ECUACIONES FUNCIONALES

Una aplicación o función $f: X \to Y$ es una regla que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$. Normalmente escribimos $f(x) = y$.

Las ecuaciones funcionales son ecuaciones cuyas incógnitas son funciones, normalmente entre conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

Las ecuaciones que se plantearán son del tipo

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$
3) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$
4) $f(x^2) = 2f(x)$
5) $ff(x) = x$
6) $f(x^2) + f(x) = \text{sen}\, x$

y se trata de determinar las aplicaciones f verificando estas relaciones y alguna extra más

Para resolver una ecuación funcional es conveniente fijarse en los siguientes datos

1) Dominio y codominio de definición
2) Condiciones extra impuestas
3) Ver ejemplos conocidos de aplicaciones que verifiquen las condiciones.

Posiblemente la ecuación más conocida es la <u>ecuación de Cauchy</u>

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente para aplicaciones $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ó más en general $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

La forma de atacar esta ecuación es comprobar que para $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ se tiene $f(n) = n f(1)$ y si $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n).$$

Como $f(0) = 0$ entonces se obtiene $f(-n) = -f(n) = -n f(1)$. En consecuencia, si $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, entonces $f(n) = na$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, siendo $a = f(1)$.

La relación $f(n) = n f(1)$ para $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ se prueba por inducción sobre n.

Si $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, entonces para $n \in \mathbb{Z}$ se verificará $f(n) = na$, y para $n/m \in \mathbb{Q}$ se tiene

$$f(n/m) = n f(1/m) = \frac{n}{m} m f(1/m) = \frac{n}{m} f(m/m) = n/m \cdot a.$$

Cuando $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica la condición anterior: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ no es fácil encontrar todas las posibles soluciones sin imponer condiciones adicionales. Pero observa que $f(x) = xk$ es una solución

TEOREMA

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación verificando $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y no es lineal: $f(x) \neq xk$ para un cierto k, entonces $Gr(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un subconjunto denso

<u>Demostración</u>

Tenemos $Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; f(x) = y\}$. Como $f(x)$ no es una función del tipo xk, existen $x_i \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y por tanto la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo, esto es, los vectores $(x_1, f(x_1))$ y

$(x_2, f(x_2))$ son linealmente independientes y son una base de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Dado $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ existen números racionales r_1, r_2 tales que $\left|(a,b) - \left(r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2))\right)\right| < \varepsilon$ para un $\varepsilon \geqslant 0$ dado ya que $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es denso

Tenemos

$$\begin{aligned} r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) &= (r_1x_1 + r_2x_2,\ r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)) \\ &= (r_1x_1 + r_2x_2,\ f(r_1x_1 + r_2x_2)) \end{aligned}$$

y por tanto

$$G' = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, x = r_1x_1 + r_2x_2,\ y = f(x),\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

es un subconjunto denso de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, y como $G'\subseteq G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, resulta que $G = Gr(f)$ es un subconjunto denso en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(Ver Jung-2011).

En la parte positiva tenemos que si a una aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ le agregamos la condición

* f es acotada en un intervalo

entonces f es de la forma $f(x) = xk$ para un cierto $k \in \mathbb{R}$

En efecto si f es acotada en el intervalo $[a,b]$, podemos tomar una bola en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que no corte a $Gr(f)$, y por tanto este no es un conjunto denso, luego f necesariamente es de la forma $f(x) = xk$

Consecuencia de este resultado es que también f es de la forma $f(x) = xk$ cuando

* f es continua en un punto de $\mathbb{R}$

En efecto, si f es continua en $x \in \mathbb{R}$, entonces es acotada en un intervalo que contiene a x y por el resultado anterior f es de la forma pedida

Otra consecuencia es que f es de la forma $f(x) = xk$ cuando

* f es monótona en un intervalo

NOTAS

El caso de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua fue resuelto por Cauchy en 1821.

El caso de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto fue resuelto por Darboux en 1875.

Hay algunas ecuaciones que se reducen a la ecuación de Cauchy. Por ejemplo si $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ verifica $\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, podemos definir una nueva aplicación

$$g: \mathbb{R} \xrightarrow{f} (0,\infty) \xrightarrow{\lg} \mathbb{R}$$

entonces $g(x) = (\lg \circ f)(x)$ verifica $g(x+y) = g(x) + g(y)$, y por tanto, si es continua o verifica alguna de las condiciones encontradas para la ecuación de Cauchy, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = xk$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular $\lg(f(x)) = xk$ y por tanto $f(x) = e^{xk}$

Observa que a la solución $g = 0$ le corresponde la solución $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y que además otra solución será la $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si consideramos como codominio $\mathbb{R}$.

La ecuación $\boxed{f(xy) = f(x) + f(y)}$ podemos también reducirla a la ecuación de Cauchy cuando el dominio es $(0,\infty)$. Para esto consideramos la aplicación

$$g: \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} (0,\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

que verifica $g(x+y) = (f \circ \exp)(x+y) = f(\exp(x+y)) = f(\exp(x) \cdot \exp(y))$
$$= f(\exp(x)) + f(\exp(y)) = g(x) + g(y)$$

Si g verifica alguna de las condiciones existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = xk$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por tanto $f(\exp(x)) = xk$, de donde se obtiene $f(x) = k \cdot \lg(x)$, para cada $x \in (0,\infty)$

La ecuación $\boxed{f(xy) = f(x) f(y)}$ con dominio $(0,\infty)$ y codominio $(0,\infty)$ cuando verifican las condiciones anteriores tiene como solución $f(x) = x^k$ para algún $k \in \mathbb{R}$

NOTA: Los dominios y codominios podemos ampliarlos utilizando la función valor absoluto

Ecuación de D'Alembert

La ecuación $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ tiene una solución trivial $f=0$. Si además $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una solución es $f(x)=\cos x$ (también $f(x)=\cosh(x)$). ¡¡Suponemos que es continua!!

Tenemos las relaciones

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x-y) = -\cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$$

En particular $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y$, que verifica esta relación

La demostración de que $f(x)=\cos x$ ó $f(x)=\cosh x$ es elemental pero utiliza la continuidad.

Encontrar las aplicaciones $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ que verifican

1) $f(x+y) = f(x) \cdot e^y$ para todos $x, y \in \mathbb{Z}$

2) f es estrictamente creciente

Solución

Para $x=0$ tenemos $f(y) = f(0) \cdot e^y$, y por tanto tenemos completamente determinada la aplicación f a falta del valor $f(0)$

El valor de $f(0)$ deberá ser tomado de forma que se cumpla (2). Como es estrictamente creciente tenemos $f(0) \neq 0$ y también $f(0)>0$ y en este caso si $x_1 < x_2$ entonces

$$f(x_1) = f(0)\, e^{x_1} < f(0)\, e^{x_2} = f(x_2).$$

Consideramos las aplicaciones $f: \mathbb{Z}^{>0} \to \mathbb{Z}$ una aplicación que verifica

1) $f(2)=2$
2) $f(nm)=f(n)f(m)$ para todos $n,m \in \mathbb{Z}^{>0}$
3) Si $n<m$ entonces $f(n)<f(m)$ para todos $n,m \in \mathbb{Z}^{>0}$

Prueba que $f(n)=n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^{>0}$

Solución

Tenemos $f(2)=2$, entonces para cada $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ se tiene $f(2^t)=2^t$. La demostración se hace por inducción utilizando (2).

Como f es estrictamente creciente, si consideramos los números entre 2^t y 2^{t+1}, tenemos exactamente $2^{t+1}-2^t+1$, contando los dos extremos. al aplicar f, como los extremos permanecen invariantes y entre ellos tenemos que colocar exactamente $2^{t+1}-2^t-1$ números, necesariamente $f(n)=n$ para cada uno de ellos.

Falta determinar $f(1)$, pero tenemos $f(1)=f(1\times 1)=f(1)\times f(1)$. y por tanto $f(1)$ puede ser 0 ó 1. Pero como $f(2)=f(1\times 2)=f(1)\times f(2)=f(1)\times 2$ y por ser $f(2)=2$, resulta que $f(1)=1$ y en consecuencia $f(n)=n$ para cada $n\in\mathbb{Z}^{>0}$

NOTA

Si cambiamos el dominio de definición a $\mathbb{Z}^{\geq 0}=\mathbb{N}$, entonces todo lo anterior sigue siendo válido y faltaría por determinar la imagen de 0, pero $f(0)=f(0\times 0)=f(0)\times f(0)$, y puede ser $f(0)=0$ ó 1. En este caso no podemos descartar ninguno de ellos y por tanto tendríamos dos posibilidades

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(n)=n \quad \forall n\in\mathbb{Z}^{>0}\end{cases} \qquad \begin{cases} f(0)=1 \\ f(n)=n \quad \forall n\in\mathbb{Z}^{>0}\end{cases}$$

Observa que la segunda no responde a lo propuesto en el enunciado

Encuentra las aplicaciones $f: \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican

1) $f(xy) = f(x) f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y) f\left(\frac{3}{x}\right)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$

2) $f(1) = 1/2$

Solución

Tomamos $x = y = 1$ y tenemos $f(1) = f(1) f(3) + f(1) f(3)$ luego $f(3) = 1/2$.

Tomamos $y = 1$ y tenemos $f(x) = f(x) f(3) + f(1) f\left(\frac{3}{x}\right)$, luego $f(x) - f(x)\, 1/2 = 1/2\, f\left(\frac{3}{x}\right)$ y de aquí $f(3/x) = f(x)$, lo que permite reescribir la ecuación original como

$$f(xy) = 2 f(x) f(y).$$

Tomando $x = y$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x^2) &= 2 f(x) f(x) \\ &= f(x) f\left(\frac{3}{x}\right) + f(x) f\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(x \cdot \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2} f\left(x \cdot \frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} f(3) + \frac{1}{2} f(3) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En particular $f(x)^2 = \frac{1}{4}$ y $f(x) = \frac{1}{2}$

Luego f es la aplicación constante igual a $1/2$.

Para una aplicacion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

1) $f(xy) = x f(y) + f(x) y$

2) $f(x+y) = f(x^{2013}) + f(y^{2013})$

Determina el valor de $f(\sqrt{2013})$

Solución

Tomamos $x = y = 1$, entonces en (1) tenemos $f(1) = f(1) + f(1)$ y de aqui $f(1) = 0$

Tomamos $x = y = 0$, entonces en (2) tenemos $f(0) = f(0) + f(0)$ y de aqui $f(0) = 0$

Tomando $y = 0$, de (2) se tiene $f(x) = f(x^{2013}) + f(0) = f(x^{2013})$ y resulta la relacion

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Conocemos que para $r \in \mathbb{Q}$ se tiene $f(r) = r f(1) = r \cdot 0 = 0$

Tomando $x = y = \sqrt{2013}$ tenemos

$$0 = f(2013) = f(\sqrt{2013} \cdot \sqrt{2013}) = 2\sqrt{2013}\, f(\sqrt{2013})$$

y por tanto $f(\sqrt{2013}) = 0$.

Prueba que existe una única aplicación $f: \mathbb{R}^{\neq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

1) $f(x) = x\, f(1/x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{\neq 0}$
2) $f(x) + f(y) = f(x+y) + 1$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ tales que $x+y \neq 0$

Solución

Hacemos un cambio de variable mediante $x = y = \frac{z}{2}$

De (1) tenemos

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} f\left(\frac{2}{z}\right) \quad \text{y por tanto}$$

$$2 f\left(\frac{z}{2}\right) = z f\left(\frac{2}{z}\right) = z\left(2 f\left(\frac{1}{z}\right) - 1\right) = z\left(2 \frac{1}{z} f(z) - 1\right) = 2 f(z) - z$$

De (2) tenemos

$$2 f\left(\frac{z}{2}\right) = f(z) + 1$$

En consecuencia resulta $f(z) + 1 = 2 f(z) - z$ y de aquí $f(z) = z + 1$, que es la única solución a la ecuación

Determina todas las aplicaciones $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

Solución

Una posible solución es $f(x) = x^2$ ya que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Si g es otra solución tenemos

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + 2xy$$

restando la relación $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ tenemos

$$g(x+y) - (x+y)^2 = g(x) - x^2 + g(y) - y^2$$

Llamando $h(x) = g(x) - x^2$ tenemos

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{Q}$$

Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = xk$ para todo $x \in \mathbb{Q}$

$$g(x) - x^2 = xk$$

$$g(x) = x^2 + xk \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{Q}$$

Por lo tanto las soluciones son de la forma $g(x) = x^2 + xk$.

Encontrar las aplicaciones $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ que verifican

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{Q}$$

Solución

Consideramos la composición

$$g: \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\lg} \mathbb{R}$$

la aplicación g verifica $g(x+y) = g(x) + g(y)$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = xk$, entonces

$$(\lg \circ f)(x) = xk$$

$$f(x) = e^{xk}$$

No olvidar que la solución $f(x) = 1$ se obtiene cuando $k = 0$

Prueba que toda aplicación $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ que verifica

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

es estrictamente creciente

Solución

Tenemos $f(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Dados $x < y$ en $\mathbb{R}$ tenemos

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x-y) + f(y)$$

y como $f(x-y) > 0$, tenemos el resultado

Prueba que una aplicación $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\neq 0}$ verificando

$$f(x+2) = f(x-1)\, f(x+5) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}$$

es una aplicación periódica.

<u>Solución</u>

Consideramos el caso de $x+6$

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f(x+4+2) = f(x+4-1)\, f(x+4+5 \\ &= f(x+3)\, f(x+9) \\ &= f(x+1+2)\, f(x+9) = f(x+1-1)\, f(x+1+5)\, f(x+9) \\ &= f(x)\, f(x+6)\, f(x+9) \end{aligned}$$

Como todos los factores son no nulos resulta $f(x)\, f(x+9) = 1$

esto es

$$f(x) = \frac{1}{f(x+9)} = \frac{1}{1/f(x+9+9)} = f(x+18)$$

Encontrar las aplicaciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican la ecuación

$$f(x^2+y) = f(x) + y^2 \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}$$

Solución

Tomando $x=0$ tenemos $f(y) = f(0) + y^2$, y por tanto deben de ser iguales

$$f(x^2+y) = f(0) + (x^2+y)^2$$
$$f(x) + y^2 = f(0) + x^2 + y^2$$

que evidentemente no son iguales. Por lo tanto no existe solución a la ecuación

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Encuentra todos los polinomios $F \in \mathbb{R}[x]$ que verifican

$$F(F(x)) = F(x)^k$$

Solución

Primero analizamos los grados. Sea $gr(F) = m$, tenemos $gr(F(F(x))) = m^2$ y $gr(F(x)^k) = km$.

Si $m^2 = mk$, tenemos $m(m-k) = 0$.

Si $m = 0$ $F(x)$ es cte, se tiene $F(F(x)) = F(x)$, luego $F(x) = F(x)^k$, por tanto $F(x) = 1$. Otra solución será $F(x) = 0$, en este caso el grado no está definido
Si hacemos en este caso $k = 1$ tendremos que $F(x) =$ cte es siempre una solución

Si $m = k$ en este caso $k \neq 0$ el coeficiente lider de $F(F(x))$ es a_n^{m+1} y el coeficiente lider de $F(x)^k$ es a_m^k; como deben ser iguales y $a_n \neq 0$, tenemos $a_n = 1$.

Ver que los restantes coeficientes son iguales a cero!!

Encontrar todas las aplicaciones $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que verifican

1) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$

2) $f(1) = 2$

<u>Solucion</u>

Tomando $x = n$ $y = 1$ tenemos $f(n) = f(n)f(1) - f(n+1) + 1$ y por tanto

$$f(n+1) = f(n)(f(1) - 1) + 1 = f(n) + 1$$

Como consecuencia $f(r) = r + 1$ para cada $r \in \mathbb{Q}$ $^{(*)}$

Tambien, tomando $x = y = 0$ tenemos $f(0) = f(0)f(0) - f(0) + 1$, luego $0 = (f(0) - 1)^2$, se tiene $f(0) = 1$.

NOTA

¡! Estudiar este mismo problema sin la condicion $f(1) = 2$.

(*) Tomando $x = -1$, $y = 1$ resulta $f(-1) = f(1)f(-1) - f(0) + 1$

$$f(-1) = 2f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

Tomando $x = n \geq 2$, $y = -1$ resulta

$$f(-n) = f(n)f(-1) - f(n-1) + 1$$
$$f(-n) = -n + 1$$

Temos que estudiar fracciones m/n. Primero veamos el caso $1/n$.

Tomando $x = n$, $y = 1/n$ tenemos $f(1) = f(n)f(1/n) - f(n + 1/n) + 1$

$$2 = (n+1)f(1/n) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1$$

Veamos el caso $x = 1$, $y = m + 1/n$. Tenemos

$$f\left(m + \frac{1}{n}\right) = f(1)f\left(m + \frac{1}{n}\right) - f\left(m + 1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$f\left(m + 1 + \frac{1}{n}\right) = f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$$

Entonces por induccion resulta $f\left(m + \frac{1}{n}\right) = m + f\left(\frac{1}{n}\right)$, y volviendo a la relacion anterior tenemos $2 = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - \left(n + f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1$ y de aqui $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$

Tomando $x = m$, $y = \frac{1}{n}$ tenemos $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$, y por tanto $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$.

Encontrar todas las aplicaciones $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que verifican

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

<u>Solución</u>

Encontrar todas las aplicaciones $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

Solución

Encontrar todas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$(x-2) f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + y f(x))$$

Solución

Prueba que si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicacion tal que

1) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

2) Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = -1$

Entonces f es periódica

Solucion

Encuentra todas las aplicaciones monótonas $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}$$

Solución

Encuentra todas las aplicaciones continuas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$$

Solución.

Encuentra todas las aplicaciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}$$

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente decreciente verificando

$$f(x+y) + f(f(x)+f(y)) = f(f(x+f(y)) + f(y+f(x)))$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Encuentra una relación entre $ff(x)$ y x.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicacian estrictamente decreciente y verificando

$$f(x+y)+f(f(x)+f(y)) = f(f(x+f(y))+f(y+f(x))) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Encuentra una relación entre $ff(x)$ y x

Solucio

Tomando $x=y$ tenemos

$$f(2x)+f(2f(x)) = f(2f(x+f(x)))$$

Tomando $x=f(x)$ tenemos

$$f(2f(x))+f(2ff(x)) = f(2f(f(x)+ff(x)))$$

Restando tenemos

$$+f(2x) - f(2ff(x)) = -f(2f(f(x)+ff(x)))+f(2f(x+f(x)))$$

La aplicacion es estrictamente decreciente. Supongamos $ff(x)>x$

$$2ff(x) > 2x \iff f(2ff(x)) < f(2x)$$

$$\iff f(2f(x+f(x))) > f(2f(f(x)+ff(x)))$$

$$\iff 2f(x+f(x)) < 2f(f(x)+ff(x))$$

$$\iff f(x+f(x)) < f(f(x)+ff(x))$$

$$\iff x+f(x) > f(x)+ff(x)$$

$$\iff x > ff(x)$$

lo que es una contradiccio. Por tanto siempre $ff(x)=x$

stack exchange

Encuentra todas las aplicaciones $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando

1) Son crecientes ($n<m \Rightarrow f(n) \leq f(m)$ para todos $n,m \in \mathbb{N}^*$)

2) $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todos $n,m \in \mathbb{N}^*$

Solución

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ verificando

1) Sean crecientes: $n < m \Rightarrow f(n) \le f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$

2) $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$

Donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Solución

1) Primero probamos que $f(1) = 0$. En efecto, se tiene $f(1) = f(1.1) =$ $f(1) + f(1)$, luego $f(1) = 0$

2) Una función que verifica estas condiciones es la función constante igual a cero

3) Si f verifica estas condiciones y no es constante entonces $f(2) = a \neq 0$

En efecto, si $f(2) = 0$ entonces $f(2^t) = t f(2) = t.0 = 0$, y como es creciente se tendría $f(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$ ya que dado $m \in \mathbb{N}^*$ existe $t \in \mathbb{N}$ t.q. $m \le 2^t$.

El resultado (3) es cierto para todo $n \neq 1$, esto es, si $m \neq 1$ entonces $f(n) \neq 0$

4) Llamamos $f(2) = a$ y $f(3) = b$, entonces $a \le b$. Si $a = b$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} f(8) = f(2^3) = 3a \\ f(9) = f(3^2) = 2b \end{array}\right| \quad 8 < 9 \Rightarrow 3a \le 2b \quad \text{lo que es imposible}$$

Tenemos entonces $a < b$. Pero entonces

$f(2^b) = ba = f(3^a)$ y f es constante para $2^b \le n \le 3^a$, si $2^b < 3^a$. Igual resultado tenemos si $3^a < 2^b$. Si tomamos $s \in \mathbb{N}$ tq. $2^b, 3^a < 2^s, 3^s$ entonces $f(2^s) = sa < f(3^s) = sb$ por tanto f no es constante a partir de 2^b. En este caso existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(n) = f(n+1) < f(n+2)$ y se verifica $f((n+1)^2) \geq f(n(n+1)) \geq f(n(n+2))$ o equivalentemente

$2f(n) \geq f(n) + f(n+2)$, esto es $f(n) \geq f(n+2)$, lo que es una

contradicción

Australian Math. Olympiad 1991

Prueba que existe una única aplicación $f : \mathbb{R}^{\neq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

1) $f(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\neq 0}$

2) $f(x) + f(y) = 1 + f(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \neq -y \ (x+y \neq 0)$

Australian math. Olympiad 1989

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

1) $ff(n) = 4n + 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calcula $f(1789)$