Problema Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ tales que $a_1 + \ldots + a_n = 2013$.

Solución $a+1, a+2, \ldots, a+n \Rightarrow S = \frac{(a+1+a+n) \cdot n}{2}$

$S = 2013 \Leftrightarrow \frac{2a+n+1}{2} \cdot n = 2013$, como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$

posibilidades de n:

Si $n = 3 \Rightarrow a = 669$ $\boxed{670, 671, 672}$

Si $n = 11 \Rightarrow a = 177$ $\boxed{178, 179, \ldots, 188}$

Si $n = 61 \Rightarrow a = 2$ $\boxed{3, 4, \ldots, 63}$

Si $n = 33 \Rightarrow a = 44$ $\boxed{45, 46, \ldots, 77}$

los otros valores de "n" no verifican el enunciado.

Variaciones del ejercicio: mismo enunciado pero con:

a) números impares consecutivos

b) múltiplos de 3 "

c) " " 11 "

d) " " 5 "

Problema Calcula la suma de los cuadrados de los 100 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 + \cdots + a_{100} = -1$ y que sus términos pares suman 1.

Solución . $a_1 + \cdots + a_{100} = -1 \Leftrightarrow a + (a+d) + \cdots + (a+99d) = -1$

$$\Rightarrow \frac{a + a + 99d}{2} \cdot 100 = -1 \quad (1).$$

. $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 1 \Leftrightarrow (a+d) + (a+3d) + \cdots + (a+99d) = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+d+a+99d}{2} \cdot 50 = 1 \quad (2)$$

de (1) y (2) obtenemos $a = \frac{-149}{50}$; $b = 3/50$.

Ahora, para calcular $a^2 + (a+d)^2 + \cdots + (a+99d)^2$ equivale a

$$a^2 + a^2 + d^2 + 2ad + a^2 + 4d^2 + 4ad + \cdots + a^2 + 99^2 d^2 + 2a \cdot 99d =$$

$$100a^2 + d^2 \underbrace{(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 99^2)}_{\overset{(*)}{=} 328350} + 2ad \underbrace{(1 + 2 + \cdots + 99)}_{\overset{(*)}{=} 4950} = 299{,}98.$$

$$(*) \left[1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; ; \quad 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

Variación del ejercicio: Calcular la suma de los cubos.

Usando $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Problema. Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón d. Prueba que

$$a_2^3 \le \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Solución. Ponemos la progresión de la forma:

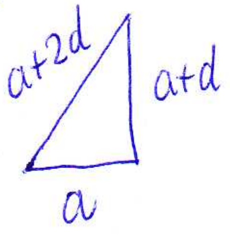
$$\underbrace{a-2d}_{a_0},\ \underbrace{a-d}_{a_1},\ \underbrace{a}_{a_2},\ \underbrace{a+d}_{a_3},\ \underbrace{a+2d}_{a_4}$$

Si hacemos $\frac{1}{10}\left(a_0^3+4a_1^3+4a_3^3+a_4^3\right) = \frac{1}{10}\left(10a^3+48ad^2\right)$

por tanto $\frac{1}{10}\left(a_0^3+4a_1^3+4a_3^3+a_4^3\right) - a_2^3 = \frac{48}{10}ad^2 \ge 0$

Problema Dado un triángulo rectángulo donde sus lados forman una progresión aritmética, entonces su perímetro es múltiplo de 12.

Solución.



$$(a+2d)^2 = (a+d)^2 + a^2 \iff a^2 - 2da - 3d^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \begin{cases} 3d \\ \cancel{-d} \end{cases} \Rightarrow \text{sus lados son } 3d, 4d \text{ y } 5d$$

y su perímetro $12d$

Variante: Calcula la razón de una progresión geométrica: a_1, a_2, a_3 tales que forman los lados de un triángulo rectángulo.

Problema Determinar las progresiones geométricas reales de 7 términos si sabemos que la suma de los 3 primeros es 7 y de los 3 últimos es 112.

Solución $a, ar, ar^2, \ldots, ar^6$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Suma 3 primeros: } a+ar+ar^2=7 \\ \text{Suma 3 últimos: } ar^4+ar^5+ar^6=112 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a(1+r+r^2)=7 \\ ar^4(1+r+r^2)=112 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{dividiendo} \\ \text{las dos} \\ \text{ecuaciones}\end{array}$$

$$\Rightarrow r^4=16 \rightarrow r = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$$

Si $r=2 \Rightarrow a=1$. $\boxed{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}$

Si $r=-2 \Rightarrow a=7/3$ $\boxed{7/3, -14/3, 28/3, -\frac{56}{3}, \frac{112}{3}, -\frac{224}{3}, \frac{448}{3}}$

Problema Prueba que si los números $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ $(x \neq 1)$ están en progresión aritmética, entonces

$$c^2 = (a \cdot c)^{\log_a b}$$

Solución Llamando $y = \log_a x$, $y+d = \log_b x$, $y+2d = \log_c x$. Se cumple $\log_a x + \log_c x = 2\log_b x$, pasando a base "a": $\log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a c} = 2\frac{\log_a x}{\log_a b}$

simplificando $(x \neq 1)$. $1 + \frac{1}{\log_a c} = \frac{2}{\log_a b} \Leftrightarrow 1 + \log_c a = \frac{2}{\log_a b}$, elevando a base "c":

$$c^{[1+\log_c a]} = c^{2/\log_a b} \Leftrightarrow c \cdot \underbrace{c^{\log_c a}}_{= a} = (c^2)^{1/\log_a b}$$

$$\Rightarrow c \cdot a = (c^2)^{\frac{1}{\log_a b}} \Rightarrow (c \cdot a)^{\log_a b} = c^2$$

SERIES TELESCÓPICAS

Tienen la forma $\cdot \sum_{n=1}^{K} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - b_4 + \cdots + \cancel{b_K} - b_{K+1}$

$= b_1 - b_{K+1}$.

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{K \to \infty} b_K$$

Algunos ejemplos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \boxed{\frac{100}{101}}$

$\left[\dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{4n^2-1}$, haciendo $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{A}{2n-1} + \dfrac{B}{2n+1}$

se obtiene $A = 1/2$; $B = -1/2$; por tanto,

$$\sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2013} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2013 + 1}\right) = \boxed{\frac{2013}{4027}}$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{300} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{300} \left[\ln(n+1) - \ln(n)\right] = -\ln(1) + \ln(301)$

$= \boxed{\ln(301)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$, haciendo $\dfrac{1}{n^2+3n+2} = \dfrac{A}{(n+1)} + \dfrac{B}{(n+2)}$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ se obtiene $A=1$; $B=-1$ por tanto.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{1+1} - \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{1}{n+2}}^{=0} = \boxed{\frac{1}{2}} \checkmark$$

ahora el último, un poco más difícil:

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}.$$

rompiendo la fracción en fracciones simples

$$\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}.$$

Si llamamos $S_K = \sum_{n=1}^{K} \frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$, obtenemos que

$$S_K = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}\right) - \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{K}+\frac{2}{K+1}+\frac{2}{K+2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{K+1}\right) - \left(\frac{2}{K+1}+\frac{2}{K+2}\right) = 2 - \frac{1}{K+1} - \frac{2}{K+2}.$$

y como $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n} = \lim_{K\to\infty} S_K = \lim_{K\to\infty}\left(2 - \underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{K+1}} - \underset{\downarrow\,0}{\frac{2}{K+2}}\right) = \boxed{2}.$$

Problema. Calcula la suma de los inversos de los 2013 términos de la sucesión de término general: $a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$

Solución $\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}} = \left(\frac{4n^2-1}{4n^2}\right)^{-1} = \frac{4n^2}{4n^2-1}$. por tanto.

$$\sum_{n=1}^{2013} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{2013} \frac{4n^2-1+1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{2013} 1 + \frac{1}{4n^2-1} =$$

$$2013 + \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{4n^2-1} \underset{(b)}{=} 2013 + \frac{2013}{4027} \simeq \boxed{2013,5}$$

Variante. Calcular la suma de los inversos de los 2013 términos de la sucesión de término general.

$$a_n = 1 - \frac{2}{n^2+n+2}$$

Solución. $2013 + \frac{2013}{1007} \simeq \boxed{2015}$