ECUACIONES DIOFÁNTICAS.

La ecuaciones diofánticas son expresiones polinómicas en una o varias variables con coeficientes enteros para las que estudiamos sus soluciones enteras o a lo más racionales

Ejemplos de ecuaciones diofánticas son:

A) $2X^2+Y=1$

B) $X^2+Y^2=Z^2$

C) $X^3+Y^3=Z^3$

D) $X^4+Y^4=Z^4$

E) $\begin{cases} X^2+Y+X=2 \\ XY-1=0 \end{cases}$

Una ecuación diofántica puede tener una o varias soluciones, pero también puede que no tenga ninguna. Por ejemplo una solución de $2X^2+Y=1$ es $x=0$, $y=1$, a la que representaremos también como $(0,1)$. Observa que esta ecuación tiene también como solución a $(1,-1)$. Estamos, en este caso, interesados en determinar <u>todas</u> las soluciones de la ecuación

En este caso particular una solución es $(x_0,y_0)=(0,1)$. Si (x,y) es otra solución, entonces verifica $2x^2+y=1$, restando $2x_0^2+y_0=1$ tenemos $2(x^2-x_0^2)+(y-y_0)=0$ y por tanto $2\mid y-y_0$
Supongamos $y-y_0=-2h$, con $h\in\mathbb{Z}$. (el signo "$-$" es para que el resultado sea agradable a la vista, pero no es importante).
Tenemos entonces $2(x^2-x_0^2)=-(y-y_0)=2h$ y por tanto $x^2-x_0^2=h$. Como $x_0=0$, tenemos $x^2=h$ y tenemos que h tiene que ser un cuadrado perfecto. Sea $h=k^2$, con $k\in\mathbb{Z}$.
Entonces $x=\pm k$, $y=y_0-2k^2$ es la solución general de la ecuación: $(k, 1-2k^2)$ con $k\in\mathbb{Z}$ son todas las soluciones.
En este caso tenemos infinitas soluciones. La solución $(1,-1)$ se obtiene cuando $k=1$. Otra solución es $(-1,-1)$, que se obtiene cuando $k=-1$.

La ecuación diofántica lineal en dos variables.

Un tipo de ecuación diofántica es la ecuación $aX+bY=c$, siendo $a,b,c \in \mathbb{Z}$, X, Y variables, además suponemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Conviene observar que si $d \in \mathbb{Z}$ verifica $d \mid a$ y $d \mid b$ y la ecuación tiene una solución (x,y), entonces $d \mid ax+by=c$. Es ésta una condición necesaria para la existencia de soluciones, ya que si $d \nmid c$ entonces no puede existir solución de la ecuación. Lo que vamos a estudiar es que ésta es una condición suficiente viendo un método para encontrar una primera solución (x_0, y_0).

En efecto, si $d = mcd\{a,b\}$ divide a c, existe un número entero h tal que $c = dh$. Por otro lado, como el mcd de a y b se puede escribir en la forma $d = ua+vb$, con $u, v \in \mathbb{Z}$ (Esto es consecuencia de la identidad de Bezout, a la que conoceréis como algoritmo de Euclides ya que este algoritmo proporciona un método para calcular u y v mediante divisiones sucesivas). Aplicamos pues el algoritmo de Euclides y tenemos una expresión $au+bv=d$. Ahora basta multiplicar por h para obtener $a(uh)+b(vh)=dh=c$, y por tanto $x_0 = uh$, $y_0 = vh$ es una primera solución de la ecuación

El problema ahora es determinar <u>todas</u> las soluciones de la ecuación. Para esto procedemos como en el ejemplo anterior con una solución (x,y).

$$ax_0 + by_0 = c$$
$$ax + by = c$$

Restando tenemos $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, de donde $a(x-x_0) = b(y_0-y)$

Conviene en este punto señalar que siempre, dada una ecuación $aX+bY=c$ que tiene solución, si $d = mcd\{a,b\}$, podemos dividir a, b y c por d y de esta forma obtenemos una nueva ecuación $\frac{a}{d}X + \frac{b}{d}Y = \frac{c}{d}$ con coeficientes enteros en la que los coeficientes de X e Y son primos relativos. Por esta razón podemos suponer que los a y b dados, originalmente, son ya primos relativos, porque si no basta con considerar la ecuación $\frac{a}{d}X + \frac{b}{d}Y = \frac{c}{d}$, que tiene las mismas soluciones que la ecuación original

Hecha esta aclaración, podemos suponer que a y b son primos relativos, y que por tanto $b \mid x - x_0$, luego existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = bh$, esto es, $x = x_0 + bh$

Por otro lado, de la igualdad $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ se tiene $abh = b(y_0 - y_0)$ y como $b \neq 0$, resulta $ah = y_0 - y$, de donde $y = y_0 - ah$

Así pues, la solución general de la ecuación $aX + bY = c$, con a y b no nulos y primos relativos es $(x, y) = (x_0 + bh, y_0 - ah)$, siendo (x_0, y_0) una solución

Ya hemos visto un método para calcular (x_0, y_0). En la práctica (x_0, y_0) se puede calcular por tanteo; cuando tengamos problemas por la complejidad de la ecuación podemos utilizar el algoritmo de Euclides

EJEMPLO

Determina las soluciones enteras de la ecuación diofántica

$$2X + 3Y = 4$$

Primero calculamos $d = \text{mcd}\{2, 3\} = 1$ y comprobamos que $d \mid 4$. Estamos pues seguros de que la ecuación tiene solución

Ahora calculamos una solución (x_0, y_0); en este caso es muy sencillo ver que $(2, 0)$ es una solución

Finalmente calculamos la solución general $(x, y) = (x_0 + 3h, y_0 - 2h)$ $= (2 + 3h, 0 - 2h) = (2 + 3h, -2h)$, que cuando h varía en $\mathbb{Z}$ da <u>todas</u> las soluciones de la ecuación

EJEMPLO

Determina las soluciones enteras de la ecuación diofántica

$$4X + 6Y = 8$$

Primero calculamos $d = \text{mcd}\{4, 6\} = 2$, y comprobamos que $d \mid 8$. Como consecuencia la ecuación tiene solución. A continuación dividimos todos los coeficientes por $d = 2$ para tener que los coeficientes de X e Y son primos relativos. Se tiene la ecuación $2X + 3Y = 4$ cuyas soluciones hemos calculado previamente

EJERCICIO

Determina las soluciones no negativas de la ecuación diofántica

$$2X - 3Y = 5$$

Este ejercicio nos pide sólo calcular un tipo especial de solución, para ello calculamos todas las soluciones y nos quedamos con las que verifiquen la propiedad enunciada

Paso 1. Cálculo de $d = mcd\{a,b\}$ y comprobación de que $d \mid c$

Tenemos $d = mcd\{2,-3\} = mcd\{2,3\} = 1$ y $d \mid 5$

Así pues la ecuación tiene solución

Paso 2 Reducimos la ecuación dividiendo todos los coeficientes por $d=1$.

En este caso este paso es superfluo ya que la ecuación obtenida coincide con la ecuación original

Paso 3 Cálculo de una solución

Podemos comprobar que $(x_0, y_0) = (1, -1)$ es una solución

Paso 4 Cálculo de todas las soluciones

Basta aplicar la fórmula que hemos deducido

$$(x,y) = (x_0 + bh,\ y_0 - ah) \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

$$= (1 + (-3)h,\ -1 - 2h) = (1 - 3h,\ -1 - 2h). \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}.$$

Paso 5 Tenemos que estudiar cuales de estas soluciones son no negativas

Para que $1 - 3h \geq 0$ se debe tener $3h \leq 1$, luego $h \leq 0$.

Para que $-1 - 2h \geq 0$ se debe tener $2h \leq -1$, luego $h \leq -1$

Como consecuencia las soluciones no negativas son

$$(x,y) = (1 - 3h,\ -1 - 2h) \quad \text{con } h \leq -1$$

EJERCICIO

Determina las soluciones positivas de la ecuación diofántica

$$91x + 195y = 1079$$

Paso 1 Cálculo de $d = \text{mcd}\{91, 195\} = 13$

$$\begin{array}{c|c|c} & 2 & 7 \\ \hline 195 & 91 & 13 \\ 13 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1079 & 13 \\ \hline 039 & 83 \\ 0 & \end{array}$$

Es claro que $d \mid c$ ya que $1079 = 13 \times 83$

Paso 2 Reducimos la ecuación dividiendo por d cada uno de los coeficientes

La ecuación obtenida es

$$7x + 15y = 83$$

Paso 3 Cálculo de una solución

Del algoritmo de Euclides tenemos

$$\begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 15 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 15 = 7 \times 2 + 1$$

$$1 = 7 \times 2 + 15 \times (-1)$$

multiplicando por 83 se tiene $\quad 83 = 7 \times 2 \times 83 + 15 \times (-1) \times 83$

$$= 7 \times 166 + 15 \times (-83)$$

Una solución es $(x_0, y_0) = (166, -83)$

Paso 4 Cálculo de todas las soluciones

$$(x, y) = (x_0 + bh, y_0 - ah) = (166 + 15h, -83 - 7h), \quad h \in \mathbb{Z}$$

Paso 5 Vamos a estudiar cuáles de estas soluciones son positivas

Debe ser $166 + 15h > 0$, entonces $15h > -166$, $h \geq -11$

Debe ser $-83 - 7h > 0$, entonces $7h < -83$, $h \leq -12$

Como consecuencia, no existen soluciones positivas.

EJERCICIO

Pepeluis tiene una bolsa llena de canicas, las quiere organizar en dos rectángulos de 2 y 3 filas, respetivamente. Durante cuatro días lo ha podido hacer, obteniendo en cada caso un número diferente de canicas en cada rectángulo. Averigua cuál es el menor número de canicas que puede tener Pepeluis para haber podido hacer esto

Llamamos x al número de columnas del rectángulo de 2 filas e y al número de columnas del rectángulo de 3 filas, y sea c el número total de canicas de Pepeluis. Se verifica $2x+3y=c$ y esta ecuación tiene al menos 4 soluciones positivas distintas. Hay que determinar el menor valor de c que verifica esto.

Una solución de $2X+3Y=1$ es $(x_0,y_0)=(2,-1)$ y por tanto una solución de $2X+3Y=c$ es $(x_0,y_0)=(2c,-c)$. La solución general de esta última ecuación es

$$(x,y)=(2c+3h,\ -c-2h) \qquad h\in\mathbb{Z}$$

Para que sea positiva la solución debe ser

$$2c+3h>0 \Rightarrow 3h>-2c \Rightarrow h>\left\lceil -\tfrac{2c}{3}\right\rceil$$

$$-c-2h>0 \Rightarrow 2h<-c \Rightarrow h<\left\lfloor -\tfrac{c}{2}\right\rfloor$$

Hay que determinar el mínimo c para que hay sólo 4 números h verificando

$$\left\lceil -\tfrac{2c}{3}\right\rceil < h < \left\lfloor -\tfrac{c}{2}\right\rfloor$$

o equivalentemente, para que $\left\lfloor -\tfrac{c}{2}\right\rfloor = \left\lceil -\tfrac{2c}{3}\right\rceil + 5$

Damos a c los siguientes valores

c	$\lfloor -\frac{c}{2}\rfloor$	$\lceil -\frac{2c}{3}\rceil$	diferencia
6	-3	-4	1
12	-6	-8	2
18	-9	-12	3
24	-12	-16	4
30	-15	-20	5

Tenemos pues que si el número de canicas es 30 es posible que Pepeluis las organice en la forma descrita. Pero es posible que para valores menores que 30 también pueda hacerlo. Veamos que no.

Supongamos que $c = 24 + k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, tenemos entonces

$$\left\lfloor -\frac{c}{2} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{2c}{3} \right\rceil = \left\lfloor -\frac{24+k}{2} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{2\times 24 + 2k}{3} \right\rceil$$

$$= \left\lfloor -\frac{24}{2} + \frac{k}{2} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{48}{3} - \frac{2k}{3} \right\rceil = \left\lfloor -12 - \frac{k}{2} \right\rfloor - \left\lceil -16 - \frac{2k}{3} \right\rceil$$

$$= -12 + 16 + \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{2k}{3} \right\rceil$$

$$= 4 + \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{2k}{3} \right\rceil$$

Ahora podemos calcular $\lfloor -k/2 \rfloor - \lceil -2k/3 \rceil$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y comprobar que su valor es 0 ó -1. En consecuencia la diferencia estudiada es siempre menor que 5

EJERCICIO

La Sultana quiere dividir a sus sirvientas en dos grupos de forma que el primer grupo pueda formar un rectángulo de 5 en línea y el segundo pueda formar un rectángulo de 7 en línea. Si durante 9 días no se repite el número sirvientas en cada grupo. ¿Cuál es el número mínimo de sirvientas que debe tener la Sultana?

Si llamamos X al número de filas del rectángulo de 5 en línea y llamamos Y al número de filas del rectángulo de 7 en línea, la condición es que en cada uno de los días los valores de X e Y sean distintos.
El número total de sirvientas es $5X + 7Y$; si llamamos c a este número tenemos la ecuación

$$5X + 7Y = c$$

Tenemos que determinar el mínimo valor de c para que esta ecuación tenga nueve soluciones positivas distintas. Resolvemos la ecuación sin saber el valor de c. Si $c = 1$ una solución es $x_0 = 3$, $y_0 = -2$
Por lo que para un valor arbitrario de c una solución es $x_0 = 3c$, $y_0 = -2c$
La solución general es

$$(x, y) = (x_0 + 7h,\ y_0 - 5h) \qquad h \in \mathbb{Z}$$

Como $x, y > 0$ se verifica:

$$x_0 + 7h > 0 \Rightarrow 3c + 7h > 0 \Rightarrow 7h > -3c \Rightarrow h > \left\lceil -\frac{3c}{7} \right\rceil$$

$$y_0 - 5h > 0 \Rightarrow -2c - 5h > 0 \Rightarrow 5h < -2c \Rightarrow h < \left\lfloor -\frac{2c}{5} \right\rfloor$$

Hay que determinar el mínimo c para que existan sólo 9 números h verificando

$$\left\lceil -\frac{3c}{7} \right\rceil < h < \left\lfloor -\frac{2c}{5} \right\rfloor$$

o lo que es lo mismo, para que $\left\lfloor -\frac{2c}{5} \right\rfloor = \left\lceil -\frac{3c}{7} \right\rceil + 10$

Damos valores a c y calculamos estos números

c	$\lceil -\frac{3c}{7} \rceil$	$\lfloor -\frac{2c}{5} \rfloor$	diferencia
35	−15	−14	1
70	−30	−28	2
---	---	---	---
350	−150	−140	10

Tenemos pues que si el número de sirvientas es 350 es posible que la Sultana las organice tal y cómo quiere. Pero es posible que también lo pueda hacer para valores más pequeños. Hagamos una tabla en la que recojamos estos datos

c	$\lceil -\frac{3c}{7} \rceil$	$\lfloor -\frac{2c}{5} \rfloor$	diferencia
350	-150	-140	10
349	$\lceil -\frac{1047}{7} \rceil$	$\lfloor -\frac{698}{5} \rfloor$	11
	-149	-140	9
348	-149	-140	9

Para valores menores que $c = 350$ la diferencia es siempre menor que 10. Por lo tanto el mínimo número de sirvientas es $\underline{\underline{350}}$.

Para $c = 315, 316, \ldots, 349$ escribimos $c = 315 + k$, $k = 0, 1, \ldots 34$

La diferencia es

$$\left\lfloor -\frac{2c}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3c}{7} \right\rceil = \left\lfloor -\frac{2\times 315}{5} - \frac{2k}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3\times 315}{7} - \frac{3k}{7} \right\rceil = -126 + 135 + \left\lfloor -\frac{2k}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3k}{7} \right\rceil$$
$$= 9 + \left\lfloor -\frac{2k}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3k}{7} \right\rceil$$

Observa que $\frac{2k}{5} < \frac{3k}{7}$ ya que $14k < 15k$. Por tanto

$-\frac{2k}{5} > -\frac{3k}{7}$ y $\left\lfloor -\frac{2k}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3k}{7} \right\rceil = 0$ si existe un entero n tal que $-\frac{2k}{5} \geq n \geq -\frac{3k}{7}$ y $\left\lfloor -\frac{2k}{5} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{3k}{7} \right\rceil = -1$ en caso contrario. Como consecuencia la diferencia es menor que 10.

La ecuación diofántica lineal en tres variables

Estas ecuaciones son del tipo $aX+bY+cZ=f$, siendo $a,b,c,f\in\mathbb{Z}$, X,Y,Z variables y a,b,c no nulos.

Llamamos $d=\text{mcd}\{a,b,c\}$. Si existe una solución x,y,z, entonces $ax+by+cz=d$, y por tanto $d\mid f$. Siendo ésta una condición necesaria. Vamos a ver que es una condición suficiente probando que podemos encontrar una solución cuando $d\mid f$, es más, vamos a determinar todas las soluciones.

De la relación $d\mid f$, dividiendo todos los coeficientes por d tenemos

$$\frac{a}{d}X+\frac{b}{d}Y+\frac{c}{d}Z=\frac{f}{d}$$

siendo ésta una ecuación en la que el mcd de los coeficientes de las variables es igual a 1. Para simplificar, supongamos que en la ecuación original $aX+bY+cZ=f$ se verifica $\text{mcd}\{a,b,c\}=1$.

Como $1=\text{mcd}\{a,b,c\}=\text{mcd}\{\text{mcd}\{a,b\},c\}$, llamemos $e=\text{mcd}\{a,b\}$ y estudiemos la ecuación diofántica

$$aX+bY=e$$

Si (x_0,y_0) es una solución, el resto de las soluciones se obtiene como $(x,y)=(x_0+\frac{b}{e}h, y_0-\frac{a}{e}h)$, siendo $h\in\mathbb{Z}$.

Para cualesquiera valores $x,y\in\mathbb{Z}$ se verifica $ax+by=ek$, para algún $k\in\mathbb{Z}$. Podemos entonces considerar

$$aX+bY+cZ=f$$
$$eK+cZ=f$$

En esta nueva ecuación diofántica en las variables K y Z se verifica $\text{mcd}\{e,c\}=1$ y si (k_0,z_0) es una solución, todas las soluciones son de la forma $(k,z)=(k_0+ch', z_0-eh')$, siendo $h'\in\mathbb{Z}$. Para cada uno de estos valores $k=k_0+ch'$ consideramos la ecuación

$$aX+bY=ek$$

Si (x,y) es una solución de $aX+bY=e$, entonces (xk,yk) es una solución de $aX+bY=ek$. Tenemos por tanto que todas las soluciones de $aX+bY=ek$ son de la forma $(x_0k+\frac{bk}{e}h, y_0k-\frac{ak}{e}h)$ con $h\in\mathbb{Z}$.

Tenemos entonces que si (k, z) es una solución de $eK + cZ = f$, entonces $(x_0 k + \frac{bk}{e} h,\ y_0 k - \frac{ak}{e} h,\ z)$ es una solución de $aX+bY+cZ=f$. En definitiva, tenemos que

$$\left(x_0(k_0+ch') + \frac{b(k_0+ch')}{e} h,\ y_0(k_0+ch') - \frac{a(k_0+ch')}{e} h,\ z_0 - eh'\right)$$

es una solución de $aX+bY+cZ=f$.

Queda ahora el problema de eliminar k_0 de esta expresión. Para esto supongamos que tenemos una solución particular (x_0, y_0, z_0) de la ecuación original, entonces

$$\underbrace{a x_0 + b y_0}_{\parallel} + c z_0 = f$$

$$e k_0 + c z_0 = f$$

para un cierto $k_0 \in \mathbb{Z}$, esto es, $k_0 = \frac{ax_0 + by_0}{e}$, con lo que k_0 puede ser eliminado

Observa que las soluciones aparecen en este caso en función de dos parámetros h y h'; esto es debido a que hemos resuelto dos ecuaciones diofánticas en dos variables

EJEMPLO

Determina las soluciones de la ecuación diofántica

$$6X + 10Y + 15Z = 31$$

Paso 1 Cálculo de $d = \text{mcd}\{6, 10, 15\} = 1$ y como $d = 1 \mid 31$, la ecuación tiene solución

Paso 2 Tomamos $e = \text{mcd}\{a, b\} = 2$; es claro que $\text{mcd}\{e, c\} = 1$

Paso 3 Consideramos la ecuación $aX + bY = e$ y determinamos todas sus soluciones $(x, y) = (x_0 + \frac{b}{e}h,\ y_0 - \frac{a}{e}h)$ para $h \in \mathbb{Z}$

$$6X + 10Y = 2 \ ;\ 3X + 5Y = 1 \ ;\ (x_0, y_0) = (2, -1)$$

$$(x, y) = \left(2 + \tfrac{10}{2}h,\ -1 - \tfrac{6}{2}h\right) \quad h \in \mathbb{Z}$$

Paso 4 Consideramos la ecuación $eK + cZ = f$ y determinamos todas sus soluciones $(k, z) = (k_0 + ch',\ z_0 - eh')$ para $h' \in \mathbb{Z}$

$$2K + 15Z = 31 \ ;\ (k_0, z_0) = (-217, 31)$$

$$(k,z) = (-217 + 15h',\ 31 - 2h')$$

Paso 5 Para cada valor de $k = -217 + 15h'$ consideramos la ecuación $aX + bY = ek$ y sus soluciones que son

$$(x_k, y_k) = \left((x_0 + \tfrac{b}{e}h)(-217 + 15h'),\ (y_0 - \tfrac{a}{e}h)(-217 + 15h')\right)$$

Tenemos entonces que

$$(x,y,z) = \left((2 + 5h)(-217 + 15h'),\ (-1 - 3h)(-217 + 15h'),\ 31 - 2h'\right)$$

es la expresión general de cualquier solución de la ecuación $aX + bY + cZ = f$

$$6X + 10Y + 15Z = 31$$

Vamos a comprobarlo

$$\begin{cases} 6(2+5h)(-217+15h') &= -2604 - 6510h + 180h' + 450hh' \\ 10(-1-3h)(-217+15h') &= -2170 + 6510h - 150h' - 450hh' \\ 15(31-2h') &= 465 - 30h' \\ \text{Suma} &= 31 \end{cases}$$

Ecuaciones diofánticas no lineales.

Estas ecuaciones son más complicadas ya que, al contrario de las ecuaciones lineales, no existen algoritmos claros para obtener todas las soluciones (enteras).

Sin embargo hay algunas técnicas que vamos a mencionar que nos permiten calcular las soluciones en casos particulares.

A. Método de factorización

Se trata de factorizar el polinomio que define la ecuación diofántica y utilizar la factorización de números enteros para determinar todas las posibles soluciones. Para utilizar este método es necesario manipular los polinomios para lograr una factorización útil. Veamos algún ejemplo

EJEMPLO.

Determinar todos los enteros positivos x, y tales que $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

Consideramos la ecuación diofántica

$$(XY-7)^2 = X^2+Y^2$$

desarrollando el primer miembro resulta

$$X^2Y^2-14XY+49 = X^2+Y^2$$

Completamos ahora el miembro de la derecha hasta obtener un cuadrado

$$X^2Y^2-14XY+49+2XY = X^2+Y^2+2XY$$

$$X^2Y^2-12XY+49 = (X+Y)^2$$

Completamos parte del miembro de la izquierda para tener un cuadrado

$$(XY-6)^2+13 = (X+Y)^2$$

Agrupamos los términos en los que aparecen las variables en el miembro de la izqda y los números en el de la dcha

$$(XY-6)^2-(X+Y)^2 = -13$$

Aplicamos que en el miembro de la izqda tenemos una diferencia de cuadrados

$$(XY-6+(X+Y))(XY-6-(X+Y)) = -13$$

$$(XY+X+Y-6)(XY-X-Y-6) = -13$$

Ahora consideramos las diferentes factorizaciones de $-13 = (-1)\times 13$

$$= 1\times(-13)$$

$XY+X+Y-6$	-1	1	13	-13
$XY-X-Y-6$	13	-13	-1	1

Tenemos cuatro casos cada uno de los cuales puede dar una solución, puede que dé varias soluciones y también puede que no dé ninguna

Caso 1 $\left.\begin{matrix} XY+X+Y-6=-1 \\ XY-X-Y-6=13 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} XY+X+Y=5 \\ XY-X-Y=19 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 2XY=24 \\ 2X+2Y=-14 \end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix} XY=12 \\ X+Y=-7 \end{matrix}\right\}$ no tiene solución

Caso 2 $\left.\begin{matrix} XY+X+Y-6=1 \\ XY-X-Y-6=-13 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} XY+X+Y=7 \\ XY-X-Y=-7 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 2XY=0 \\ 2X+2Y=14 \end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix} XY=0 \\ X+Y=7 \end{matrix}\right\}$ se tienen posibles soluciones $\begin{matrix} x=0, & y=7 \\ y=0, & x=7 \end{matrix}$

Como nuestras soluciones deben ser positivas, en este caso no hay solución

Caso 3 $\left.\begin{matrix} XY+X+Y-6=13 \\ XY-X-Y-6=-1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} XY+X+Y=19 \\ XY-X-Y=5 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 2XY=24 \\ 2X+2Y=14 \end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix} XY=12 \\ X+Y=7 \end{matrix}\right\}$ tenemos que X verifica $X^2-7X+12=0$

que tiene como raíces $X=3$ y $X=4$. y por tanto dos posibles soluciones son $x=3, y=4$ y $x=4, y=3$.

Caso 4 $\left.\begin{matrix} XY+X+Y-6=-13 \\ XY-X-Y-6=+1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} XY+X+Y=-7 \\ XY-X-Y=7 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 2XY=0 \\ 2X+2Y=-14 \end{matrix}\right\}$

no tiene solución

Las únicas soluciones positivas son $(3,4)$ y $(4,3)$.

EJERCICIO

Determina todas las soluciones enteras (x,y) de la ecuación diofántica $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.

Vamos a expresar el término de la izquierda como un producto; para ello es posible que necesitemos modificar los dos miembros.

A veces es conveniente hacer cambios de variable para ajustar los términos. Llamamos

$$X-1=A \quad y \quad Y-1=B$$

Entonces $X=A+1$ y también $Y=B+1$. La ecuación se escribe entonces como

$$(A+1)^2B+(B+1)^2A=1$$

Desarrollando esta expresión se tiene

$$(A^2+2A+1)B+(B^2+2B+1)A=1$$

$$A^2B+2AB+B+B^2A+2BA+A=1$$

$$A^2B+AB^2+4AB+A+B=1$$

$$AB(A+B+4)+A+B=1$$

$$AB(A+B+4)+A+B+4=1+4$$

$$(AB+1)(A+B+4)=5$$

La factorización de 5 es $(-1)(-5)=1\times 5$. Tenemos entonces las relaciones

$AB+1$	1	-1	5	-5
$A+B+4$	5	-5	1	-1

y hay que estudiar cuatro casos

<u>Caso 1</u> $\left.\begin{array}{l} AB+1=1 \\ A+B+4=5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} AB=0 \\ A+B=1 \end{array}\right\}$ A es raiz de $X^2-X+0=0$

A es 1 ó 0 y por tanto $X=A+1$ es 2 ó 1

B es 0 ó 1 y por tanto $Y=B+1$ es 1 ó 2

<u>Caso 2</u> $\left.\begin{array}{l} AB+1=-1 \\ A+B+4=-5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} AB=-2 \\ A+B=-9 \end{array}\right\}$ A es raiz de $X^2+9X-2=0$

no tiene raices enteras

<u>Caso 3</u> $\left.\begin{array}{l} AB+1 = 5 \\ A+B+4 = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} AB = 4 \\ A+B = -3 \end{array}\right\}$ A es raiz de $x^2+3x+4=0$

No tiene raices enteras

<u>Caso 4</u> $\left.\begin{array}{l} AB+1 = -5 \\ A+B+4 = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} AB = -6 \\ A+B = -5 \end{array}\right\}$ A es raiz de $x^2+5x-6=0$

no tiene raices enteras

Como consecuencia las únicas soluciones son $(2,1)$ y $(1,2)$

EJERCICIO

Determinar todos los enteros positivos x, y tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ siendo p, q enteros primos positivos.

Supongamos que tenemos una pareja (x,y) que verifica esta relación, entonces se tiene

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$$

$$\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{pq}$$

$$pq(y+x)=xy$$

Entonces (x,y) es una solución de la ecuación polinómica $pq(X+Y)=XY$

Al estudiar esta ecuación

$$-pq(X+Y)+XY=0$$

Vamos a completar el miembro de la izqda como un producto

$$XY-pqX-pqY=0$$

$$XY-pqX-pqY+p^2q^2=p^2q^2$$

$$(X-pq)(Y-pq)=p^2q^2$$

Los factores positivos de p^2q^2 son $1, p, q, pq, p^2, q^2, p^2q, pq^2, p^2q^2$ y tenemos entonces las siguientes posibilidades que hay que estudiar caso por caso

$X-pq$	1	p	q	pq	p^2	q^2	p^2q	pq^2	p^2q^2
$Y-pq$	p^2q^2	pq^2	p^2q	pq	q^2	p^2	q	p	1

Vamos a estudiar el caso $\left.\begin{array}{l} X-pq=1 \\ Y-pq=p^2q^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} X=1+pq \\ Y=p^2q^2+pq=pq(pq+1) \end{array}$

es la primera de las soluciones. Los otros casos se estudian igual.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determina todos los números enteros positivos x y todos los enteros primos positivos p tales que
$$x^3+7x^2+14x+8=6p$$

2. Determina todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica
$$3XY+2Y=7$$

3. Determina todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica
$$2X^2+XY-3Y^2=17$$

4. Determina todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica
$$(X-Y)^3+(Y-Z)^3+(Z-X)^3=35$$

5. Determina los enteros positivos x que verifican que
$$x^2-4x+16$$
es un cuadrado perfecto.

EJERCICIO

Determina los enteros x que verifican que x^4+2 es un múltiplo de $x+2$.

Como $x+2$ es un divisor de x^4+2, consideramos los polinomios $X+2$ y X^4+2 y comprobamos cuando $X+2 \mid X^4+2$. En este caso se tiene

$$X^4+2 = (X^3-2X^2+4X-8)(X+2)+18$$

y por tanto se tendría, considerando fracciones,

$$\frac{X^4+2}{X+2} = X^3-2X^2+4X-8+\frac{18}{X+2}$$

Los números que andamos buscando verifican que $\frac{18}{x+2}$ es un entero o equivalentemente $(x+2)h=18$ para algún $h\in\mathbb{Z}$

Tenemos que $x+2 = 1, 2, 3, 6, 9, 18$ ó $-1, -2, -3, -6, -9, -18$ y hay que estudiar 12 casos.

$$x = -1, 0, 1, 4, 7, 16, -3, -4, -5, -8, -11, -20$$

Si en el enunciado pedimos sólo los enteros positivos que verifican esta relación, se tendrá

$$x = 1, 4, 7, 16$$

EJERCICIO

Determina todos los enteros positivos de dos cifras que son iguales a tres veces el producto de éstas.

Llamamos N al número, siendo a y b sus cifras, esto es, $N = a + 10b$. ∴ la representación decimal es $\overline{ba}$ y como tiene dos cifras se debe tener $b \neq 0$

La relación del enunciado es $N = 3ab$ y por tanto se tiene

$$a + 10b = 3ab$$

Luego a y b son soluciones de la ecuación diofántica $A + 10B = 3AB$.
Se tiene entonces

$$A = 3AB - 10B = (3A - 10)B$$

$$b = \frac{a}{3a-10}$$

Como $3a - 10 > 0$ se tiene $3a > 10$ y por tanto $a \geq 4$.
Como $b \leq 9$ entonces $\frac{a}{3a-10} \leq 9$

Para $a = 4$ tenemos $4/(3\times4-10) = 4/2 = 2$ tenemos $b = 2$ y $N = 24$
Para $a = 5$ tenemos $5/(3\times5-10) = 5/5 = 1$ tenemos $b = 1$ y $N = 15$
Para $a = 6$ tenemos $6/(3\times6-10) = 6/8$ imposible
Para $a = 7$ tenemos $7/(3\times7-10) = 6/11$ imposible

R - - -

En general tenemos que tener $3a - 10 \leq a$, esto es $2a \leq 10$ y se tiene la relación $a \leq 5$, como ya hemos comprobado