Números curiosos

Pascual Jara
Salvador Villegas

15 de noviembre de 2008*

Resumen

En esta sesión vamos a tratar con números enteros. Sería conveniente disponer de una calculadora o de un ordenador con el que hacer los cálculos que se indican.

Introducción

Vamos a trabajar con números enteros y ver algunas de sus propiedades. Trataremos los números escritos en base 10 y daremos propiedades de los números según sus cifras.
El objetivo que se pretende con esta sesión es que el alumno se familiarice con el manejo de números en notación decimal y que realice cálculos con números significativamente grandes, así como ver la regularidad de ciertos comportamientos de determinados números o familias de números.

1. Manejo de números

Ejercicio 1.1. *Considera las siguientes listas de números.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1&2&3&4&5&6&7&8&9\\
1&2&3&4&5&6&7&8&0\\
1&2&3&4&5&6&7&0&0\\
1&2&3&4&5&6&0&0&0\\
1&2&3&4&5&0&0&0&0\\
1&2&3&4&0&0&0&0&0\\
1&2&3&0&0&0&0&0&0\\
1&2&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
9&8&7&6&5&4&3&2&1\\
0&8&7&6&5&4&3&2&1\\
0&0&7&6&5&4&3&2&1\\
0&0&0&6&5&4&3&2&1\\
0&0&0&0&5&4&3&2&1\\
0&0&0&0&0&4&3&2&1\\
0&0&0&0&0&0&3&2&1\\
0&0&0&0&0&0&0&2&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
\end{array}$$

¿Cuál de las dos sumas es mayor?

Solución. Las dos sumas tiene el mismo valor: 1 083 676 269. Observa que la suma de la columna primera, segunda tercera, etc. de la suma de la derecha tiene siempre el mismo valor que la suma correspondiente columna de la suma de la izquierda.

* ESTALMAT-Andalucía. Granada. Segundo

Ejercicio 1.2. *Comprueba que se verifica:*

$$\begin{aligned} 1\times 8+1 &= 9\\ 12\times 8+2 &= 98\\ 123\times 8+3 &= 987\\ &\vdots \end{aligned}$$

¿Explica por qué?
Calcula los términos 19 y 20 de esta sucesión.

Solución. Observa que la diferencia $98-9$ es 89, y que la diferencia $987-98$ es 889. Esta regla se mantiene para pasar de cada expresión a la siguiente. Observa que se tiene $889 = 111\times 8+1$, por tanto

$$\begin{array}{rr} 12\times 8+2 & 98\\ 111\times 8+1 & 889\\ \hline 123\times 8+3 & 987 \end{array}$$

Por tanto de una expresión a la siguiente se pasa sumando $8889 = 1111\times 8+1$,o el correspondiente número. De esta forma la última expresión que se tiene es:

$$123\,456\,789\times 8+9 = 987\,654\,321,$$

y la tabla completa es:

$$\begin{array}{rcl} 1\times 8+1 &=& 9\\ 12\times 8+2 &=& 98\\ 123\times 8+3 &=& 987\\ 1234\times 8+4 &=& 9876\\ 12345\times 8+5 &=& 98765\\ 123456\times 8+6 &=& 987654\\ 1234567\times 8+7 &=& 9876543\\ 12345678\times 8+8 &=& 98765432\\ 123456789\times 8+9 &=& 987654321 \end{array}$$

Sumando al último término de la derecha $8\,888\,888\,889$ se tiene $9\,876\,543\,210$, y se obtiene la expresión:

$$1\,234\,567\,90\times 8+10 = 9\,876\,543\,210.$$

Observa que falta el dígito 8 en el factor del miembro de la izquierda. El siguiente valor sería

$$12\,345\,679\,011\times 8+11 = 98\,765\,432\,099,$$

que se siguen construyendo con la misma regla, pero que tienen una expresión menos llamativa. La siguiente expresión es

$$123\,456\,790\,112\times 8+12 = 987\,654\,320\,908.$$

Así sucesivamente.
Vamos a abordar ahora el problema de calcular los términos 19 y 20 de esta sucesión.
El término 19 es:

$$1\,234\,567\,901\,123\,456\,789\times 8+19 = 9\,876\,543\,208\,987\,654\,331$$

el término 20 es:

$$12\,345\,679\,011\,234\,567\,900 \times 8 + 20 = 98\,765\,432\,089\,876\,543\,220$$

Observa que la sucesión construida es exactamente la sucesión:

$$9;\ 9+89;\ 9+89+889;\ 9+89+889+8889;\ \ldots$$

Ejercicio 1.3 (Números narcisistas)**.** *Observa que 153 es la suma de los cubos de sus cifras, y que lo mismo ocurre con 370.*
Un número de hasta tres cifras se dice ***narcisista*** *si es la suma de los cubos de sus cifras.*

(1) Determina los números narcisistas menores que 500.

(2) ¿Cuántos números narcisistas hay?

Solución. El 0 el 1 son números narcisistas siempre, los llamamos números **narcisistas triviales**.

(1) Es fácil ver que
$$1 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$
y que
$$3^3 + 7^3 + 0 = 27 + 343 = 370.$$
Un poco más difícil es averiguar cuales son los números narcisistas que faltan. Para esto estudiamos los cubos de los números del 0 al 9. Tenemos:

0	0	5	125
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729

De estos desechamos 8 y 9, ya que sus cubos son mayores que 500. Con 7 y 6 no podemos formar números narcisistas ya que la suma de sus cubos es mayor que 500. Con 7 y 5 no podemos componer ningún número narcisista, como se comprueba al hacer la suma de sus cubos y añadiendo a ésta los cubos restantes. Con 7 y 4 tenemos:

$$7^3 + 4^3 = 343 + 64 = 407$$

por tanto 407 es un número narcisista, y no podemos componer más con 4 y 7. Con 7 y 3 tenemos:

$$7^3 + 3^3 = 343 + 27 = 370$$

por tanto 370 es un número narcisista como ya sabemos. De misma forma se tiene que 371 es un número narcisista.

Por este método llegamos de nuevo a comprobar que 153 es un número narcisista.

En resumen los números narcisistas menores que 500 son: 0, 1, 153, 370, 371 y 407.

(2) Para averiguar cuántos números narcisistas hay en total tenemos que estudiar los que van de 500 a 1000 en la misma forma que hemos hecho ahora. En este caso comprobamos que no hay más.

En total hay 4 números narcisistas no triviales: 153, 370, 371 y 407 y los dos números narcisistas triviales: 0 y 1. Normalmente se excluyen de esta listas los dos primeros por ser los números narcisistas triviales.

Ejercicio 1.4. *Prueba que todo número impar es una diferencia de dos cuadrados de números consecutivos.*

Tratar con varios números impares y escribirlos como una diferencia de dos enteros consecutivos. A partir de aquí intentar obtener el resultado anunciado.
Solución. Dado n, supongamos que es la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos, por ejemplo

$$n = x^2 - (x-1)^2$$

se tiene:

$$n = x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 1.$$

Luego la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos es un número impar.
Recíprocamente, si n es un número impar, observa que de lo anterior se tiene $n = 2x - 1$ entonces $x = (n+1)/2$. Por tanto para cada número impar n podemos escribir:

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} + 1\right)^2.$$

Ejercicio 1.5. *Considera las potencias de 2*

2^0	$= 1$		2^5	$= 32$
2^1	$= 2$		2^6	$= 64$
2^2	$= 4$		2^7	$= 128$
2^3	$= 8$		2^8	$= 256$
2^4	$= 16$		2^9	$= 512$

observa que ningún par de ellas tienen los mismos dígitos (aunque estén escritos en distinto orden). ¿Es esto cierto para cualquier potencia de 2? Esto es, ¿existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos, pero variando el orden?
Esto es, que una se escribe como una reordenación de los dígitos de la otra.

Tomar una calculadora y calcular otras potencias de 2. Observa que este proceso termina rápidamente¡, ya que tu calculadora tiene una capacidad limitada. Por esto es conveniente utilizar ordenadores y programas específicos de cálculo.
Solución. Tenemos que buscar invariantes de una expresión decimal de un número que no dependan de la ordenación de los dígitos que lo representan, y de forma que nos aseguremos que las diferentes potencias de 2 puedan diferenciarse mediante estos invariantes.
Observando la tabla del enunciado parece claro que uno de los invariantes podría ser el número de cifras, pero rápidamente advertimos que dos potencias distintas de 2 pueden tener el mismo número de cifras.

2^0	$= 1$	2^4	$= 16$	2^7	$= 128$	2^{10}	$= 1024$
2^1	$= 2$	2^5	$= 32$	2^8	$= 256$	2^{11}	$= 2048$
2^2	$= 4$	2^6	$= 64$	2^9	$= 512$	2^{12}	$= 4096$
2^3	$= 8$					2^{13}	$= 8192$

En cada columna hemos representado las potencias de 2 que tienen una, dos tres y cuatro cifras.
¿Cómo distinguir entre ellas? Es claro que no mediante la cifra de las unidades, por ejemplo. Un método más interesante, en el que intervienen todas las cifras, es estudiar el resto módulo 9; esto es, sumar los dígitos de cada número y reducir módulo 9 hasta obtener un entero entre 0 y 8.
Completando el cuadro anterior se tiene:

2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)	2^n		(mód 9)
2^0	1	1	2^4	16	7	2^7	128	2	2^{10}	1024	7
2^1	2	2	2^5	32	5	2^8	256	4	2^{11}	2048	5
2^2	4	4	2^6	64	1	2^9	512	8	2^{12}	4096	1
2^3	8	8							2^{13}	8192	2

Observamos que en este caso se repiten cíclicamente 1, 2, 4, 8, 7, 5.
Si probamos que en cada columna no hay dos de estos números ya tendremos el resultado. La lista anterior corresponde a

$$2^0 \equiv 1 \pmod 9, \quad 2^1 \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^2 \equiv 4 \pmod 9, \quad 2^3 \equiv 8 \pmod 9,$$
$$2^4 \equiv 7 \pmod 9, \quad 2^5 \equiv 5 \pmod 9, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

Por lo tanto si la primera potencia de 2 que tiene t dígitos significativos es 2^s, módulo 9 éste será uno de los elementos de $\{1, 2, 4, 8, 7, 5\}$; y se repite para 2^{s+6}.
¿Tendrá 2^{s+6} más dígitos que 2^s o tendrá los mismos?
Vamos a comprobar que tiene más dígitos.

$$10^{t-1} \leq 2^s,$$

$$10^t < 10^{t-1} \times 2^6 \leq 2^s \times 2^6 = s^{s+6}.$$

Por lo tanto no existen potencias de 2 que se escriban con los mismos dígitos ordenados de formas distintas.

Ejercicio 1.6. *Observa que se verifica* $1 + 4 = 2 + 3$, *y que también se tiene*

$$12 + 43 = 21 + 34.$$

De forma análoga se tiene $13 + 45 = 24 + 34$ *y se verifica:*

$$1324 + 4534 = 2413 + 3445.$$

¿Cómo explicar este hecho?
Existen resultados análogos para sumas de cuadrados: Se verifica $12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$ *y se tiene entonces*

$$1223^2 + 3124^2 = 2312^2 + 2431^2.$$

Explica cual es la justificación de estos resultados.

Solución. Si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, entonces

$$(ac)^2 + (bd)^2 = (10a + c)^2 + (10b + d)^2 = 100(a^2 + b^2) + 20(ac + bd) + (c^2 + d^2),$$
$$(ca)^2 + (db)^2 = (10c + a)^2 + (10d + b)^2 = 100(c^2 + d^2) + 20(ca + db) + (a^2 + b^2).$$

1.1. Más sobre números narcisistas

El concepto de número narcisista se puede extender en varias formas:

(1) Un número n es e**-narcisista** si existe un exponente e tal que n es la suma de las potencias e-ésimas de sus cifras.

(2) Más en general decimos que un número n de t cifras significativas es **narcisista*** si n es igual a la suma de las potencias t–ésimas de sus cifras.

Del Ejercicio (1.3) se desprende que los únicos números 3-narcisistas son: 0, 1, 153, 370, 371 y 407, que 153, 370, 371 y 407 son los números narcisistas* de tres cifras.
Durante la exposición de este resultado el Prof. Alberto Galindo planteó el problema de números e-narcisistas en bases diferentes a la base 10. En este caso es claro que los resultados son distintos, y como pueden ser una fuente de discusiones, incluimos aquí un breve estudio de los casos de base 2 y 3 y exponentes varios.

Lema 1.7. *No existen números e–narcisistas no triviales en base 2.*

Demostración. Vamos a representar por $a_n \dots a_1 a_{0(2}$ al número con cifras $a_n, \dots, a_1, a_0$ escrito en base 2. Si $x = a_n \dots a_1 a_{0(2}$ es e–narcisista, se verifica:

$$a_n \dots a_1 a_{0(2} = a_n^e + \cdots + a_1^e + a_0^e \leq n + 1_{(10}.$$

Pasando a base 10 se tiene:

$$a_n 2^n + \cdots + a_1 2 + a_0 = a_n^e + \cdots + a_1^e + a_0^e \leq n + 1.$$

El mayor número que se puede escribir con $n+1$ cifras en base 2 se obtiene cuando $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 1$, este número en base 10 es $2^{n+1} - 1$, y se tiene $2^{n+1} - 1 > n + 1$ si y solo si $n \geq 1$. Por tanto no hay números de $n + 2$, $n \geq 1$, cifras en base 2 que sean e–narcisistas. Los números e–narcisistas serán de una o dos cifras. En este caso se estudia cada uno de los posibles candidatos. De una cifra el $0_{(2}$ y el $1_{(2}$ son números narcisistas triviales para todos los exponentes e. Los dos cifras $10_{(2}$ y $11_{(2}$ no son e–narcisistas para ningún exponente e. □

Lema 1.8. *Los únicos números 2–narcisistas no triviales en base 3 son:* $12_{(3}$ *y* $22_{(3}$.

Demostración. Representamos por $a_n \dots a_1 a_{0(3}$ al número con cifras $a_n, \dots, a_1, a_0$ escrito en base 3. Si $x = a_n \dots a_1 a_{0(3}$ es 2–narcisista, se verifica:

$$a_n \dots a_1 a_{0(3} = a_n^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2 \leq 4(n + 1)_{(10}.$$

Pasando a base 10 se tiene:

$$a_n 3^n + \cdots + a_1 3 + a_0 = a_n^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2 \leq 4(n + 1).$$

El mayor número que se puede escribir con $n+1$ cifras en base 3 se obtiene cuando $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 2$, este número en base 10 es: $2\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 3^{n+1} - 1$, y se tiene $3^{n+1} - 1 > 4(n+1)$ si y solo si $n \geq 2$. Por tanto no hay números de $n + 2$, $n \geq 2$, cifras en base 3 que sean 2–narcisistas. Los números 2–narcisistas serán de una, dos o tres cifras. En este caso se estudia cada uno de los posibles candidatos. De una cifra el $0_{(3}$

y el $1_{(3}$ son números 2–narcisistas triviales. De dos cifras: $10_{(3}$, $11_{(3}$, $20_{(3}$, $21_{(3}$ no son 2–narcisistas y $12_{(3}$ y $22_{(3}$ son 2–narcisistas. De tres cifras, los números del tipo $a_2a_1a_{0(3}$, $a_2 \neq 0$, para que sean narcisistas deben verificar $a_2^2+a_1^2+a_0^2 \geq 100_{(3}$, por lo que las tres cifras han de ser iguales a 2, luego el único posible número 2–narcisista de tres cifras es $222_{(3}$; es claro que $222_{(3}$ no es 2–narcisista. □

Lema 1.9. *El único número 3–narcisista no trivial en base 3 es* $122_{(3}$.

Demostración. Vamos a estudiar los números 3–narcisistas. Si

$$a_n \dots a_1 a_{0(3} = a_n^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3 \leq 8(n+1)_{(10}.$$

Pasando a base 10 se tiene:

$$a_n 3^n + \cdots + a_1 3 + a_0 = a_n^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3 \leq 8(n+1).$$

El mayor número que se puede escribir con $n+1$ cifras en base 3 se obtiene cuando $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 2$, este número en base 10 es $2\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 3^{n+1}-1$, y se tiene $3^{n+1}-1 > 8(n+1)$ si y solo si $n \geq 2$. Por tanto no hay números de $n+2$, $n \geq 2$, cifras en base 3 que sean 3-narcisistas. Los números 3–narcisistas serán de una, dos o tres cifras. De una cifra el $0_{(3}$ y el $1_{(3}$ son trivialmente 3–narcisistas. De dos cifras: Como se tiene que verificar $10_{(3} \leq a_1^3 + a_0^3 < 100_{(3}$, el único número que verifican esta propiedad es: $20_{(3}$, pero no es 3–narcisista. De tres cifras, los números del tipo $a_2a_1a_{0(3}$, $a_2 \neq 0$, para que sean narcisistas deben verificar $100_{(3} \leq a_2^3 + a_1^3 + a_0^3 < 1000_{(3}$. Así se descartan los valores $100_{(3}$, $110_{(3}$, $200_{(3}$, $101_{(3}$, $110_{(3}$. Los restantes valores hay que estudiarlos uno a uno. Se obtiene que únicamente $122_{(3}$ es 3–narcisista. □

Lema 1.10. *Cuando estudiamos los números 4–narcisistas en base 3 se obtiene que puede haber hasta de 4 cifras. Sin embargo solamente existen dos números 4-narcisistas en base 3, los triviales.*

Lema 1.11. *Los números 5–narcisistas en base 3 son:* 0_3, $1_{(3}$, $1020_{(3}$, $1021_{(3}$, $2102_{(3}$.

Vamos a pasar ahora a estudiar de nuevo números en base 10.

Nota 1.12 (Sobre números 2-narcisistas.). Un número es 2-narcisista si coincide con la suma de los cuadrados de sus cifras. Es claro que únicamente hay dos números 2-narcisistas de una cifra, el 0 y el 1; los números 2-narcisistas triviales. En la siguiente nota veremos que no hay números 2-narcisistas de dos cifras. Veamos que no hay números 2-narcisistas de más de dos cifras. Si $\underline{a_n \dots, a_1 a_0}$ es narcisista, entonces

$$10^n \leq \underline{a_n \dots, a_1 a_0} \leq 9^2 \times (n+1)$$

En consecuencia $10^{n-2} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^2 (n+1) < n+1$. Esta desigualdad sólo se verifica si $n \leq 2$. Luego no existen números 2-narcisistas de tres o más cifras.

Nota 1.13 (Sobre números narcisistas*.). Vamos a determinar los números narcisistas* de y a dar cotas sobre su existencia.
No existen números narcisistas de dos cifras.*
Si $\underline{ab}$ es un número narcisistas*, se verifica $\underline{ab} = 10a + b = a^2 + b^2$ y $a \neq 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned} &10a + b = a^2 + b^2, \\ &10a - a^2 = b^2 - b, \\ &a(10-a) = b(b-1). \end{aligned}$$

Como $b(b-1)$es un número par, resulta que a es par, y por tanto $a = 2a'$, con $1 \leq a' \leq 4$. Se tiene:

$$\begin{aligned} 2a'(10-2a') &= b(b-1), \\ 4a'(5-a') &= b(b-1). \end{aligned}$$

Como $4 \nmid b(b-1)$ salvo si $b(b-1) = 0$, y como $a' < 5$, llegamos a que la relación no se puede verificar, y por tanto no existe ningún número narcisista* de dos cifras.
Los números narcisistas de tres cifras son: 153, 370, 371 y 407.*
Los números narcisistas de cuatro cifras son: 1634, 8208 y 9474.* El método empleado es un programa cálculo, por ejemplo en Mathematica:

```
T = 4;
For[i = 10^(T - 1), i < 10^T, If[i == Suma[IntegerDigits[i]^T], Print[i]], i++]
```

Los números narcisistas de cinco cifras son: 54748, 92727 y 93084.* El método empleado es el mismo programa anterior haciendo las modificaciones oportunas.
El único número narcisista de seis cifras es: 548834.* El método empleado es el mismo programa anterior haciendo las modificaciones oportunas.
Los números narcisistas de siete cifras son: 1741725, 4210818, 9800817 y 9926315.* El método empleado es el mismo programa anterior haciendo las modificaciones oportunas.
Los números narcisistas de ocho cifras son: 24678050, 24678051 y 88593477.* El método empleado es el mismo programa anterior haciendo las modificaciones oportunas.
Los números narcisistas de nueve cifras son: 146511208, 472335975, 534494836 y 912985153.* El método empleado es el mismo programa anterior haciendo las modificaciones oportunas.
El mayor número narcisista* conocido es: 115 132 219 018 763 992 565 095 597 973 971 522 401, que tiene 39 cifras.
Si n es un número de 61 cifras, al sumar las potencias 61 de sus cifras, resulta un número menor que $9^{61} \times 61$. Como resulta que este número tiene 60 cifras, se obtiene que ningún número de 61 cifras es narcisista*.

$$9^{61} \times 61 = 986558654653022734516835726400773166812580119518280257414149.$$

Este resultado es cierto para números de más de 61 cifras, ya que $9^{62} \times 62$ se obtiene de $9^{61} \times 61$ multiplicando por

$$\frac{9^{62} \times 62}{9^{61} \times 61} = \frac{9 \times 61}{62} = 9 \times 6261 < 10,$$

y por tanto $9^{62} \times 62$ tendrá como máximo 61 cifras. En particular este resultado se puede extender para probar que no existen números narcisistas* de 61 cifras o más. Como consecuencia el número de números narcisistas* es finito.

2. Números amigos

Dos números naturales x e y se llaman **amigos** si la suma de los divisores propios de x es igual a y y viceversa.
El primer ejemplo de pareja de números de números amigos lo encontramos ya en Pitágoras[1], de quien se cuenta que una vez le preguntaron "*¿Qué es un amigo?*", y contestó: "*Un amigo es otro yo. Como lo son los números 220 y 284*".
Si llamamos

$$\mathrm{div}(x) = \{\text{divisores de } x\} \setminus \{x\},$$

entonces x e y es una pareja de números amigos si $y = \sum \mathrm{div}(x)$ y $x = \sum \mathrm{div}(y)$.
Observa que $\mathrm{div}(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ y se tiene

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Además $\mathrm{div}(284) = \{1, 2, 4, 71, 142\}$ y se tiene

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

No fue hasta 1636 en que Pierre de Fermat[2]. anuncia una nueva pareja de números amigos: 17 296 y 18 416. Observa que en este caso los divisores respectivos son:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(17296) = \{ \quad & 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, \\ & 2162, 4324, 8648\}, \\ \mathrm{div}(18416) = \{ \quad & 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208\}.\end{aligned}$$

Nota 2.1. Más adelante veremos que en realidad otros matemáticos árabes en la Edad Media habían descubierto otras parejas de números amigos, pero sus descubrimientos habían quedado, temporalmente, en el olvido.

El siguiente matemático del que se tiene referencia en trabajar con números amigos fue René Descartes[3], quien en 1638 publica un tercer par. En este caso 9 363 584 y 9 437 056.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(9\,363\,584) = \{ \quad & 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 191, 382, 383, 764, 766, 1\,528, \\ & 1\,532, 3\,056, 3\,064, 6\,112, 6\,128, 12\,224, 12\,256, 24\,448, 24\,512, \\ & 49\,024, 73\,153, 146\,306, 292\,612, 585\,224, 1\,170\,448, 2\,340\,896, \\ & 4\,681\,792\}, \\ \mathrm{div}(9\,437\,056) = \{ \quad & 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 73\,727, 147\,454, 294\,908, 589\,816, \\ & 1\,179\,632, 2\,359\,264, 4\,718\,528\}\end{aligned}$$

Nota 2.2. Para determinar estos divisores ya hay que hacer uso de máquinas de cálculo; no es fácil obtener estas listas con lápiz y papel.

Finalmente Leonard Euler[4] en 1747 da una lista de treinta parejas de números amigos y posteriormente eleva este número hasta 64 parejas. Como anécdota señalar que se equivocó en una de las parejas. Otra anécdota relativa a las parejas de números amigos es la siguiente: *Los matemáticos se habían dejado una pareja de números amigos, 1 184 y 1 210, sin mencionar; fue un joven italiano de dieciséis años, Nicolo Paganini, quien anunció este resultado en 1866.*

[1] Pitágoras de Samos (569 AC-475 AC). Filósofo, astrónomo y matemático griego.
[2] Pierre de Fermat (1601–1665). Abogado y Matemático aficionado francés, trabajó en Teoría de Números, Geometría y Probabilidad.
[3] René Descartes (1596-1650). Filósofo frances que trabajo en la aplicación del Álgebra a la Geometría.
[4] Leonard Euler (1707-1783). Matemático suizo que trabajó en todos los campos de la Matemática.

Actividad 2.3. *Prueba que los números 1 184 y 1 210 son números amigos.*

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(1184) &= \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592\},\\ \mathrm{div}(1210) &= \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605\}.\end{aligned}$$

En la actualidad se conocen más de once millones de parejas de números amigos.
De las parejas de números amigos se tienen los siguientes hechos, que aún nadie ha probado que sean siempre ciertos:

Conjeturas 2.4. *(1) En cada par de números amigos los dos números tienen la misma paridad.*

(2) Todos los números amigos impares son múltiplos de 3.

(3) Todos los números amigos pares verifican que la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

2.1. Cálculo de parejas de números amigos

El primer procedimiento para construir parejas de números amigos se debe a Thabit ibn Qurra[5]; este método fue después generalizado por L. Euler para obtener sus listas de parejas de números amigos. El procedimiento es el siguiente:
Si $n > 1$ es un entero tal que

$$p = 3 \times 2^{n-1} - 1, \qquad q = 3 \times 2^n - 1, \qquad r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$$

son números primos, entonces se tiene que $2^n pq$ y $2^n r$ forman una pareja de números amigos. Para $n = 2$, 4 y 7 se tienen parejas de números amigos:

n	p	q	r	$2^n pq$	$2^n r$
2	5	11	71	220	284
4	23	47	1151	17 296	18 416
7	191	383	73 727	9 363 584	9 437 056

La pregunta es si este método proporciona todas parejas de números amigos; la respuesta es no ya que las parejas 1 184–1 210 y 6 232–6 368 no se obtienen de esta forma.

Problema 2.5. *¿Para qué otros valores de n se obtiene una pareja de números amigos? (Ojo, n tiene que ser $n >$20 000).*

Para hacer estos cálculos vamos a utilizar programas de cálculo.
Durante la Edad Media otros matemáticos también estudiaron parejas de números amigos. Citamos algunos de ellos: Al Madshritti (–,1007), Abu Mansur Tahir al-Baghdadi (980–1037), Al-Farisi (1260–1320), Muhammad Baqir Yazdi (hacia 1500) que menciona la pareja 9 363 584–9 437 056.

2.2. Cadenas sociales de números

Una sucesión de tres o más números enteros $x_1, \ldots, x_t$, tales que para cada índice i se tiene que la suma de los divisores propios de x_i es x_{i+1}, para $i = 1, \ldots, t-1$ y la suma de los divisores propios de x_t es x_1 se llama una **cadena de social de números**.
Observa que si $t = 2$, entonces tenemos una pareja de números amigos.
En 1918 P. Poulet publica la primera cadena social de números:

$$12\,496, 14\,288, 15\,472, 14\,536 \text{ y } 14\,264.$$

Se conoce otra cadena de números sociales que comienza en 14 316 y que contiene 28 elementos.

$$\begin{gathered}14\,316, 19\,116, 31\,704, 47\,616, 83\,328, 177\,792, 295\,488, 629\,072, 589\,786,\\ 294\,896, 358\,336, 418\,904, 366\,556, 274\,924, 275\,444, 243\,760, 376\,736, 381\,028,\\ 285\,778, 152\,990, 122\,410, 97\,946, 48\,976, 45\,946, 22\,976, 22\,744, 19\,916, 17\,716.\end{gathered}$$

Sin embargo no se conoce ninguna cadena social de longitud tres, para las cuales reservamos el nombre de **clan de números**.

Actividad 2.6. *Comprueba que la cadena* $12\,496, 14\,288, 15\,472, 14\,536$ *y* $14\,264$ *es una cadena social de números.*

[5]Thabit ibn Qurra (826–901). Matemático árabe, nació en Turquía y murió en Bagdad (Irán), que trabajó en Teoría de Números y Astronomía

3. Números perfectos

Los **números perfectos** son números enteros positivos x tales que la pareja x, x es una pareja de números amigos, esto es, x es la suma de sus divisores primos.

Actividad 3.1. *Comprueba que 6 es un número perfecto y que 28 también lo es.*

Los números perfectos ya eran conocidos por Euclides, quien en el Libro IX de sus Elementos establece:

Teorema 3.2 (Teorema de Euclides)**.** *Si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.*

Nota 3.3. En realidad Euclides dice lo siguiente: suma 1, 2, 4, 8, ..., de forma que cuando obtengas un número primo te basta multiplicar por la última potencia de 2 para tener un número perfecto.

Comprobemos algunos casos:

$$(1+2) \times 2 = 6,$$

$$(1+2+2^2) \times 2^2 = 28$$

Nota 3.4. Hablar en este momento de la suma $1 + a + a^2 + \cdots + a^t$.

Prueba del Teorema de Euclides. En efecto, tenemos que determinar los divisores de $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Estos son de la forma $2^t(2^{n+1} - 1)^s$, siendo $0 \leq t < n - 1$ y $0 \leq s \leq 1$ y además 2^{n-1}. La suma de todos ellos es:

$$\sum_{t=0}^{n-1} 2^t + \sum_{t=0}^{n-2} 2^t(2^{n+1} - 1) = \cdots = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Observa que $2^{n+1} - 1$ toma los valores 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, etc. De estos los que son primos producen números perfectos.

n	$2^n - 1$	$2^{n-1}(2^n - 1)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128
13	8191	33550336
17	131071	8589869056
19	524287	137438691328
31	2147483647	2305843008139952128
61	2305843009213693951	2658455991569831744654692615953842176

(1)

□

Actividad 3.5. *Observa que $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ no es primo, luego $2^{10}(2^{11} - 1)$ no es un número perfecto.*

Nadie ha demostrado aún que todos los números perfectos se obtienen de esta forma, pero sí se sabe que los únicos números perfectos conocidos son todos de esta forma.

Problema 3.6. *Determinar un número perfecto que no esté en la lista anterior.*

Este problema se puede atacar por fuerza bruta; comenzando por el 6 que es el primer número perfecto y probando con todos los que le siguen hasta encontrar uno que se del tipo señalado en el Teorema de Euclides. También podemos tratar de probar que todo número perfecto par ha de ser de la forma $2^{n-1}(2^n-1)$ para cierto 2^n-1 primo (Teorema de Euler), y después estudiar el problema de los números perfectos impares.
Para este fin vamos a introducir alguna notación adicional y algunos resultados básicos.
L. Euler introduce una función numérica $\sigma(n)$ definida por:

$$\sigma(n) = \text{suma de los divisores de } n. \tag{2}$$

Observa que un número x es perfecto si $\sigma(x) = 2x$, y que para una pareja x, y de números amigos se tiene $\sigma(x) = x + y = \sigma(y)$. El uso de funciones numéricas es útil si éstas verifican propiedades buenas. En este caso tenemos:

Lema 3.7. *(1) Si n y m son primos relativos, entonces $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.*

(2) Si p es primo, entonces $\sigma(p) = p + 1$.

(3) Si n, m, p son enteros primos, entonces $\sigma(nmp) = \sigma(n)\sigma(m)\sigma(p) = (n+1)(m+1)(p+1)$.

(4) Si p es primo, entonces $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$.

(5) Si $n = p_1^{k_1}\cdots p_t^{k_t}$ es la descomposición en producto de primos distintos dos a dos, entonces $\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\cdots\sigma(p_t^{k_t}) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_t^{k_t+1}-1}{p_t-1}$.

Demostración. (3) Observa que los divisores de p^k son de la forma p^h, con $h \leq k$, luego se tiene

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

(5) Observa que los divisores de $n = p_1^{k_1}\cdots p_t^{k_t}$ son de la forma $p_1^{h_1}\cdots p_t^{h_t}$, y que todos estos se obtienen al hacer el producto

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{k_2})\cdots(1 + p_t + \cdots + p_t^{k_t}),$$

por lo que $\sigma(n)$ será exactamente este producto. □

Nota 3.8. Observa que si se utiliza la suma de los divisores propios, esta función no tiene tan buenas propiedades.

Teorema 3.9 (Teorema de Mersenne)**.** *Si 2^n-1 es un entero primo, entonces n es primo.*

Los números primos de la forma 2^n-1 se llaman **números primos de Mersenne**.

Demostración. En efecto, si $n = ab$ no es primo, procedemos como sigue:

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left((2^a)^{b-1} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

□

Ahora podemos establecer el

Teorema 3.10 (Teorema de Euler)**.** *Si $x = 2^{n-1}a$ es un número perfecto par, con a impar, entonces $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$ y $2^n - 1$ es un primo de Mersenne.*

Demostración. En efecto, si $x = 2^{n-1}a$, con a impar, es perfecto, se tiene:

$$2^n a = 2x = \sigma(2^{n-1})\sigma(a) = (2^n - 1)\sigma(a).$$

Observa que 2^n divide al producto de la derecha, y que no divide a $2^n - 1$, luego $2^n \mid \sigma(a)$, y existe b tal que $\sigma(a) = 2^n b$.
Otra vez utilizando las igualdades anteriores se tiene

$$2^n a = (2^n - 1)\sigma(a) = (2^n - 1)2^n b,$$

por lo tanto $a = (2^n - 1)b$.
Si $b \neq 1$, entonces $a = (2^n - 1)b$ tiene al menos los divisores $a, b, 1$, y entonces

$$\sigma(a) \geq a + b + 1 = (2^n - 1)b + b + 1 = 2^n b + 1 = \sigma(a) - 1,$$

lo que es una contradicción. Así pues $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Observa que $\sigma(a) = 2^n b = (2^n - 1)b + b = a + b$, entonces $\sigma(a) = a + 1$ y tenemos que a es un número primo. □

Actividad 3.11. *Vamos a comprobar que todos los números perfectos pares tienen por cifra de las unidades 6 u 8.*

Observa que el número perfecto a estudiar es $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$, con n primo. Analizamos los posibles casos.
Si $n = 2$ se tiene $x = r(2^2 - 1) = 6$, que verifica esta propiedad.
Si $n = 4a + 1$, en este caso se tiene

$$\begin{aligned} x &= 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{4a}\left(2^{4a+1} - 1\right) = (2^4)^a\left((2^4)^a 2 - 1\right) = 2 \times 16^{2a} - 16^a \\ &\equiv 2 \times 6 - 6 \equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

Si $n = 4a + 3$, en este caso se tiene

$$\begin{aligned} x &= 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{4a+2}\left(2^{4a+3} - 1\right) = 4 \times 16^a\left(8 \times 16^a - 1\right) \\ &= 2 \times 16^{2a+1} - 4 \times 16^a \equiv 2 \times 6 - 4 \times 6 \equiv -2 \times 6 \equiv -12 \equiv 8 \pmod{10}. \end{aligned}$$

3.1. Números perfectos impares

No se conoce ningún número perfecto impar, por lo que la demostración de la existencia o no de estos números es un problema abierto.
Vamos a ir eliminando posibles candidatos a ser número perfecto impar.

Actividad 3.12. *Vamos a comprobar que ningún número de la forma p^e, para p primo impar, es perfecto.*

En efecto, si se tiene $2p^e = \sigma(p^e) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^e = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$, entonces $2p^e = p^{e+1} + 1$, lo que es una contradicción.

Actividad 3.13. *Vamos a comprobar que ningún número de la forma $p^a q^b$, para p y q primos distintos, $p < q$, es perfecto.*

Este resultado es un poco complicado de probar. Comencemos por un resultado más simple que nos enseñará la técnica a emplear. Supongamos que $n = p^a q$ es perfecto con $2 < p < q$. Se tiene:

$$2p^a q = 2n = \sigma(n) = \sigma(p^a)\sigma(q),$$

$$\tfrac{\sigma(p^a)}{p^a} = \tfrac{2q}{\sigma(q)} = \tfrac{2q}{1+q}.$$

Ahora analizamos $\frac{\sigma(p^a)}{p^a}$.

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = \frac{1 + p + \cdots + p^a}{p^a} = \frac{1}{p^a} + \cdots + \frac{1}{p} + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{a+1}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{p}{p-1}.$$

Además como $2 < p < q$, se tiene $\frac{p}{p-1} \leq \frac{3}{2}$. Además de la relación

$$\frac{2q}{1+q} < \frac{p}{p-1}$$

se tiene $2q(p-1) < p(q+1)$, esto es, $2pq - 2q < pq + p$. Simplificando $pq < p + 2q$, y se tiene $p < 2 + \frac{p}{q} < 3$, lo que es una contradicción.
Podemos abordar ahora el caso general en que $n = p^a q^b$. Como éste es un número perfecto, se verifica:

$$2p^a q^b = 2n = \sigma(n) = \sigma(p^a)\sigma(q^b),$$

$$\tfrac{\sigma(p^a)}{p^a} = \tfrac{2q^b}{\sigma(q^b)}.$$

Tenemos una acotación para $\frac{\sigma(p^a)}{p^a}$, en efecto $\frac{\sigma(p^a)}{p^a} < \frac{3}{2}$. Vamos a buscar otra acotación para $\frac{2q^b}{\sigma(q^b)}$; en realidad como función de q es una función creciente. Esto podemos hacerlo estudiando ejemplo o más precisamente derivando respecto a q.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b}{\sigma(q^b)}\right) &= \frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b}{\frac{q^{b+1}-1}{q-1}}\right)\\ &= \frac{d}{dq}\left(\frac{2q^b(q-1)}{q^{b+1}-1}\right)\\ &= \frac{(b+1)2q^b-2bq^{b-1}}{q^{b+1}-1} - \frac{2q^b(q-1)(b+1)q^b}{(q^{b+1}-1)^2}\\ &= \frac{2q^b(b-bq+q(q^b-1))}{(q^{b+1}-1)^2}\end{aligned}$$

Este valor es mayor que 0 cuando $2q^b(b-bq+q(q^b-1))>0$, esto es, si $b-bq+q(q^b-1)>0$, y esto ocurre siempre, ya que $q\geq 5$. Como la derivada no se anula y es siempre positiva, la función es estrictamente creciente. El valor mínimo se alcanzará para $q=5$. En este caso se tiene

$$\frac{2q^b}{\sigma(q^b)} = \frac{2q^b(q-1)}{q^{b+1}-1} = \frac{2\times 5^b\times 4}{5^{b+1}-1} = \frac{8}{5^b-\frac{1}{5}} > \frac{8}{5} > \frac{3}{2}$$

lo que es una contradicción, pues se tendría

$$\frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{2q^b}{\sigma(q^b)} = \frac{\sigma(p^a)}{p^a} < \frac{3}{2}.$$

Nota 3.14. Las acotaciones a los resultados sobre números perfectos impares que se conocen siguen la línea de esta prueba, buscando acotaciones al número de factores primos y al tamaño de los mismos.

En este sentido podemos manipular la expresión

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\cdots\sigma(p_t^{k_t}) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_t^{k_t+1}-1}{p_t-1}.$$

del Lema (3.7) para $n=p_1^{k_1}\cdots p_t^{k_t}$. Si n es perfecto se verifica

$$2\prod_{i=1}^{t} p_i^{k_i} = \prod_{i=1}^{t}\frac{p_i^{k_i+1}-1}{p_i-1}.$$

Entonces 2 divide a uno de los factors y 4 no lo divide. Si el factor es $\frac{p^{k+1}-1}{p-1} = 1+p+\cdots+p^k$, sea $e=4a+b$; podemos escribir

$$1+p+\cdots+p^k = (1+p+p^2+p^3)(1+p^4+\cdots+p^{4(a-1)}) + p^{4a}(1+p+\cdots+p^b).$$

Como $4\mid(1+p+p^2+p^3)$, se deduce que y $2\mid(1+p+\cdots+p^b)$ y $4\nmid(1+p+\cdots+p^b)$, por lo tanto $b=1$, y además $p\equiv 1 \pmod 4$. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado,

Teorema 3.15 (Teorema de Euler)**.** *Si $n=p_1^{k_1}\cdots p_t^{k_t}$ es un entero perfecto impar, entonces existe un índice i tal que $k_i\equiv 1 \pmod 4$ y todos los demás exponentes son múltiplos de 2. Además $p_i\equiv 1 \pmod 4$.*

Demostración. Sólo nos resta probar que todos los demás exponentes son múltiplos de 2; esto es consecuencia de que en caso contrario 2 dividiría a un segundo factor del tipo $\frac{p_j^{k_j+1}-1}{p_j-1}$, y esto es imposible. $\square$

3.2. Números armónicos

Se han ideado diversos métodos para encontrar números perfectos impares o para demostrar que no existen. Veamos una de ellas que permite encontrar cotas que aseguran que no existen números perfectos impares menores que un determinado numero.
Dado un número entero positivo n, consideramos $\sigma_i(n)$ definida:

$$\sigma_i(n) = \sum_{d|n} d^i.$$

Por lo tanto $\sigma_0(n)$ es el número de divisores de n, $\sigma_1(n)$ es la suma de los divisores de n, em ambos casos incluyendo al propio n.
Al igual que la función σ definida anteriormente en (2), resulta que si n y m son enteros positivos primos relativos, entonces

$$\sigma_i(n \cdot m) = \sigma_i(n) \cdot \sigma_i(m), \quad i = 0, 1.$$

La **media armónica** de una lista de números racionales $r_1, \ldots, r_t$ es:

$$\frac{t}{\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_t}},$$

y la **media aritmética** es:

$$\frac{r_1 + \cdots + r_t}{t}$$

Para cada entero positivo n se definen dos nuevos números

$$MH(n) = \text{Media armónica de los divisores de } n = \frac{\sigma_0(n)}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}};$$
$$MA(n) = \text{Media aritmética de los divisores de } n = \frac{\sum_{d|n} d}{\sigma_0(n)}.$$

Lema 3.16. *Para cada entero positivo n se verifica $n = MH(n)MA(n)$.*

Demostración. En efecto, para cada divisor d de n existe c tal que $n = dc$, y por tanto $\frac{1}{d} = \frac{c}{n}$. Si $d_1, \ldots, d_t$ son los divisores de n, para cada d_i consideramos el c_i tal que $n = d_i c_i$, y se verifica que $c_1, \ldots, c_t$ también la lista de divisores de n. Observa que $t = \sigma_0(n)$. Tenemos

$$MH(n) = \frac{\sigma_0(n)}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}} = \frac{\sigma_0(n)}{\sum_{c|n} \frac{c}{n}} = \frac{n}{\sum_{c|n} \frac{c}{\sigma_0(n)}} = \frac{n}{MA(n)}.$$

Esto es, $n = MH(n)MA(n)$. □

En particular $MH(n)$ es también una aplicación multiplicativa, esto es, si n y m son primos relativos, entonces $MH(N \cdot m) = MH(n) \cdot MH(N)$.
Un número entero positivo n se llama **armónico**, o un **número de Ore**, si $MH(n)$ es un entero positivo.

Actividad 3.17. *Prueba que los siguientes números son números armónicos: 1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, 1638, 2970, 6200, 8128, 8190.*

Proposición 3.18. *Cada número perfecto es un número armónico.*

Demostración. Dado un número perfecto se tiene $\sigma_1(n) = 2n$, por lo tanto se tiene $MA(n) = \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)}$. Por ser n perfecto no es un cuadrado; en el caso en que n es par es claro ya que $2^{t-1}(2^t - 1)$ no es par si $t \geq 2$, y en el caso impar es consecuencia de que existe un factor primo de n de al forma q^a, siendo $a \equiv 1 \pmod{4}$ (Teorema de Euler). Es claro que si n no es un cuadrado se puede formar pares (d, c) con los divisores de n, siendo $dc = n$ y $d \neq c$; por lo tanto n tiene un número par de divisores, esto es, $\sigma_0(n)$ es par. En consecuencia $MH(n) = \frac{n}{MA(n)} = \frac{n}{\sigma_1(n)/\sigma_0(n)} = \frac{n}{2n/\sigma_0(n)} = \frac{\sigma_0(n)}{2}$, que es un número par. □

En este punto una forma de ver que no existen números perfectos impares es ver que no existen números armónicos impares mayores que 1. La conjetura de Ore afirma que no existen números armónicos impares mayores que 1, pero, hasta el presente, no se ha probado.
Para determinar un número armónico impar mayor que 1 se estudian los valores enteros de $MH(n)$
El primer resultado es:

Teorema 3.19 (Kanold:1957)**.** *Para cada entero positivo s existe solo un número finito de enteros positivos n tales que $MH(n) = s$.*

Los primeros valores conocidos son:

$MH(n)$	n		$MH(n)$	n
1	1		8	672
2	6		9	1638
3	28		10	6200
5	140		11	2870
	496		13	105664
6	270			33550336
7	8128			

Observa que no existen enteros positivos n para los que $MH(n) = 4$ ó 12.
En general se ha probado:

(1) No existen enteros positivos impares n tales que $MH(n) \leq 1200$. En consecuencia no existen números perfectos impares verificando esta propiedad.

(2) La cota obtenida para números perfectos es: *no existen números perfectos impares menores que* 10^{300}. [Brent, Cohen, te Riele, 1991].

(3) No existen enteros positivos libres de cuadrados mayores que 6 que sean armónicos. [O. Ore, On the averages of the divisors of a number, Amer. Math. Monthly 55 (1948), 615-619]

(4) No existen enteros positivos congruentes con 3 módulo 4 que sean armónicos. [M. Garcia, On numbers with integral harmonic mean, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 89-96].

(5) Una referencia sobre números perfectos impares aparece en.

    `http://www.oddperfect.org/`

4. Actividades

Ya hemos visto un tipo de números y algunas de sus propiedades. Ahora surgen numerosas preguntas que podemos tratar de contestar. En general es necesario disponer de un sistema de computación para comprobar fácilmente las tesis, hacer experimentos y poder sugerir hipótesis sobre la aritmética de los números; pero es necesario previamente crear un clima de participación y discusión numerosas preguntas. Algunos de los comentarios que siguen corresponden a problemas que están aún abiertos.

(1) Para cada número hay que determinar un algoritmo que sea rápido para realizar los cálculos de la suma de sus divisores u otra técnica que se vaya a utilizar.

(2) ¿Qué pasa cuando se calcula la suma de los divisores y se vuelve a repetir el proceso? Estudiar el comportamiento de estas sucesiones. ¿Son crecientes?, son decrecientes?, ¿se estabilizan?, ¿son periódicas?

(3) Cuando n es primo se tiene que la suma de los divisores propios es 1. Además esto caracteriza a los números primos.

(4) Cuando $n = 1$ la suma de los divisores propios es 0.

(5) Se llega siempre al final a 0 salvo los casos en que se tenga un ciclo, que puede ser de longitud 1 (números perfectos), de longitud 2 (números amigos), de longitud 3 (coronas), o de longitud mayor (cadenas sociales). Dar métodos de cálculo para estos ejemplos (ejemplos de programación).

(6) Al hacer reiteradamente las sumas de los divisores propios, ¿debe siempre disminuir el valor si no se está en un ciclo? Estudiar el ejemplo de 30.

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{div}(30) & = \{1,2,3,5,6,10,15\}, & 42 \\
\operatorname{div}(42) & = \{1,2,3,6,7,14,21\}, & 54 \\
\operatorname{div}(54) & = \{1,2,3,6,9,18,27\}, & 66 \\
\operatorname{div}(66) & = \{1,2,3,6,11,22,33\}, & 78 \\
\operatorname{div}(78) & = \{1,2,3,6,13,26,39\}, & 90 \\
\operatorname{div}(90) & = \{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45\}, & 144 \\
\operatorname{div}(144) & = \{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72\}, & 259 \\
\operatorname{div}(259) & = \{1,7,37\}, & 45 \\
\operatorname{div}(45) & = \{1,3,5,9,15\}, & 33 \\
\operatorname{div}(33) & = \{1,3,11\}, & 15 \\
\operatorname{div}(15) & = \{1,3,5,\}, & 9 \\
\operatorname{div}(9) & = \{1,3\}, & 4 \\
\operatorname{div}(4) & = \{1,2\}, & 3 \\
\operatorname{div}(3) & = \{1\}, & 1 \\
\operatorname{div}(1) & = \varnothing. & 0
\end{array}$$

(7) ¿Existen pares de números amigos en los que un número sea par y el otro sea impar?

(8) En todos los pares conocidos de números amigos se observa que los dos números tienen al menos un factor común. ¿Hay parejas de números amigos con los dos números primos relativos? (Según los datos en caso de existir el producto de los dos números debería ser mayor que 10^{67}.)

(9) Encuentra una pareja de números amigos impares.

(10) Primeras parejas de números amigos:

220	, 284,	1184	, 1210,	2620	, 2924,
5020	, 5564,	6232	, 6368,	10744	, 10856,
12285	, 14595,	17296	, 18416,	63020	, 76084,
66928	, 66992,	67095	, 71145,	69615	, 87633,
79750	, 88730,	100485	, 124155,	122265	, 139815,
122368	, 123152,	141664	, 153176,	142310	, 168730.

(11) Los números primos de Mersenne fueron introducidos en 1644 por el fraile franciscano Marin Mersenne, amigo de Pierre de Fermat. Estos son de la forma $2^n - 1$, y como hemos visto para que $2^n - 1$ sea primo es necesario, pero no suficiente que n sea primo. Por ejemplo $2047 = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$ no es primo.

(12) Estudiar otros números primos de Mersenne. En la actualidad se conocen 44 primos de Mersenne, siendo el mayor de ellos $2^{32582657} - 1$. Por lo tanto se conocen exactamente 44 números perfectos. Ver cuáles on los primos de Mersenne.

(13) ¿Que es un **primo de Fermat**? ($2^{2^t} + 1$.) Hablar de los polígonos construibles con regla y compás. Determinar los primeros números primos de Fermat.

(14) Hasta septiembre de 2007 se conocen 44 números perfectos pares; estos son, además de los que

aparecen en la tabla (1):

n	Número de cifras de $2^{n-1}(2^n-1)$
89	54
107	65
127	77
521	314
607	366
1279	770
2203	1327
2281	1373
3217	1937
4253	2561
4423	2663
9689	5834
9941	5985
11213	6751
19937	12003
21701	13066
23209	13973
44497	26790
86243	51924
110503	66530
132049	79502
216091	130100
756839	455663
859433	517430
1257787	757263
1398269	841842
2976221	1791864
3021377	1819050
6972593	4197919
13466917	8107892
20996011	12640858
24036583	14471465
25964951	15632458
30402457	18304103
32582657	19616714

Pascual Jara. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada
Salvador Villegas. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada