2013}{0}, \binom{2013}{1}, \binom{2013}{2}, \ldots, \binom{2013}{2013}, 0, 0, \ldots$

SOLUCIÓN. (1). Es $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + 0X * 5 + 0X^6 + \cdots = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.
(2). Es $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \cdots = \frac{1}{1-X}$.
(3). Es el desarrollo del binomio $(1+X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$.
(4). Por el desarrollo del binomio de Tartaglia es el desarrollo de $(1+X)^{2013}$. □

Funciones generatrices de suma conocida

Si conocemos la suma de una función generatriz; es decir, si tenemos realmente una función, entonces tenemos grandes ventajas. Por ejemplo, si resulta que que la serie de potencias $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ converge en un cierto intervalo $(-r, r)$ y conocemos la expresión de $F(X)$, entonces podremos evaluar la función, y cualquiera de sus derivadas, en valores de X que cumplan que $|X| < r$. Por ejemplo, podremos calcular los coeficientes mediante la fórmula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

que no es sino la fórmula de Taylor habitual. En cualquier caso este método de cálculo de coeficientes es poco práctico. De todo esto hablaremos en la siguiente sección, pero, por ahora, veamos algunos ejemplos.

Serie geométrica

El ejemplo básico es la suma de la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X},$$

que, desde el punto de vista analítico, sólo tiene sentido si $|x| < 1$. En este nuevo lenguaje, resulta que $\frac{1}{1-X}$ es la función generatriz de la sucesión infinita de unos:

$$\frac{1}{1-X} \quad \equiv \quad \{1\}_{n=0}^{\infty}.$$

En otras palabras, y con la notación que señalábamos antes, $\text{coef}_n \left[\frac{1}{1-X}\right] = 1$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ Por razones que pronto se harán evidentes, ésta será nuestra **serie de potencias básica**, tengámosla siempre en mente.

Función exponencial

Otra serie de potencias bien conocida es la que define la **función exponencial**, que ya expresamos de las formas habituales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X \quad \equiv \quad \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty};$$

o bien $\text{coef}_n[e^X] = \dfrac{1}{n!}$, para cada $n \geq 0$. Obsérvese que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{X^n}{n!}$ converge para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$.

Teorema del binomio

El teorema del binomio nos proporciona otro caso conocido de función generatriz. Sea $m \geq 1$, tenemos:

$$(1+X)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} X^n.$$

Esta representación es válida para todo $x \in \mathbb{R}$ porque, en realidad, la serie de potencias es un polinomio, ya que para $m \geq n$ los coeficientes binómicos son nulos:

$$(1+X)^m \quad \equiv \quad \left\{ \binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \cdots, \binom{m}{m}, 0, 0, \cdots \right\}.$$

Ejercicio. 6.2.
Calcula los coeficientes asociados a la función generatriz $F(X) = (1-X)^{-m-1}$, para un cierto $m \geq 0$ fijo.

SOLUCIÓN. Obsérvese que el caso $m = 0$ corresponde a la serie geométrica básica: $B(X) = \dfrac{1}{1-X}$, cuyo desarrollo ya conocemos. Al derivar sucesivamente la serie básica $B(X)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
B'(X) &= \left(\frac{1}{1-X}\right)' = \frac{1}{(1-X)^2}, \\
B''(X) &= \left(\frac{1}{1-X}\right)'' = \frac{2}{(1-X)^3}, \\
B'''(X) &= \left(\frac{1}{1-X}\right)''' = \frac{6}{(1-X)^4}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Tenemos pues, salvo constantes, la familia de funciones en las que estamos interesados. Mientras estemos en $|x| < 1$, todas estas manipulaciones son válidas. Así que tiene sentido calcular los coeficientes de la función $(1-X)^{-m-1}$, para cierto $m \geq 0$, mediante la fórmula de Taylor.
Sea $F(X) = (1-X)^{-m-1}$, y calculemos sus derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned}
F'(X) &= \frac{m+1}{(1-X)^{m+2}}, \\
F''(X) &= \frac{(m+1)(m+2)}{(1-X)^{m+3}}, \\
&\cdots, \\
F^{(n)}(X) &= \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{(1-X)^{m+n+1}}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$F^{(n)}(0) = \frac{(m+n)!}{m!}$$

Por tanto,

$$a_n = \operatorname{coef}_n\left[\frac{1}{(1-X)^{m+1}}\right] = \frac{(m+n)!}{n!m!} = \binom{m+n}{m}.$$

Tenemos entonces la correspondencia:

$$\frac{1}{(1-X)^{m+1}} \quad \equiv \quad \left\{\binom{m+n}{m}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \cdots\right\}$$

Aquí m es un parámetro fijo y n es el índice de la sucesión. Cuando $m = 0$, recuperamos la sucesión asociada a la serie geométrica básica que vale uno para cada n. □

Ahora podemos completar las observaciones que hicimos en los ejemplos de la sección del método simbólico. Como vimos en el primer ejemplo, el número de multiconjuntos de tamaño k que podemos formar con los símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$ coincide con el coeficiente k–ésimo de la serie de potencias $(1 + X + X^2 + \cdots)^n$. Y ahora ya podemos escribir que

$$CR_{n,k} = \operatorname{coef}_k[(1 + X + X^2 + \cdots)^n] = \operatorname{coef}_k\left[\frac{1}{(1-X)^n}\right] = \binom{n-1+k}{n-1},$$

como ya conocemos.

Si lo que nos preocupa es el número de maneras de dar cambio de n céntimos con monedas de 2, 5, 20 y 50 céntimos, la repuesta está en el coeficiente $n-$ésimo de la función

$$\begin{aligned} F(X) &= (1 + X^2 + X^4 + \ldots)(1 + X^5 + X^{10} + \ldots)(1 + X^{20} + X^{40} + \ldots)(1 + X^{50} + X^{100} + \ldots) \\ &= \frac{1}{1-X^2}\,\frac{1}{1-X^5}\,\frac{1}{1-X^{20}}\,\frac{1}{1-X^{50}}. \end{aligned}$$

De esta expresión no estamos en condiciones (todavía) de extraer mucha información. Con ayuda del ordenador, sin embargo, podríamos obtener que el coeficiente milésimo es 19 006. Más adelante veremos técnicas que nos permitirán estimar el orden de magnitud de estos coeficientes.

Ejercicio. 6.3.
En cada una de las siguientes funciones generatrices determina el coeficiente de X^{2013}.

(1) $A(X) = (1 - 2X)^{3000}$.

(2) $B(X) = \frac{1}{1+3X}$.

(3) $C(X) = \frac{1}{(1+3X)^2}$.

SOLUCIÓN. (1). El desarrollo del binomio es: $\sum_{k=0}^{3000}\binom{3000}{k}(-2X)^{3000-k}$, por lo tanto, para X^{2013} el coeficiente es: $\binom{3000}{987}(-2)^{987}$.
(2). Podemos escribir $B(X)=\frac{1}{1-(-3X)}$, y el desarrollo es: $\sum_{k=0}^{\infty}(-3X)^k$; el coeficiente de X^{2013} es: $(-3)^{2013}=-3^{2013}$.
(3). El desarrollo de $\frac{1}{1+3X}$ es: $\sum_{k=0}^{\infty}(-3X)^k$, y por tanto se tiene

$$C(X)=\frac{1}{(1+3X)^2}=\left(\frac{1}{1+3X}\right)^2=(\sum_{k=0}^{\infty}(-3X)^k)^2.$$

El término X^{2013} se consigue como

$$1(-3X)^{2013}+(-3X)(-3X)^{2012}+\cdots+(-3X)^{2012}(-3X)+(-3X)^{2013}1=2014\times(-3X)^{2013}.$$

El coeficiente de X^{2013} es: $2014\times(-3)^{2013}=-2014\times 3^{2013}$ $\square$

7. El método de las funciones generatrices

Vamos a ilustrar la manera en que hay que proceder (y las precauciones que habría que tomar) a la hora de utilizar las funciones generatrices en el siguiente ejemplo, en el que recurrimos a una sucesión bien conocida: la sucesión de Fibonacci.
Consideremos los números de Fibonacci f_n, definidos recursivamente por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y

$$f_n = f_{n-1} + fn - 2, \text{ si } n \geq 2.$$

El primer paso es asociar a estos números su función generatriz,

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n,$$

de la que no sabemos, o al menos haremos como que no sabemos, si converge o no. Para ilustrar la versatilidad de este enfoque de las funciones generatrices, no fijamos todavía nuestro objetivo; podría interesarnos obtener una fórmula cerrada para los f_n (esto es, resolver la recurrencia), quizás calcular alguna serie numérica relacionada con los f_n, o quizás ...
La información de que disponemos es la ecuación de recurrencia (y los valores iniciales), así que la utilizamos para manipular la sucesión de números:

$$\begin{aligned} F(X) &= f_0 + f_1X + f_2X^2 + f_3X^3 + \cdots \\ &= f_0 + f_1X + (f_0 + f_1)X^2 + (f_1 + f_2)X^3 + \cdots \\ &= f_0 + f_1X + (f_0X^2 + f_1X^3 + f_2X^4 + \cdots) + (f_1X^2 + f_2X^3 + f_3X^4 + \cdots) \\ &= f_0 + f_1X + X^2F(X) + X(F(X) - f_0). \end{aligned}$$

Utilizando los valores iniciales, $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$, concluimos que

$$F(X)(1 - X - X^2) = X.$$

En consecuencia $F(X) = \dfrac{X}{1 - X - X^2}$ es la función generatriz de la sucesión de Fibonacci con valores iniciales $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

8. Manipulación de funciones generatrices

Veremos ahora cómo algunas operaciones entre funciones generatrices se traducen en operaciones entre sus sucesiones asociadas; y viceversa. En todo lo que sigue, salvo cuando sea imprescindible hacer un estudio explícito, supondremos que todas las manipulaciones están bien justificadas.

Sumar y multiplicar por constantes

Sean dos funciones generatrices $F(X)$ y $G(X)$, asociadas a dos sucesiones de números, $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, respectivamente, y sean α y β dos números cualesquiera. Esta primera regla, Regla (II.3), tiene que ver con los coeficientes de la función generatriz $\alpha F(X) + \beta G(X)$; no hay grandes sorpresas, son los que uno espera:

$$\left.\begin{array}{lcl} F(X) & \equiv & \{a_n\}_n \\ G(X) & \equiv & \{b_n\}_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha F(X) + \beta G(X) \equiv \{\alpha a_n + \beta b_n\}_n. \tag{II.3}$$

Así que al sumar, respectivamente multiplicar por constantes, funciones generatrices, estamos sumando, respectivamente multiplicando por constantes, las sucesiones asociadas.

Producto de funciones

La siguiente regla, Regla (II.4), considera el producto punto a punto de dos funciones generatrices $F(X)$ y $G(X)$ asociadas a las sucesiones $\{a_n\}n$ y $\{b_n\}_n$, respectivamente. Empezamos con las primeras manipulaciones:

$$F(X)G(X) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j X^{k+j}.$$

Ahora viene el paso clave para la fórmula que presentaremos más adelante; se trata de determinar el coeficiente n–ésimo de la serie de potencias $F(X)G(X)$. Obtendremos términos con X_n cuando los índices k y j sean tales que $k + j = n$. Y cada combinación de éstas contribuirá con el producto $a_k b_j$ correspondiente. Así que, si llamamos c_n a los coeficientes de $F(X)G(X)$, podemos escribir que:

$$c_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j.$$

En realidad es una suma doble, en los índices k y j; pero sólo sumamos aquellos cuya suma valga n. Aún podemos reescribirla de forma más manejable. Miremos los primeros casos. Por ejemplo, para c_0, debemos considerar las maneras de escribir $k + j = 0$: sólo hay una, $k = 0$ y $j = 0$, así que $c_0 = a_0 b_0$. Para el segundo coeficiente, c_1, ya hay más posibilidades: tendremos $k + j = 1$ cuando, o bien $k = 0$ y $j = 1$, o bien $k = 1$ y $j = 0$; es decir, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$. El lector ya podrá escribir el valor de c_2, listando, simplemente, los posibles pares (k, j) que cumplan que $k+j=2$. Llegará así sin dificultad a que $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$. Tras este análisis preliminar, la regla general es casi obvia:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

el llamado **producto de Cauchy**

$$\left.\begin{array}{lcl} F(X) & \equiv & \{a_n\}_n \\ G(X) & \equiv & \{b_n\}_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad F(X)G(X) \quad \equiv \quad \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right\}_n . \tag{II.4}$$

Interpretación combinatoria del producto de dos funciones generatrices

Imaginemos que tenemos objetos de dos tipos: A y B. Para cada n, hay a_n objetos de tipo A y tamaño n, mientras que existen b_n objetos de tipo B y tamaño n. El objetivo es formar objetos de tamaño total n que estén formados por uno de tipo A y otro de tipo B. Para construirlos, aplicamos las reglas (II.3) y (II.4) de la suma y del producto:

(1) Llamamos k al tamaño del objeto de tipo A elegido. El parámetro k, por supuesto, se moverá entre 0 y n.

(2) Elegimos el objeto de tipo A de tamaño k. Esto se podrá hacer de a_k formas.

(3) Elegimos el objeto de tipo B, que tendrá que ser de tamaño $n-k$: se podrá hacer de b_{n-k} maneras.

En total, si llamamos c_n al número de objetos que podemos construir con esas características, se tendrá que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Si llamamos $F(X)$ y $G(X)$ a las funciones generatrices asociadas a las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, respectivamente, la función $F(X)G(X)$ será la función generatriz de los c_n. Para ilustrar esta interpretación, consideremos el siguiente ejercicio.

Ejercicio. 8.1.
En un consejo de administración hay 25 personas, de las que 11 son mujeres. Se quiere formar un comité con 10 personas. ¿De cuántas formas se podrá hacer?

SOLUCIÓN. La respuesta es inmediata: hay $\binom{25}{10}$ comités distintos. Pero ahora vamos a contarlos atendiendo al número de hombres y mujeres que hay en ellos. En la terminología anterior, los objetos de tipo A serán las posibles combinaciones de mujeres que forman parte del comité, y los de tipo B, las de hombres:

$$a_n = \left\{\begin{array}{l}\text{formas de escoger n} \\ \text{de entre las 11 mujeres}\end{array}\right\} = \binom{11}{n}$$

$$b_n = \left\{\begin{array}{l}\text{formas de escoger n} \\ \text{de entre los 14 hombres}\end{array}\right\} = \binom{14}{n}$$

Sus funciones generatrices asociadas son:

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{11}{n} X^n = (1+X)^{11} \quad \text{y} \quad B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{14}{n} X^n = (1+X)^{14}.$$

La respuesta que buscamos es el coeficiente c_{10} de la función $A(X)B(X)$, un coeficiente del que ya sabemos, por la regla (II.4), que vale $\sum_{j=0}^{\infty} \binom{11}{j}\binom{14}{10-j}$. Pero además,

$$A(X)B(X) = (1+X)^{11}(1+X)^{14} = (1+X)^{25} \Rightarrow \text{coef}_{10}[A(X)B(X)] = \binom{25}{10}.$$

Así que hemos probado que

$$\binom{25}{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{11}{j}\binom{14}{10-j},$$

Y si generalizamos el argumento con s mujeres, t hombres y un comité de n personas, tendremos una prueba, con funciones generatrices, de la **identidad de Vandermonde**,

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{s}{j}\binom{t}{n-j} = \binom{s+t}{n}$$

□

Desplazar coeficientes

En muchas ocasiones interesa considerar la sucesión de números que se obtiene, a partir de una dada, desplazando los coeficientes hacia la derecha o hacia la izquierda. Consideremos la función generatriz $F(X)$ de una cierta sucesión $\{a_n\}_n$. Si multiplicamos por X,

$$XF(X) = a_0X + a_1X^2 + a_2X^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^{j+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}X^n.$$

Es decir, el coeficiente n–ésimo de $XF(X)$ es el coeficiente $n-1$ de $F(X)$. Pero cuidado, sólo para $n \geq 1$, pues el coeficiente cero de $XF(X)$ es ahora 0:

$$XF(X) \quad \equiv \quad \{0, a_0, a_1, a_2, \cdots\}.$$

Y si multiplicamos por una potencia mayor, X^m, con $m \geq 1$, desplazamos la sucesión hacia la derecha m posiciones y tendremos m ceros al principio. La regla general, Regla (II.5), es

$$F(X) \quad \equiv \quad \{a_n\}_n \quad \Rightarrow \quad X^m F(X) \quad \equiv \quad \{0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{a_{n-m}\}_n. \qquad \text{(II.5)}$$

La última expresión es simplemente una notación que nos permite abreviar, en la que aplicamos el convenio de que si el índice del coeficiente es negativo, entonces el coeficiente vale cero.

El desplazamiento de coeficientes en el otro sentido requiere un análisis más cuidadoso. Partimos de una sucesión $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ asociada a una función $F(X)$ y nos preguntamos por la función generatriz $G(X)$ asociada a la sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Obsérvese que los coeficientes b_n de esta nueva función vienen dados por $b_n = a_{n+1}$, para cada $n \geq 0$.

Primero, claro, hay que eliminar el coeficiente a_0, así que debemos considerar la función

$$F(X) - a_0 = a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots$$

Esta no es todavía $G(X)$, pues la función $F(X) - a_0$ está asociada a la sucesión de números $\{0, a_1, a_2, \ldots\}$. La función $G(X)$ que buscamos está asociada a $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Así que, con la regla de desplazamiento hacia la derecha, Regla (II.5), $XG(X)$ tiene la sucesión $\{0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, que es precisamente $F(X) - a_0$. De manera que

$$XG(X) = F(X) - a_0 \quad \Rightarrow \quad G(X) = \frac{F(X) - a_0}{X}$$

¡Ay!, una X en el denominador, y se supone que esto es una serie de potencias centrada en el 0. Pero no debemos preocuparnos, porque la serie de la función $F(X) - a_0$ no tiene término independiente, así que al dividirla por X obtenemos una serie de potencias legal. El caso general sigue los mismos argumentos. Dado $m \geq 1$, si $F(X)$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_n$, entonces

$$\frac{F(X) - a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_{m-1} X^{m-1}}{X^m} \quad \equiv \quad \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\} = \{a_{n+m}\}_n.$$

La operación del numerador sustituye los primeros m coeficientes por 0 y la “división” por X^m los elimina. Resumimos las dos reglas de desplazamiento de coeficientes:

$$\begin{aligned} &\operatorname{coef}_n[F(X)] = \operatorname{coef}_{n+m}[X^m F(X)], \\ &\operatorname{coef}_n[F(X)] = \operatorname{coef}_{n-m}\left[\frac{F(X) - a_0 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots a_{m-1} X^{m-1}}{X^m}\right], \text{ si } n \geq m. \end{aligned} \qquad \text{(II.6)}$$

Y, como ejemplo de aplicación, consideremos la función $\frac{1}{1-X}$, asociada a la sucesión $\{1,1,1,\dots\}$. Entonces,

$$\frac{X}{1-X} \equiv \{0,1,1,1,\dots\},$$

$$\frac{X^2}{1-X} \equiv \{0,0,1,1,\dots\}.$$

Obsérvese que si desplazamos esta última sucesión hacia la izquierda tres posiciones, volvemos a tener la sucesión de unos. No hay problema, porque, la función $\dfrac{\frac{1}{1-X}-1-X-X^2}{X^3}$ vuelve a ser $\dfrac{1}{1-X}$.

Derivar (y algo más)

Si tenemos una función $F(X)$ que genera unos ciertos $\{a_n\}_n$, ¿qué función generará la sucesión $\{na_n\}_n$?

Buscamos una operación que, aplicada a $F(X)$, haga que sus coeficientes aparezcan multiplicados por la posición que ocupan. La estructura especial de las series de potencias nos hace sospechar que esa operación va a ser la derivación (o casi):

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \Longrightarrow F'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1}.$$

Así que $F'(X)$ está asociada a la sucesión $\{1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots\}$. Casi lo tenemos, salvo que el primer coeficiente debería ser $0a_0 = 0$. Así que debemos desplazar la sucesión hacia la derecha una posición, y esto ya lo aprendimos a hacer con la Regla (II.5):

$$XF'(X) \equiv \{0a_0, 1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots\} = \{na_n\}_n.$$

Si lo que queremos es obtener la función asociada a la sucesión $\{n^2 a_n\}_n$, el mismo argumento, pero ahora aplicado a la función $XF'(X)$, cuyos coeficientes son $\{na_n\}_n$, nos lleva a que

$$X(XX'(X))' \equiv \{n^2 a_n\}_n.$$

Y así podríamos seguir. Cada factor extra n en el coeficiente se obtiene repitiendo la operación. Por abreviar, llamemos (Xd/dX) al operador que actúa sobre una función derivándola primero y multiplicándola por X después. Entonces, si la potencia $(Xd/dX)^m$ indica que hay que repetir m veces la operación, tenemos que, para cada $m \geq 1$,

$$F(X) \equiv \{a_n\}_n \Longrightarrow \left(X\frac{d}{dX}\right)^m (F(X)) \equiv \{n^m a_n\}_n. \tag{II.7}$$

Esta operación será especialmente interesante, por ejemplo, a la hora de calcular medias. Por ahora, y como ilustración, veamos cuál es la función generatriz $F(X)$ de la sucesión de números $\{0,1,2,3,\dots\}$. Sabemos que $\frac{1}{1-X}$ genera la sucesión $\{1,1,1,\dots\}$, así que no hay más que aplicar la Regla (II.7) para obtener lo que buscamos:

$$X\left(\frac{1}{1-X}\right)' = \frac{X}{(1-X)^2} \quad \equiv \quad \{0,1,2,3,\dots\}.$$

O, con más generalidad, podemos obtener la función generatriz de la sucesión de números $\{0,d,2d,3d,4d,\dots\}$, la progresión aritmética que empieza en 0 y cuya diferencia es d:

$$\frac{d}{1-X} \quad \equiv \quad \{d,d,d,d,\dots\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Xd}{(1-X)^2} \quad \equiv \quad \{0,d,2d,3d,\dots\}.$$

Con un poco más de esfuerzo se puede comprobar que la función generatriz de una progresión aritmética general, que empiece en un cierto a y tenga diferencia d, es:

$$\frac{a}{1-X} + \frac{Xd}{(1-X)^2} = \frac{a+X(d-a)}{(1-X)^2} \quad \equiv \quad \{a, a+d, a+2d, a+3d,\dots\}.$$

Integrar

Digamos que una cierta función generatriz $F(X)$ tiene como coeficientes a los números de la sucesión $\{b_n\}_n$, que nos son desconocidos. Disponemos, sin embargo, de los coeficientes $\{a_n\}_n$ de la función $F'(X)$. ¿Cómo podemos escribir los b_n en términos de los a_n?
Obsérvese que

$$F'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,$$

y también que,

$$F'(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k X^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} X^n.$$

Sólo tenemos que igualar coeficientes en las dos expresiones de $F'(X)$ para obtener que $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ para cada $n \geq 0$ y concluir que

$$F'(X) \quad \equiv \quad \{a_n\}_n \quad \Longrightarrow \quad F(X) \quad \equiv \quad \{b_0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\} \tag{II.8}$$

Obsérvese que el primer coeficiente de $F(X)$ queda sin determinar.

Ejercicio. 8.2.
Determinar los coeficientes de $F(X)$ *si* $F'(X) = \frac{1}{1-X}$.

SOLUCIÓN. Los coeficientes de $F'(X)$ son todos 1, así que, siguiendo la Regla (II.8) de integración,

$$F(X) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n.$$

Por otro lado, las funciones $F(X)$ que verifican la ecuación diferencial $F'(X) = \frac{1}{1-X}$ vienen dadas por $F(X) = \log(\frac{1}{1-X}) + c$, donde c es una constante. Si sustituimos en $x = 0$, obtenemos $c = F(0) = b_0$. Así que

$$\log\left(\frac{1}{1-X}\right) \equiv \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

□

Obtener sumas parciales

La función generatriz $\frac{1}{1-X}$, aquella cuyos coeficientes son todos unos, es muy especial. Veamos el efecto que tiene, sobre los coeficientes de una cierta función generatriz $F(X)$, la multiplicación por la serie geométrica básica. Aplicamos, simplemente, la Regla (II.4):

$$F(X)\,\frac{1}{1-X} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s X^s \sum_{t=0}^{\infty} X^t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) X^n.$$

Así que el coeficiente n–ésimo de la función $\dfrac{F(X)}{1-X}$ es la suma de los n primeros coeficientes de la función $F(X)$. El efecto de dividir por $1-X$ es que devuelve lo que llamaremos las **sumas parciales** de los coeficientes originales.

$$F(X) \equiv \{a_n\}_n \implies \frac{F(X)}{1-X} \equiv \{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n. \quad \text{(II.9)}$$

Ejercicio. 8.3.
Calcula la suma de los primeros n números naturales.

SOLUCIÓN. Sabemos que la función $\frac{X}{(1-X)^2}$ está asociada a la sucesión de números $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es decir, que su coeficiente k–ésimo es, justamente, k. Esto lo obtuvimos utilizando la Regla (II.7). Ahora, con la Regla (II.9), resulta que:

$$\frac{1}{1-X}\,\frac{X}{(1-X)^2} = \frac{X}{(1-X)^3} \equiv \left\{\sum_{k=0}^{n} k\right\}_n.$$

Así que la respuesta está en el coeficiente n–ésimo de la función $\frac{X}{(1-X)^3}$. Conocemos (véase el Ejercicio (6.2.)) los coeficientes de $(1-X)^{-3}$, así que sólo hay que utilizar la Regla (II.5) para concluir que, si $n \geq 1$,

$$\operatorname{coef}_n \left[\frac{X}{(1-X)^3}\right] = \operatorname{coef}_{n-1} \left[\frac{1}{(1-X)^3}\right] = \binom{3+(n-1)-1}{3-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

(también válido para $n = 0$). Análogos argumentos permiten obtener la suma de los primeros n cuadrados, cubos, etc. □

Ejercicio. 8.4.
*Consideremos los **números armónicos** H_n, dados, para cada $n \geq 1$, por*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Definimos $H_0 = 0$. Encuentra la función generatriz de estos H_n.

SOLUCIÓN. Ya sabemos, del Ejercicio (8.2.), que

$$G(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n = \log\left(\frac{1}{1-X}\right).$$

(obsérvese que el término independiente, el valor $g(0)$, es 0). Así que no hay más que aplicar la Regla (II.9) de las sumas parciales para obtener que la función generatriz de los números armónicos es

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n X^n = \frac{1}{1-X} \log\left(\frac{1}{1-X}\right).$$

□

Eliminar coeficientes

Eliminar (esto es, sustituir por 0) algunos coeficientes de $F(X)$ es sencillo. En ocasiones es necesario eliminar un conjunto infinito de ellos, por ejemplo los coeficientes de índice par, para quedarnos con los de índice impar. O quizás nos interese rescatar únicamente los coeficientes cuyos índices sean, digamos, múltiplos de 5. Veamos el primer caso: $F(X)$ es la función generatriz de una sucesión de números $\{a_n\}_n$ y queremos quedarnos únicamente con los coeficientes de índice par. Si escribimos

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,$$

entonces

$$F(-X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-X)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n X^n.$$

Obsérvese que si $F(x)$ tiene sentido para un cierto x, es decir, si x está dentro del radio de convergencia, entonces $-x$ también lo estará y tendrá sentido hablar de $F(-x)$. Ahora, como el lector atento ya habrá imaginado, sumamos las dos series:

$$F(X) + F(-X) = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots) + (a_0 - a_1X + a_2X^2 - a - 3X^3 + \cdots).$$

Sólo sobreviven los términos de índice par (multiplicados por 2), así que

$$\frac{F(X) + F(-X)}{2} = \sum_{n\ par} a_n X^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} X^{2k}.$$

Ya podemos escribir la regla correspondiente:

$$F(X) \quad \equiv \quad \{a_n\}_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{F(X) + F(-X)}{2} \quad \equiv \quad \{a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots\}. \tag{II.10}$$

De manera análoga, si restamos ambas series, seleccionaremos los términos de índice impar (que aparecerán también multiplicados por 2), así que

$$F(X) \quad \equiv \quad \{a_n\}_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{F(X) - F(-X)}{2} \quad \equiv \quad \{0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots\}. \tag{II.11}$$

Seleccionar los términos cuyos índices son múltiplos de 3 ó de 4, o en general de un cierto entero, es algo más complicado, y requiere entender esta serie de potencias en el contexto de la variable compleja.

Un asunto algo más delicado es formar la función generatriz $G(X)$ cuyos coeficientes son, digamos, los de índice par de la $F(X)$ (sin los ceros intermedios). Empecemos, por ejemplo, con la función generatriz de los números de Fibonacci,

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n = \frac{X}{1 - X - X^2}.$$

La función generatriz de la sucesión $(f_0, 0, f_2, 0, f_4, 0, \ldots)$ se obtiene como sigue:

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} X^{2n} = \frac{F(X) + F(-X)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{1 - X - X^2} + \frac{-X}{1 + X - X^2}\right) = \frac{X^2}{1 - 3X^2 + X^4}$$

Se trata de una serie de potencias en la que sólo aparecen potencias del tipo X^{2n} y, como debe ser, $G(X)$ es en realidad una función de X^2. Así que la función definida a través de $H(X^2) = G(X)$,

$$H(X) = \frac{X}{1 - 3X + X^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} X^n$$

está asociada a la sucesión $\{f_0, f_2, f_4, \ldots\}$.

Composición

Partimos de dos funciones generatrices, $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ y $G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$, y tratamos de calcular los coeficientes de su composición

$$F(G(X)) = (F \circ G)(X).$$

En lo que sigue, necesitaremos efectuar este tipo de operaciones en varias ocasiones. Pero advertimos al lector de que se trata de una operación que no siempre está bien definida, ni desde el punto de vista analítico, ni siquiera desde el punto de vista de las series formales. Porque, si el lector se entretiene comprobando los detalles, los coeficientes de la serie de potencias resultante no tienen por qué estar bien definidos, y resulta imprescindible añadir algunas condiciones adicionales.

Afortunadamente, en los usos que aquí veremos, estaremos en las condiciones que justifican estos manejos, que ilustramos ahora con dos ejemplos.

Ejercicio. 8.5.
Partimos de una función generatriz $F(X)$, asociada a la sucesión $\{a_n\}_n$, y tomamos $G(X) = \frac{X}{1-X}$. Queremos describir los coeficientes de la función $F(G(X)) = F\left(\frac{X}{1-X}\right)$.

SOLUCIÓN. Vamos a calcular, por comodidad, una pequeña variación, como es

$$\frac{1}{1-X} F\left(\frac{X}{1-X}\right).$$

Procedemos formalmente, sustituyendo una función en la otra e intercambiando los índices de sumación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-X} F\left(\frac{X}{1-X}\right) &= \frac{1}{1-X} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{X^k}{(1-X)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \frac{1}{(1-X)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} X^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} \binom{m+k}{k} a^k \right) X^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) X^n.
\end{aligned}$$

Los coeficientes que se obtiene son sumas parciales de los a_n originales, pero ponderadas con coeficientes binomiales. Ya tenemos una nueva regla:

$$F(X) \equiv \{a_n\}_n \implies \frac{1}{1-X}F\left(\frac{X}{1-X}\right) \equiv \left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right\}_n. \tag{II.12}$$

Nótese que los coeficientes de esta composición son sumas finitas.
Apliquemos la Regla (II.12) a la función generatriz de los números de Fibonacci. Si $F(X) = \dfrac{1}{1-X-X^2}$, entonces $\dfrac{1}{1-X}\, f\left(\dfrac{X}{1-X}\right) = \dfrac{X}{1-3X+X^2}$, como podrá comprobar el lector sustituyendo una función en la otra y simplificando. Los coeficientes de esta función son, por la Regla (II.12) que acabamos de exponer: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k$. Pero, como vimos en la Regla (II.10), son también los números f_{2n}. De esta manera probamos que

$$f_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k$$

para cada $n \geq 0$. □

Ejercicio. 8.6.
Si la función generatriz $F(X)$ está asociada a la sucesión $\{a_n\} - n$, y $G(X) = 1+X$. Describir los coeficientes de la función $F(G(X)) = F(1+X)$.

SOLUCIÓN. Procedemos formalmente, intercambiando los índices de sumación:

$$F(1+X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1+X)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}X^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k\right]X^n.$$

Así llegamos a otra nueva regla:

$$F(X) \equiv \{a_n\}_n \implies F(1+X) \equiv \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k\right\}_n. \tag{II.13}$$

Pero, ¡atención! A diferencia del caso anterior, los coeficientes de $F(1+X)$ son ahora sumas infinitas, y por tanto no está claro si están bien definidos o no (dependerá de los a_n que consideremos). Si, por ejemplo, $F(X)$ es un polinomio, la lista de coeficientes a_n es finita y tendrá sentido definir esta composición. □

9. Series de potencias y funciones generatrices

La relación entre sucesiones de números y funciones generatrices dada por:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \equiv \quad F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

es un camino de ida y vuelta. Si tenemos la sucesión $\{a_n\}_n$, nos interesa codificarla con su función generatriz

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

Se trata de una función, de una serie de potencias, que, a veces, podemos considerar como un objeto puramente algebraico. El camino de vuelta también es relevante: en ocasiones partiremos de una función $F(X)$ que querremos desarrollar (si es que se puede) en serie de potencias, un desarrollo que será válido en un cierto intervalo centrado en el origen.

Nos interesan las dos direcciones. Porque aunque empecemos con la sucesión $\{a_n\}_n$ y le asociemos su función generatriz $F(X)$ para tener toda la sucesión codificada. Luego, una vez reconocida $F(X)$, querremos desarrollarla en serie de potencias para así obtener propiedades (fórmula, comportamiento asintótico) de los a_n.

En este proceso resulta muy útil conocer la versión analítica de la teoría de las series de potencias, a la que vamos a dedicar esta sección. Estudiaremos, por un lado, las propiedades que tienen las series de potencias en cuanto funciones. Por otro, repasaremos las diversas herramientas de que disponemos para obtener el desarrollo en serie de potencias de una función $F(X)$.

Empezaremos, con un recordatorio de ciertas cuestiones de representabilidad en serie de potencias. A continuación, describiremos el método de las fracciones simples, que quizás sea ya familiar al lector, y que es especialmente útil a la hora de desarrollar funciones racionales. Después, nos ocuparemos de la otra gran familia de funciones de interés, la relacionada con la serie geométrica y el teorema del binomio. Por último, veremos un puro divertimento para el lector: se trata de analizar los maravillosos argumentos que desarrolló Euler para sumar los inversos de los cuadrados.

Series de potencias como funciones

Consideramos la función

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

una serie de potencias centrada en cero, donde $\{a_n\}_n$ es una cierta sucesión de números y X es la variable [2]. Se trata de una suma de infinitas funciones $\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \ldots\}$, y como tal

[2] Tanto los coeficientes como la variable pueden ser números complejos, aunque casi siempre serán para nosotros números reales.

proceso infinito, hay que entenderlo en el sentido del límite. El que una expresión así tenga sentido dependerá, tanto de los coeficientes a_n, como de los valores x que consideremos.

Radio de convergencia

Dada una serie numérica infinita del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, decimos que la serie **converge** si $\lim_{N\to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n$ existe y es finito. Y decimos que la serie **converge absolutamente** si $\lim_{N\to 0} \sum_{n=0}^{N} |a_n| < +\infty$. Fijémonos en que, al introducir el valor absoluto, la convergencia de la serie depende sólo del tamaño de los coeficientes (del ritmo con el que decrecen a 0 cuando $N \to \infty$), y perdemos posibles cancelaciones que pudieran ayudar en la convergencia de la serie original. Por eso, si una serie converge absolutamente, entonces también converge en el sentido ordinario. Pero el recíproco no es cierto en general. El ejemplo más simple es el de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. Esto es una consecuencia directa del siguiente resultado sobre series alternadas:

Teorema. 9.1.
Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión decreciente de términos no negativos, $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Y el error cometido al truncar la serie en un cierto término está controlado por el tamaño del primer término despreciado:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{t} (-1)^n a_n \right| \leq a_{t+1}.$$

Son parte de cualquier curso de Cálculo los criterios de convergencia de series numéricas. Por ejemplo, el criterio del cociente nos dice que si el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

existe (puede ser infinito), entonces la serie $\sum_n a_n$ converge si $\rho < 1$ y diverge si $\rho > 1$. En el caso $\rho = 1$, este criterio no decide y podemos tener convergencia o divergencia. Por ejemplo, obtenemos $\rho = 1$ al aplicar este criterio a las series con $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \frac{1}{n^2}$. Y mientras que la serie armónica diverge, la suma de los inversos de los cuadrados, como veremos más adelante, vale $\frac{\pi^2}{6}$.

El **criterio de la raíz** es semejante: ahora el límite que interesa calcular es:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si $\rho < 1$, la serie converge, y diverge si $\rho > 1$. De nuevo, $\rho = 1$ no nos dice nada.

Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum\limits_n a_n x^n$ y que conocemos el valor ρ del límite del criterio del cociente para la serie numérica asociada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, entonces podríamos intentar aplicar el criterio del cociente a los números que sumamos en la serie de potencias:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \rho|x|.$$

Así que cuando $|x| < \rho$, la serie de potencias convergerá; y divergerá si $|x| > \rho$ (el mismo argumento valdría si el ρ fuera el del criterio de la raíz).

De manera más formal, una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene asociado un número r (entre 0 e ∞), su **radio de convergencia**, que se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Una vez calculado el radio de convergencia r, la serie de potencias converge absolutamente para los valores de x en el intervalo $|x| < r$, diverge si $|x| > r$; y en $|x| = r$ podemos tener convergencia y/o divergencia.

Derivadas

Así que $F(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ es una función bien definida en el intervalo $(-r, r)$. Pero más aún, la serie **converge uniformemente** en cualquier intervalo cerrado contenido estrictamente en $(-r, r)$. Sin entrar en más detalles, esto supone que la función $F(X)$ se puede diferenciar indefinidamente, y que esas derivadas vuelven a ser series de potencias de nuevo definidas en el intervalo $(-r, r)$. La derivada se obtiene, simplemente, derivando término a término:

$$F'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1}$$

en $(-r, r)$.

Comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ define una función en el intervalo $(-r, r)$, dado por su radio de convergencia r. Es un intervalo abierto; nada se dice del comportamiento en los extremos de ese intervalo.

La serie geométrica es un buen ejemplo de ello.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ coincide con $\frac{1}{1-X}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

(2) En $X = -1$, $\frac{1}{1-X}$ vale $\frac{1}{2}$, pero la serie no converge.

(3) En $X = 1$, la función $\frac{1}{1-X}$ no está definida; pero si nos aproximamos a 1 desde la región de convergencia $(-1, 1)$, tiende a ∞, mientras que la serie también diverge a ∞.

Vamos a ver a continuación cómo la convergencia de la serie numérica que se obtiene al sustituir $X = r$ (o, análogamente, $X = -r$) en la serie de potencias nos dice que la función está adecuadamente definida por la serie en ese punto. En realidad, podemos restringirnos al caso en el que el radio de convergencia es $r = 1$ y bastará analizar la sustitución en $X = 1$.

Antes de tratar el caso general, estudiaremos el caso particular en los coeficientes sean no negativos, porque es más sencillo y tiene peculiaridades interesantes.

Términos no negativos: continuidad en $X = 1$

En muchas de las aplicaciones de las funciones generatrices, los coeficientes de las series de potencias serán no negativos.

Binomio de Newton genealizado

Una forma de extender el dominio de los números combinatorios nos lo proporciona la siguiente observación: si para cada cada número real x y cada entero positivo k definimos

$$x^{(k} = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$

entonces para enteros positivos $n \geq k$ se tiene: $\binom{n}{k} = \frac{n^{(k}}{k!}$. podemos entonces considerar números combinatorios de enteros $\binom{n}{k}$ sin la restricción $n \geq k$, en la seguridad de que si $n > k$, entonces $\binom{n}{k} = 0$; y por la misma razón también podemos considerar números combinatorios con n un entero negativo, un número fraccionario ó un número real. Tendremos:

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{(k}}{k!}.$$

Una sencilla comprobación prueba que se tiene

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

En este contexto la fórmula del **binomio de Newton** generaliza la fórmula del **binomio de Tartaglia** a exponentes no necesariamente enteros; por ejemplo:

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y^{(2}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(t}}{t!}x^t + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{y}{t} x^t.$$

Es el caso del desarrollo de McLaurin de la raíz n–ésima de $1+x$, también válido para la raíz r–ésima para $r \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{1+x} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1/n)^{(t}}{t!} x^t = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\cdots(\frac{1}{n}-k+1)}{t!} x^t.$$

Ejercicio. 9.2.
Determina la expansión de $(1-x)^{-n}$*, siendo* n *un entero positivo.*

SOLUCIÓN. Según ya conocemos se tiene

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k$$

por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)^{(k}}{k!} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots+(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{n+k-1}{k!\,(n-1)!} \\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$$

$\square$

Para futuras referencias vamos a citar el resultado obtenido en esta solución.

Lema. 9.3.
Para enteros positivos n y k se tiene la relación

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.$$

Ejercicio. 9.4.
Calcula el coeficiente de X^{2013} en el desarrollo del $\frac{1}{(1+3X)^2}$.

SOLUCIÓN. En este aso tenemos $\frac{1}{(1+3X)^2} = (1+3X)^{-2}$. Al hacer el desarrollo por el binomio de Newton se tiene

$$(1+3X)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(3X)^k.$$

El coeficiente de X^{2013} es:

$$3^{2013}\binom{-2}{2013} = 3^{2013}\frac{(-2)^{(2013}}{2013!} = 3^{2013}\frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-2013)(-2014)}{2013!} = -3^{2013}2014,$$

que coincide con el valor hallado en el Ejercicio (6.3.). □

Un caso distinto es cuando queremos calcular el desarrollo de expresiones que no son del tipo $\frac{1}{1-aX^t}$. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejercicio. 9.5.
Determinar el coeficiente de X^{2013} en el desarrollo de $\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2}$.

SOLUCIÓN. Primero descomponemos $\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2}$ en suma de fracciones simples; en este caso

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2} &= \frac{A}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} + \frac{C}{1+X} + \frac{D}{(1+X)^2}\\ &= \frac{(C-A)X^3 + (B+D-A-C)X^2 + (A+2B-C-2D)X + (A+B+C+D)}{(1-X)^2(1+X)^2}.\end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} C-A=0 \\ B+D-A-C=0 \\ A+2B-C-2D=0A+B+C+D=1 \end{array}\right\}$$

y se tiene $A=B=C=D=\frac{1}{4}$. Por tanto $\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-X}+\dfrac{B}{(1-X)^2}+\dfrac{C}{1+X}+\dfrac{D}{(1+X)^2}\right]$.
Entonces el coeficiente de X^{2013} es:

$$\frac{1}{4}\left[\binom{-1}{2013}+\binom{-2}{2013}-\binom{-1}{2013}+\binom{-1}{2013}\right]=0.$$

Solución alternativa. Tenemos $\frac{1}{(1-X)^2(1+X)^2}=\frac{1}{(1-X^2)^2}$, y por lo tanto el desarrollo de $\frac{1}{(1-X^2)^2}$ es: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(X^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}X^{2k}$. Todos los términos de exponente impar son nulos. □

Una de las aplicaciones de las funciones generatrices es la resolución de ecuaciones del tipo $X_1+\cdots+X_t=n$.

Ejercicio. 9.6.
Determinar las soluciones de la ecuación $X_1+X_2+X_3+X_4=19$*, siendo* $0\leq X_1\leq 3, 0\leq X_2\leq 5,$ $4\leq X_3\leq 7$ *y* $5\leq X_4\leq 8$.

SOLUCIÓN. Consideramos para X_1 el polinomio $1+X_1+X_1^2+X_1^3$, para X_2 el polinomio $1+X_2+X_2^2+X_2^3+X_2^4+X_2^5$, para X_3 el polinomio $X_3^4+X_3^5+X_3^6+X_3*7$ y para X_4 el polinomio $X_4^5+X_4^6+X_4^7+X_4^8$. Al considerar el producto

$$(1+X_1+X_1^2+X_1^3)(1+X_2+X_2^2+X_2^3+X_2^4+X_2^5)(X_3^4+X_3^5+X_3^6+X_3^7)(X_4^5+X_4^6+X_4^7+X_4^8)$$

tenemos que ver cuales son los coeficientes de $X_1^aX_2^bX_3^cX_4^d$ tales que $a+b+c+d=19$. De forma equivalente podemos Tomar $X_1=X_2=X_3=X_4=X$, y así tenemos calcular el coeficiente de X^{19}. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned}&(1+X+X^2+X^3)(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(X^4+X^5+X^6+X^7)(X^5+X^6+X^7+X^8)\\ &\quad=X^9+4X^{10}+10X^{11}+20X^{12}+32X^{13}+44X^{14}+53X^{15}+56X^{16}+53X^{17}\\ &\qquad+44X^{18}+32X^{19}+20X^{20}+10X^{21}+4X^{22}+X^{23}.\end{aligned}$$

La solución es: 32. □

Ejercicio. 9.7.
Determinar las soluciones de la ecuación $X_1+X_2+X_3+X_4=k$*, siendo* $0\leq X_1, 0\leq X_2\leq 5,$ $4\leq X_3\leq 7, 5\leq X_4\leq 8$ *y* k *un entero positivo.*

SOLUCIÓN. En este caso tenemos que considerar el producto

$$\begin{aligned}(1+X+X^2+X^3+\cdots)(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(X^4+X^5+X^6+X^7)(X^5+X^6+X^7+X^8)\\ = X^9+4X^{10}+10X^{11}+20X^{12}+33X^{13}+48X^{14}+63X^{15}+76X^{16}+86X^{17}\\ +92X^{18}+95X^{19}+96X^{20}+96X^{21}+\cdots\end{aligned}$$

La soluciones a partir de $k=21$ son siempre 96; las anteriores son las que aparecen en este desarrollo. □

Particiones de enteros

Dado un entero positivo n llamamos **partición** de n a una lista de enteros positivos $n_1,\ldots,n_t$, ordenados de menor a mayor, tales que $n_1+\cdots+n_t=n$. Para un entero positivo n llamamos $p(n)$ al número de particiones de n.
Esta definición podemos extenderla a enteros no negativos; esto es, al número cero asignándole la partición vacía, y por tanto tendremos que $p(0)=1$.

Ejemplo. 9.8.
El número 4 tiene las siguientes particiones:

$$\begin{array}{l}1+1+1+1\\ 1+1+2\\ 1+3\\ 2+2\\ 4\end{array}$$

entonces $p(4)=5$.

La teoría de las funciones generatrices es útil en el estudio de la función $p(n)$, ya que podemos considerar la función generatriz $P(X)$ definida por $P(X)=\sum k=0^{\infty}p(k)X^k$. La función $P(X)$ puede determinarse de forma sencilla mediante el producto

$$\prod_{h=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty}X^{ih}).$$

Dado el sumando c_kX^k de $P(X)$, tenemos que para cada partición de k en la forma $k=d_11+d_22+d_33+\cdots+d_tt$, el factor X^k se puede escribir $X^{d_1}X^{d_22}X^{d_33}\cdots X^{d_tt}$, siendo X^{d_hh} un sumando del polinomio $\sum_{i=0}^{\infty}X^{ih}$; de esta forma c_k cuenta el número de particiones del entero positivo k.
En la expresión de $P(X)$ como producto de series, si analizamos cada una de éstas llegamos a la conclusión de que son series geométricas; por ejemplo:

$$\sum_{i=0}^{\infty}X^{ih}=\frac{1}{1-X^h};$$

esta observación nos permite dar otra expresión de $P(X)$:

$$P(X)=\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1}{1-X^h}.$$

Podemos ahora calcular de forma sencilla los primeros valores de $p(n)$:

$$\begin{aligned}&(1+X+X^2+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots(1+X^6+X^{12}+\cdots)=\\&\qquad\mathbf{1+X+2X^2+3X^3+5X^4+7X^5+11X^6}+14X^7+20X^8+\text{otros términos.}\end{aligned}$$

No es necesario utilizar la serie completa para cada producto; basta considerar el grado menor o igual al número n al que queramos calcular $p(n)$. Por otro lado observa que al no utilizar el factor $1+X^7+X^{14}+\cdots$, el valor obtenido para $p(7)$ no es correcto, ya que de

$$\begin{aligned}&(1+X+X^2+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots)\cdots(1+X^6+X^{12}+\cdots)(1+X^7+X^{12}+\cdots)=\\&\qquad\mathbf{1+X+2X^2+3X^3+5X^4+7X^5+11X^6+15X^7}+21X^8+\text{otros términos,}\end{aligned}$$

se tiene que el valor de $p(7)$ es 15 y no 14. Lo mismo pasa ahora con $p(8)$; 21 no es su valor; su valor real es 22.
Dado un entero positivo n, llamamos $p_d(n)$ al número de particiones en elementos distintos; esto es, particiones $n=n_i+\cdots+nt$ en las que los n_i son distintos dos a dos; y llamamos $p_i(n)$ al número de particiones en las que todos los elementos n_i son impares.

Lema. 9.9.
Para cada entero positivo n se verifica $p_d(n)=p_i(n)$.

DEMOSTRACIÓN. Para calcular $p_i(n)$ podemos considerar su función generatriz

$$P_i(X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_i(k)X^k,$$

y evidentemente se tiene:

$$P_i(X)=(1+X+\cdots)(1+X^3+\cdots)(1+X^5+\cdots)\cdots=\prod_{h=0}^{\infty}(1+X^{2h+1}+\cdots)=\prod_{h=0}^{\infty}\frac{1}{1-X^{2h+1}}.$$

Por otro lado, la función generatriz de $p_d(n)$ es $P_d(X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_d(k)X^k$, y evidentemente se tiene:

$$P_d(X)=\prod_{h=1}^{\infty}(1+X^h)=(1+X)(1+X^2)(1+X^3)\cdots=\frac{1-X^2}{1-X}\,\frac{1-X^4}{1-X^2}\,\frac{1-X^6}{1-X^3}\cdots.$$

Cada numerador con potencia par se puede simplificar con un denominador, y se tiene:

$$P_d(X) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{1}{1+X^{2h+1}}.$$

□

Ejercicio. 9.10.
Dado un entero n, encontrar el número de particiones que tiene a k, $1 \leq k \leq n$, como mayor sumando.

Capítulo III

Problemas y otros desarrollos

10. Problemas de Olimpiadas

Ejercicio. 10.1.
En una Olimpíada matemática ningún alumno ha resuelto todos los problemas, pero todos los problemas han sido resueltos por algún alumno. Prueba que hay alumnos A y B tales que A ha resuelto un problema, por ejemplo P_A, que no ha resuelto B, y B ha resuelto un problema, por ejemplo P_B, que no ha resuelto A.

SOLUCIÓN. Tenemos alumnos $A_1, \ldots, A_t$, y llamamos a_i al conjunto de problemas que ha resuelto el alumno A_i. Si p es el total de problemas, se verifica $p = \cup_{i=1}^t a_i$.
Si para todos los índices $i \neq j$ se verifica $a_i = a_j$, entonces $a_1 = \cup_{i=1}^t a_i = p$, lo que es una contradicción.
Existen pues índices $i \neq j$ tales que $a_i \neq a_j$. Supongamos que $i = 1$, $j = 2$ y $a_1 \subsetneqq a_j$, entonces los alumnos $A_2, \ldots, A_t$ están en las mismas condiciones que los t alumnos iniciales. Podemos pues descartar al alumno A_1. Ésto lo podemos hacer siempre que existan índices $i \neq j$ verificando $a_i \subsetneqq a_j$. Llegamos a una conjunto de alumnos $A_h, \ldots, A_t$ tales que si $i \neq j$, entonces $a_i \nsubseteq a_j$ y $a_j \nsubseteq a_i$, y por lo tanto tenemos la solución. □

Ejercicio. 10.2.
La suma de un cierto número de enteros consecutivos vale 1000. Hallar esos enteros.

SOLUCIÓN. Sea n el primer entero de la lista; si ésta consta de $t+1$ números, el último es: $n+t$. Supongamos que $n \geq 0$, entonces la suma es $n + (n+1) + \cdots + (n+t) = \frac{(n+n+t)(t+1)}{2} = 1000$, esto es, $(2n+t)(t+1) = 2000$, $n(2t+2) = 2000 - t(t+1)$, y $n = \dfrac{2000 - t(t+1)}{2(t+1)}$.

Si $t = 2h$ es par tenemos $n = \dfrac{2000 - 2h(2h+1)}{2(2h+1)} = \dfrac{1000 - h(2h+1)}{2h+1}$ es entero, y por tanto $2h+1 \mid 1000$, esto es, $2h+1 = 1, 5, 25$, ó 125. Si $2h+1 = 1$, entonces $h = 0$, y es el caso trivial.

$$\begin{array}{lllll}
2h+1=5 & h=2 & t=4 & n=\frac{1000-2h(2h+1)}{2h+1}=\frac{1000-2(4+1)}{4+1}=\frac{990}{5}=165 & \text{es válido.}\\
2h+1=25 & h=12 & t=24 & n=\frac{1000-h(2h+1)}{2h+1}=\frac{1000-12(24+1)}{24+1}=\frac{700}{25}=28 & \text{es válido}\\
2h+1=125 & h=62 & t=124 & n=\frac{1000-h(2h+1)}{2h+1}=\frac{1000-62(124+1)}{124+1}<0 & \text{no es válido.}
\end{array}$$

Tenemos que una solución es: $n = 165$, ya que $165 + 166 + 167 + 168 + 169 = 1000$.
Si $t = 2h + 1$ es impar tenemos $n = \dfrac{2000 - (2h+1)(2h+2)}{2(2h+2)} = \dfrac{1000 - (2h+1)(h+1)}{2(h+1)}$ es entero, y por tanto $h+1 \mid 1000$. Los posibles valores de h son:

$$\{0, 1, 3, 4, 7, 9, 19, 24, 39, 49, 99, 124, 199, 249, 499, 999\}.$$

Para el valor $h = 7$ se tiene $t = 15$ y $n = 55$; todos los demás no producen valores válidos: se verifica $55 + 56 + \cdots + 70 = 1000$.
En este caso los valores posibles son

$t = 4$	$n = 198$
$t = 24$	$n = 28$
$t = 15$	$n = 55$

Si n es negativo, entonces $n + (n+1) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + \cdots + (-n)$ suma cero, y por tanto se tienen números positivos a partir de $-n+1$; si $-n+1 = 198, 28$ ó $-n+1 = 55$, tendremos un resultado válido. Por tanto tenemos tres nuevos casos: $n = -197, -27$ y $n = -54$.

$t = 399$	$n = -197$
$t = 79$	$n = -27$
$t = 124$	$n = -54$

$\square$

Ejercicio. 10.3.
Prueba que para cada número entero $n \geq 4$ se verifica $2^n < n!$.

SOLUCIÓN. Se hace por inducción sobre n. Si $n = 4$ tenemos $2^4 = 16 < 24 = 4!$ Supongamos que el resultado es cierto para un $t \geq 4$, y vamos a ver qué ocurre con $t+1$.

$$2^{t+1} = 2 \cdot 2^t < 2 \cdot t! < (t+1) \cdot t! = (t+1)!$$

$\square$

Ejercicio. 10.4. (Alemania, 1990)
Prueba que para todo entero $n > 1$ se cumple $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$.

SOLUCIÓN. La expresión $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n$ es equivalente a $(2n)! < (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))n^n = n!\, 2^n\, n^n = n!\, (2n)^n$, y equivalente a $\frac{(2n)!}{n!} < (2n)^n$, que evidentemente es cierta. $\square$

Ejercicio. 10.5. (Irán, 1993)
Sea X un conjunto con n elementos, y sea Y con conjunto definido por

$$Y = \{(A, B) \mid\ A, B \subseteq X,\ A \subsetneq B\}$$

Prueba que Y tiene $3^n - 2^n$ elementos.

SOLUCIÓN. El par (A, B) pertenece a Y si $A \subseteq B$ y tiene menos elementos que B. Por tanto para formar todos estos pares podemos comenzar por un subconjunto A y construir todos los posibles subconjuntos B tales que $(A, B) \in Y$ agregándole elementos.
Si $A = \emptyset$, entonces B es cualquier subconjunto de X no vacío; tenemos $2^n - 1$ posibilidades.
Si $A = \{x_1\}$, entonces B es de la forma $\{x_1\} \cup B'$, siendo $B' \subseteq X \setminus \{x_1\}$ no vacío; tenemos $2^{n-1} - 1$ posibilidades.
Si $A = \{x_1, \ldots, x_t\}$, entonces B es de la forma $\{x_1, \ldots, x_t\} \cup B'$, siendo $B' \subseteq X \setminus \{x_1, \ldots, x_t\}$ no vacío; tenemos $2^{n-t} - 1$ posibilidades, y $\binom{n}{t}$ posibilidades para A.
El número de elementos de Y es:

$$\begin{aligned}
&\tbinom{n}{0}(2^n - 1) + \tbinom{n}{1}(2^{n-1} - 1) + \cdots + \tbinom{n}{n-1}(2 - 1) \\
&= \tbinom{n}{0}2^n + \tbinom{n}{1}2^{n-1} + \cdots + \tbinom{n}{n-1}2 - \left[\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n}{n-1}\right] \\
&= \tbinom{n}{0}2^n + \tbinom{n}{1}2^{n-1} + \cdots + \tbinom{n}{n-1}2 + \tbinom{n}{n} - \left[\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n}\right] \\
&= (2+1)^n - 2^n = 3^n - 2^n.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio. 10.6.
Prueba que para cualquier entero positivo k se verifica $\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$.

SOLUCIÓN. Si desarrollamos el número $\binom{-1/2}{k}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{k} &= \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2k+1}{2}\right)}{k!} &&= \frac{(-1)(-3)\cdots(-2k+1)}{2^k\,k!} \\
&= \frac{(-1)^k(1\times 3\times\cdots\times(2k-1))}{2^k\,k!} &&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k\,k!\,(2\times 4\times\cdots\times(2k))} \\
&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}\,k!\,(1\times 2\times\cdots\times k)} &&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}\,k!\,k!} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 10.7.
Prueba que $\frac{1}{\sqrt{1-4X}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}X^k$.

SOLUCIÓN. Tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4X}} = (1-4X)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-4X)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}(-1)^k 2^{2k}X^k \\
= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}X^k.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio. 10.8.
Sea K un número natural; prueba que se verifica:

$$\binom{0}{0}\binom{2k}{k} + \binom{2}{1}\binom{2k-2}{k-1} + \cdots + \binom{2k}{k}\binom{0}{0} = 4^k.$$

SOLUCIÓN. Llamamos $f(X)$ a la función generatriz de $\{\binom{2k}{k}\}_k$, y consideramos $f^2(X)$:

$$f^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_j \binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} \right) X^k.$$

El resultado es cierto si, y sólo si, $f^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k X^k = \sum_{k=0}^{\infty}(4X)^k = \frac{1}{1-4X}$; y esto ocurre si, y sólo si, $f(X) = (1-4X)^{-\frac{1}{2}}$. Mediante el desarrollo de Newton del binomio se tiene:

$$(1-4X)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k}(-4X)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} X^k$$

La última igualdad es consecuencia del Ejercicio (10.7.). □

Ejercicio. 10.9. (IMO, 204. Lista corta)
En una universidad hay 10001 estudiantes. Éstos se juntan en pandillas (un estudiante puede estar en varias pandillas), y las pandillas se juntan en sociedades (una pandilla puede estar en varias sociedades). Se verifican las siguientes reglas:

(1) Cada pareja de estudiantes está en exactamente una pandilla.

(2) Por cada estudiante y cada sociedad, el estudiante pertenece a exactamente una pandilla de la sociedad.

(3) Cada pandilla tiene una cantidad impar de estudiantes; si una pandilla tiene $2m+1$ estudiantes, m natural, entonces está en exactamente m sociedades.

Si hay k sociedades, determina los posibles valores de k.

SOLUCIÓN. Dado un estudiante E, consideramos $Y_E = \{(P,S) \mid E \in P \in S\}$. Por (2) tenemos exactamente k de estas parejas.

Consideramos ahora una pandilla P' a la que pertenezca E; por la condición (3), en P' hay otros $2m$ estudiantes, distintos a E, y también por (3) resulta que P' está en exactamente m sociedades; como consecuencia tenemos m parejas del tipo (P',S), con P' la pandilla dada.

Veamos ahora el número de posibilidades para P'. Como E está en exactamente una partida con cada uno de los restantes 10000 estudiantes; observa que entonces el número de partidas P' es exactamente $\frac{10000}{2} = 5000$; podemos razonar de la sigueinte forma; tomamos un nuevo estudiante E_1, éste estará en una pandilla, junto con $2m_1$ estudiantes; esto nos da una pandilla P_1 y m_1 pares en Y_E; tomamos E_2 un nuevo estudiante con $E_2 \notin P_1$; esto nos da una pandilla P_2 que verifica $P_1 \cap P_2 = \{E\}$ y tiene $2m_2$ estudiantes, entonces P_2 determina

m_2 nuevos pares en Y_E; así podemos continuar hasta llegar al resultado: tenemos 5000 pares (P, S) en Y_E.
Como hemos contado los elementos de Y_E de dos formas, éstas deben coincidir; se tiene $k = 5000$.
Se tiene un caso degenerado, aquel en el que hay una sola pandilla y 5000 sociedades, todas iguales y formadas por la única pandilla que hay. □

Ejercicio. 10.10. (IMO, 1998)
En una reunión hay representantes de n países, $n \geq 2$, sentados en una mesa redonda. Se sabe que para cualesquiera dos representantes del mismo país sus vecinos a la derecha son de países distintos. Encuentra el mayor número de representantes que puede haber.

Ejercicio. 10.11. (OMM, 2003)
Se tienen n niños y n niñas en una fiesta. A cada niño le gustan A niñas y cada niña le gustan B niños. Encuentra todas las parejas (A, B) tales que forzosamente haya un niño y una niña que se gustan mutuamente.

Ejercicio. 10.12.
Determina el valor de $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Ejercicio. 10.13.
Determina el coeficiente de X^{17} en el desarrollo del $(1 + X^5 + X^7)^{20}$.

SOLUCIÓN. Con 5 y 7 la única forma de obtener 17 es sumar dos veces 5 y una 7. Para conseguir dos X^5 necesitamos $\binom{20}{2}$ de los 20 factores, y por tanto, para cada una de estas elecciones hay 18 formas de conseguir 7, las 18 restantes; por lo tanto el coeficiente de X^{17} es: $\binom{20}{2} \times 18 = 190 \times 18 = 3420$.
Solución alternativa. Para conseguir X^{17}, usando la fórmula de Leibniz, ver Ejercicio (2.7.), tenemos que los sumandos del desarrollo del trinomio son de la forma $\frac{20!}{e_1!\,e_2!\,e_3!} 1^{e_1} (X^5)^{e_2} (X^7)^{e_3} = \frac{20!}{e_1!\,e_2!\,e_3!} X^{2e_2+7e_3}$, con $e_1 + e_2 + e_3 = 20$. De aquí se tiene $e_1 = 17$, $e_2 = 2$, $e_3 = 1$. Entonces el coeficiente de X^{17} es $\frac{20!}{17!\,2!\,1!} = 3420$. □

Ejercicio. 10.14.
Se considera la lista A, B, C, D, D, D, E, E, F, G, y se eligen, ordenadamente, cuatro elementos de esta lista. ¿Cuántas listas se pueden elegir que verifiquen las siguientes condiciones?:
(1) En la lista de cuatro no hay dos elementos consecutivos que son consecutivos en la lista original.
(2) En la lista de cuatro el primer elemento es distinto del último.

SOLUCIÓN. Las letras son $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, que, por simplicidad, sustituimos por números: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Analizamos el caso en el que hay tres elementos iguales; estos deber ser iguales a 4, y por lo tanto siempre hay dos símbolos 4 consecutivas; luego ninguna de esta listas es válida.
En el caso en el que hay sólo dos símbolos iguales se tienen las siguientes posibilidades:

$$\begin{array}{lll}
44XY, X44Y, XY44, 4XY4, & \text{siendo } X, Y \neq 4, & \text{no hay casos válidos.}\\
55XY, X55Y, XY55, 5XY5, & \text{siendo } X, Y \neq 5, & \text{no hay casos válidos.}\\
X4Y4, 4X4Y, & \text{siendo } X, Y \neq 4. & \\
X5Y5, 5X5Y, & \text{siendo } X, Y \neq 5. &
\end{array}$$

En el caso $X4Y4$ se tiene $X \in \{1, 2, 5, 6, 7\}$. Si $X \in \{1, 2, 6, 7\}$ se tiene $Y \in \{1, 2, 6, 7\} \setminus \{X\}$, luego hay 4×3 casos válidos. Si $X = 5$, se tiene $Y \in \{1, 2, 6, 7\}$, luego hay 4 casos válidos. En total 16.
En el caso $4X4Y$ se tiene $Y \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$. Si $Y \in \{1, 2, 6, 7\}$ se tiene $X \in \{1, 2, 6, 7\} \setminus \{Y\}$, luego hay 4×3 casos válidos. Si $Y = 3$, se tiene $X \in \{1, 2, 6, 7\}$, luego hay 4 casos válidos. En total 16.
En los casos $X5Y5$ y $5X5Y$ se tienen también 16 casos.
En total tenemos $16 \times 4 = 64$ casos válidos en los que aparece algún elemento repetido.
Queda por analizar el caso en el que no hay símbolos repetidos. El número total de listas de cuatro símbolos distintos que podemos formar es $V_{7,4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$. Llamamos A al conjunto formado por todas estas listas.
Llamamos A_0 al conjunto de listas en las que no hay dos símbolos consecutivos que son consecutivos, A_2 al conjunto de listas en las que sólo hay dos símbolos consecutivos que son consecutivos. A_3 y A_4 se definen en la misma forma. Llamamos A_5 al conjunto de listas en las que hay dos parejas de símbolos consecutivos que son consecutivos, siendo el segundo y el tercero no consecutivos.
Es claro que $|A_4| = 4$, ya que las posibles listas son $1234, 2345, 3456, 4567$.
Para A_3 tenemos $|A_3| = 32$. En efecto, si hay tres consecutivos, pero no cuatro, éstos son: $abcX$ ó $Xabc$, con abc consecutivos, y $X \notin a, b, c$, que forman los conjuntos A_{31} y A_{32}, respectivamente. Ya que $abc \in \{123, 234, 345, 456, 567\}$.

1. Para el caso $abcX$ si $abc \in \{123, 234, 345, 456\}$, entonces $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{a, b, c, c+1\}$, y si $abc = 567$, entonces $X \in \{1, 2, 3, 4\}$. El número de listas en A_{31} es: $4 \times 3 + 4 = 16$.

2. Para el caso $Xabc$ si $abc = 123$, entonces $X \in \{4,5,6,7\}$, y si $abc \in \{234,345,456,567\}$, entonces $X \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{a-1, a, b, c, \}$. El número de listas en A_{32} es: $4+4\times 3 = 16$.

En total tenemos 32 listas en A_3.

Para A_5 tenemos listas $abcd$, siendo $ab \in \{12,23,34,45,56,67\}$ y para cada una de estas elecciones tenemos que ver las posibilidades que hay para cd:

1. $ab = 12$: se tiene $cd \in \{45,56,67\}$
2. $ab = 23$: se tiene $cd \in \{56,67\}$
3. $ab = 34$: se tiene $cd \in \{12,67\}$
4. $ab = 45$: se tiene $cd \in \{12,23\}$
5. $ab = 56$: se tiene $cd \in \{12,23,34\}$
6. $ab = 67$: se tiene $cd \in \{12,23,34,45\}$

El número de listas en A_5 es: $3+2+2+2+3+4 = 16$.

Para A_2 se tienen tres casos: $abXY$, $XabY$, $XYab$, siendo $ab \in \{12,23,34,45,56,67\}$.

1. Llamamos A_{21} al conjunto de listas de la forma $abXY$ en las que sólo a y b son consecutivos. Fijado ab tenemos $X, Y \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{a, b\}$, por lo tanto el número de listas es $6 \times V_{5,2} = 6\times 5\times 4$. Tenemos que quitar los casos en los que los cuatro elementos son consecutivos, los del A_4, los casos en los que abX son los únicos consecutivos, los de A_{31}, y los casos en los que hay dos pares consecutivos pero no los cuatro símbolos, los de A_5. El número de elementos de A_{21} es $120-4-16-16 = 84$.
2. Llamamos A_{22} al conjunto de listas de la forma $XabY$ en las que sólo a y b son consecutivos. Fijado ab tenemos $X, Y \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{a, b\}$, por tanto el número de listas es $6 \times V_{5,2} = 6\times 5\times 4$. Tenemos que quitar los casos en los que los cuatro elementos son consecutivos, los de A_4, y también los de A_3, esta vez los de la forma $abcX$ y los de la forma $Xabc$. El número de elementos de A_{22} es $120-4-32 = 84$.
3. Llamamos A_{23} al conjunto de listas de la forma $XYab$ en las que sólo a y b son consecutivos. El número de elementos de A_{23} es $120-4-16-16 = 84$.

Como A_{21}, A_{22}, A_{23} son mutuamente disjuntos y $A_2 = A_{21}\cup A_{22}\cup A_{23}$, se tiene $|A_2| = 84\times 3 = 252$.

Para el cálculo de $|A_0|$, y teniendo en cuenta que los A_i, para $i = 0,2,3,4,5$, son mutuamente disjuntos, procedemos como sigue:

$$|A_0| = |A| - (|A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|) = 840 - (252+32+4+16) = 840-304 = 536$$

Como consecuencia $|A_0| = 536$.

El número total de listas válidas es: $64+536 = 600$. □

11. Sistemas triples de Steiner y Kirkman

Dado un conjunto X con n elementos, llamamos triple de X a un subconjunto formado por tres elementos distintos de X. Un sistema triple de Stiener–Kirkman es un conjunto $\mathcal{T}$ de triples de X verificando que cada par de elementos de X pertenece exactamente a un triple de $\mathcal{T}$.

Un problema que responde a este modelo es el "Kirkman schoolgirl problem": Quince señoritas de una escuela salen de paseo, en grupos de tres, siete dias consecutivos; averiguar cómo se han organizado para que no hayan salido dos de ellas juntas dos veces.

Una posible configuración es la siguiente:

Lu.	*Ma.*	*Mi.*	*Ju.*	*Vi.*	*Sa.*	*Do.*
$01, 06, 11$	$01, 02, 05$	$02, 03, 06$	$05, 06, 09$	$03, 05, 11$	$05, 07, 13$	$11, 13, 04$
$02, 07, 12$	$03, 04, 07$	$04, 05, 08$	$07, 08, 11$	$04, 06, 12$	$06, 08, 14$	$12, 14, 05$
$03, 08, 13$	$08, 09, 12$	$09, 10, 13$	$12, 13, 01$	$07, 09, 15$	$09, 11, 02$	$15, 02, 08$
$04, 09, 14$	$10, 11, 14$	$11, 12, 15$	$14, 15, 03$	$08, 10, 01$	$10, 12, 03$	$01, 03, 09$
$05, 10, 15$	$13, 15, 06$	$14, 01, 07$	$02, 04, 10$	$13, 14, 02$	$15, 01, 04$	$06, 07, 10$

Proposición. 11.1. (Teorema de Kirkman)
Si X es un conjunto X con n elementos y existe un sistema triple de Steiner-Kirkman, entonces $n \equiv 1, 3 \pmod 6$.

DEMOSTRACIÓN. Dado un triple $T \in \mathcal{T}$, tenemos tres parejas en T que no pueden estar en otra terna, y como consecuencia el número de parejas de elementos de X, que es $\binom{n}{2}$, tiene que ser congruente con 0 módulo 3; esto es, $\binom{n}{2} \equiv 0 \pmod 3$, y por tanto $n(n-1) \equiv 0 \pmod 3$, de donde $n \equiv 0, 1 \pmod 3$.

Estudiamos n módulo 6. Se tiene $n = 6k + h$, y de la relación anterior se tiene $h = 0, 1, 3, 4$. Po otro lado, dado $x \in X$, las ternas que contienen a x producen una partición del $X \setminus \{x\}$ en pares de elementos; dado $x_1 \in X$ existe una única terna $\{x, x_1, x_2\} \in \mathcal{T}$ a la que pertenece, se emparejan entonces x_1 y x_2. Como consecuencia $n-1$ es par y n es impar. Tenemos por tanto $h = 1, 3$, y $n \equiv 1, 3 \pmod 6$. □

Algunas consecuencias de la existencia de sistemas triples de Steiner–Kirkman son:

Proposición. 11.2.
Si X es un conjunto con n elementos y $\mathcal{T}$ es un sistema triple de Steiner–Kirkman, entonces $|\mathcal{T}| = \frac{n(n-1)}{6}$.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos observado que cada triple $T \in \mathcal{T}$ determina tres pares de elementos de X, por tanto $|\mathcal{T}| = \frac{\binom{n}{2}}{3} = \frac{n(n-1)}{6}$. □

Es claro que no todos los conjuntos de triples con $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos definen un sistema triple de Steiner–Kirkman; sin embargo, si imponemos la condición de que cada par de elementos está contenido en un triple del conjunto, el sistema es de Steiner–Kirkman.

Proposición. 11.3.
Si X es un conjunto con n elementos y $\mathcal{T}$ es un conjunto de triples con $\frac{n(n-1)}{6}$ elementos tal que cada par de elementos de X está contenido en un triple de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}$ es un sistema triple de Steiner–Kirkman.

DEMOSTRACIÓN. Parece claro que cada par debería estar contenido en un único triple, pues en caso contrario el número de elementos de $\mathcal{T}$ sería mayor que $\frac{n(n-1)}{6}$. □

Tenemos ahora que probar el recíproco del Teorema de Kirkman: si $n \equiv 1, 3 \pmod 6$, entonces existe un sistema triple de Steiner–Kirkman.
Llamamos quasi-grupo a un conjunto S junto con una operación binaria verificando que cada ecuación $aX = b$ y cada ecuación $Ya = b$ tiene solución única.
Ejemplo de quasi–grupo es $S = \{0, 1, 2\}$ con operación $ab = 2a + b + 1$, en este caso la tabla es:

$1^o \backslash 2^o$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

Recuerda que un cuadrado latino $n \times n$ es aquel que está relleno con n elementos de forma que en cada fila y columna aparecen los n elementos, y por lo tanto no hay elementos repetidos en filas o columnas.

Teorema. 11.4.
Para un cuadrado $n \times n$ relleno con n elementos son equivalentes:

(a) Es la tabla de multiplicación de un quasi–grupo.

(b) Es un cuadrado latino.

DEMOSTRACIÓN. Si en la fila a hay dos elementos iguales, existen $b, c \in S$ tales que $b \neq c$ y $ab = ac$, y por tanto $b = c$, lo que es una contradicción. □

Un quasi–grupo es idempotente si para cada $a \in S$ se tiene $aa = a$, y se llama conmutativo si $ab = ba$ para cuales quiera $a, b \in S$.

Teorema. 11.5.
No existen quasi–grupos idempotentes conmutativos de orden par.

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos la tabla de un quasi–grupo idempotente conmutativo, tenemos que ésa es simétrica con respecto a la diagonal principal y que en ésta aparecen todos los elementos del quasi–grupo. Por ser simétrica, fuera de la diagonal aparecen todos los elementos un número par de veces, que junto con la aparición en la diagonal nos dice que cada elemento aparece en la tabla un número impar de veces, luego el quasi–grupo tiene orden impar. □

Por otro lado existe un simple construcción que prueba la existencia de quasi–grupos de orden n para cada entero positivo impar n. Esta construcción se basa en la aritmético de $\mathbb{Z}_n$ y en el hecho de que $2 \in \mathbb{Z}_n$ es invertible cuando n es impar. Consideramos el grupo aditivo $\mathbb{Z}_n$; en la tabla de la suma los elementos de la diagonal son todos de la forma $2x$, con $x \in \mathbb{Z}_n$; si definimos una nueva operación binaria en $\mathbb{Z}_n$ mediante: $a * y = \frac{x+y}{2}$, entonces los elementos de la diagonal son: 0, 1, 2, ...Además, por el hecho de que 2 es invertible, en cada fila y en cada columna de la tabla para esta nuevo operación no aparecen elementos repetidos, por lo tanto tenemos:

Proposición. 11.6.
Si n es un entero positivo impar y en $\mathbb{Z}_n$ definimos la operación $x * y = \dfrac{x+y}{2}$, entonces $(\mathbb{Z}_n, *)$ es un quasi–grupo idempotente y conmutativo.

Primera construcción de sistemas triples de Steiner–Kirkman: construcción de Bose

Teorema. 11.7.
Para cada $n \equiv 3 \pmod 6$ existe un conjunto X con n elementos que tiene un sistema triple de Steiner–Kirkman.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $n = 6k+3$ y un quasi–grupo idempotente conmutativo Q de orden $2k+1$. Definimos $X = Q \times \mathbb{Z}_3$. Para definir el sistema triple $\mathcal{T}$ vamos a considerar triples de tipo I:

$$\{(q,0),(q,1),(q,2)\}, \quad \text{para } q \in Q.$$

y triples de tipo II:

$$\{(q_1,i),(q_2,i),(q_1 * q_2, i+1)\}, \quad \text{para } q_1, q_2 \in Q \text{ e } i \in \mathbb{Z}_3.$$

Para comprobar que la unión de los triples de tipo I y los triples de tipo II forman un sistema triple de Steiner–Kirkman, al que llamaremos $\mathcal{T}$, vamos a probar que $\mathcal{T}$ tiene $\frac{n(n-1)}{6}$ elementos y que cada par de elementos de X pertenece a un triple de $\mathcal{T}$.
Los elementos de tipo I son exactamente $2k+1$; los elementos de tipo II son exactamente $3\binom{2k+1}{2}$, ya que cada uno está determinado por dos elementos de Q y un elemento de $\mathbb{Z}_3$. El total de elementos es:

$$\begin{aligned}(2k+1)+3\binom{2k+1}{2} &= (2k+1)+3\frac{(2k+1)2k}{2} = (2k+1)(1+\frac{6k}{2}) \\ &= (2k+1)(3k+1) = \frac{n}{3}\frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{6}.\end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que cada par de elementos de X pertenece a un triple de $\mathcal{T}$. Dados los elementos $(q_1,i_1),(q_2,i_2) \in X$ tenemos que estudiar los siguientes casos:

(1) Si $q_1 = q_2$, entonces $i_1 \neq i_2$ y pertenece a un triple de tipo I.

(2) Si $i_1 = i_2$, entonces $q_1 \neq q_2$, y pertenece a un triple de tipo II.

(3) Si $q_1 \neq q_2$ e $i_1 \neq i_2$, por ser $\mathbb{Z}_3$ un grupo con tres elementos se verifica $i_1 + 1 = i_2$ ó $i_2 + 1 = i_1$; como los dos casos son simétricos, vamos a tratar sólo el primero de ellos. Supongamos pues que $i_2 = i_1 + 1$; como Q es un quasi–grupo conmutativo, existe un único $q \in Q$ tal que $q_1 * q = q_2$, y por ser Q idempotente y $q_2 \neq q_1$, resulta que $q \neq q_1$; tomamos como tercer elemento del triple a (q,i_1), y por tanto $\{(q_1,i_1),(q,1_1),(q_2,i_2)\}$ es un triple de tipo II.

□

Segunda construcción de sistemas triples de Steiner–Kirkman: construcción de Skolen

Para hacer la segunda construcción necesitamos algunas nociones previas.
Un quasi–grupo Q de orden par $2n$ es semi–idempotente si existe una ordenación $x_1, \ldots, x_{2n}$ de los elementos de Q tal que $x_i * x_i = x_{n+i} * x_{n+i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Proposición. 11.8.
Para cada n existe un quasi–grupo Q de orden $2n$ que es semi–idempotente.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el grupo aditivo $\mathbb{Z}_{2n}$; en la tabla de la suma los elementos de la diagonal son: $0, 2, 4, \ldots, 2(n-1), 0, 2, 4, \ldots, 2(-1)$; esto es, el elemento que ocupa el lugar $i+n$ es igual al que ocupa el lugar i. Reescribimos todos estos elementos como $0, 1, 2, \ldots, n-1, 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Hacemos lo mismo con todos los elementos de la tabla que son de la forma $0, 2, 4, \ldots, 2(n-1)$. Para el resto hacemos el cambio siguiente: si $x+y = 2k+1$, con $k = 0, \ldots, n-1$, entonces reescribimos $x+y$ como $n-k$. En realidad estamos definiendo la siguente operación binaria en $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$:

$$x * y = \begin{cases} k & \text{si } x+y = 2k, \qquad\qquad (k = 0, \ldots, n-1) \\ n+k & \text{si } x+y = 2k+1, qquad\, (k = 0, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Tenemos que $(\mathbb{Z}_{2n}, *)$ es un quasi–grupo semi–idempotente conmutativo. □

Teorema. 11.9.
Para cada $n \equiv 1 \pmod 6$ existe un conjunto X con n elementos que tiene un sistema triple de Steiner–Kirkman.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n = 6k+1$, consideramos un quasi–grupo semi–idempotente conmutativo Q de orden $2k$, por ejemplo $Q = \mathbb{Z}_{2k}, *) =$, y definimos $X = Q \times \mathbb{Z}_3 \cup \{\infty\}$. Vamos a definir triples de X de diferentes tipos.
Triples de tipo I:

$$\{(q, 0), (q, 1), (q, 2)\}, \quad \text{para } q = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Triples de tipo II:

$$\{(q_1, i), (q_2, i), (q_1 * q_2, i+1)\}, \quad \text{para } q_1, q_2 \in Q \text{ e } i \in \mathbb{Z}_3.$$

Triples de tipo III:

$$\{\infty, (q, i), (q+k, i+1)\}, \quad \text{para } q = 0, 1, \ldots, k-1 \text{ e } i \in \mathbb{Z}_3.$$

Llamamos $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los triples de X de tipo I, II y III.
El número total de triples es:

$$k + 3k + 3\binom{2k}{2} = k + 3k + 3\frac{2k(2k-1)}{2} = k(1 + 3 + 3(2k-1)) = k(6k+1) = \frac{(n-1)n}{6}.$$

Sólo falta ver que cada par de elementos de X pertenece a uno de los triples.

(1) Sea $(q, i) \in X$; si $q \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, entonces $\infty, (q, i) \in \{\infty, (q, i), (q+k, i+1)\} \in \mathcal{T}$; si $q \in \{k, \ldots, 2k-1\}$, entonces $\infty, (q, i) \in \{\infty, (q-k, i-1), (q, i)\} \in \mathcal{T}$.

(2) Sean $(q_1, i_1), (q_2, i_2) \in X$.

(2.1) Si $q_1 = q_2 \in \{0, \ldots, k-1\}$, entonces $i_1 \neq i_2$ y pertenece a un triple de tipo I.

(2.2) Si $q_1 = q_2 \in \{k, \ldots, 2k-1\}$, entonces $i_1 \neq i_2$; supongamos que $i_2 = 1_i + 1$, por simetría se tiene el otro caso. De la definición existe un único $q \in Q$ tal que $q_1 * q = q_2$, y se tiene que $q \in \{0, \ldots, k-1\}$, entonces tenemos el triple $\{(q_1, i_1), (q, i_1), (q_1 * x, i_1 + 1) = (q_2, i_2)\}$, que es de tipo II.

(2.3) Si $i_1 = i_2$, entonces $q_1 \neq q_2$, y pertenece a un triple de tipo II.

(2.4) Si $q_1 \neq q_2$ e $i_1 \neq i_2$, supongamos que $i_2 = i_1 + 1$, por simetría se tiene el otro caso. Existe un único $q \in Q$ tal que $q_1 * q = q_2$; como $q_1 \neq q_2$, se tiene $q \neq q_1$, entonces $\{(q_1, i_1), (q, i_1), (q_1 * q, i_1 + 1) = (q_2, i_2)\}$ es un triple de tipo II.

$\square$

Podemos aún completar la teoría de sistemas triples de Steiner–Kirkman mediante algunas construcción de interés.

Ejercicio. 11.10. (Doble construcción)
Sea X un conjunto con n elementos que tiene un sistema triple de Steiner–Kirkman $\mathcal{T}$. Podemos construir sobre un conjunto con $2n+1$ elementos un nuevo sistema triple de Steiner–Kirkman como sigue:

(1) Llamamos $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ y definimos $Y = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$.

(2) Los triples del nuevo sistema triple son de los siguientes tipos:

(1.1) Los triples del sistema de X.

(1.2) Los triples que no contienen a $2n+1$ tienen las siguientes estructuras: $\{x+n, y+n, z\}$, $\{x+n, y, z+n\}$ ó $\{x, y+n, z+n\}$, siendo $\{x, y, z\}$ un triple del sistema de X.

(1.3) Los triples que contienen a $2n+1$ tienen la siguiente estructura: $\{x, x+n, 2n+1\}$, siendo $x \in X$.

Prueba que el conjunto que contiene todos estos triples es un sistema triple de Steine–Kirkman para $\{1, \ldots, 2n+1\}$.

Ejercicio. 11.11.
Sean X, Y conjuntos con sistemas triples de Steiner–Kirkman $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{T}_Y$, respectivamente. Consideramos el conjunto $X \times Y$ y el conjunto de triples: $\mathcal{T}$ que contiene los siguientes triples de $X \times Y$:

(1) $\{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\}$*, siendo* $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{T}_X$*,* $y \in Y$*.*

(2) $\{(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3)\}$*, siendo* $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{T}_Y$*,* $x \in X$*.*

(3) $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$*, siendo* $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{T}_X$*,* $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{T}_Y$*.*

Prueba que $\mathcal{T}$ es us sistema triple de Steiner-Kirkman de $X \times Y$.

Bibliografía

[1] Santiago Álvarez Areces, Manuel Fernández Flórez. "*2000 Problemas de matemáticas*". Ed. Everest, 2002.

[2] Titu Andrescu, Zuming Feng. "*102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team*". Birkhauser, 2002.

[3] Titu Andrescu, Zuming Feng. "*A path to combinatorics for undergraduates*". Birkhauser, 2004.

[4] M. Becheanu. "*International Mathematical Olympiads. 1959–2000*". Academic Distributiion Center, 2001.

[5] B. Kisacanin. "*Mathematical problems and proofs. Combinatorics, number theory, and geometry*". Kluwer, 2002.

[6] María Luisa Pérez Seguí. "*Combinatoria*". Cuadernos del Olimpíadas de Matemáticas. Olimpíada Mexicana de Matemáticas. 2008.

[7] Cristóbal Sánchez-Rubio, Manuel Ripollés Amela. "*Manual de matemáticas para preparación olímpica*". Universitat Jaume I. Castellón. 2000

[8] J. Schwenk. "*A classification of abelian quasigroups*". Rendiconti Mat. Roma, 15 (1995), 161–172.

[9] Pablo Soberón Bravo. "*Problem-solving methods in combinatorics. An approach to Olympiad Problems*". Birkhauser, 2013.

[10] Luis Verde Star. "*Matemática discreta y combinatoria*". Ed. Anthropos, 1995.

[11] "*Sessions de preparació per l'olimpiada matemàtica*". Soc. Cat. Mat. Barcelona, 2000.

Índice alfabético