
FACE RINGS

RODRIGO BOTELLO MARABOTTO

Departamento de Álgebra
Universidad de Granada. 2014

Face rings

RODRIGO BOTELLO MARABOTTO

Departamento de Álgebra
Universidad de Granada. 2014

Dedicado a mis padres y a mi hermana

Agradecimientos

A Pascual Jara por toda la ayuda recibida.

Introducción

Seguimos el esquema planteado en la guía docente de la asignatura, que pide organizar la introducción según los siguientes items.

- (1) objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados,
- (2) antecedentes importantes para el desarrollo,
- (3) resultados obtenidos, en su caso, y las principales fuentes consultadas,
- (4) bibliografía final que incluya todas las referencias utilizadas.

Objetivos previstos

Los objetivos previstos para el trabajo son los siguientes:

- (1) Estudiar las propiedades de los ideales monomiales que puedan ser útiles para el estudio de anillos cara.
- (2) Relacionar los ideales monomiales con los complejos simpliciales mediante anillos cara.
- (3) Observar la homología asociada a los anillos cara.
- (4) Obtener herramientas que serán de utilidad para, en un futuro, poder entender la Upper Bound Conjeture.

Los objetivos se han llevado a cabo con éxito, ya que:

- (a) Se han obtenido las propiedades de los ideales monomiales necesarias para los siguientes objetivos. En particular, conocer el aspecto de la descomposición primaria de ideales monomiales nos permitirá descomponer los anillos cara para su posible estudio, y conocer el proceso de polarización de un ideal nos permitirá generalizar los resultados para anillos cara a cualquier cociente de un anillo de polinomios por un ideal monomial.
- (b) Se ha relacionado de manera exitosa el concepto topológico de complejo simplicial abstracto con el concepto de ideal monomial. Esta relación es la que nos permitirá aprovechar propiedades homológicas, topológicas y combinatorias del complejo simplicial para obtener resultados de interés algebraico.
- (c) Se ha estudiado la homología asociada a los anillos cara utilizando el complejo de homología complejo cadena aumentado de un complejo simplicial. También se ha observado que este complejo está asociado a un complejo de homología Koszul, que por un lado nos permitirá obtener el teorema de Reisner, herramienta esencial para entender la Upper Bound Conjeture, y por otro lado nos permitirá discutir otro tipo de cuestiones en un futuro, como la dualidad con el complejo de cohomología de Koszul (o complejo de cohomología de De Rham, si estamos trabajando con variedades diferenciales).

- (d) El teorema de Reisner, que relaciona los anillos cara Cohen–Macaulay con propiedades homológicas del complejo simplicial, nos permitirá obtener de una manera sencilla que complejos simpliciales son Cohen–Macaulay. En particular, será de mucha utilidad saber que todo complejo simplicial Cohen–Macaulay es puro y que todo complejo shellable es Cohen–Macaulay. También se ha observado su importancia en la demostración de la Upper Bound Conjetura para esferas simpliciales.

Antecedentes

No es difícil encontrar antecedentes del trabajo a lo largo de la carrera. Los polinomios siempre han jugado un papel importante en ella; a veces de manera explícita, como en álgebra I, donde estudiamos los primeros cocientes de anillos; otras de manera implícita, como en las asignaturas de análisis matemático y numérico, donde el objetivo primordial solía ser aproximar de manera eficiente ciertas funciones "suficientemente regulares" por polinomios; y en otras podemos encontrarlos casi escondidos, como en ecuaciones diferenciales, donde calcular la solución de una ecuación es en el fondo obtener el núcleo de ciertos morfismos de anillos. No es de extrañar, por tanto, que el estudio de cocientes por ideales monomiales sea estudiado, dado que los ideales monomiales resumen de algún modo al resto, como se puede ver en cualquier asignatura de álgebra conmutativa donde aprendes a calcular la base de Groebner de un ideal.

Sin embargo, los antecedentes más claros a las cuestiones planteadas en el trabajo residen en la topología algebraica. La asociación del grupo fundamental a una variedad topológica (cuyo enlace intermedio era el complejo simplicial abstracto) abrió la veda que permitiría relacionar objetos topológicos con estructuras algebraicas. En particular, la asociación entre anillos cara y complejos simpliciales residirá en que, si hay tantas variables como vértices, tomaremos que el producto de dos variables distintas es cero si, y solo si, no hay arista entre los vértices. Una representación de un anillo que es tan inocente que hasta sorprende lo útil que resulta (una vez que observas la estructura de álgebra exterior/álgebra de Koszul que estas definiendo en el simplex/complejo simplicial).

Resultados obtenidos y las principales fuentes consultadas

- (a) Hemos obtenido resultados de interés propio para ideales monomiales, como son el lema de Dickson, la descomposición primaria de ideales monomiales, su polarización a ideales monomiales libres de cuadrados y todos los resultados de carácter endogámico que permiten operar con ellos de manera más sencilla.
- (b) Hemos podido relacionar un anillo cociente (el anillo cara) con un complejo simplicial. Esto permite trabajar con un álgebra en vez de con el complejo simplicial, y con el complejo simplicial en vez de con el álgebra; esta relación nos ha permitido trabajar en cada caso en el lugar más sencillo y trasladar propiedades de un mundo a otro.
- (c) Considerando el complejo cadena aumentado asociado a un complejo simplicial nos ha permitido relacionar la profundidad de las localizaciones en ideales maximales del anillo cara con la homología del complejo. Como consecuencia de este hecho, hemos obtenido el teorema de

Reisner, que caracteriza los anillos cara Cohen–Macaulay en base a propiedades homológicas de su complejo simplicial asociado.

- (d) Utilizando el Teorema de Reisner, hemos obtenido corolarios que nos permitirán saber en ciertas ocasiones de manera simple que un complejo simplicial es Cohen-Macaulay o no. De particular interés es el hecho de que todo Complejo simplicial Cohen-Macaulay es puro y que todo complejo simplicial Shellable es Cohen–Macaulay. También hemos observado la importancia del teorema de Reisner en la Upper Bound Conjeture.

La principales fuentes consultadas son:

- [5], del que hemos tomado los resultados principales sobre ideales monomiales, así como la obtención de la base de Groebner.
- [4], del que hemos tomado la definición de Anillo Cara.
- [9], del que hemos tomado gran parte de los resultados sobre anillos Cohen-Macaulay, complejo cadena aumentado, y consecuencias del teorema de Reisner.
- [3], la fuente consultada de más peso. De él hemos obtenido los teoremas más importantes del trabajo, la Upper Bound Conjeture y el teorema de Reisner.

Bibliografía final

Se incluye al final del texto.

Introducción

El objeto de este trabajo es estudiar la relación existente entre dos objetos matemáticos, los **ideales (monomiales)** del anillo de polinomios $S = k[x_1, \dots, x_n]$ en n indeterminadas, con coeficientes en un cuerpo k , y los **complejos simpliciales** (finitos).

La importancia de cada uno de ellos por separado es más que clara:

- Por un lado, los ideales monomiales (o generados por monomios) del anillo $S = k[x_1, \dots, x_n]$ nos permiten, no sólo simplificar el estudio del mismo, al poder considerar para cada ideal (dado un orden monomial) su ideal inicial; proceso que es interés, ya que los ideales monomiales tienen excelentes propiedades algebraicas, por lo que operar con ellos se reduce en gran parte de las ocasiones a operar con sus conjuntos de generadores, lo que permite usar métodos combinatorios juntamente otros algebraicos. Los ideales monomiales son la parte algebraica de este trabajo.
- Por otro lado, los complejos simpliciales son una herramienta clave en topología algebraica, pues nos permiten modelizar, mediante triangulaciones, como conjuntos discretos de datos a las variedades topológicas, y así reducir el estudio de estas últimas al estudio de un modelo algebraico. Por ejemplo, el grupo fundamental de un espacio topológico. Por conocido, no entraremos demasiado en estos temas durante el trabajo, pero sí relacionaremos los complejos simpliciales con **complejos de cadenas homológicas** asociados a los mismos.

La posible relación entre estos dos tipos de objetos nos genera dos preguntas:

1. ¿Cómo podemos realizar la asociación de estos dos objetos?
2. ¿Qué beneficios podemos obtener de la misma?

La respuesta a la primera pregunta pasa por el estudio de una estructura a la que llamaremos **anillo cara (face ring)** o **anillo de Stanley–Reisner**. Para definirlo, a cada complejo simplicial abstracto Δ en n variables se le asignará un ideal monomial del anillo $k[x_1, \dots, x_n]$ generado por monomios libres de cuadrados al que llamaremos **ideal de no caras** o **ideal de Stanley-Reisner**, de manera que un monomio libre de cuadrados pertenece a este ideal si, y solo si, el conjunto de índices de las variables del monomio con exponente 1 es igual al conjunto de vértices de una no cara de Δ , esto es, de un subconjunto del conjunto de vértices que no esté en Δ). El anillo cara es el cociente del anillo de polinomios sobre este ideal. Que se puede considerar como una K -álgebra sobre los elementos de Δ . También es posible realizar el camino inverso; si comenzamos por un ideal monomial, primero, mediante la polarización le asociamos un ideal monomial libre de cuadrados, para finalmente asociar a este nuevo ideal un complejo simplicial que revierte el anterior proceso.

La relación existente entre ideales monomiales y complejos simpliciales abstractos nos resultará muy útil para el estudio de elementos algebraicos mediante el uso de herramientas combinatorias y topológicas. Un ejemplo de que la relación establecidas entre estos dos mundos es buena lo da el siguiente hecho: la forma usual de medir el tamaño de un anillo es mediante su dimension (dimensión de Krull: el supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos), y si el anillo es local también tenemos otra medida alternativa: la profundidad: el supremo de las longitudes de sucesiones regulares maximales; ambas medidas coinciden en los anillos locales Cohen–Macaulay (de hecho ésta es la definición de anillo local Cohen–Macaulay). Por otro lado la dimensión topológica de un complejo simplicial abstracto es bien conocida, coincidiendo con la dimensión de Krull; por otro lado la profundidad, definida en términos algebraicos, se interpreta en función de la homología del complejo de cadenas asociado: en cierto modo una nueva forma de medir el tamaño del complejos simplicial abstracto.

Saber si un anillo es Cohen–Macaulay (sus localizados en los ideales maximales son anillos locales Cohen–Macaulay) es generalmente difícil; para anillo monomiales de Stanley–Reisner, gracias a un resultado debido a Reisner, obtenemos una caracterización de esta propiedad utilizando propiedades homológicas del complejo simplicial asociado mediante cálculos algebraicos sencillos). No solo eso, sino que además, si el complejo simplicial verifica propiedades de simple comprobación. Por ejemplo, el anillo de Stanley–Reisner es Cohen–Macaulay si el complejo es de dimensión 1, si se unión de dos complejos Cohen–Macaulay más sencillos, o si es un complejo *shellable*.

Para terminar, el teorema de Reisner será clave para demostrar la Upper Bound Conjeture, un primer paso para generalizar a mayor número de dimensiones la famosa fórmula de Euler.

Abstract

The Face Rings, also known as Stanley–Reisner rings, are defined as the quotient of a polynomial ring of a Field over a finite set of variables, $S = k[x_1, \dots, x_n]$, divided by a monomial ideal, which is an ideal of S generated by monomials. These rings have the property of being related with simplicial complexes, discrete topological structures that allow us to model manifolds, as well as being useful for other kind of applications. This relationship between face rings and simplicial complexes will allow us to apply homological, topological and combinatorial tools typical of simplicial complexes to study algebraic problems and vice versa. In fact, we will use the homology of the augmented chain complex of a simplicial complex to study which Stanley–Reisner rings are Cohen–Macaulay, a property verified by those rings whose depth and Krull Dimension are equal for each of its localizations on maximal ideals. This result will be reflexed on the Stanley’s Theorem, theorem that is going to be crucial during the proof of the Upper Bound Conjecture.

The Project will be structures in four Chapters:

(1) Monomial Ideals

The Chapter I deals with the monomial ideals of $S = k[x_1, \dots, x_n]$ with k a field. These ideals will be the ones generated by monomials. During this chapter we will characterize them as the ideals whose polynomials belong to them if, and only if, all his monomials belong to the ideal. This will allow us to operate with them performing simple calculation with their sets of generators, obtaining that the colon ideal, the radical, and the saturation of monomial ideals are all monomial ideals. We will prove Dickson’s Lemma, discovering that all monomial ideals are finitely generated.

After that, we will obtain the primary decomposition of monomial ideals, specifying the special case of squarefree monomial ideals. To do that, we will calculate the representation of monomial ideals as an intersection of irreducible monomial ideals, the ones generated by pure powers of the variables. We will discover that these ideals are all primary ideals, and intersecting the ones of the representation associated with the same prime ideal, we will obtain an irredundant primary decomposition. We will also obtain the associated prime ideals of a monomial ideal.

To finish this chapter, we will define the process of polarization that will allow the transformation all monomial ideals into squarefree monomial ideals, process that is going to be essential in the next chapters. Thanks to it, the study of quotients between polynomial rings and monomial ideals studying the quotients by squarefree monomial ones only (Face Rings). To finish the chapter, we also observe that the polarization process doesn’t affect the property of being

Cohen–Macaulay, the last piece that we need to forget about non-squarefree monomial ideals during the next chapters.

(2) Stanley–Reisner Rings

In this chapter we will define the face rings. To do that, we will define an abstract simplicial complex as a subset of the power set of a finite vertex's set verifying that if a set, called face, belongs to the simplicial complex, then all subset of the set belong to the simplicial complex too. We will introduce all objects related to simplicial complexes too (faces, facets, dimension, non-faces, simplex,...). We will also define orders over simplicial complexes. This will be necessary to define the augmented oriented chain complex of the simplicial complex, this will be the principal tool used during this paper.

After that, we can define the Stanley-Reisner ideal associated with a simplicial complex over a set of n vertex. This will be the ideal generated by those monomials of $S = k[x_1, \dots, x_n]$ whose set index belonging to variables with power equal to one is the vertex set of a minimal non-face of the simplicial complex. Now, the Stanley–Reisner ring of the simplicial complex is the quotient between the polynomial ring S and the Stanley–Reisner ideal.

To finish this chapter, we will define the homology complex of a simplicial complex, the augmented oriented chain complex. We will notice the relationship between this complex and the Koszul complex, as well as remark the exterior algebra structure that is behind the definition of the homology complex (more precisely, its Koszul algebra for an arbitrary simplicial complex). In addition, we will define the join of simplicial complexes and the cone of a complex, and we will see some homological results related with this constructions.

(3) Cohen-Macaulay Rings

During this chapter we will study the property of being Cohen-Macaulay that some rings verify. We will define the Krull's dimension of a Ring, as well as the height of an ideal, remarking when a Ring is unmixed.

Now, we will study regular sequences of modulus over a Ring, proving that each regular sequence could be extended to a maximal one in each maximal ideal, as well as a proposition that will allow us to associate length of regular sequences with modules of homology.

After this, we will define the concept of depth for local rings as the length of the maximal regular sequence. We will characterize the depth using homology. We will prove some propositions for the depth too.

Next, we will define the Cohen-Macaulay Rings as the rings whose localizations in maximal ideals has the same dimension than depth. We will prove that all local Cohen-Macaulay Rings are unmixed.

To finish the chapter, we will study tensor products between Cohen–Macaulay rings, which will be useful to prove some propositions associating joins of simplicial complexes with Cohen-Macaulay properties of its associated face rings

(4) Cohen-Macaulay Simplicial Complexes

The last Chapter is about the main theorem of the memory, the Reisner theorem. First we will define the Cohen-Macaulay simplicial complexes as the ones whose associated Stanley-Reisner ring is Cohen Macaulay. Then, we will define the link of Face F as the faces that doesn't touch F and that united with it belong to the complex. We will enunciate then the Stanley Theorem, that characterizes the Cohen-Macaulay simplicial complexes using the homology of the of the complex's links. In particular, we will notice that, when simplicial complexes are Cohen-Macaulay, its homology modules with position less than the complex's dimension are zero.

After that, we will use the Reisner theorem to prove some useful corollaries that will allow us to determinate if a simplicial complex is Cohen-Macaulay with ease in some special occasions. First we will prove that a simplicial complex of dimension equal to 1 is Cohen-Macaulay if, and only if, its graph is connected. Then, we will prove that all Cohen-Macaulay simplicial complexes are pure. This means that all maximal faces have the same dimension. After that, we will prove that the q -skeleton of a Cohen-Macaulay simplicial complex of dimension $d > q$ is Cohen-Macaulay too, where the q -skeleton is the subcomplex whose faces are the faces of the complex with dimension less or equal than q . Next we will see that the join of two simplicial complexes is Cohen-Macaulay if, and only if, both complexes of the join are Cohen-Macaulay. The last special case will be when the Simplicial Complex is shellable. We will prove that all shellable simplicial complexes are Cohen-Macaulay, which could be really useful in future studies.

To finish the Chapter, we will show the importance of the Reisner theorem in the proof of the Upper Bound Conjeture for simplicial spheres (UBCS). We will define the f -vector of the simplicial complex as the vector that counts the number of faces of each dimension. Then we will talk about the h -vector of an homogeneous algebra, specifying how to compute it in the case of homogeneous algebras associated to a simplicial complexes. Notice that the h vector is related with the f -vector. Then we will enounce the conjeture and we will start remarking in which part the Reisner theorem is necessary. The conjeture says that we can give an upper bound to the number of faces of a simplicial sphere (an approach to the generalization of the Euler's formula). First, we will enounce a theorem the shows the homology modules of a simplicial sphere (this theorem is a generalization of the Euler Characteristic in some way). In particular, this theorem show us that the homology of the links of the sphere are zero when the position of the homology modulus is different that the dimensi3n, more precisely, less that the dimension. Applying the Reisner theorem, we can deduce that the Simplicial spheres are Cohen-Macaulay. Then we will signal a theorem that gives some bounds to the h -vector of a simplicial complex when it is Cohen-Macaulay. This bound is one of the principal reasons that allow the proof of the Upper Bound Conjeture, that wouldn't be satisfactory without the Reisner theorem.

To sum up we will remark the importance of connecting different ideas from different field in mathematics. In this case, we have been able of "drawing" an algebra, associating a simplicial complex to a face ring to apply tools designed to solve some kind of problems to effectively solve some different ones, in this case, a conjeture about topology using algebraic tools (Upper bound conjeture) and an algebraic problem using homological ones (Reisner theorem). Furthermore, we are able now to continue developing this connection.

Índice general

Agradecimientos		I
Introducción		III
Abstract		VII
I	Ideales monomiales	1
1	Propiedades básicas de los ideales monomiales	1
2	Operaciones Algebraicas con ideales monomiales	5
3	Descomposición primaria e ideales primos asociados	7
4	Polarización	12
II	Anillos de Stanley-Reisner	15
5	Complejos simpliciales	15
6	Anillo de Stanley-Reisner	17
7	Complejo cadena asociado a un complejo simplicial	19
III	Anillos Cohen-Macaulay	23
8	Dimensión de Krull y altura	23
9	Sucesiones regulares	24
10	Profundidad	26
11	Anillos Cohen-Macaulay	27
12	Producto tensor de álgebras Cohen-Macaulay	27
IV	Complejos simpliciales Cohen-Macaulay	29
13	Teorema de Reisner	29
14	Aplicaciones del Teorema de Resiner	29
15	La relación entre el teorema de Reisner y la Upper Bound Conjeture	33
Bibliografía		35

Capítulo I

Ideales monomiales

Sea K un cuerpo; el anillo de polinomios $S = K[x_1, \dots, x_n]$, en las indeterminadas x_1, \dots, x_n sobre K , es utilizado en el estudio de la estructura de K -álgebras, al ser toda K -álgebra finitamente generada un cociente de un anillo de polinomios, y en Geometría Algebraica, al ser cada conjunto algebraico el conjunto de ceros de un ideal de un anillo de polinomios.

La complejidad del anillo $S = K[x_1, \dots, x_n]$ hace que sea de interés considerar algunos elementos especiales, como por ejemplo los monomios. En este caso particular tenemos que los monomios forman una base de S como espacio vectorial sobre K ; además, desde el punto de vista de álgebras estos elementos son particularmente interesantes, ya que los ideales \mathfrak{a} generados por monomios, ideales monomiales, se caracterizan por el hecho de que un polinomio F pertenece a \mathfrak{a} si, y sólo si, cada monomio de F pertenece a \mathfrak{a} ; lo que hace particularmente fácil su estudio, ya que las diversas operaciones con ideales se traducen a manipulaciones con los monomios generadores.

1. Propiedades básicas de los ideales monomiales

1.1. Estructura de K -base

Sea $S = K[x_1, \dots, x_n]$ el anillo conmutativo de polinomios en n variables sobre el cuerpo K .

Sea \mathbb{N}^n , donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales, entre los que se incluye el cero.

Llamaremos **monomios** a los elementos de S de la forma $u = x^a = x^{a_1} \dots x^{a_n}$ con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Es claro que se tiene $x^{a+b} = x^a x^b$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}^n$.

Es claro que el conjunto $\mathbf{Mon}(S)$ de los monomios de S forman una K -base de S . Esto es, para cualquier $F \in S$, existe un único conjunto $\{c_a \in K \mid a \in \mathbf{Mon}(S)\}$, casi nulo, tal que $F = \sum_a c_a x^a$. Dado F , los elementos no nulos de $\{c_a \mid a \in \mathbf{Mon}(S)\}$ forman el soporte de F , al que representaremos por $\text{sop}(F)$.

Definición 1 (ideal monomial)

Un ideal $\mathfrak{a} \subset S$ es un **ideal monomial** si está generado por monomios.

Una propiedad fundamental de los ideales monomiales que hace su estudio más fácil, es la siguiente:

Teorema 1.1.1 (Estructura de K -base)

Sea \mathfrak{a} un **ideal monomial**. Entonces $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, el conjunto de monomios pertenecientes a \mathfrak{a} , es una K -base de \mathfrak{a} .

DEMOSTRACIÓN. Si llamamos $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cap \mathbf{Mon}(S)$, tenemos un subconjunto de \mathfrak{a} que es linealmente independientes sobre K .

Dado $F \in \mathfrak{a}$, por ser \mathfrak{a} un **ideal monomial** existe un conjunto de monomios $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq \mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, de $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$ y un conjunto de polinomios $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq S$ tales que $F = \sum_{i=1}^m f_i u_i$. De esto se deduce que $\text{sop}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \text{sop}(f_i u_i)$.

Como para todo índice i se tiene $\text{sop}(f_i u_i) \subseteq \mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, puesto que $f_i u_i$ es una suma de monomios de \mathfrak{a} por monomios de S (y \mathfrak{a} es un ideal), obtenemos que F tiene su soporte en $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, y por tanto que $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$ es un sistema lineal de generadores del ideal \mathfrak{a} . \square

Esta propiedad nos permitirá dar una caracterización de los ideales monomiales:

Corolario 1.1.2 (Caracterización)

Si \mathfrak{a} es un ideal de S , entonces equivalen:

(a) \mathfrak{a} es un **ideal monomial**;

(b) $\forall f \in S$, se tiene $f \in \mathfrak{a}$ si, y sólo si, $\text{sop}(f) \subseteq \mathfrak{a}$;

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b). Se deduce del Teorema 1.1.1.

(b) \Leftarrow (a). Sea f_1, \dots, f_m un conjunto de generadores de \mathfrak{a} . Dado que $\text{sop}(f_i) \subseteq \mathfrak{a}$ para todo índice i , se deduce que $\bigcup_{i=1}^m \text{sop}(f_i)$ es un conjunto de generadores, formado por monomios, del ideal \mathfrak{a} . \square

Corolario 1.1.3

Si \mathfrak{a} es un **ideal monomial**, entonces las clases de residuos de los monomios que no pertenecen a \mathfrak{a} forman una K -base del anillo S/I .

DEMOSTRACIÓN. Se deduce inmediatamente del Teorema 1.1.1 y del Corolario 1.1.2. \square

Ahora vamos a demostrar un lema debido a Dickson, el cual, entre otras cosas de interés, nos ayudará a probar que todo **ideal monomial** de S es finitamente generado.

Definición 2

Un monomio $x^b = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ divide al monomio $x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ si, y sólo si, $b_i \leq a_i$ para cada índice i . En este caso escribimos $x^b | x^a$.

Definición 3

Sea M un conjunto no vacío de $\mathbf{Mon}(S)$, el conjunto de monomios de S ; un monomio $x^a \in M$ se llama un **elemento minimal** de M respecto a la divisibilidad si, cuando x^b divide a x^a , entonces $x^b = x^a$.

Denotamos por M^{min} al conjunto de elementos minimales de M .

Teorema 1.1.4 (Lema de Dickson)

Si M es un conjunto no vacío de $\mathbf{Mon}(S)$, entonces M^{min} es un conjunto finito.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el lema de Dickson por inducción sobre n , el número de variables de $S = K[x_1, \dots, x_n]$. Sea $n = 1$. Si d es el entero más pequeño para el cual $x_1^d \in M$, entonces $M^{\min} = \{x_1^d\}$. Por lo que M un conjunto finito.

Sea $n \geq 2$ y $B = K[x] = K[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$. Usaremos la notación y en vez de x_n . Sea $S = K[x_1, \dots, x_{n-1}, y]$. Tomamos como N el subconjunto de $\mathbf{Mon}(B)$ consistente en los monomios x^a , donde $a \in \mathbb{N}^{n-1}$, tales que $x^a y^b \in M$ para algún $b \geq 0$. Nuestra hipótesis de inducción nos dice que N^{\min} es un conjunto finito. Sea $N^{\min} = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$. Por la definición de N , para cada $1 \leq i \leq s$, existe un $b_i \geq 0$ con $u_i y^{b_i} \in M$. Sea $b = \max\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$. Ahora para cada $0 \leq \xi < b$, definimos el subconjunto N_ξ de N como

$$N_\xi = \{x^a \in N : x^a y^\xi \in M\}.$$

De nuevo, nuestra hipótesis de inducción dice que, para cada $0 \leq \xi < b$, el conjunto N_ξ^{\min} es finito. Sea $N_\xi^{\min} = \{u_1^{(\xi)}, \dots, u_{s_\xi}^{(\xi)}\}$. Ahora mostraremos que cada monomio perteneciente a M es divisible por uno de los monomios de la siguiente lista:

$$\begin{aligned} &u_1 y^{b_1}, \dots, u_s y^{b_s} \\ &u_1^{(0)}, \dots, u_{s_0}^{(0)} \\ &u_1^{(1)} y, \dots, u_{s_1}^{(1)} y \\ &\dots \\ &u_1^{(b-1)} y^{b-1}, \dots, u_{s_{b-1}}^{(b-1)} y^{b-1}. \end{aligned}$$

De hecho, puesto que para cada monomio $w = x^a y^\gamma \in M$ con $x^a \in \mathbf{Mon}(B)$ obtenemos que $x^a \in N$, deducimos que si $\gamma \geq b$, entonces w es divisible por uno de los monomios $u_1 y^{b_1}, \dots, u_s y^{b_s}$ y que si $0 \leq \gamma < b$, entonces w es divisible por uno de los monomios $u_1^{(\gamma)} y^\gamma, \dots, u_{s_\gamma}^{(\gamma)} y^\gamma$. Por tanto M^{\min} es un subconjunto del conjunto listado arriba, por lo que M^{\min} es finito. \square

Este lema nos permite demostrar el siguiente hecho importante sobre ideales monomiales:

Corolario 1.1.5

Todo ideal monomial \mathfrak{a} de S está generado por un conjunto finito de monomios.

DEMOSTRACIÓN. Como \mathfrak{a} es un **ideal monomial**, $f \in \mathfrak{a}$ si, y sólo si, $\text{sop}(f) \subseteq \mathfrak{a}$.

Si consideramos $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, el conjunto de monomios pertenecientes a \mathfrak{a} , tenemos que $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{Mon}(S)$, por lo que $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$ tiene sólo un conjunto finito de elementos minimales $L = \{u_1, \dots, u_s\}$ (por el Lema de Dickson).

Por ser \mathfrak{a} un ideal, si tomamos un monomio arbitrario $w \in \mathbf{Mon}(S)$, entonces $wu_i \in \mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$ para todo índice i . (Pues es un monomio y está en \mathfrak{a}). Esto nos indica que el conjunto de monomios generado por L es $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$, y por tanto el ideal generado por L es \mathfrak{a} .

Resumiendo, \mathfrak{a} es finitamente generado, y un conjunto de generadores es el conjunto de los elementos minimales de $\mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$. \square

Proposición 1.1.6

Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ un sistema de generadores del ideal \mathfrak{a} formado por monomios. Entonces para cada monomio v se tiene: $v \in \mathbf{Mon}(\mathfrak{a})$ si, y sólo si, existe un monomio w y un índice i tal que $v = wu_i$.

DEMOSTRACIÓN. Si $v \in \mathbf{Mon}(\alpha)$, existen polinomios $f_i \in S$ tales que $v = \sum_{i=1}^{i=m} f_i u_i$. De esto se deduce que $v \in \text{sop}(f_i u_i)$ para cierto índice i , y de aquí se deduce que existe cierto $w \in \text{sop}(f_i)$ tal que $v = w u_i$.

La otra implicación es trivial y se dedujo en el corolario anterior. \square

Proposición 1.1.7

Cada **ideal monomial** admite un **único conjunto minimal de generadores monomiales** respecto a divisibilidad.

Se denotará como $G(\alpha)$ al sistema minimal de generadores monomiales de α .

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del Lema de Dickson 1.1.4.

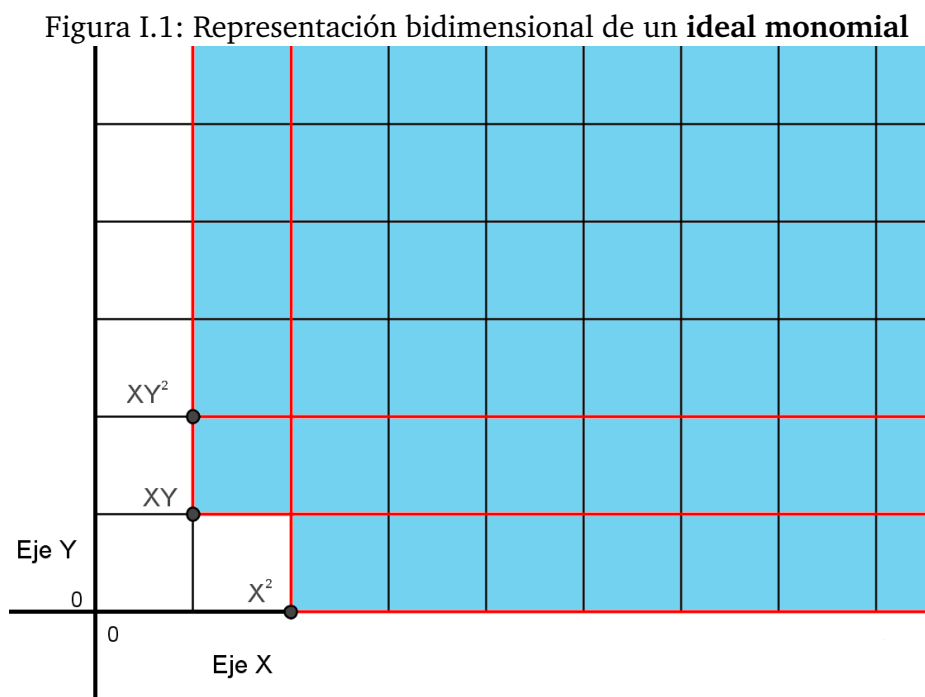
Si α es un **ideal monomial**, $\mathbf{Mon}(\alpha)$ es una K -base de α , y por tanto lo genera linealmente. $\mathbf{Mon}(\alpha)$ admite un subconjunto de elementos minimales respecto a divisibilidad que es finito (obviamente único) y que genera a $\mathbf{Mon}(\alpha)$. De aquí se deduce el resultado. \square

Veamos algún ejemplo de ideales monomiales:

Ejemplo 1.1.8

En el anillo $S = K[X, Y]$ el ideal $\alpha = (X^2, XY, XY^2)$ es monomial, pues está generado por monomios.

Como en este caso $n = 2$, el ideal se puede representar de manera muy sencilla:



En la figura se observa además que se tiene la igualdad: $\alpha = (X^2, XY, XY^2) = (X^2, XY)$.

Ejemplo 1.1.9

El ideal $\mathfrak{b} = (X - 1, XY^2)$ no es monomial, pues el polinomio $X - 1$ está en el ideal y 1 no lo está (pues \mathfrak{b} no es el ideal total).

1.1.1. Graduación

Si $a \in \mathbb{Z}^n$, un elemento $f \in S$ se dice que es **homogéneo de grado a** si es de la forma cx^a con $c \in K$, el cuerpo base.

El anillo S es \mathbb{Z}^n -graduado, con componentes de grado

$$S_a = \begin{cases} Kx^a, & \text{si } a \in \mathbb{N}^n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un S -módulo es llamado \mathbb{Z}^n -graduado si $M = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^n} M_a$ y $S_a M_b \subseteq M_{a+b}$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}^n$.

Si M y N son módulos graduados, un homomorfismo de módulos $\phi : N \rightarrow M$ es **homogéneo** si $\phi(N_a) \subseteq M_a$ para todo $a \in \mathbb{Z}^n$.

Si existe tal homomorfismo que es inyectivo, el cociente M/N es también graduado con componentes $(M/N)_a = M_a/N_a$.

En particular, un ideal es \mathbb{Z}^n -graduado si, y sólo si, es un **ideal monomial**.

2. Operaciones Algebraicas con ideales monomiales

Como ya anunciamos al inicio del capítulo, gracias a los corolarios 1.1.2 y 1.1.5, podemos caracterizar cada **ideal monomial** \mathfrak{a} por su conjunto de generadores $G(\mathfrak{a})$, lo que nos va a permitir realizar operaciones con los ideales monomiales manipulando estos generadores.

2.1. Operaciones básicas

Sea $S = K[x_1, \dots, x_n]$ el anillo conmutativo de polinomios en n variables sobre el cuerpo K .

Sean \mathfrak{a} y \mathfrak{b} ideales monomiales de S

Es fácil verificar que las siguientes relaciones se cumplen:

$$G(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subset G(\mathfrak{a}) \cup G(\mathfrak{b})$$

$$G(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset G(\mathfrak{a})G(\mathfrak{b})$$

Veamos ahora como realizar otras operaciones.

Proposición 2.1.1

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son ideales monomiales de S , entonces $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ es un **ideal monomial** y

$$G(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \{\text{lcm}(u, v) : u \in G(\mathfrak{a}), v \in G(\mathfrak{b})\}$$

donde $\text{lcm}(u, v)$ denota el mínimo común múltiplo de u y v .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Como \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales monomiales, el corolario 1.1.2 nos indica que $\text{sop}(f) \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Aplicando de nuevo el corolario 1.1.2 en el sentido opuesto deducimos que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ es un **ideal monomial**.

Sea $w \in \text{sop}(f)$; entonces como $\text{sop}(f) \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, existen $u \in G(\mathfrak{a})$ y $v \in G(\mathfrak{b})$ tales que $u|w$ y $v|w$, por lo que $\text{lcm}(u, v)$ divide a w . Dado que $\text{lcm}(u, v) \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ para todo $u \in G(\mathfrak{a})$, $v \in G(\mathfrak{b})$, concluimos que $\{\text{lcm}(u, v) : u \in G(\mathfrak{a}), v \in G(\mathfrak{b})\}$ es un sistema de generadores de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. \square

Definición 4 (Ideal Residual)

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son ideales de S , entonces

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{f \in S : fg \in \mathfrak{a} \forall g \in \mathfrak{b}\}$$

es llamado *ideal residual de \mathfrak{a} respecto a \mathfrak{b}* .

Proposición 2.1.2

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son ideales monomiales, entonces $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ es un **ideal monomial** y

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \bigcap_{v \in G(\mathfrak{b})} \mathfrak{a} : (v)$$

Además, $G(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{u/\text{gcd}(u, v) : u \in G(\mathfrak{a})\}$, donde $\text{gcd}(u, v)$ denota al máximo común divisor de u y v .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. Entonces $fv \in \mathfrak{a}$ para todo $v \in G(\mathfrak{b})$. Por el corolario 1.1.2 tenemos que $\text{sop}(f)v = \text{sop}(fv) \subset \mathfrak{a}$. Esto implica que $\text{sop}(f) \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. Por tanto, del corolario /refCoro1 deducimos que $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ es un **ideal monomial**.

La presentación de $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ dada como intersección es obviamente cierta y es también claro que $\{u/\text{gcd}(u, v) : u \in G(\mathfrak{a})\} \subset \mathfrak{a} : (v)$. Luego sea $w \in \mathfrak{a} : (v)$. Entonces existe un $u \in G(\mathfrak{a})$ tal que u divide wv . Esto implica que $u/\text{gcd}(u, v)$ divide w , como se deseaba. \square

2.2. Saturación y radical

Sean $\mathfrak{a} \subset S$ un ideal graduado. Denotamos por $\eta = (x_1, \dots, x_n)$ el ideal graduado maximal de S .

Definición 5 (Saturación y Radical)

La saturación $\tilde{\mathfrak{a}}$ de \mathfrak{a} es el ideal

$$\mathfrak{a} : \eta^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a} : \eta^k$$

El radical $\sqrt{\mathfrak{a}}$ de \mathfrak{a} es el ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in S : f^k \in \mathfrak{a}, k \in \mathbb{N}\}$$

Cuando un ideal coincide con su saturación o con su radical, se llama, respectivamente, *ideal saturado* o *ideal radical*.

Proposición 2.2.1

La saturación y el radical de un **ideal monomial** son monomiales.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 2.1.2, $\mathfrak{a} : \mathfrak{m}^k$ es un **ideal monomial** para todo k . Puesto que $\tilde{\mathfrak{a}}$ es la unión de estos ideales, es un **ideal monomial**.

Sea $f = cx^{a_1} + \dots \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ con $0 \neq c \in K$. Entonces $f^k \in \mathfrak{a}$ y consecuentemente $\text{sop}(f^k) \subset \mathfrak{a}$, puesto que \mathfrak{a} es un **ideal monomial**. Sea $\text{sop}(f) = \{x^{a_1}, \dots, x^{a_r}\}$. La envolvente convexa del conjunto $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo. Asumiremos que a_1 es un vértice de este politopo, es decir, a_1 no pertenece a la envolvente convexa de $\{a_2, \dots, a_r\}$.

Asumamos que $(x^{a_1})^k = (x^{a_1})^{k_1}(x^{a_2})^{k_2} \dots (x^{a_r})^{k_r}$ con $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ y $k_1 < k$. Entonces

$$a_1 = \sum_{i=2}^r (k_i/k - k_1) a_i \text{ con } \sum_{i=2}^r (k_i/(k - k_1)) = 1,$$

por lo que a_1 no es un vértice, una contradicción. De esto se deduce que el monomio $(x^{a_1})^k$ no puede cancelarse con otros términos de f^k y por tanto pertenece a $\text{sop}(f^k)$, el cual es un subconjunto de \mathfrak{a} . De hecho $x^{a_1} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y $f - cx^{a_1} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por inducción sobre el cardinal de $\text{sop}(f)$ concluimos que $\text{sop}(f) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Aplicando el corolario 1.1.2 obtenemos que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un **ideal monomial**. \square

Definición 6 (Elemento Libre de cuadrados)

A un monomio x^a de S lo llamamos **libre de cuadrados** si las componentes de $a = (a_1, \dots, a_n)$ son 0 o 1.

Denotamos como $\sqrt{u} = \prod_{i, a_i \neq 0} x_i$.

Entonces $\sqrt{u} = u$ si, y solo si u es libre de cuadrados.

Proposición 2.2.2

Si \mathfrak{a} es un **ideal monomial**, entonces $\{\sqrt{u} : u \in G(\mathfrak{a})\}$ es un conjunto de generadores de $\sqrt{\mathfrak{a}}$

DEMOSTRACIÓN. Obviamente $\{\sqrt{u} : u \in G(\mathfrak{a})\} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Puesto que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un **ideal monomial**, es suficiente probar que cada monomio $v \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ es múltiplo de algún \sqrt{u} con $u \in G(\mathfrak{a})$. De hecho, si $v \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ entonces $v^k \in \mathfrak{a}$ para algún entero $k \geq 0$, y además $v^k = wu$ para algún $u \in G(\mathfrak{a})$ y algún monomio w . De esto deducimos la conclusión deseada. \square

Definición 7

Un **ideal monomial** \mathfrak{a} se dice **libre de cuadrados** si está generado por monomios libres de cuadrados.

Corolario 2.2.3

Un **ideal monomial** \mathfrak{a} es **radical**, $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ si, y solo si, \mathfrak{a} es libre de cuadrados.

3. Descomposición primaria e ideales primos asociados

La descomposición primaria de ideales monomiales y la obtención de sus ideales primos asociados van a ser de importancia para el desarrollo de resultados posteriores. En particular obtendremos la descomposición primaria de los ideales monomiales generados por elementos libres de cuadrados, pues la necesitaremos para el estudio de anillos cara.

3.1. Ideales monomiales irreducibles

Una presentación de un ideal como intersección de otros ideales, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ se dice irredundante si no se pueden omitir ideales en esta presentación.

Teorema 3.1.1

Sea \mathfrak{a} un **ideal monomial** de S . Entonces \mathfrak{a} puede escribirse como intersección de ideales monomiales generados por potencias puras de las variables. Además, una presentación irredundante de este tipo es única.

DEMOSTRACIÓN. Sea $G(\mathfrak{a}) = \{u_1, \dots, u_r\}$, y supongamos que cierto u_i no es una potencia pura, digamos u_1 . Entonces podemos escribir $u_1 = vw$ donde v y w son monomios coprimos, es decir, $\gcd(v, w) = 1$ y $v \neq 1 \neq w$. Afirmamos que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ donde $\mathfrak{a}_1 = (v, u_2, \dots, u_r)$ y $\mathfrak{a}_2 = (w, u_2, \dots, u_r)$. Obviamente, \mathfrak{a} está contenido en la intersección. Sea u un monomio contenido en $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Si u es un múltiplo de uno de los u_i , entonces $u \in \mathfrak{a}$. Si no lo es, entonces u es un múltiplo de v y de w , y por tanto de u_1 dado que v y w son coprimos. En cualquier caso, $u \in \mathfrak{a}$.

Si cualquiera, $G(\mathfrak{a}_1)$ o $G(\mathfrak{a}_2)$ contienen un elemento que no es una potencia pura, procedemos como antes y obtenemos, tras un número finito de pasos una presentación de \mathfrak{a} como intersección de ideales monomiales generados por potencias puras. Omitiendo estos ideales que contengan la intersección de otros, obtenemos una intersección irredundante.

Sea $\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_s$ dos intersecciones irredundantes de ideales generados por potencias puras. Mostraremos que para cada $i \in [r]$, con $[r] = \{1, \dots, r\}$, existe $j \in [s]$ tal que $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{q}_i$. Por simetría obtenemos la inclusión recíproca y por tanto que $r = s$ y que $\{\mathfrak{q}_i, \dots, \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}'_i, \dots, \mathfrak{q}'_s\}$.

De hecho, sea $i \in [r]$. Asumiremos que $\mathfrak{q}_i = (x_1^{a_1}, \dots, x_k^{a_k})$. Supongamos que $\mathfrak{q}'_j \not\subset \mathfrak{q}_i$ para todo $j \in [s]$. Entonces para cada j existe $x_{l_j}^{b_j} \in \mathfrak{q}'_j \setminus \mathfrak{q}_i$. De esto obtenemos que $l_j \notin [k]$ o que $b_j < a_{l_j}$. Sea

$$u = \text{lcm}\{x_{l_1}^{b_1}, \dots, x_{l_s}^{b_s}\}.$$

Tenemos que $u \in \bigcap_{j=1}^s \mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{q}_i$. Por tanto, existen $i \in [k]$ tales que $x_i^{a_i}$ divide a u . Pero esto es obviamente imposible, obteniendo la contradicción que nos proporciona la tesis deseada. \square

Definición 8

Un **ideal monomial** se dice **irreducible** si no puede escribirse como intersección propia de otros dos ideales monomiales.

Un **ideal monomial** se dice **reducible** si no es irreducible.

Corolario 3.1.2

Un **ideal monomial** es irreducible si, y solo si, es generado por potencias puras de las variables.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{q} = (x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k})$ y supongamos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ donde \mathfrak{a} y \mathfrak{b} son ideales monomiales que contienen propiamente a \mathfrak{q} . Por el Teorema 3.1.1 tenemos que $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$ y $\mathfrak{b} = \bigcap_{j=1}^s \mathfrak{q}'_j$ donde los \mathfrak{q}_i y los \mathfrak{q}'_j son generados por potencias puras de las variables. Por tanto, tenemos la presentación

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i \cap \bigcap_{j=1}^s \mathfrak{q}'_j.$$

Omitiendo ciertos ideales de la intersección de la derecha, podemos obtener presentaciones irredundantes de \mathfrak{q} . La unicidad proporcionada por el Teorema 3.1.1 implica que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i$ o que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'_j$ para algún i o j , una contradicción.

Por otro lado, si $G(\mathfrak{q})$ contiene un monomio $u = vw$ con $\gcd(v, w) = 1$ y $v \neq 1 \neq w$, entonces, como en la prueba del Teorema 3.1.1, \mathfrak{q} puede escribirse como intersección propia de ideales monomiales. \square

Por el Teorema 3.1.1 y por el Corolario 3.1.2 obtenemos que todo **ideal monomial** puede expresarse como intersección irredundante de irreducibles, que son ideales monomiales generados por potencias puras de las variables.

3.2. Caso ideales Libres de cuadrados

Para el caso particular en el que nuestro ideal a descomponer sea libre de cuadrados, los ideales que aparecerán en nuestra descomposición serán generados por potencias puras de la variables elevadas a exponentes 1 ó 0. Estos ideales son exactamente los ideales primos que son monomiales.

Definición 9

Un ideal \mathfrak{a} de un anillo R se dice que es **primo** si $\forall a, b \in R, ab \in \mathfrak{a} \iff a \in \mathfrak{a} \text{ o } b \in \mathfrak{a}$

Corolario 3.2.1

Un ideal libre de cuadrados se puede expresar como intersección de ideales primos monomiales.

Definición 10 (Ideal primo minimal)

Sea \mathfrak{a} un ideal de un anillo R . Un ideal primo \mathfrak{p} se llama ideal primo minimal de \mathfrak{a} si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ y no hay otros ideales primos de R que contengan a \mathfrak{a} y esten contenidos propiamente en \mathfrak{p} .

Denotaremos al conjunto de ideales primos minimales de \mathfrak{a} como $\mathbf{Min}(\mathfrak{a})$.

Lema 3.2.2

Si \mathfrak{a} tiene una presentación irredundante como intersección de ideales primos, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$, entonces $\mathbf{Min}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathfrak{p}_i no es un ideal primo minimal de \mathfrak{a} . Entonces existe un ideal primo \mathfrak{p} con $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, y \mathfrak{p} está contenido propiamente en \mathfrak{p}_i . Dado que $\mathfrak{p}_j R_{\mathfrak{p}_i} = R_{\mathfrak{p}_i}$ para $i \neq j$ y dado que la localización conmuta con las intersecciones, deducimos que $IR_{\mathfrak{p}_i}$.

Por otro lado, si \mathfrak{p} es un ideal primo conteniendo a \mathfrak{a} , entonces $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_p \subset \mathfrak{p}$. Por lo que uno de los \mathfrak{p}_i debe estar contenido en \mathfrak{p} . Por tanto, si \mathfrak{p} es un ideal primo minimal de \mathfrak{a} , entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. \square

Corolario 3.2.3

Si \mathfrak{a} es un **ideal monomial libre de cuadrados** de S , entonces

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{Min}(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

y cada $\mathfrak{p} \in \mathbf{Min}(\mathfrak{a})$ es un ideal primo monomial.

3.3. Descomposición Primaria

Como ya anunciamos antes, nos va a interesar estudiar la descomposición primaria de ideales monomiales.

Definición 11 (Ideal primo asociado a un módulo)

Si R es un anillo noetheriano y M es un R -módulo finítamente generado, entonces, un ideal primo \mathfrak{p} de R es llamado ideal primo asociado con M si \mathfrak{p} es el anulador de algún x de M .

Es decir, si existe x en M con $\{\mathfrak{p}\} = \text{ann}(x)$, donde $\text{ann}(x) = \{a \in R : ax = 0\}$

El conjunto de \mathfrak{p} que verifican esta propiedad se llama $\text{Ass}(M)$, el conjunto de primos asociados a M .

Definición 12 (Ideal Primo Minimal)

Un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ es llamado ideal primo minimal de M si $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ y para cada ideal primo \mathfrak{q} contenido propiamente en \mathfrak{p} tenemos que $M_{\mathfrak{q}} = 0$, donde $M_{\mathfrak{p}}$ denota la localización en el primo \mathfrak{p} .

Para el caso $M = R/\mathfrak{a}$, \mathfrak{p} es un primo minimal de M si, y solo si, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ y no hay ideal primo \mathfrak{q} con $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Además, el conjunto $\text{Ass}(M)$ es finito y contiene a los ideales primos minimales de M .

Por abuso de notación, en ocasiones, si \mathfrak{a} es un ideal de R , se denota $\text{Ass}(\mathfrak{a}) = \text{Ass}(R/\mathfrak{a})$.

Definición 13 (Ideal primario)

Un ideal \mathfrak{a} de un anillo R se dice que es **primario** si para todo par de elementos a, b de R con $ab \in \mathfrak{a}$ tenemos que, o bien $b \in \mathfrak{a}$, o existe un $k \in \mathbb{N}$ con $a^k \in \mathfrak{a}$.

Proposición 3.3.1

Sea \mathfrak{a} un ideal de un anillo Noetheriano R . Equivalen:

(a) \mathfrak{a} es primario.

(b) Existe un ideal primo \mathfrak{p} tal que $\{\mathfrak{p}\} = \text{Ass}(R/\mathfrak{a})$. De suceder esto, se dirá que \mathfrak{a} es \mathfrak{p} -**primario**.

Proposición 3.3.2

El ideal irreducible $(x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k})$ es $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ -primario.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{q} = (x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k})$ y $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Puesto que \mathfrak{p} es un ideal primo minimal de \mathfrak{q} deducimos que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\mathfrak{q})$.

Observemos que $\mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{q}$ para $m = \sum_{i=1}^k a_i$. De hecho, \mathfrak{p} es el único ideal primo minimal que contiene a \mathfrak{q} . Por tanto, si \mathfrak{p}' es un ideal primo asociado de \mathfrak{q} entonces $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$.

Tenemos que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q} : (g)$ para algún polinomio g . Supongamos que $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$. Entonces \mathfrak{p}' contiene el polinomio f con la propiedad de que ninguno de los elementos $u \in \text{sopf}$ es divisible por las variables x_{i_j} . De hecho, f es regular en S/\mathfrak{q} . Dado que $fg \in \mathfrak{q}$ concluimos que $g \in \mathfrak{q}$ y que $\mathfrak{q} : (g) = S$, una contradicción. \square

Definición 14

Una presentación de un Ideal \mathfrak{a} como intersección de ideales primarios se llama una descomposición primaria de \mathfrak{a} ,

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$$

- Esta descomposición se dice que es irredundante si ningún Q_i puede eliminarse y si $P_i \neq P_j$ para $i \neq j$, con $\{P_i\} = \text{Ass}(Q_i)$.
- Los q_i se llaman **componentes p_i -primarias** de α .
- Las componentes primarias no son únicas en general, si lo son si están asociadas a un ideal primo minimal.
- La proposición anterior indica que la descomposición que obtuvimos en ideales irreducibles es una descomposición primaria. Sin embargo, no tiene por que se irredundante (en el nuevo sentido primario).
- Podemos construir una presentación irredundante utilizando la presentación en irreducibles e intersecando las componentes primarias asociadas al mismo primo.

Ejemplo 3.3.3

Obtengamos una presentación irredundante de un **ideal monomial** como intersección en irreducibles. Dado el ideal

$$\alpha = (x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_3^2, x_1 x_2 x_3^2, x_2^2 x_3^2),$$

aplicando el proceso se tiene, por ejemplo, una descomposición como la siguiente:

$$\alpha = (x_1, x_2^3, x_2^2 x_3^2) \cap (x_2, x_1^3, x_1^2 x_3^2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2).$$

Se descomponen cada uno de estos ideales como:

$$(x_1, x_2^3, x_2^2 x_3^2) = (x_1, x_2^2) \cap (x_1, x_2^3, x_3^2)$$

$$(x_2, x_1^3, x_1^2 x_3^2) = (x_2, x_1^2) \cap (x_2, x_1^3, x_3^2).$$

Sustituyendo en la expresión primera y simplificando se tiene:

$$\alpha = (x_1, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2)$$

Ésta es una representación de α como intersección irredundante en irreducibles. También es una descomposición primaria, ya que cada uno de los ideales es un ideal primario; sin embargo no es una descomposición primaria irredundante; los ideales (x_1, x_2^2) y (x_1^2, x_2) tienen el mismo primo asociado, por lo que esta descomposición no sería una descomposición primaria irredundante. Dado que la intersección de ideales p -primarios es un ideal p -primario, intersecando ambos ideales obtenemos la descomposición primaria irredundante de α , que en este caso es:

$$\alpha = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2),$$

y que obviamente no es una descomposición en irreducibles.

- La descomposición primaria obtenida de este modo es única.

Llamaremos a esta descomposición la **descomposición primaria estandar** de α .

Corolario 3.3.4

Lo ideales primos asociados a un **ideal monomial** son ideales primos monomiales.

Corolario 3.3.5

Si α es un **ideal monomial** de S , y \mathfrak{p} es un ideal primo asociado a α , entonces existe un monomio v con $\mathfrak{p} = \alpha : v$.

4. Polarización

En la proxima sección, utilizaremos ideales monomiales generados por monomios libres de cuadrados para generar unas construcciones algebraicas y topológicas llamadas anillos de Stanley-Reisner y anillos cara.

Dado que hemos desarrollado una teoría para ideales monomiales generales, nos interesaría poder asociar a cada **ideal monomial** un ideal libre de cuadrados que lo represente adecuadamente.

Este proceso, al que llamaremos polarización, consistirá en una deformación de los ideales monomiales en ideales libres de cuadrados en un conjunto nuevo de variables.

Lema 4.0.6

Sea α un **ideal monomial** de $S = K[x_1, \dots, x_n]$ con $G(\alpha) = \{u_1, \dots, u_m\}$ donde $u_i = x^{a_i}$ con $a_i = a_{i1}, \dots, a_{in} \in \mathbb{N}^n$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ fijo, y supongamos que $a_{ij} > 1$ para al menos un $i \in \{1, \dots, m\}$

Sea $T = S[z]$ el anillo de polinomios sobre S en la variable z y sea $\mathfrak{b} \subset T$ el **ideal monomial** con $G(\mathfrak{b}) = v_1, \dots, v_m$, donde $v_i = u_i$ si $a_{ij} = 0$, y $v_i = (u_i/x_j)z$ si $a_{ij} \geq 1$.

Entonces $z - x_j$ es un elemento que no es divisor de cero módulo \mathfrak{b} y $(T/\mathfrak{b})/(z - x_j)(T/\mathfrak{b}) \cong S/\alpha$.

Este Lema nos induce un proceso iterativo que nos va a permitir obtener la polarización de un **ideal monomial**:

Sea α un **ideal monomial** de $S = K[x_1, \dots, x_n]$ con $G(\alpha) = \{u_1, \dots, u_m\}$ donde $u_i = x^{a_i}$ con $a_i = a_{i1}, \dots, a_{in} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Para cada j tomamos $a_j = \max\{a_{ij} : i = 1, \dots, m\}$ y tomamos T como el anillo de polinomios sobre K en las variables

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1a_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2a_2}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{na_n}$$

Tomemos $\mathfrak{b} \subset T$ el **ideal monomial** libre de cuadrados con $G(\mathfrak{b}) = v_1, \dots, v_m$ donde

$$v_i = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{a_{ij}} x_{jk} \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Los monomios v_i se llaman polarizaciones de u_i , y el ideal obtenido \mathfrak{b} se llama **polarización** de α . Dicho de una manera menos formal:

Método 4.0.7

Dado un **ideal monomial** α realizamos los siguientes pasos:

1. Asociamos a cada indeterminada el mayor exponente que toma en $G(\alpha)$.
2. Tomamos un nuevo anillo $K[x_1, \dots, x_s]$ donde s es la suma de los exponentes anteriores.
3. En este nuevo anillo, tomamos como $G(\mathfrak{b})$ los elementos de $G(\alpha)$ modificados para que sean libres de cuadrados, es decir, dado que tenemos más indeterminadas, sustituimos las potencias que aparecen en los monomios por productos de nuevas variables.

Ejemplo 4.0.8

Sea $\alpha = (x^3y^2, x^2z) \subset K[x, y, z]$

1. x aparece con exponente 3, y con exponente 2 y z con exponente 1.
2. Consideramos el anillo $K[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z]$
3. El ideal \mathfrak{b} que obtenemos es $\mathfrak{b} = (x_1x_2x_3y_1y_2, x_1x_2z)$

Como se puede observar en el ejemplo, el ideal polarizado de α , \mathfrak{b} , posee información extra que hemos añadido a α . Esto se puede solucionar de manera muy sencilla con un simple cociente.

Proposición 4.0.9

Sea α un **ideal monomial** de S y $\mathfrak{b} \subset T$ su polarización. Entonces la secuencia \mathbf{z} de formas lineales

$$x_{11} - x_{12}, \dots, x_{11} - x_{1a_1}, x_{21} - x_{22}, \dots, x_{21} - x_{2a_2}, \dots, x_{n_1} - x_{n_2}, \dots, x_{n_1} - x_{na_n}$$

es una T/\mathfrak{b} -secuencia y las siguientes K -álgebras son isomorfas:

$$(T/\mathfrak{b})/(\mathbf{z})(T/\mathfrak{b}) \cong S/\alpha$$

Nota 4.0.10

La definición de M -secuencia puede encontrarse en [24](#).

Proposición 4.0.11

Sea $\alpha \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ un **ideal monomial** y sea $\mathfrak{b} \subset T$ su polarización.

Entonces S/α es Cohen-Macaulay $\iff T/\mathfrak{b}$ es Cohen-Macaulay.

DEMOSTRACIÓN. [[5](#), Corollary 1.6.3] □

Cuando más adelante hablemos de anillos de Stanley-Reisner y de anillos Cohen-Macaulay, esta proposición nos será muy útil, ya que nos permitirá saber que cocientes de anillos de polinomios por ideales monomiales serán Cohen-Macaulay estudiando solo anillos de Stanley-Reisner.

Capítulo II

Anillos de Stanley-Reisner

Como ya adelantamos, vamos a ser capaz de asociar a nuestros ideales monomiales un complejo simplicial, para más adelante poder relacionar cuestiones algebraicas en anillos con propiedades topológicas y combinatorias de los complejos.

5. Complejos simpliciales

No limitaremos a trabajar con complejos simpliciales abstractos.

5.1. Definición de Complejos simplicial

Definición 15 (Complejo Simplicial abstracto)

Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vértices. Un complejo simplicial (abstracto) Δ sobre un conjunto de vértices V es una colección de subconjuntos de V que verifica:

1. Si $F \subset V$ $F \in \Delta$ entonces todos los subconjuntos de F están en Δ (Vacío incluido).
 2. $\{i\} \in \Delta \forall i \in V$ (Esta condición a veces no se exige).
- Los elementos F de Δ se llaman **caras** de Δ .
 - La **dimensión** de una cara F de Δ es el número $|F| - 1$ donde $|F|$ es el número de vértices de F .
 - Las caras de dimensiones 0 y 1 se llaman vértices y aristas respectivamente y $\dim(\emptyset) = -1$.
 - Las caras maximales de Δ bajo la inclusión se llaman **Facetas** de Δ . Al conjunto de Facetas de un complejo Δ lo denotaremos como $\mathcal{F}(\Delta)$.
 - Al conjunto de subconjuntos de $\{v_1, \dots, v_n\}$ que no pertenezcan a Δ , es decir, que no sean caras, los denotaremos como $\mathcal{N}(\Delta)$ y lo llamaremos conjunto de no-caras de Δ . (Usualmente, se denotará indicando solo las no-caras minimales).

- La dimensión del complejo simplicial Δ es el máximo de las dimensiones de sus Facetas, es decir,

$$\dim(\Delta) = \max\{\dim(F) : F \in \Delta\}$$

- Denotamos por $\Delta = \langle F_1, \dots, F_q \rangle$ al complejo simplicial con facetas F_1, \dots, F_q .
- Un complejo simplicial con solo una Faceta se llamará **Símplice** o **Simplex**.

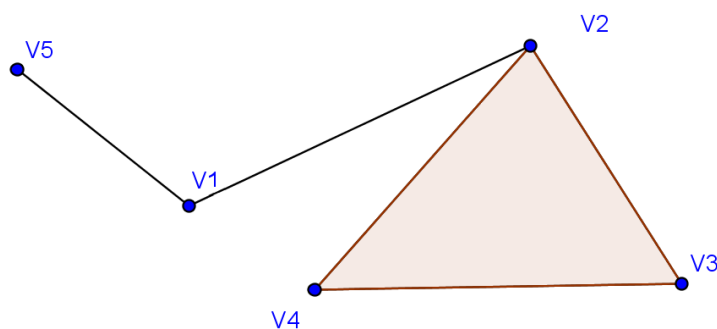
Ejemplo 5.1.1

Sea

$$\Delta = \langle \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle$$

Una representación gráfica típica de Δ puede observarse en la Figura II.1:

Figura II.1: Complejo Simplicial



En este caso

$$\mathcal{F}(\Delta) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$$

$$\mathcal{N}(\Delta) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$$

donde se ha indicado $\mathcal{N}(\Delta)$ solo con sus no-caras minimales.

Definición 16 (Subcomplejo)

Denotaremos por subcomplejo de un complejo simplicial Δ a un nuevo complejo simplicial cuyo conjunto de facetas es un subconjunto del conjunto de facetas de Δ .

5.2. Ordenes en complejos simpliciales

En ocasiones, resulta interesante asociar ordenes en los conjuntos de vértices de los complejos simpliciales.

Sea F un q -Simplex en Δ con vértices v_0, v_1, \dots, v_q (por eso lo de q -simplex). Podemos asignar orientaciones a este conjunto de vértices

$$v_{i_0} < v_{i_1} < \dots < v_{i_q}$$

$$v_{j_0} < v_{j_1} < \dots < v_{j_q}$$

y diremos que son equivalentes si la permutación que lleva $\{i_0, i_1, \dots, i_q\}$ a $\{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ es una permutación par. A cada una de las dos clases de equivalencia obtenidas la llamaremos una **orientación** de F .

Definición 17

Llamaremos **q -simplex orientado** de Δ a un q -simplex F con la elección de una orientación. Si $\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ es un conjunto de vertices, al q -simplex sobre este conjunto de vertices con orientación $v_0 < v_1 < \dots < v_q$ lo denotaremos $[v_0, v_1, \dots, v_q]$.

6. Anillo de Stanley-Reisner

Como ya predijimos con anterioridad, vamos a ser capaces de realizar una asociación entre complejos simpliciales e ideales monomiales, lo que nos permitirá además asociar a un cociente de nuestro anillo $S = K[x_1, \dots, x_n]$ por un **ideal monomial** con uno de estos complejos, lo que llamaremos el anillo de Stanley-Reisner asociado a un complejo simplicial.

Definición 18

Ideal Faceta e Ideal de Stanley-Reisner

Sea Δ el complejo simplicial sobre n vertices v_1, \dots, v_n . Sea K un cuerpo y x_1, \dots, x_n indeterminadas y sea $S = K[x_1, \dots, x_n]$.

1. Denotaremos como $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}(\Delta)}$ al **ideal monomial** libre de cuadrados de S generado por x_{i_1}, \dots, x_{i_s} donde $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \in \mathcal{F}(\Delta)$. Llamaremos a $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}(\Delta)}$ el **ideal faceta** de Δ (o ideal Cara).
2. Denotaremos como \mathfrak{a}_Δ al **ideal monomial** libre de cuadrados de S generado por x_{i_1}, \dots, x_{i_s} donde $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \in \mathcal{N}(\Delta)$. Llamaremos a \mathfrak{a}_Δ el **ideal de Stanley-Reisner** (o ideal de las no-caras).

Ejemplo 6.0.1

Siguiendo el ejemplo 5.1.1, teníamos que

$$\mathcal{F}(\Delta) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$$

$$\mathcal{N}(\Delta) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$$

En este caso, trabajando en $S = K[x_1, \dots, x_5]$:

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}(\Delta)} = (x_1x_2, x_1x_5, x_2x_3x_4)$$

$$\mathfrak{a}_\Delta = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5)$$

Definición 19 (Complejo Faceta y complejo de Stanley-Reisner)

Sea $\mathfrak{a} = (M_1, \dots, M_q)$ un ideal en el anillo $S = K[x_1, \dots, x_n]$ y sean M_1, \dots, M_q los monomios libres de cuadrados en x_1, \dots, x_n que formen un conjunto mínimo de generadores para \mathfrak{a} .

1. Denotaremos como $\delta_{(\mathcal{F})}(I)$ el complejo simplicial sobre el conjunto de vértices v_1, \dots, v_n con facetas F_1, \dots, F_q donde $F_i = \{v_j : x_j | M_i, 1 \leq j \leq n\}$ para todo i . Llamaremos a $\delta_{(\mathcal{F})}(I)$ el Complejo Faceta de α .
2. Denotaremos como $\delta_{(\mathcal{M})}(I)$ el complejo simplicial sobre el conjunto de vértices v_1, \dots, v_n donde $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$ es una cara de $\delta_{(\mathcal{M})}(\alpha)$ si y solo si $x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \notin \alpha$. Llamaremos a $\delta_{(\mathcal{M})}(\alpha)$ el complejo de Stanley-Reisner de α .

Nota 6.0.2

Cabe resaltar que dado un complejo simplicial Δ , si

$$\alpha_{\mathcal{F}(\Delta)} = (M_1, \dots, M_q) \subset K[x_1, \dots, x_n]$$

entonces α_{Δ} es generado por los monomios libres de cuadrados que no dividen a M_1, \dots, M_q .

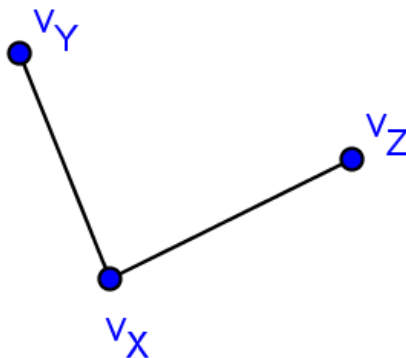
Ejemplo 6.0.3

Siguiendo el ejemplo 1.1.8, teníamos que $\alpha = (X^2, XY)$ era un **ideal monomial** de $S = K[X, Y]$. Dado que α no es libre de cuadrados, no posee un complejo simplicial asociado.

Polarizando α obtenemos su ideal polar $\mathfrak{b} = (XZ, XY)$, que es libre de cuadrados. Calculando, obtenemos que:

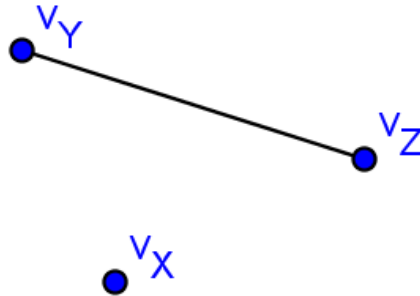
$$\delta_{(\mathcal{F})}(\alpha) = \langle \{v_X, v_Z\}, \{v_X, v_Y\} \rangle$$

Figura II.2: $\delta_{(\mathcal{F})}(\alpha)$



$$\delta_{(\mathcal{M})}(\alpha) = \langle \{v_Y, v_Z\}, \{v_X\} \rangle$$

Figura II.3: $\delta_{(\mathcal{M})}(I)$



Definición 20 (Anillo de Stanley-Reisner o anillo Cara)

Sea Δ un complejo simplicial sobre un conjunto de n vértices V . El **anillo de Stanley-Reisner o Anillo Cara** de Δ respecto al cuerpo K es

$$K[\Delta] = K[x_1, \dots, x_n] / \mathfrak{a}_\Delta$$

donde \mathfrak{a}_Δ es el ideal de no caras.

7. Complejo cadena asociado a un complejo simplicial

En esta sección veremos que, dado un anillo conmutativo con unidad A , podremos asociarle a cada complejo simplicial un complejo cadena de A -módulos libres. El estudio de la exactitud de este complejo nos permitirá relacionar propiedades algebraicas de nuestro anillo de Stanley-Reisner con propiedades combinatorias del complejo simplicial.

Definición 21

Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea Δ un complejo Simplicial. Definimos como $\mathcal{C}_q(\Delta)$ el A -módulo libre con base consistente en los q -símplices de Δ , módulo las relaciones dadas por

$$[v_0, v_1, v_2, \dots, v_q] + [v_1, v_0, \dots, v_q].$$

En particular $\mathcal{C}_q(\Delta)$ está definido para cualquier cuerpo K y $\dim_K \mathcal{C}_q(\Delta)$ es igual al número de q -símplices de Δ .

Para $q \geq 1$ definimos el homomorfismo

$$\partial_q : \mathcal{C}_q(\Delta) \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}(\Delta)$$

inducido por

$$\partial_q([v_0, v_1, \dots, v_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_q]$$

donde \hat{v}_i significa que v_i debe ser eliminado. Dado que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ obtenemos el complejo cadena $\mathcal{C}(\Delta) = \{\mathcal{C}_q(\Delta), \partial_q\}$, llamado el **complejo cadena orientado** de Δ .

El **complejo cadena orientado aumentado** de Δ es el complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_d(\Delta) \xrightarrow{\partial_d} \mathcal{C}_{d-1}(\Delta) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_0(\Delta) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}_{-1}(\Delta) = A \rightarrow 0$$

donde $d = \dim(\Delta)$ y $\epsilon(v) = 1$ para cada v\u00e9rtice v de Δ . Este complejo cadena aumentado se denota como $(\mathcal{C}(\Delta), \epsilon)$. Fijamos $\partial_0 = \epsilon$ y $\mathcal{C}_{-1} = A$.

Sea $\mathcal{Z}_q(\Delta, A) = \ker(\partial_q)$, $\mathcal{B}_q = \text{im}(\partial_{q+1})$ y

$$\tilde{H}_q(\Delta; A) = \mathcal{Z}_q(\Delta, A) / \mathcal{B}_q(\Delta, A), \forall q \geq 0.$$

Los elementos de $\mathcal{Z}_q(\Delta, A)$ y $\mathcal{B}_q(\Delta, A)$ son llamados **cycles** y **boundaries** respectivamente y $\tilde{H}_q(\Delta; A)$ es el **q-ésimo grupo de homología simplicial reducido** de Δ con coeficientes en A .

Nota 7.0.4 (Sobre \u00e1lgebra exterior y complejos de Koszul)

Al definir $\mathcal{C}_q(\Delta)$ como un A -m\u00f3dulo libre sobre los q -s\u00edmplices m\u00f3dulo la relaci\u00f3n de equivalencia de asimetr\u00eda en el orden, estamos considerando la potencia exterior q -\u00e9sima del A -m\u00f3dulo libre con dimensi\u00f3n el n\u00famero de v\u00e9rtices de Δ . Es decir, a cada s\u00edmplice maximal de Δ lo estamos dotando de estructura de A -\u00e1lgebra exterior, donde el producto exterior de dos caras disjuntas contenidas en un s\u00edmplice maximal ser\u00eda la cara compuesta por la uni\u00f3n de los vertices de las dos caras.

Teniendo esto presente, observando el complejo cadena orientado aumentado como un complejo de cadenas entre potencias exteriores de A -m\u00f3dulos libres de dimensi\u00f3n apropiada, obtenemos un tipo de complejo cadena llamado complejo de Koszul. Sin entrar en demasiados detalles, la exactitud de un complejo de Koszul est\u00e1 asociada con la regularidad de cadenas de ciertos elementos de A , y esto ser\u00e1 en enlace que nos permitir\u00e1 estudiar anillos Cohen-Macaulay con complejos simpliciales.

(Para la definici\u00f3n de complejo de Koszul, v\u00e9ase [1, Cap\u00edtulo V, ejercicio 4.22])

Proposici\u00f3n 7.0.5

Si Δ es un complejo simplicial no vac\u00edo, entonces $\tilde{H}_0(\Delta; A)$ es un A -m\u00f3dulo libre de rango $r - 1$, donde r es el n\u00famero de componentes conexas de Δ

DEMOSTRACI\u00d3N. Sea $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de vertices de Δ y sean $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ sus componentes conexas. Denotamos los conjuntos de vertices de Δ_i como V_i y reordenando la numeraci\u00f3n de los v\u00e9rtices asumiremos que $x_i \in V_i \forall i = 1, \dots, r$.

Fijemos $\beta_i = x_i - x_r$ y $\bar{\beta}_i = \beta_i + \text{im}(\partial_1)$ para $i = 1, \dots, r - 1$. Vamos a probar que el conjunto $\bar{B} = \{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{r-1}\}$ es una A -base para $\tilde{H}_0(\Delta; A) = \ker(\partial_0) / \text{im}(\partial_1)$.

Probemos que \bar{B} es linealmente independiente. Si suponemos que $\sum_{i=1}^{r-1} a_i \bar{\beta}_i$ est\u00e1 en $\text{im}(\partial_1)$ para ciertos a_i en A , agrupando de manera apropiada podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i \bar{\beta}_i = \sum_{x_i, x_j \in V_1} b_{ij} (x_i - x_j) + \dots + \sum_{x_i, x_j \in V_r} b_{ij} (x_i - x_j),$$

para ciertos b_{ij} en A . Dado que \mathcal{C}_0 es el A -m\u00f3dulo libre con base V y los V_i son mutuamente disjuntos, obtenemos

$$a_k b_k = \sum_{x_i, x_j \in V_k} \text{ para } 1 \leq k \leq r - 1,$$

y aplicando ∂_0 en ambos lados que $a_k = 0$ para todo $k = 1, \dots, r - 1$.

Probemos ahora que \overline{B} es un sistema de generadores. Sean x_{i_1} y x_{j_1} dos vértices de Δ , es suficiente probar que $x_{i_1} - x_{j_1} + im(\partial_1)$ está en el submódulo generado por \overline{B} porque $ker(\partial_0)$ está generado por elementos de la forma $x_i - x_j$. Supongamos que $x_{i_1} \in V_m$ y $x_{j_1} \in V_s$ para ciertos m y s .

La conexión en Δ_i para todo i nos permite tomar caminos $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}, x_m$ y $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}, x_s$ en Δ_m y Δ_s respectivamente de manera que se verifiquen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + (x_{i_t} - x_m) &= x_{i_1} - x_m \\ (x_{j_1} - x_{j_2}) + (x_{j_2} - x_{j_3}) + \dots + (x_{j_p} - x_s) &= x_{j_1} - x_s, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $x_{i_1} - x_{j_1} + im(\partial_1) = (x_m - x_r) - (x_s - x_r) + im(\partial_1)$. □

Definición 22

Sean Δ y Δ_1 complejos simpliciales en conjuntos de vértices disjuntos V y W respectivamente. Definimos la unión de complejos simpliciales

$$\Delta * \Delta_1$$

como el complejo simplicial en el conjunto de vértices $V \cup W$ con caras $F \cup G$ donde $F \in \Delta$ y $G \in \Delta - 1$.

Definimos el cono

$$cn(\Delta) = w * \Delta$$

de Δ como la unión de Δ con un vértice disjunto $\{w\}$

Proposición 7.0.6

Si Δ es un complejo simplicial y $cn(\Delta) = w * \Delta$ su cono, entonces

$$\tilde{H}_p(cn(\Delta); A) = 0 \text{ para todo } p.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ es un p -simplex orientado, fijemos $[w, \sigma]$ igual a $[w, v_0, \dots, v_p]$. En general si $c_p = \sum n_i \sigma_i$ es una p -cadena, fijemos $[w, c_p]$ igual a $\sum n_i [w, \sigma_i]$. Esta operación es un homomorfismo desde $\mathcal{C}_p(\Delta)$ en $\mathcal{C}_{p+1}(w * \Delta)$. Si σ es un p -simplex orientado, de la definición del operador de boundary ∂ uno obtiene que

$$\partial[w, \sigma] = \begin{cases} \sigma - w & \text{si } dim\sigma = 0, \\ \sigma - [w, \partial\sigma] & \text{si } dim\sigma > 0. \end{cases}$$

Como consecuencia, uno obtiene fórmulas más generales:

$$\partial[w, c_0] = c_0 - \epsilon(c_0)w \tag{II.1}$$

$$\partial[w, c_p] = c_p - [w, \partial c_p] \text{ si } p > 0. \tag{II.2}$$

Por la proposición 7.0.5 obtenemos que $\tilde{H}_0(w * \Delta) = 0$, porque $w * \Delta$ es conexo. Asumamos que $p > 0$. Sea $z_p \in \mathcal{Z}(w * \Delta)$ un p -ciclo de $w * \Delta$, mostraremos que z_p es una boundary. Escribimos

$$z_p = c_p + [w, d_{p-1}],$$

donde c_p consiste en los términos de z_p con soporte en Δ , y d_{p-1} es una cadena. Es suficiente mostrar que

$$z_p - \partial[w, c_p] = 0$$

. Usando las igualdades obtenidas arriba II.1 II.2 obtenemos

$$z_p - \partial[w, c_p] = c_p + [w, d_{p-1}] - c_p + [w, \partial c_p] = [w, e_{p-1}],$$

donde $e_{p-1} = d_{p-1} + \partial c_p$ es una cadena en Δ . Aplicando ∂ a la igualdad de arriba y usando que z_p es un ciclo obtenemos que $\partial[w, e_{p-1}] = 0$. Por las dos identidades de arriba II.1 II.2 de nuevo obtenemos que

$$0 = \partial[w, e_{p-1}] = \begin{cases} e_{p-1} - \epsilon(e_{p-1})w & \text{si } p = 1, \\ e_{p-1} - [w, \partial e_{p-1}] & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Ahora, la parte de esta cadena con soporte en Δ es e_{p-1} . Además, $e_{p-1} = 0$ y $[w, \partial e_{p-1}] = 0$, lo que muestra que $z_p = \partial[w, c_p]$. \square

Capítulo III

Anillos Cohen-Macaulay

En esta sección estudiaremos los anillos Cohen-Macaulay, que serán por definición aquellos anillos cuyas localizaciones en sus ideales maximales verifican que su dimensión (de Krull) y su profundidad coinciden. Para ello estudiaremos estos conceptos de dimensión y profundidad, así como otros relacionados con los mismos, la altura y las sucesiones regulares.

8. Dimensión de Krull y altura

Entendemos por una cadena de ideales primos de un anillo R a una sucesión finita estricta de inclusiones de ideales primos:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n,$$

el entero n se llama longitud de la cadena. La **dimensión de Krull** de R , denotada como $\dim(R)$, es el supremo de las longitudes de todas las cadenas de ideales primos en R .

Sea \mathfrak{p} un ideal primo de R . Denotaremos por $ht(\mathfrak{p})$, la **altura** de \mathfrak{p} como el supremo de las longitudes de las cadenas de primos que terminen en \mathfrak{p} . Es destacable que $\dim(R_{\mathfrak{p}}) = ht(\mathfrak{p})$.

Si \mathfrak{a} es un ideal de R , definimos la altura de \mathfrak{a} como:

$$ht(\mathfrak{a}) = \min\{ht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \text{ y } \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)\}.$$

donde $\text{Spec}(R)$, el espectro de R es el conjunto de ideales primos de R . Definimos su **codimensión** como

$$\dim(R) - \dim(R/I).$$

Un ideal \mathfrak{a} de un anillo R lo llamamos **unmixed** si $ht(\mathfrak{a}) = ht(\mathfrak{p})$ para todo \mathfrak{p} en $\text{Ass}_R(R/\mathfrak{a})$.

Si M es un R -modulo, definimos su **dimensión** como

$$\dim(M) = \dim(R/\text{ann}(M))$$

y su **codimensión** como

$$\dim(R) - \dim(M).$$

9. Sucesiones regulares

Teorema 9.0.7 (Teorema de la Dimensión)

Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local y sea M un R -módulo. Llamemos

$$\delta(M) = \min\{r : \text{existen } x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m} \text{ con } l_R(M/(x_1, \dots, x_r)) < \infty\}$$

donde $l_R(M)$ indica la longitud de M como R -módulo.

Entonces $\dim(M) = \delta(M)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede encontrarse en [7, teorema 1.34]. □

Este teorema nos da una útil caracterización de la dimensión de Krull para módulos sobre anillos locales que no precisa discutir longitudes de cadenas de ideales primos de $R/\text{Ann}_R(M)$.

Definición 23 (Elemento Regular)

Sea M un módulo sobre un anillo R . Decimos que un elemento $x \in R$ es un elemento M -regular si $xz = 0$ para $z \in M$ implica que $z = 0$, es decir, x no es un divisor de cero de M .

Definición 24 (Sucesión Regular)

Una $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ de elementos de R es llamada una sucesión M -regular o simplemente una M -sucesión si:

1. x_i es un elemento $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ -regular para $i = 1, \dots, n$.
2. $M/\mathbf{x}M \neq 0$

En esta situación decimos que M es un módulo \mathbf{x} -regular

Proposición 9.0.8

Sea M un R -módulo y \mathfrak{a} un ideal de R de manera que $\mathfrak{a}M \neq M$. Si $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_r$ es una M -sucesión en \mathfrak{a} (es decir, que los elementos x_1, \dots, x_r de R están en \mathfrak{a}), entonces \mathbf{x} puede extenderse a una sucesión regular maximal en \mathfrak{a} .

DEMOSTRACIÓN. Por inducción, supongamos que hay una sucesión regular x_1, \dots, x_i en \mathfrak{a} para algún $i \geq r$. Sea $\overline{M} = M/(x_1, \dots, x_i)M$. Llamemos $\mathcal{Z}(N)$ al conjunto de divisores de cero de un módulo N . Si $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathcal{Z}(\overline{M})$ tomamos x_{i+1} en \mathfrak{a} que sea regular en \overline{M} . Dado que

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \dots \subset (x_1, \dots, x_{i+1}) \subset R$$

Es una sucesión creciente de ideales en un anillo noetheriano, la construcción inductiva debe parar en una sucesión M -regular maximal en \mathfrak{a} . □

Lema 9.0.9

Sea M un módulo sobre un anillo local (R, \mathfrak{m}) . Si x_1, \dots, x_r es una sucesión M -regular en \mathfrak{m} , entonces $r \leq \dim(M)$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $\dim(M)$. Si $\dim(M) = 0$, entonces \mathfrak{m} es un ideal primo asociado de M y cada elemento de \mathfrak{m} es un divisor de cero de M . Usando la segunda parte de la prueba de lema (10.0.14) uno tiene que $\dim(M/x_1M) < \dim(M)$.

Dado que x_2, \dots, x_r es una sucesión regular en M/x_1M por inducción se deduce que $r \leq \dim(M)$. □

Lema 9.0.10

Si M es un R -módulo, entonces

$$\mathcal{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$$

DEMOSTRACIÓN. [9, 1.1.18] □

Proposición 9.0.11

Sea M un R -módulo y sea \mathfrak{a} un ideal de R . Entonces:

- (a) $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M) = (0)$ si y solo si existe $x \in \mathfrak{a}$ que sea regular en M .
- (b) $\text{Ext}_R^r(R/I, M) \simeq \text{Hom}_R(R/I, M/xM)$ donde $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ es cualquier M -sucesión en \mathfrak{a} .

DEMOSTRACIÓN.

- (a) (\Rightarrow) Asumamos que $\mathfrak{a} \subset \mathcal{Z}(M)$. Usando el Lema (9.0.10) tenemos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$. Por tanto, existe un monomorfismo $\psi : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. Para obtener la contradicción, observamos que la composición

$$R/\mathfrak{a} \xrightarrow{\phi} R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\psi} M$$

es una aplicación no nula, donde ϕ es la aplicación canónica entre R/\mathfrak{a} y R/\mathfrak{p} .

La vuelta es trivial.

- (b) Considerando la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow \overline{M} = M/x_1M \rightarrow 0.$$

De acuerdo con [8, Teorema 7.3], existe una sucesión exacta larga con homomorfismos naturales de conexión

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_R^{r-1}(R/\mathfrak{a}, M) \xrightarrow{x_1} \text{Ext}_R^{r-1}(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{r-1}(R/\mathfrak{a}, \overline{M}) \xrightarrow{\delta} \\ \text{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M) \xrightarrow{x_1} \text{Ext}_R^r(R/I, M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Dado que x_1 está en \mathfrak{a} , usando [8, Teorema 7.16] obtenemos que en la última sucesión exacta la aplicación dada por multiplicar por x_1 es cero. Por tanto

$$\text{Ext}_R^{r-1}(R/\mathfrak{a}, \overline{M}) \simeq \text{Ext}_R^r(R/\mathfrak{a}, M)$$

y la demostración se deduce por inducción sobre r . □

10. Profundidad

Definición 25 (Profundidad)

Sea $M \neq 0$ un módulo sobre un anillo local (R, \mathfrak{m}) . Se define como **profundidad** de M , denotada $\text{depth}(M)$, la longitud de cualquier M -sucesión maximal contenida en \mathfrak{m} .

De la proposición (9.0.11) obtenemos que

$$\text{depth}(M) = \min\{r : \text{Ext}_R^r(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$$

Por el lema (??) obtenemos que $\text{depth}(M) \leq \dim(M)$

Lema 10.0.12 (Lema de la profundidad)

Si $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de módulos sobre un anillo local R , entonces

- (a) Si $\text{depth}(M) < \text{depth}(L)$, entonces $\text{depth}(N) = \text{depth}(M)$.
- (b) Si $\text{depth}(M) = \text{depth}(L)$, entonces $\text{depth}(N) \geq \text{depth}(M)$.
- (c) Si $\text{depth}(M) > \text{depth}(L)$, entonces $\text{depth}(N) = \text{depth}(L) + 1$.

DEMOSTRACIÓN. [9, 1.3.9] □

Proposición 10.0.13

Si M es un R -módulo, entonces

$$\text{Ass}(M) \subset \text{Supp}(M) = V(\text{ann}(M))$$

y cualquier elemento minimal de $\text{Supp}(M)$ está en $\text{Ass}(M)$. (Aquí $V(\mathfrak{a})$ denota el conjunto de los ideales primos de R que contienen a \mathfrak{a} y $\text{Supp}(M)$ el conjunto de ideales primos \mathfrak{p} con $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$)

DEMOSTRACIÓN. [9, 1.1.31] □

Lema 10.0.14

Si M es un módulo sobre un anillo Local R y z es un elemento regular de M , entonces

$$\text{depth}(M/zM) = \text{depth}(M) - 1$$

$$\dim(M/zM) = \dim(M) - 1$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\text{depth}(M) > \text{depth}(M/zM)$ aplicando el Lema de la profundidad a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{z} M \rightarrow M/zM \rightarrow 0$$

deducimos que $\text{depth}(M) = \text{depth}(M/zM) + 1$.

Para probar la segunda igualdad observamos primero la validez de la primera desigualdad $\dim(M) > \dim(M/zM)$, ya que de no darse, existiría una cadena de ideales primos

$$\text{ann}(M) \subset \text{ann}(M/zM) \subset \mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d$$

donde d es la dimensión de M y \mathfrak{p}_0 es minimal sobre $\text{ann}(M)$. Por la proposición (10.0.13) el ideal \mathfrak{p}_0 consiste en divisores de cero, una contradicción dado que $z \in \text{ann}(M/zM) \subset \mathfrak{p}_0$. Por otro lado, la desigualdad inversa $\dim(M) \leq \dim(M/zM) + 1$ sigue del Teorema de la dimensión (9.0.7). □

11. Anillos Cohen-Macaulay

Definición 26 (Módulos y Anillos Cohen-Macaulay)

Sea R un Anillo Local Noetheriano $(R, (m))$. Un módulo finitamente generado $M \neq 0$ es un **módulo Cohen-Macaulay** si $\text{depth}(M) = \dim(M)$.

Si R como módulo es Cohen-Macaulay, diremos que R es un **anillo Cohen-Macaulay**.

Un R -**módulo Cohen-Macaulay maximal** M es un módulo Cohen-Macaulay con $\dim(M) = \dim(R)$.

La definición puede extenderse a anillos noetherianos no locales. Si R es un anillo Noetheriano, un R -módulo M se dice Cohen-Macaulay si la localización de M en cada uno de los ideales maximales \mathfrak{m} de R es Cohen-Macaulay como $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo. (En particular, el módulo 0 es Cohen-Macaulay).

Sin embargo, para que M sea un módulo Cohen-Macaulay maximal, exigiremos que $M_{\mathfrak{m}}$ sea un $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo para cada ideal maximal \mathfrak{m} de R .

Como en el caso local, R será un anillo Cohen-Macaulay si como módulo lo es.

Proposición 11.0.15

Sea $M \neq 0$ un R -módulo Cohen-Macaulay sobre un anillo local (R, \mathfrak{m}) y $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$, entonces

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \text{depth}(M)$$

DEMOSTRACIÓN. [9, 1.3.11] □

Proposición 11.0.16

Si S es un álgebra homogénea Cohen-Macaulay sobre un cuerpo k y \mathfrak{a} es un ideal de S , entonces

$$\dim(S) = \dim(S/\mathfrak{a}) + \text{ht}(\mathfrak{a}).$$

DEMOSTRACIÓN. [9, 2.2.3] □

Corolario 11.0.17

Sea R un anillo de polinomios graduado positivamente sobre un cuerpo k y \mathfrak{a} un ideal graduado de R . Entonces, si R/\mathfrak{a} es Cohen-Macaulay, \mathfrak{a} es unmixed.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de la proposición (11.0.15) y de la proposición (11.0.16). □

Escribimos ahora proposiciones que nos harán falta más adelante:

12. Producto tensor de álgebras Cohen-Macaulay

Estos resultados serán necesarios en el próximo capítulo cuando hablemos de unión de complejos simpliciales Cohen-Macaulay.

Proposición 12.0.18

Si A y B son dos álgebras afines sobre un cuerpo k con presentaciones $A \simeq k[\mathbf{x}]/\mathfrak{a}_1$ y $B \simeq k[\mathbf{y}]/\mathfrak{a}_2$, entonces

$$A \otimes_k B \simeq k[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2).$$

DEMOSTRACIÓN. [9, 2.2.20] □

Teorema 12.0.19

Si A y B son dos álgebras homogéneas sobre un cuerpo k , entonces

$$\text{depth}(A \otimes_k B) = \text{depth}(A) + \text{depth}(B)$$

DEMOSTRACIÓN. [9, 2.2.21] □

Corolario 12.0.20

Si A y B son dos álgebras homogéneas sobre un cuerpo k , entonces $A \otimes_k B$ es Cohen-Macaulay si y solo si A y B son Cohen-Macaulay.

Capítulo IV

Complejos simpliciales Cohen-Macaulay

En este último capítulo veremos el teorema de Reisner, que nos permitirá caracterizar los anillos cara Cohen-Macaulay mediante sus complejos simpliciales. También veremos aplicaciones de este hecho.

13. Teorema de Reisner

Definición 27

Sea K un cuerpo. Se dice que un complejo simplicial Δ es **Cohen-Macaulay** si el anillo de Stanley-Reisner $K[\Delta]$ es un anillo Cohen-Macaulay.

Definición 28

Sea Δ un complejo simplicial y $F \in \Delta$ una cara, definimos $lk(F)$, el **enlace** de F , como:

$$lk(F) = \{H \in \Delta : H \cap F = \emptyset, H \cup F \in \Delta\}$$

Teorema 13.0.21 (Reisner)

Sea Δ un complejo simplicial. Si K es un cuerpo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Δ es Cohen-Macaulay sobre K .
2. $\tilde{H}_i(lk(F); K) = 0$ para $F \in \Delta$ y $i < \dim(lk(F))$.

DEMOSTRACIÓN. [3, Teorema 5.3.9] □

Nota 13.0.22

Cabe destacar del teorema que, al ser todo complejo simplicial Δ el enlace su cara vacía, $\tilde{H}_i(\Delta; K) = 0$ para $i < \dim(\Delta)$.

14. Aplicaciones del Teorema de Reisner

Corolario 14.0.23

Si Δ es un complejo simplicial de dimensión 1, entonces Δ es Cohen-Macaulay \iff es conexo

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Reisner 13.0.21 Δ es Cohen-Macaulay si y solo si $\tilde{H}_0(\Delta; k) = 0$, porque el enlace de un vértice de Δ consiste en un conjunto discreto de vértices. Usando la proposición 7.0.5 se completa el resultado \square

Proposición 14.0.24

Si k es un cuerpo, entonces un complejo simplicial Δ es Cohen-Macaulay sobre k si y solo si $lk(F)$ es Cohen-Macaulay sobre k para todo $F \in \Delta$

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow) Sea F una cara fija de Δ y $\Delta' = lk(F)$. Si $G \in \Delta'$, utilizando la igualdad

$$lk_{\Delta'}(G) = lk_{\Delta}(G \cup F)$$

y el criterio de Reisner nos permite deducir que $\tilde{H}_i(lk_{\Delta'}(G), k) = 0$ para $i < \dim(lk_{\Delta'}(G))$, por lo que Δ' es Cohen-Macaulay.

\Leftarrow) Dado que todos los enlaces son Cohen-Macaulay, es suficiente tomar $F = \emptyset$ y observar que $\Delta = lk(\emptyset)$ para concluir que Δ es Cohen-Macaulay. \square

Proposición 14.0.25

Si Δ es un complejo simplicial con vértices x_1, \dots, x_n , entonces la descomposición primaria del ideal de Stanley-Reisner de Δ es:

$$\mathfrak{a}_{\Delta} = \bigcap_F \mathfrak{p}_F$$

donde la intersección está tomada sobre las facetas F de Δ , y \mathfrak{p}_F denota el ideal cara generado por todos los x_i tales que $x_i \notin F$.

DEMOSTRACIÓN. Sea F una cara de Δ y \mathfrak{p}_F el ideal cara generado por los x_i tales que $x_i \notin F$. No es complicado probar que \mathfrak{p}_F es un ideal primo de I_{Δ} si y solo si F es una faceta.

Puesto que la descomposición primaria de un **ideal monomial** generado por monomios libres de cuadrados está compuesta por la intersección de ideales monomiales primos, se obtiene el resultado. \square

Corolario 14.0.26

Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d en el conjunto de vértices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ y sea k un cuerpo. Entonces

$$\dim k[\Delta] = d + 1 = \max\{s : x_{i_1} \dots x_{i_s} \notin \mathfrak{a}_{\Delta} \text{ y } i_1 < \dots < i_s\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si F es una faceta de Δ con $d + 1$ vértices, por la proposición 14.0.25 el ideal cara \mathfrak{p}_F generado por las variables que no están en F tiene altura (*) igual a la altura de \mathfrak{a}_{Δ} . Por lo tanto $ht(\mathfrak{a}_{\Delta}) = n - d - 1$. Aplicando que $\dim(k[x_1, \dots, x_n]) = \dim(k[\Delta]) + ht(\mathfrak{a}_{\Delta})$ obtenemos el resultado. (Proposición 11.0.16)

(Recordemos que la altura de un ideal primo \mathfrak{p} es el supremo de las longitudes de cadenas de primos contenidos en \mathfrak{p}) \square

Corolario 14.0.27

Todo complejo simplicial Cohen-Macaulay es **puro**, es decir, todas sus caras maximales tienen la misma dimensión.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de la proposición 14.0.25 y del corolario 11.0.17 □

Definición 29

El q – esqueleto de un complejo simplicial Δ es el complejo simplicial Δ^q consistente en todos los p –simplices de Δ con $p \leq q$.

Proposición 14.0.28

Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d y Δ^q su q – esqueleto. Si Δ es Cohen-Macaulay sobre un cuerpo k , entonces Δ^q es Cohen-Macaulay para $q \leq d$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\Delta' = \Delta^q$ y tomemos $F \in \Delta'$ con $\dim(F) < q \leq d$. Observemos que

$$lk_{\Delta'}(F) = (lk_{\Delta}(F))^{q-|F|}.$$

Dado que Δ es puro, existe una faceta F' de Δ de dimensión d conteniendo a F , por lo que $F' \setminus F$ es una cara de $lk_{\Delta}(F)$ de dimensión $d - |F|$. La dimensión de $lk_{\Delta'}(F)$ es $q - |F|$. Utilizando la proposición 14.0.24 obtenemos que

$$\tilde{H}_i(lk_{\Delta}(F); k) = 0 \text{ para } i < \dim(lk_{\Delta}(F)) = d - |F|,$$

y por tanto

$$\tilde{H}_i((lk_{\Delta}(F))^{q-|F|}; k) = \tilde{H}_i(lk_{\Delta}(F); k) = 0 \text{ para } i < q - |F| \leq d - |F|.$$

Donde la igualdad entre los módulos de homología se debe a que los complejos de cadena orientados de $(lk_{\Delta}(F))^{q-|F|}$ y $lk_{\Delta}(F)$ son iguales hasta el grado $q - |F|$ y por tanto sus homologías deben coincidir hasta un grado menos.

Aplicando el criterio de Reisner, obtenemos que Δ^q es Cohen-Macaulay. □

Proposición 14.0.29

Si Δ_1 y Δ_2 son complejos simpliciales, entonces, su unión $\Delta_1 * \Delta_2$ es Cohen-Macaulay si y solo si Δ_i es Cohen-Macaulay para $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que se verifica la identidad

$$a_{\Delta_1 * \Delta_2} = a_{\Delta_1} + a_{\Delta_2},$$

existe un isomorfismo de k –álgebras

$$k[\Delta_1 * \Delta_2] \simeq k[\Delta_1] \otimes_k k[\Delta_2],$$

por la proposición 12.0.18

Aplicando el corolario 12.0.20 se obtiene el resultado. □

Definición 30

Dado un complejo simplicial Δ y $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ subcomplejos suyos, podemos definir la unión

$$\bigcup_{i=1}^s \Delta_i$$

como el complejo simplicial con conjunto de vértices $\cup_{i=1}^s V_i$ de manera que F es una cara de $\cup_{i=1}^s \Delta_i$ si y solo si F es cara de Δ_i para algún i .

La intersección puede definirse de manera similar.

Definición 31 (Complejos Shellables)

Un complejo simplicial puro Δ de dimensión d se dice shellable si las facetas de Δ pueden ser ordenadas F_1, \dots, F_s de manera que

$$\overline{F}_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{F}_j \right)$$

Es puro de dimensión $d - 1$ para todo $i \geq 2$, donde

$$\overline{F}_i = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subset F_i\}.$$

Si Δ es shellable, F_1, \dots, F_s es llamado un shelling.

Teorema 14.0.30

Sea Δ un complejo simplicial. Si Δ es shellable, entonces Δ es Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo k .

DEMOSTRACIÓN. Sea $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de vértices de Δ y $R = k[x]$ un anillo de polinomios sobre el cuerpo k . Asumamos que F_1, \dots, F_s es un orden sobre las facetas de Δ de manera que $\overline{F}_i \cap (\cup_{j=1}^{i-1} \overline{F}_j)$ es puro de dimensión $d - 1$ para todo $i \geq 2$, donde d es la dimensión de Δ . Fijo

$$\sigma = \{x_i \in F_s \mid F_s \setminus \{x_i\} \in \overline{F}_s \cap \left(\bigcup_{j=1}^{s-1} \overline{F}_j \right)\}$$

podemos considerar que $\sigma = \{x_1, \dots, x_r\}$. Existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow R/(\mathfrak{a} : f) \xrightarrow{f} R/\mathfrak{a} \rightarrow R/(\mathfrak{a}, f) \rightarrow 0, (*)$$

donde $f = x_1 \dots x_r$ y $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\Delta$.

Mostraremos que la igualdad

$$R/(\mathfrak{a} : f) = k[\overline{F}_s],$$

donde se verifica que $k[\overline{F}_s]$ es un anillo polinómico en $d + 1$ variables. Por la proposición 14.0.25 podemos descomponer $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$, donde \mathfrak{p}_i está generado por $V \setminus F_i$ para todo i . Por tanto

$$(\mathfrak{a} : f) = \bigcap_{i=1}^s (\mathfrak{p}_i : f) = \bigcap_{\sigma \subset F_i} (\mathfrak{p}_i : f).$$

Oservemos que si $\sigma \subset F_i$ para algún i , entonces $i = s$; de otro modo tendríamos que $i < s$, por lo que σ estaría en $\overline{F}_s \cap (\cup_{j=1}^{s-1} \overline{F}_j)$, pero dado que el complejo simplicial es puro de dimensión $d - 1$, existe $v \in \sigma$ de manera que $\sigma \subset F_s \setminus \{v\}$, lo que es una contradicción.

Por tanto $i = s$ y $(\mathfrak{a} : f) = (\mathfrak{p}_s : f) = \mathfrak{p}_s$.

Lo siguiente que veremos es que

$$R/(\mathfrak{a}, f) = k[\overline{F}_1 \cup \dots \cup \overline{F}_{s-1}].$$

Observemos que $f \in \mathfrak{p}_i$ para $i = 1, \dots, s - 1$; De otro modo $f \notin \mathfrak{p}_i$ para algún $i < s$ implicaría que $\sigma \subset F_i$ y podríamos aplicar el mismo argumento que antes para obtener la contradicción. Si \mathfrak{p} es un primo minimal de (I, f) diferente de $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{s-1}$, entonces $\mathfrak{p}_s \subset \mathfrak{p}$ y $x_i \in \mathfrak{p}$ para algún $x_i \in \sigma$, por lo que por construcción de σ obtenemos que $F_s \setminus \{x_i\} \subset F_k$ para algún $k < s$. Luego $V \setminus F_k \subset \{x_i\} \cup (V \setminus F_s) \subset \mathfrak{p}$, y por la minimalidad de \mathfrak{p} obtenemos que $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_s$, lo que es imposible. Juntándolo todo concluimos que $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{s-1}$ son todos primos minimales de (\mathfrak{a}, f) y que

$$(\mathfrak{a}, f) = \bigcup_{i=1}^{s-1} \mathfrak{p}_i.$$

Usando inducción sobre s y la sucesión exacta (*) obtenemos que R/I es Cohen-Macaulay por aplicación directa del lema de la profundidad, donde hemos usado que los extremos de la sucesión son ambos R -módulos Cohen-Macaulay de dimensión $d + 1$.

□

15. La relación entre el teorema de Reisner y la Upper Bound Conjeture

En esta sección solamente pretendemos señalar el papel del Teorema de Reisner en la demostración de la Upper Bound Conjeture. No pretendemos en ningún momento demostrarla (aunque si señalaremos referencias donde esta aparece).

Comencemos introduciendo un par de conceptos:

El primero es el concepto de f -vector de un complejo simplicial.

Definición 32 (f-vector de un complejo simplicial)

Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d . Se define su f -vector como la $(d + 1)$ -upla:

$$f(\Delta) = (f_0, \dots, f_d)$$

donde f_i es el número de i -caras de Δ . Se toma $f_{-1} = 1$.

El otro concepto que queremos definir es el de h -vector de un complejo simplicial. En general, dado un álgebra homogénea, podemos definir su h -vector como aparece en [9, Definición 4.2.4]. Sin embargo, cuando el álgebra homogénea procede de un complejo simplicial, podemos aplicar el siguiente teorema:

Teorema 15.0.31 (Caracterización de h -vector de un complejo simplicial)

Si Δ es un complejo simplicial de dimensión d y (h_i) el h -vector de $k[\Delta]$, entonces $h_k = 0$ para $g > d + 1$ y

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d+1-i}{k-i} f_{i-1} \text{ para } 0 \leq k \leq d+1.$$

DEMOSTRACIÓN. [9, Teorema 5.4.6] □

Cabe destacar que el h -vector y el f -vector de Δ están relacionados.

La Upper Bound Conjeture para esferas simpliciales es la siguiente:

Conjetura 15.0.32 (UBCS)

Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d con n vértices. Si la realización geométrica de Δ , $|\Delta|$, es homeomorfa a una esfera de dimensión d , S^d , es decir $|\Delta| \cong S^d$, entonces

$$f_i(\Delta) \leq f_i(\Delta(C(n, d+1))) \text{ para } i = 0, \dots, d.$$

DEMOSTRACIÓN. [3, Theorem 5.4.4] □

donde $\Delta(C(n, d+1))$ es el complejo simplicial abstracto definido por la frontera del politopo cíclico $C(n, d+1)$ (ver [9, antes del teorema 5.5.14]).

Si Δ verifica que $|\Delta| \cong S^d$ diremos que es una esfera simplicial.

Para resolverla, se necesita realizar la siguiente observación:

Teorema 15.0.33

Sea Δ es un complejo simplicial de dimensión d . Si $|\Delta| \cong S^d$, entonces

$$\tilde{H}_i(\text{lk}(F); k) \cong \begin{cases} k & \text{para } i = \dim(\text{lk}(F)), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. [9, Teorema 5.5.5] □

Juntando la observación con el teorema de Reisner obtenemos que las esferas simpliciales son Cohen-Macaulay.

El saber que las esferas simpliciales son Cohen-Macaulay nos permite aplicar el siguiente teorema:

Teorema 15.0.34

Sea Δ un complejo simplicial Cohen-Macaulay de dimensión d sobre n vértices. Si $k[\Delta]$ es Cohen-Macaulay y k es un cuerpo infinito, entonces el h -vector de Δ satisface

$$0 \leq h_i(\Delta) \leq \binom{i+n-d-2}{i} \text{ para } 0 \leq i \leq d+1.$$

DEMOSTRACIÓN. [9, Teorema 5.4.8] □

Y este cota del h -vector será la que nos permita demostrar la Upper Bound Conjeture para esferas simpliciales.

En resumen: El Teorema de Reisner nos permitirá conocer que las esferas simpliciales son Cohen-Macaulay y esto nos permitirá obtener una de las cotas clave que resolverán la Upper Bound Conjeture.

Bibliografía

- [1] P. Aluffi, *Algebra, chapter 0*, 2009. [7.0.4](#)
- [2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, Barcelona, 1980.
- [3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, Version preliminar, 1992. [\(document\)](#), [13](#), [15](#)
- [4] S. Faridi, *The facet ideal of a simplicial complex*, arXiv:math/0210110v1 [math.AC] (2002). [\(document\)](#)
- [5] J. Herzog and T. Hibi, *Monomial ideals*, Springer, 2011. [\(document\)](#), [4](#)
- [6] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Springer–Verlag, Berlin, 1971.
- [7] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Cambridge Univ. Press., 1986. [9](#)
- [8] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Academic Press, 1979. [b](#)
- [9] R. Villareal, *Monomial algebras*, Marcel Dekker, 2001. [\(document\)](#), [9](#), [10](#), [10](#), [11](#), [11](#), [12](#), [12](#), [15](#), [15](#), [15](#), [15](#)

