NOTAS DEL CURSO

MATEMÁTICA DISCRETA

(Ejercicios y problemas)

Pascual Jara Martínez

Departamento de Álgebra. Universidad de Granada

Granada, 2005

Primera redacción: Agosto 2005–Enero 2006

Revisión: Octubre 2006

Introducción

Índice general

Capítulo I

Nociones básicas

1. Introducción intuitiva a la teoría de conjuntos

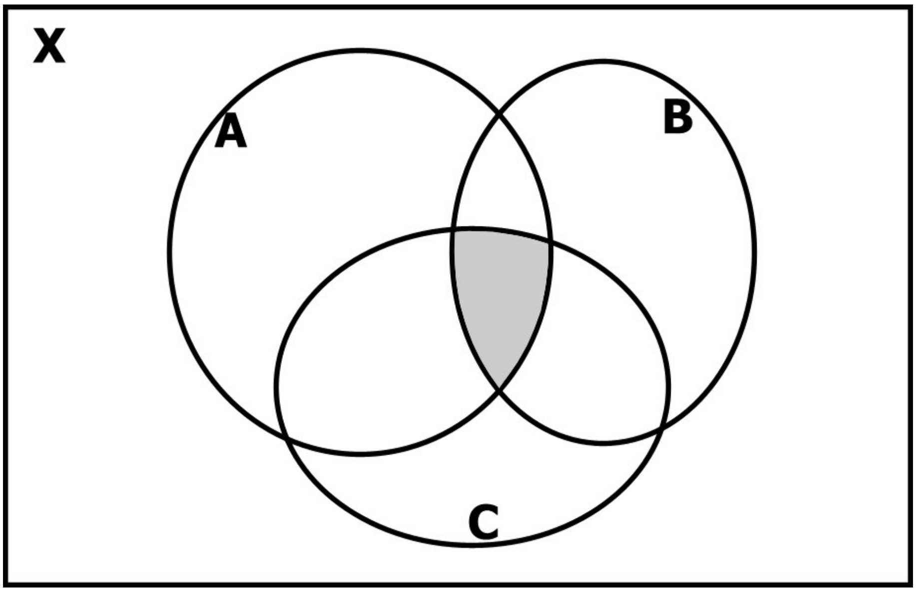
Ejercicio. 1.1.
Preparación para probar la fórmula del binomio de Newton:
Se define el número combinatorio $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$, *para* $1 \leq i \leq n$ *y* $\binom{n}{0} = 1$.
Probar que se verifica la igualdad siguiente:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Ejercicio. 1.2.
¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Ejercicio. 1.3.
Dada la figura siguiente:

describir mediante una fórmula, cada una de las regiones del dibujo. Por ejemplo la parte coloreada es $A \cap B \cap C$.



2. Álgebra de proposiciones

Ejercicio. 2.1.
Probar que las proposiciones $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ *y* $(\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ *son equivalentes, y que como consecuencia para tres subconjuntos* X_1, X_2 *y* X_3 *de un conjunto dado se tiene la igualdad:* $(X_1 \cap X_2) \cup X_3 = (X_1 \cup X_3) \cap (X_2 \cup X_3)$.

Ejercicio. 2.2.
Probar que para dos subconjuntos X_1 *y* X_2 *de un conjunto dado* X *se verifica:*

$$(X_1 \cap X_2) \cup X_1 = X_1.$$

Ejercicio. 2.3.
Probar que para dos subconjuntos X_1 *y* X_2 *de un conjunto dado* X *se verifica:*

$$(X_1 \cup X_2) \cap X_1 = X_1.$$

Ejercicio. 2.4.
Si A, B y C son proposiciones, ¿son equivalentes las siguientes proposiciones?:

(1) $A \Rightarrow B$ *y* $B \Rightarrow A$,

(2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ *y* $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$,

(3) $\neg(A \Rightarrow B)$ *y* $B \Rightarrow A$,

(4) $\neq A \Rightarrow \neq B$ *y* $B \Rightarrow A$,

(5) $\neq (A \Rightarrow B)$ *y* $\neq A \Rightarrow \neq B$.

Ejercicio. 2.5.
Si A, B y C son proposiciones, ¿son tautologías las siguientes proposiciones?:

(1) $A \wedge B \Rightarrow A \vee C$,

(2) $A \vee B \Rightarrow A \wedge C$.

3. Aplicaciones

Ejercicio. 3.1.
Sean X e Y conjuntos y X_1, X_2 subconjuntos del conjunto X. Demostrar que se verifica

$$X_1 \times Y \cup X_2 \times Y = (X_1 \cup X_2) \times Y$$
$$X_1 \times Y \cap X_2 \times Y = (X_1 \cap X_2) \times Y$$

Nota: hacer previamente una representación gráfica.

Ejercicio. 3.2.
Sean X e Y dos conjuntos y X', Y' subconjuntos de X e Y respectivamente. Demostrar que se verifica $\overline{X' \times Y'} = (\overline{X'} \times Y) \cup (X \times \overline{Y'})$

Nota: hacer previamente una representación gráfica.

Ejercicio. 3.3.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y sean $A, B \subseteq X$ subconjuntos de X.
(1). Probar que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(2). ¿Qué relación existe entre $f(A \cap B)$ y $f(A) \cap f(B)$?

Ejercicio. 3.4.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación y sean $C, D \subseteq Y$ subconjuntos de Y.
(1). Probar que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(2). ¿Qué relación existe entre $f^{-1}(C \cap D)$ y $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$?

Ejercicio. 3.5.
Observar que al decir que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tiene una inversa hemos dicho que existe una aplicación $g : Y \longrightarrow X$ verificando $fg = 1_Y$ y $gf = 1_X$.

No basta con solo una de las igualdades, ya que dada la aplicación $f : \{1, 2\} \longrightarrow \{a\}$ existe una aplicación $g : \{a\} \longrightarrow \{1, 2\}$ verificando $fg = 1_{\{a\}}$, pero no es biyectiva. En efecto, es fácil ver que no es una aplicación inyectiva.

4. Relaciones de equivalencia y de orden

Ejercicio. 4.1.
Se considera el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y la relación aRb si* $\lfloor \log(a) \rfloor = \lfloor \log(b) \rfloor$.

(1) *Demuestra que R es una relación de equivalencia en* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(2) *Describe el conjunto cociente.*

Ejercicio. 4.2.
Se considera el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y la relación aRb si* $\lfloor \log_2(a) \rfloor = \lfloor \log_2(b) \rfloor$.

(1) *Demuestra que R es una relación de equivalencia en* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(2) *Describe el conjunto cociente.*

Ejercicio. 4.3.
Se considera el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y la relación aRb si* $\lfloor \log(a) \rfloor \leq \lfloor \log(b) \rfloor$. *Demuestra que R no es una relación de orden al no verifica la propiedad antisimétrica.*

Ejercicio. 4.4.
Dada una relación R en un conjunto X decimos que R verifica la ***propiedad circular*** *si*

$$\text{si } aRb \text{ y } bRc, \text{ entonces } cRa, \text{ para cada } a, b, c \in X.$$

Demuestra que R es una relación de equivalencia en X si y solo si R verifica las propiedades reflexiva y circular.

Ejercicio. 4.5.
Dado un conjunto X y un subconjunto $A \subseteq X$, *se define una relación en* $\mathcal{P}(X)$ *mediante:*

$$BRC \text{ si } B \cap A = C \cap A, \text{ para cada } B, C \in \mathcal{P}(X).$$

(1) *Demuestra que R es una relación de equivalencia en* $\mathcal{P}(X)$;

(2) *Demuestra que existe una biyección entre* $\mathcal{P}(X)/R$ *y* $\mathcal{P}(A)$.

Ejercicio. 4.6.
En el conjunto $\mathbb{Z}$ *se define la relación*

$$aRb \text{ si } a^2 - b^2 = a - b, \text{ para cada } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(1) Demuestra que R es una relación de equivalencia,

(2) Determina la clase de equivalencia de cada elemento $a \in \mathbb{Z}$,

(3) Describe el conjunto cociente.

Ejercicio. 4.7.
Dado un conjunto X y dos relaciones R y S en X, se define una nueva relación en X mediante:

$$a(R \circ S)b \text{ si existe } x \in X \text{ tal que } aRx \text{ y } xSb.$$

(1) Demuestra que una relación R verifica la propiedad transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$,

(2) Demuestra que si R verifica la propiedad reflexiva, entonces $R \subseteq R \circ R$,

Ejercicio. 4.8.
Dado un conjunto X y dos relaciones de equivalencia R y S en X, demuestra que $R \circ S$ es de equivalencia si y solo si $R \circ S = S \circ R$.

Ejercicio. 4.9.
Dado un conjunto X y dos relaciones de equivalencia R y S en X, demuestra que $R \cup S$ es de equivalencia si y solo si $R \circ S \subseteq R \cup S$ y $S \circ R \subseteq R \cup S$.

5. Cuantificadores

Ejercicio. 5.1.
Sea $X = \{1, a, z, 2\}$. Determinar el conjunto de partes de X.

Ejercicio. 5.2.
Dado un conjunto X y subconjuntos A, B, $C \subseteq X$, demuestra que se verifican las siguientes propiedades:

(1) *Si $A \triangle B = C$, entonces $A \triangle C = B$.*

(2) *$A \cup B = B \cup C$ si y solo si $A \triangle B \subseteq C$.*

(3) *Si $\left.\begin{matrix} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{matrix}\right\}$, entonces $B = C$.*

6. Métodos de demostración

Ejercicio. 6.1.
Demuestra que para cada número primo p *el número real* $\sqrt{p}$ *no es un número racional.*

Ejercicio. 6.2.
Demuestra que para cada par de números primos, distintos, p *y* q*, el número real* $\sqrt{pq}$ *no es un número racional.*

Ejercicio. 6.3.
Se tiene una lámina metálica cuadrada de 70 cm. de lado y se golpea 50 veces con una martillo. Demuestra que al menos dos de los golpes deben estar a una distancia de 15 cm.

Capítulo II

Números naturales y números enteros

7. Números naturales

Ejercicio. 7.1.
Determinar el número de soluciones en $\mathbb{N}$ de la siguiente ecuación

$$X + 2Y = n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio. 7.2.
Probar que para $n \geq 1$ se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ejercicio. 7.3.
Probar que para $n \geq 3$ se verifica $n^2 > 2n$.

Ejercicio. 7.4.
Probar que para $n \geq 6$ se verifica $n! > n^3$.

Ejercicio. 7.5.
Probar que para $n \geq 2$ se verifica:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Ejercicio. 7.6.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio. 7.7.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio. 7.8.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{n}{2n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Ejercicio. 7.9.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$7^n-1 \textit{ es un múltiplo de 6}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Ejercicio. 7.10.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$7^{2n}+16n-1 \textit{ es un múltiplo de 64}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio. 7.11.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$a^{2n}-b^{2n} \textit{ es divisible por } a+b \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio. 7.12.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$\frac{1}{2n}\le\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} \textit{ para } n\ge 1.$$

Ejercicio. 7.13.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \textit{ para } n\ge 2.$$

Ejercicio. 7.14.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$2^n\ge 2n+1 \textit{ para } n\ge 3.$$

Ejercicio. 7.15.
Usa el principio de inducción para probar la siguiente afirmación:

$$2^n \geq n^2 \text{ para } n \geq 4.$$

Ejercicio. 7.16.
Encuentra una definición recursiva verificada por cada una de las siguientes secuencias de números:

(1) $8, 15, 22, 29, 36, 43, \ldots$

(2) $6, 12, 24, 48, 96, \ldots$

(3) $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

Ejercicio. 7.17.
Demostrar que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Ejercicio. 7.18.
Demostrar que:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Ejercicio. 7.19.
Demostrar que:

$$4\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) + 8\left(\frac{2}{3 \cdot 4}\right) + \cdots + 2^{n+1}\left(\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2.$$

Ejercicio. 7.20.
Demostrar que para número natural $n \geq 1$ el número $11^n - 1$ es un múltiplo de 5.

Ejercicio. 7.21.
Demostrar que para número natural $n \geq 0$ el número $3^n + 7^n - 2$ es un múltiplo de 8.

Ejercicio. 7.22.
Dar una fórmula simple para la siguiente expresión:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ejercicio. 7.23.
Sea x un número real, $x > -1$. Demostrar que se verifica $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo número natural n.

8. Sistemas de numeración

Ejercicio. 8.1.
Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica la siguiente igualdad:

$$3 \times 4 = 22.$$

Ejercicio. 8.2.
Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica la siguiente igualdad:

$$41 \times 14 = 1224.$$

Ejercicio. 8.3.
Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica la siguiente igualdad:

$$52 \times 25 = 1693.$$

Ejercicio. 8.4.
Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica la siguiente igualdad:

$$25 \times 13 = 51.$$

Ejercicio. 8.5.
Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica la siguiente igualdad:

$$13^4 = 14641.$$

Ejercicio. 8.6.
Da la expresión en base 8 *de los naturales que en base* 2 *se escriben:*

(1) $10110110001001101011$1,

(2) 10001000000100110,

(3) 1011101111011111.

Ejercicio. 8.7.
Demuestra que para $B \geq 3$, *los números* $(B-1)^2$ *y* $2(B-1)$ *se escriben en base* B *como* ab *y* ba *respectivamente.*

Ejercicio. 8.8.
Demuestra que un número escrito en base 10 es par si y sólo si su última cifra es par.

Ejercicio. 8.9.
Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Ejercicio. 8.10.
Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

Ejercicio. 8.11.
Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.

Ejercicio. 8.12.
Demuestra que un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11.

Ejercicio. 8.13.
Demuestra que un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.

Ejercicio. 8.14.
Dar un criterio para determinar cuando un número entero positivo escrito en base 10 es múltiplo de 7.

Ejercicio. 8.15.
Dar un criterio para determinar cuando un número entero positivo escrito en base 10 es múltiplo de 13.

9. Números enteros

Ejercicio. 9.1.
Calcular el mcd y la Identidad de Bezout de 92 *y* 108*.*

Con la definición de mcd y mcm dada por la relación de división, resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio. 9.2.
Probar que dados dos enteros primos relativos no nulos a y b se verifica $(a+b, ab) = 1 = (a-b, ab)$.

Ejercicio. 9.3.
Probar que si a, b, c son enteros y a es positivo, entonces $(ab, ac) = a(b, c)$.

Ejercicio. 9.4.
Probar que si a, b, c son enteros tales que $(a, c) = 1$ y $(b, c) = 1$, entonces $(ab, c) = 1$.

Ejercicio. 9.5.
Sean a, b enteros y $d = (a, b)$, probar que si $x \in \mathbb{Z}$ verifica $a \mid x$ y $b \mid x$, entonces $ab \mid dx$.

Ejercicio. 9.6.
Sean a, b enteros no nulos y $d = (a, b)$, probar que a/d y b/d son primos relativos.

Ejercicio. 9.7.
Sean a, b, c enteros, probar que $(a, (b, c)) = ((a, b), c)$.

Ejercicio. 9.8.
Probar que para todo número entero $n \in \mathbb{Z}$ se verifica: $n^2 \geq n$.
En particular $n^2 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio. 9.9.
Probar que para cualesquiera n, $m \in \mathbb{Z}$ se verifica $n^2 + m^2 \geq 2nm$.

Ejercicio. 9.10.
Probar que para cada entero $n \geq 1$ se verifica:

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ejercicio. 9.11.
Calcular el mcd d de 24230 *y* 586*, y encontrar números enteros a y b tales que $d = 24230a + 586b$.*

Ejercicio. 9.12.
Hasta ahora hemos realizado la división por números enteros positivos y hemos estudiado el mcd y el mcm para números enteros positivos, hacer las definiciones necesarias para extender la teoría a todos los números enteros (no nulos).

Ejercicio. 9.13.
Aplicar el Algoritmo de la división a los enteros 48 *y* -7.

Ejercicio. 9.14.
Probar que para $n \geq 8$ *se* n *se puede escribir como* $n = 3k + 5h$ *para* k, $h \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio. 9.15.
Se p *y* q *son enteros primos positivos mayores que 5, entonces* $p + q$ *ó* $p - q$ *es un múltiplo de 3.*

Ejercicio. 9.16.
Se p *y* q *son enteros primos positivos mayores que 5, entonces* $p^2 - q^2$ *es un múltiplo de 24.*

Ejercicio. 9.17.
Probar que si $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$, *no necesariamente se verifica* $a \equiv b \pmod{n}$

Ejercicio. 9.18.
Probar que si $a \equiv b \pmod{nm}$, *entonces* $a \equiv b \pmod{n}$ *y* $a \equiv b \pmod{m}$.
Observar que el recíproco no es cierto, en general, si n *y* m *no son primos relativos*

Ejercicio. 9.19.
Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ *tales que* $\mathrm{m.c.d.}\{a, b\} = 1$. *Demuestra que:*

(1) $\mathrm{m.c.d.}\{a + b, ab\} = 1$,

(2) $\mathrm{m.c.d.}\{a - b, ab\} = 1$.

Ejercicio. 9.20.
Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. *Demuestra que* $\mathrm{m.c.d.}\{\mathrm{m.c.d.}\{a, b\}, c\} = \mathrm{m.c.d.}\{a, \mathrm{m.c.d.}\{b, c\}\}$.

Ejercicio. 9.21.
Prueba que dado un número entero cualquiera m *se verifica una de las siguientes posibilidades:*

(1) $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$,

(2) $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$,

(3) $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$.

Ejercicio. 9.22.
Prueba que si x *es un número entero e impar no divisible por* 3 *entonces* $x^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Ejercicio. 9.23.
Resuelve la siguiente congruencia:

$$3x \equiv 2 \pmod{5}.$$

Ejercicio. 9.24.
Resuelve la siguiente congruencia:

$$7x \equiv 4 \pmod{10}.$$

Ejercicio. 9.25.
Resuelve la siguiente congruencia:

$$6x \equiv 3 \pmod{4}.$$

Ejercicio. 9.26.
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv 3 \pmod{9} \\ 3x \equiv 3 \pmod{5} \end{array}\right\}$$

Ejercicio. 9.27.
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{array}\right\}$$

Ejercicio. 9.28.
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{array}\right\}$$

Ejercicio. 9.29.
Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que han cultivado en común. Fueron a mercados diferentes en los que se usaban medidas de peso diferentes: en un lugar era de 7 kilos, en otro de 15 kilos y en el último de 19 kilos. Cada uno vendió todo lo que pudo en medidas enteras en sus respectivos mercados y a la vuelta al primer granjero le sobraban 6 kilos, al segundo 11 y al tercero 14. ¿Cuánto arroz habían cultivado?

Ejercicio. 9.30.
Calcula el resto de dividir 4225^{1000} *entre* 7.

Ejercicio. 9.31.
Calcula el número de divisores positivos de 120.

Ejercicio. 9.32.
Demuestra que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional. Como aplicación, demuestra que $\sqrt{75}$ es irracional.

Ejercicio. 9.33.
Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ *de la ecuación*

$$2X + 3Y = 7.$$

Ejercicio. 9.34.
Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ *de la ecuación*

$$6X + 10Y = 16.$$

Ejercicio. 9.35.
Demuestra que el conjunto de los números primos es infinito.

Ejercicio. 9.36.
Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

Ejercicio. 9.37.
Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.

Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

Ejercicio. 9.38.
Resuelve la ecuación en congruencias

$$x^2 - 3x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

Ejercicio. 9.39.
Resuelve el sistema de ecuaciones en congruencias

$$\left.\begin{array}{r} 5x - 7y \equiv 9 \pmod{12} \\ 2x + 3y \equiv 10 \pmod{12} \end{array}\right\}$$

Ejercicio. 9.40.
Calcula todas las soluciones en $\mathbb{Z}$ *de la ecuación*

$$35x + 45y + 55z = 60.$$

Ejercicio. 9.41.
Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ *de la ecuación*

$$6x + 9y + 15z = 7.$$

Ejercicio. 9.42.
Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ *de la ecuación*

$$6x + 10y + 15z = 7.$$

Capítulo III

El anillo de polinomios

10. Introducción

Ejercicio. 10.1.
Demuestra que los ideales del anillo $\mathbb{Z}$ son todos del tipo $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$, para $n \in \mathbb{Z}$ entero no negativo.

Ejercicio. 10.2.
Demuestre que $\mathbb{Z}$ es el único subanillo de $\mathbb{Z}$.

Ejercicio. 10.3.
Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, el anillo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene exactamente n elementos, cada uno de los cuales tiene un único representante x verificando $0 \leq x < n$.

Ejercicio. 10.4.
En el anillo $\mathbb{Z}_8$ determina los elementos que tienen inverso, comprueba que son aquellos que tienen un representante primo relativo con 8, y los que son divisores de cero, comprueba que son aquellos que no son primos relativos con 8.

Utilizando la identidad de Bezout para números enteros generaliza este resultado al anillo $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

11. Anillos de polinomios

Ejercicio. 11.1.
Tomamos $A = \mathbb{Z}_6$ y $p(X) = X^2 + 5X$, tenemos $p(X) = (X+3)(X+2) = X(X+5)$, entonces raíces de $p(X)$ son 0, 1, 2 y 3, sin embargo $X(X+5)(X+3)(X+2)$ no divide a $p(X)$.

Ejercicio. 11.2.
Se considera el polinomio $p(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Si llamamos $Y = X - 1$, escribir el polinomio $p(X)$ en función de la indeterminada Y.

Ejercicio. 11.3.
Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio de integridad y que $1 + \sqrt{2}$ es una unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejercicio. 11.4.
Determina los divisores de cero y las unidades de $\mathbb{Z}_{12}$.

Ejercicio. 11.5.
Demuestra que todo dominio de integridad con un número finito de elementos es un cuerpo.

Ejercicio. 11.6.
Calcula $(2X^3 + 3X^2 + 1)(X^2 + 2X + 3)$ en $\mathbb{Z}_6[X]$.

Ejercicio. 11.7.
Calcula el cociente y el resto de dividir $2X^4 + 3X^3 + X^2 + 6X + 1$ entre $3X^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_7[X]$.

Ejercicio. 11.8.
Calcula un máximo común divisor de $a(X)$ y $b(X)$ en los siguientes casos:

(1) $a(X) = X^4 + 2X^2 + 1, b(X) = X^4 - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$.

(2) $a(X) = X^4 + 2X^2 + 1, b(X) = X^2 + 2$ en $\mathbb{Z}_3[X]$.

Ejercicio. 11.9.
Demuestra que que la ecuación

$$(X^4 + 2X^2 + 1)\mathcal{X} + (X^4 - 1)\mathcal{Y} = 3X^3 + 3X$$

tiene solución en $\mathbb{Q}[X]$, y halla una solución.

12. Raíces de polinomios

Ejercicio. 12.1.
Considerar el polinomio $p(X) = X^5 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$, probar que tiene una raíz de multiplicidad cinco pero que su derivada es igual a cero. s claro que $p(X) = (X + 1)^5$, luego -1 es una raíz de multiplicidad cinco de $p(X)$. Sin embargo $Dp(X) = 0$, y el Teorema no es aplicable.

Ejercicio. 12.2.
Calcula las raíces en $\mathbb{Z}_5$ del polinomio $X^2 + X + 4$. asta probar con cada uno de los elementos de $\mathbb{Z}_5$. Si llamamos $p(X) = X^2 + X + 4$, tenemos:

x;	$p(x)$
0;	$p(0) = 4 \neq 0$;
1;	$p(1) = 1 \neq 0$;
2;	$p(2) = 0$;
3;	$p(3) = 1$;
4;	$p(4) = 4 \neq 0$.

Entonces una raíz es $x = 2$; en este caso el polinomio $p(X)$ se escribe:

$$p(X) = X^2 + X + 4 = (X - 2)(X + 3) = (X + 3)^2 = (X - 2)^2.$$

Luego las dos raíces son: $x = 2$ y $x = 2$, una raíz doble.

Ejercicio. 12.3.
Calcula las raíces en $\mathbb{Z}$ del polinomio $X^4 - X^3 + X^2 - X - 10$.

Ejercicio. 12.4.
Calcula en $\mathbb{Q}[X]$ el resto de dividir

(1) $X^7 + X^2 + 1$ entre $X - 1$,

(2) $X^n + 1$ entre $X - 1$.

Ejercicio. 12.5.
Calcula en $\mathbb{Z}_5[X]$ el resto de dividir $X^n + 2$ entre $X + 4$. omo 4 es igual a -1 en $\mathbb{Z}_5$, tenemos que el resto es igual a 3.

Ejercicio. 12.6.
Demuestra que el polinomio $X^n + 1$ no tiene raíces múltiples en $\mathbb{R}$. ara que tenga raíces múltiples, el polinomio y su derivada deben de tener una raíz común, si esta raíz es α, resulta que $X - \alpha$ divide a $X_n - 1$ y a nX^{n-1}, que es su derivada. Pero la única raíz del último polinomio es 0, que no es raíz de $X^n - 1$. Luego el polinomio no tiene raíces múltiples.

Ejercicio. 12.7.
Determina cuáles de los siguientes polinomios tienen raíces múltiples en $\mathbb{C}$.

(1) $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$,

(2) $X^3 + X^2 + 1$,

(3) $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Ejercicio. 12.8.
(*) Encuentra todas las raíces de $X^2 - 1$ *en* $\mathbb{Z}_8[X]$.

Ejercicio. 12.9.
Calcula un polinomio $a(X)$ *en* $\mathbb{Q}[X]$ *tal que* $a(2) = 0$, $a(1) = -2$, $a(3) = 1$ *y* $a(-1) = 2$.

Ejercicio. 12.10.
Calcula un polinomio $a(X)$ *en* $\mathbb{Z}_5[X]$ *tal que* $a(2) = 1$, $a(3) = 2$ *y* $a(4) = 1$.

Ejercicio. 12.11.
(*) Comprueba que los polinomios $X^3 + X^2 + X + 1$ *y* $X^2 + 2X + 1$ *determinan la misma aplicación* $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

13. Polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$

Ejercicio. 13.1.
Calcula todos los polinomios irreducibles de grado dos en $\mathbb{Z}_2[X]$

Ejercicio. 13.2.
Demuestra que el polinomio $X^4 + X + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Z}_2[X]$.

Ejercicio. 13.3.
Demuestra que los polinomios $X^2 + 1$, $X^3 + X + 1$ *y* $X^4 + 2$ *son irreducibles en* $\mathbb{Z}[X]$

14. Criterios de irreducibilidad de polinomios

Ejercicio. 14.1.
El polinomio $p(X) = X^3 + X^2 + 15$ *es irreducible en* $\mathbb{Z}[X]$.

Ejercicio. 14.2.
El polinomio $p(X) = X^4 + 2X^3 + 7X^2 - 4X + 5$ *es irreducible en* $\mathbb{Z}[X]$.

Ejercicio. 14.3.
Probar, utilizando el criterio de Eisenstein, que el polinomio $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ *es irreducible.*

Ejercicio. 14.4.
Estudiar si es reducible en $\mathbb{Z}[X]$ *el polinomio* $p(X) = X^7 - 2X^6 + 3X^5 - 2X^3 + 6X^2 - 4X + 4$ *y, si lo es, encontrar una descomposición en irreducibles.*

Capítulo IV

Conjuntos ordenados. Retículos

15. Relaciones de orden

Ejercicio. 15.1.
Dibuja el diagrama de Hasse de $(D(20), |)$.

(1) *Dado* $B = \{4, 10, 2\}$, *encuentra sus elementos notables.*

(2) *Encuentra los elementos minimales de* $C = D(20) \setminus \{1\}$. *(*$D(20) - \{1\}$*).*

Ejercicio. 15.2.
Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$. *Encuentra los elementos minimales y maximales de* $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) \setminus \{\emptyset, \{a, b, c, d\}\}$.

Ejercicio. 15.3.
Consideramos en $\mathbb{R}$ *la siguiente relación binaria:* $a \preceq_{lex} b$ *si y sólo si* $a \leq b$. *Supuesto definido* $\preceq_{lex}$ *en* $\mathbb{R}^{n-1}$, *definimos* $\preceq_{lex}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *de la siguiente forma:* $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \ldots, b_n)$ *si y sólo si* $a_1 < b_1$ *ó (*$a_1 = b_1$ *y* $(a_2, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_2, \ldots, b_n)$*).*

(1) *Demuestra que para todo* $n \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n, \preceq_{lex})$ *es un conjunto ordenado. A dicho orden se le denomina* ***orden!lexicográfico****.*

(2) *Demuestra que si* $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ *(con el orden producto en* $\mathbb{R}^n$*), entonces también* $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \ldots, b_n)$.

(3) *Demuestra que $\preceq_{lex}$ es un orden total.*

Ejercicio. 15.4.
Se define la relación binaria $\preceq_{tdeg}$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma: $(a_1, \dots, a_n) \preceq_{tdeg} (b_1, \dots, b_n)$ si y sólo si $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$ ó ($a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ y $(a_1, \dots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \dots, b_n)$).

(1) *Demuestra que para todo $n \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n, \preceq_{tdeg})$ es un conjunto ordenado. A dicho orden se le denomina* ***orden lexicográfico graduado****.*

(2) *Demuestra que si $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$ (con el orden producto en $\mathbb{R}^n$), entonces también $(a_1, \dots, a_n) \preceq_{tdeg} (b_1, \dots, b_n)$.*

(3) *Demuestra que $\preceq_{tdeg}$ es un orden total.*

Ejercicio. 15.5.
Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Definimos en X la siguiente relación binaria

$$x \leq_f y \text{ si y sólo si } f(x) \leq f(y).$$

(1) *¿Qué propiedad debe verificar f para que $\leq_f$ sea una relación de orden?*

(2) *En el caso particular de $X = \mathbb{R}^n$ y si $p_1, \dots, p_n$ son los n primeros primos, demuestra que para la función*

$$f(a_1, \dots, a_n) = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_n^{a_n},$$

$\leq_f$ es un orden total.

Ejercicio. 15.6.
Determinar todas las relaciones de orden que se pueden definir en el conjunto $X = \{a, b, c\}$ de manera que $a \leq b$.

Ejercicio. 15.7.
Determinar todas las relaciones de orden que se pueden definir en el conjunto de cuatro elementos $X = \{a, b, c, d\}$ de manera que $a \leq b$.

Ejercicio. 15.8.
En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación:

$$(a, b) \preceq (c, d) \text{ si } (2a + 1)2^d \leq (2c + 1)2^b.$$

(1) *Demuestra que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

(2) *Demuestra que en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *no es una relación de orden.*

Ejercicio. 15.9.
Sea R *una relación en un conjunto* X *que verifica la propiedad transitiva y es irreflexiva* ($\forall x \in X$ *se tiene* $x \not{R} x$.) *Se define en* X *una nueva relación* S *mediante:*

$$xSy \text{ si } x = y \text{ ó } xRy.$$

Demuestra que S *es una relación de orden.*

Ejercicio. 15.10.
Dada una relación R *en un conjunto* X*, definimos la* ***relación opuesta*** R^t *mediante:*

$$(x, y) \in R^t \text{ si } (y, x) \in R.$$

Dadas dos relaciones R *y* S *en un conjunto* X*, definimos la* ***composición*** $R \circ S$ *mediante:*

$$(x, y) \in R \circ S \text{ si } \exists z \in X \text{ tal que } (x, z) \in S \text{ y } (z, y) \in R.$$

La relación $Diag$ *es aquella que está definida por* $Diag = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

(1) *Demostrar que una relación* R *en un conjunto* X *es una relación de orden si y solo si* $R \cap R^t = Diag$ *y* $R \circ R = R$.

(2) *Demostrar que una relación* R *en un conjunto* X *es una relación de orden total si y sólo si* $R \cap R^t = Diag$, $R \circ R = R$ *y* $R \cup R^t = X \times X$.

16. Retículos

Ejercicio. 16.1.
Demuestra que un retículo es un conjunto totalmente ordenado si y sólo si todos sus subconjuntos son subretículos

Ejercicio. 16.2.
Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que el conjunto

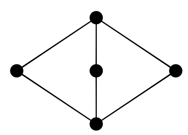
$$\{f_*(S) \mid \ S \subseteq X\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

es un subretículo.

Ejercicio. 16.3.
Demuestra que en un retículo distributivo $(L, \vee, \wedge)$ se verifica

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x),$$

pero que esta igualdad no es cierta en el retículo de la figura.



Ejercicio. 16.4.
Demuestra que todo conjunto totalmente ordenado es un retículo distributivo.

Ejercicio. 16.5.
Sea L un retículo complementado. Prueba que si L tiene tres o más elementos, entonces L no es totalmente ordenado.

Ejercicio. 16.6.
Demuestra que el producto cartesiano de retículos distributivos es un retículo distributivo.

Capítulo V

Álgebras de Boole

17. Álgebras de Boole

Ejercicio. 17.1.
Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Boole, entonces para cada elemento $x \in \mathcal{B}$ el complemento $\overline{x}$ es único.

Ejercicio. 17.2.
Sea $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ un homomorfismo de álgebras de Boole, esto es, es una aplicación que verifica:

$$\begin{array}{l} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad \text{ y} \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)} \end{array}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{B}$. Probar que si f es sobreyectivo, entonces $f(1) = 1$ y $f(0) = 0$.

Ejercicio. 17.3.
Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole. Si $a, b \in \mathcal{B}$ son átomos y $a \neq b$, entonces $ab = 0$.

Ejercicio. 17.4.
Sea $f : L \longrightarrow L'$ un homomorfismo de retículos sobreyectivo. Demuestra que si L es un álgebra de Boole entonces L' también lo es.

Ejercicio. 17.5.
Sea $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ *un álgebra de Boole y sean* a*,* $b \in \mathcal{B}$*. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $a\overline{b} = 0$,

(2) $a + b = b$,

(3) $\overline{a} + b = 1$,

(4) $a.b = a$.

Ejercicio. 17.6.
¿Cuántos átomos tiene un álgebra de Boole con 32 elementos?

Ejercicio. 17.7.
Demuestra que el producto cartesiano de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.

Ejercicio. 17.8.
Si para un álgebra de Boole finita $\mathcal{B}$ *conocemos el conjunto* M *de todos sus átomos, así como la expresión de un elemento* x *de* $\mathcal{B}$ *como supremo de átomos. ¿Cómo podríamos obtener la expresión de* $\overline{x}$ *como supremo de átomos?*

Ejercicio. 17.9.
Sea I *el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado* $[0, 1]$*. Para todo* $a, b \in I$ *definimos* $a \vee b = max\{a, b\}$*,* $a \wedge b = min\{a, b\}$ *y* $\overline{a} = 1 - a$
¿Es I *respecto de estas operaciones un álgebra de Boole?*

Ejercicio. 17.10.
Se conocen los siguientes hechos sobre cuatro personas A, B, C y D y una película:

(1) *Si A ve la película entonces B también la ve.*

(2) *C y D no ven la película juntos.*

(3) *B y C o bien ven la película juntos o no la ve ninguno de los dos.*

(4) *Si A no ve la película entonces B y C la ven.*

¿Quién o quienes están viendo la película?

18. Formas canónicas de funciones booleanas

Ejercicio. 18.1.
Calcula la forma normal canónica disyuntiva, es decir, suma de minitérminos (=minterms), y simplifica las funciones booleanas dadas por las tablas

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Ejercicio. 18.2.
Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación $f(x,y,z) = (x \uparrow y) \vee z$.

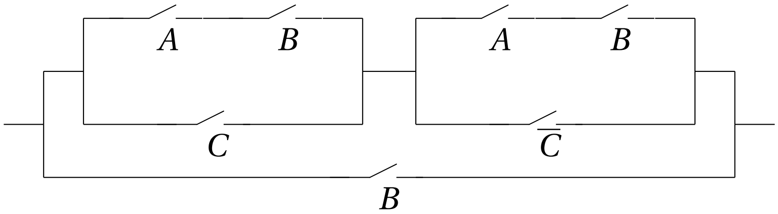
Ejercicio. 18.3.
Expresa, utilizando sólo la función $\downarrow$, *la aplicación* $f(x,y,z) = (x \vee z) \wedge y$.

19. El álgebra Boole de las proposiciones lógicas

Ejercicio. 19.1.
Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar S-"pulsando un botón. Diseñar una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos S-".

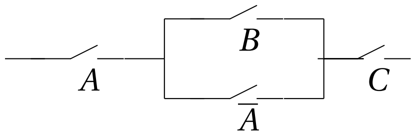
20. Circuitos lógicos

Ejercicio. 20.1.
Simplifica el circuito de conmutadores de la figura.

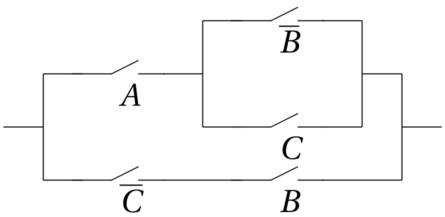


21. Circuitos de conmutadores

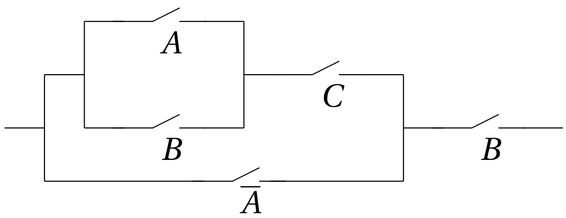
Ejercicio. 21.1.
Determina una expresión booleana cuya función booleana se corresponda con el circuito de conmutadores que aparece en la figura.



Ejercicio. 21.2.
Determina una expresión booleana cuya función booleana se corresponda con el circuito de conmutadores que aparece en la figura.



Ejercicio. 21.3.
Determina una expresión booleana cuya función booleana se corresponda con el circuito de conmutadores que aparece en la figura.



Ejercicio. 21.4.
Construye un circuito conmutador asociado a la función booleana representada por la siguiente expresión:

$$(A \vee B) \vee (\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee A \vee B)).$$

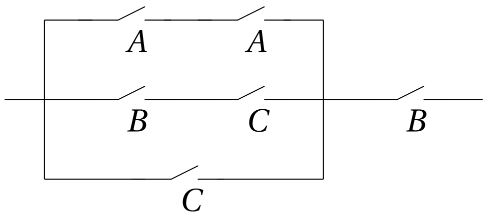
Ejercicio. 21.5.
Construye un circuito conmutador asociado a la función booleana representada por la siguiente expresión:

$$(A \vee B) \wedge C \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}).$$

Ejercicio. 21.6.
Construye un circuito conmutador asociado a la función booleana representada por la siguiente expresión:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B \wedge C).$$

Ejercicio. 21.7.
Simplifica el circuito de conmutadores de la figura.


A
A
B
C
B
C

22. Minimización de circuitos

Ejercicio. 22.1.
Minimizar la expresión booleana

$$x + xy + xyz + xy\overline{z} + xt$$

Ejercicio. 22.2.
Minimizar la siguiente expresión booleana:

$$xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz$$

Ejercicio. 22.3.
Obtener una expresión minimal para la función booleana en cinco variables f definida por:

$$1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 00, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1$$

Capítulo VI

Introducción a la teoría de grafos

23. Introducción a la teoría de grafos

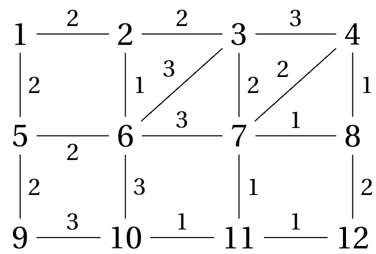
Ejercicio. 23.1.
Expresa en forma matricial (matrices de adyacencia) los grafos

Ejercicio. 23.2.
Representa gráficamente los siguientes grafos cuyas matrices de adyacencia son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

24. Lados en grafos

Ejercicio. 24.1.
(No se ha visto en clase.) Calcula las geodésicas que unen el vértice 4 *con el vértice* 9 *en el grafo siguiente:*



Ejercicio. 24.2.
Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismos.

Ejercicio. 24.3.
Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g:

1. *La persona a habla inglés.*
2. *La persona b habla inglés y español.*
3. *La persona c habla inglés, italiano y ruso.*
4. *La persona d habla japonés y español.*
5. *La persona e habla alemán e italiano.*
6. *La persona f habla francés, japonés y ruso.*
7. *La persona g habla francés y alemán.*

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando si, es necesario, a otra persona como intérprete?

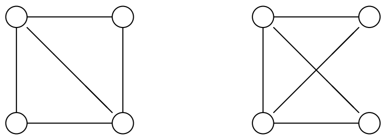
Ejercicio. 24.4.
Demuestra que en un grafo el número de vértices de grado impar es par.

Ejercicio. 24.5.
Obtén una fórmula para el número de lados de $K_{m,n}$.

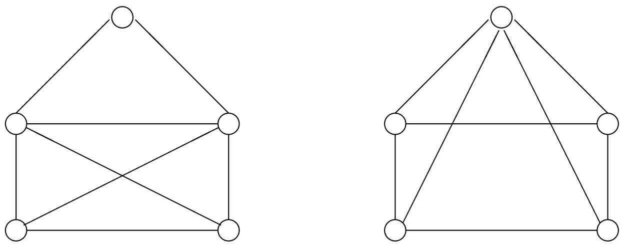
Ejercicio. 24.6.
Estudia si en todo grafo con más de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

25. Invariantes de grafos

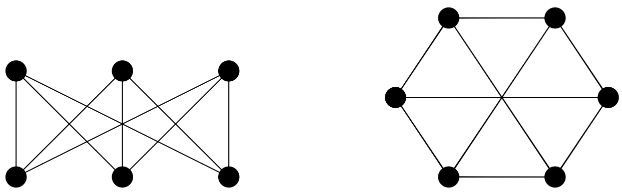
Ejercicio. 25.1.
¿Son isomorfos los grafos de la figura?



Ejercicio. 25.2.
¿Son isomorfos los grafos de la figura?



Ejercicio. 25.3.
¿Son isomorfos los grafos de la figura?



Ejercicio. 25.4.
¿Existe algún grafo regular de grado cinco con veinticinco vértices?

Ejercicio. 25.5.
¿Existe un grafo completo con quinientos noventa y cinco lados?

26. Caminos en grafos

27. Grafos conexos

Ejercicio. 27.1.
Calcular un árbol generador para los grafos de los ejercicios 25.1., 25.2. y 25.3..

Ejercicio. 27.2.
Demuestra que en cualquier árbol con dos o más vértices existe, al menos, un vértice de grado uno.

Ejercicio. 27.3.
Prueba que si un grafo G contiene sólo dos vértices de grado impar, entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.

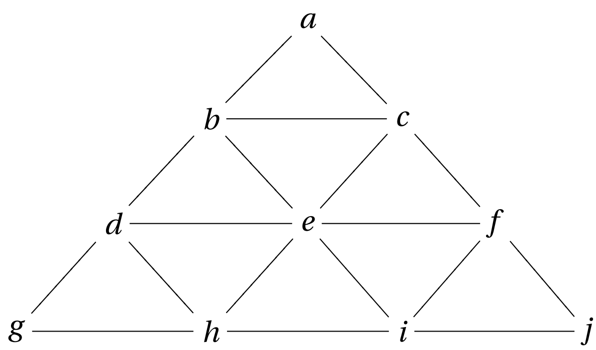
28. Árboles

Ejercicio. 28.1.
Construye todos los árboles binarios completos con siete vértices.

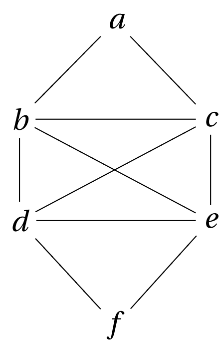
Ejercicio. 28.2.
¿Cuántas ramas tiene un árbol binario completo con treinta y cinco vértices?

29. Caminos de Euler

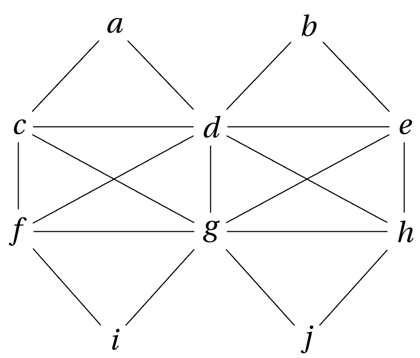
Ejercicio. 29.1.
Encuentra un circuito de Euler para el grafo



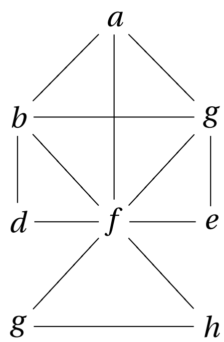
Ejercicio. 29.2.
Encuentra un circuito de Euler para el grafo



Ejercicio. 29.3.
Encuentra un camino de Euler para el grafo



Ejercicio. 29.4.
Encuentra un camino de Euler para el grafo

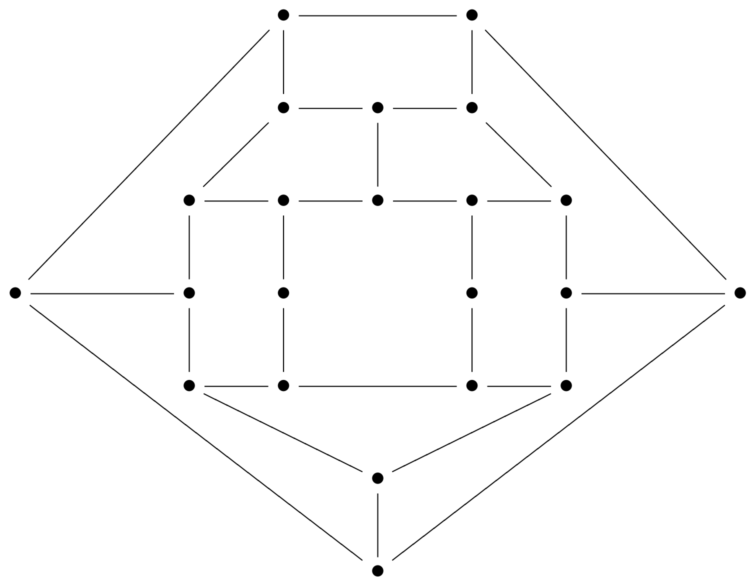


Ejercicio. 29.5.
¿Para qué valores de n el grafo K_n es un circuito de Euler?

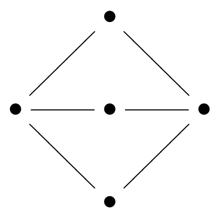
Ejercicio. 29.6.
¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ es un circuito de Euler?

30. Caminos de Hamilton

Ejercicio. 30.1.
¿Contiene el siguiente grafo un circuito Hamiltoniano?



Ejercicio. 30.2.
¿Contiene el siguiente grafo un circuito Hamiltoniano?

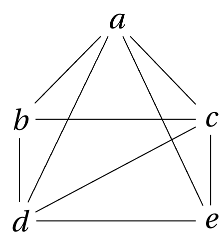


Ejercicio. 30.3.
Demuestra que si $n \geq 3$, entonces K_n contiene un circuito hamiltoniano.

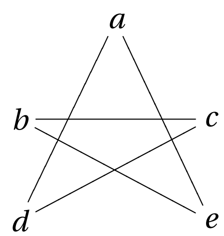
Ejercicio. 30.4.
¿Cuándo $K_{m,n}$ contiene un circuito de Hamilton?

31. Grafos planos

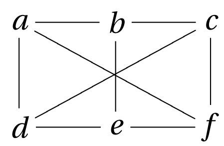
Ejercicio. 31.1.
Determina si el siguiente grafo es plano.



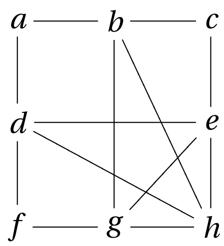
Ejercicio. 31.2.
Determina si el siguiente grafo es plano.



Ejercicio. 31.3.
Determina si el siguiente grafo es plano.



Ejercicio. 31.4.
Determina si el siguiente grafo es plano.



Ejercicio. 31.5.
Demuestra que cualquier grafo con cuatro vértices o menos es siempre plano.

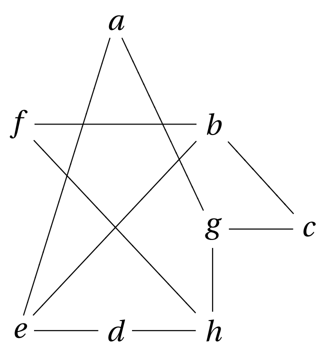
Ejercicio. 31.6.
Demuestra que si un grafo tiene a lo sumo cinco vértices y uno de ellos es de grado dos entonces es plano.

Ejercicio. 31.7.
¿Depende el número de caras resultante de una representación plana de un grafo plano de la representación que escojamos?

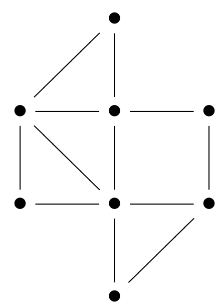
Ejercicio. 31.8.
¿Existe un grafo con seis vértices cuyos grados sean uno, dos, dos, tres, cuatro y cuatro respectivamente?

Ejercicio. 31.9.
Sea un grafo plano y conexo con nueve vértices de grados dos (tres de ellos), tres (tres de ellos), cuatro (dos de ellos) y cinco (uno de ellos). ¿Cuántos lados tiene? ¿Cuántas caras tiene?

Ejercicio. 31.10.
¿Es plano el grafo siguiente?



Ejercicio. 31.11.
Calcula el dual del grafo



32. Coloración de grafos

Ejercicio. 32.1.
¿Es cierto que todo grafo se puede colorear con, a lo sumo, cuatro colores?

Capítulo VII

Combinatoria

33. Principio de la suma

Ejercicio. 33.1.
Calcula cuantos números con tres cifras significativas:

(1) *no son divisibles por 3,7 ni 11.*

(2) *son divisibles por 3 y 7.*

(3) *son divisibles por 3 y 11.*

(4) *son divisibles por 7 y 11.*

(5) *son divisibles por 3, 7 y 11.*

Ejercicio. 33.2.
Si queremos hacer un dominó que vaya desde cero hasta n. ¿Cuántas fichas necesitaremos?

Ejercicio. 33.3.
Considerando los números que escritos en base 3 *tienen seis dígitos. ¿Cuántos de ellos tienen exactamente dos dígitos iguales a* 0*?*

Ejercicio. 33.4.
Demostrar que $\mathrm{Card}(A\Delta B) = \mathrm{Card}(a) + \mathrm{Card}(B) -$ *dir* $\mathrm{Card}(A \cap B)$.

Ejercicio. 33.5.
Sea $A\cup B\cup C = X$. *si* $\mathrm{card}(X) = n$, $\mathrm{card}(A) = n/2$, $\mathrm{Card}(A\cap B) = \mathrm{Card}(A\cap C) = \mathrm{card}(B\cap C) = n/5$ *y* $\mathrm{Card}(A \cap B \cap C) = n/10$. *¿Cuántos elementos tiene el conjunto* $B \cup C$*?*

Ejercicio. 33.6.
¿Cuántos enteros en el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 1000\}$ *son múltiplos de 4 ó de 6?*

34. Principio del producto

Ejercicio. 34.1.
Sea $s(n,k)$ el número de subconjuntos del conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$ que tienen cardinal k y que no contienen dos números consecutivos. Demuestra que:

(1) $s(n,k) = s(n-2,k-1) + s(n-1,k)$

(2) $s(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$.

Ejercicio. 34.2.
¿De cuantas formas se pueden obtener 11 aciertos en una quiniela de 14? ¿Y 11 ó más aciertos?

Ejercicio. 34.3.
Realizamos una apuesta de quiniela con 2 triples y 4 dobles. Supongamos que hemos acertado los 14 resultados. ¿Cuántas apuestas tenemos con 13, 12, 11 y 10 aciertos?

35. Variaciones sin repetición

36. Permutaciones

Ejercicio. 36.1.
Ocho miembros de un equipo de baloncesto deben alojarse en un hotel. El hotel dispone de una habitación triple, dos dobles y una individual. ¿De cuántas formas pueden repartirse en las distintas habitaciones?

Supongamos además que de los ocho miembros hay dos que son hermanos y se alojan siempre juntos. ¿De cuántas formas pueden entonces repartirse?

Ejercicio. 36.2.
¿Cuántos números en base 3 tienen exactamente 5 cifras?

(a) 3^4, *(b)* 3^5, *(c)* $2 \cdot 3^4$, *(d)* $5 \cdot 3$.

37. Principio del palomar

Ejercicio. 37.1.
Se eligen 10 números distintos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$*. Comprueba que existen al menos 2 tales que* $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq 1$.

38. Combinaciones

Ejercicio. 38.1.
Una apuesta de la Lotería Primitiva consiste en marcar seis números entre 1 y 49. El sorteo se realiza extrayendo 6 de los 49 números, y un séptimo número llamado complementario.

(1) *¿Cuántas apuestas distintas pueden realizarse?.*

(2) *¿De cuántas maneras pueden acertarse los seis números de la combinación ganadora?.*

(3) *¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números más el complementario de la combinación ganadora?.*

(4) *¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números de la combinación ganadora (sin el complementario)?.*

(5) *¿De cuántas maneras pueden acertarse cuatro números de la combinación ganadora?.*

(6) *¿De cuántas maneras pueden acertarse tres números de la combinación ganadora?.*

(7) *¿De cuántas maneras pueden acertarse dos números de la combinación ganadora?.*

(8) *¿De cuántas maneras puede acertarse un número de la combinación ganadora?.*

(9) *¿De cuántas maneras puede no acertarse ningún número de la combinación ganadora?.*

Ejercicio. 38.2.
Sea p un número primo. Prueba que si $a, b \in \mathbb{Z}_p$ entonces $(a+b)^p = a^p + b^p$. Comprueba que si m no es primo, entonces $(a+b)^m$ y $a^m + b^m$ son generalmente distintos en $\mathbb{Z}_m$.

Ejercicio. 38.3.
Comprueba las siguientes identidades con números combinatorios:

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(3) $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$

(4) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

(5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(6) $\binom{m+n}{k} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$
(Indicación: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$*).*

Ejercicio. 38.4.
¿Cuántos números positivos hay con las cifras en orden estrictamente decreciente?.

Ejercicio. 38.5.
Queremos formar un comité de 12 personas a escoger entre 10 hombres y 10 mujeres.

(1) ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

(2) ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?.

(3) ¿Y si queremos que haya un número par de hombres?

(4) ¿Y si queremos que haya más mujeres que hombres?.

39. Combinaciones con repetición

Ejercicio. 39.1.
Tenemos 3 cajas y 24 bolas, de las cuales 10 son rojas, 8 azules y 6 verdes. ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir las bolas en las cajas?.

Ejercicio. 39.2.
Se lanzan tres dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados pueden salir?. ¿Y si se lanzan n dados?.

Ejercicio. 39.3.
¿Cuántos números de cinco dígitos (en base 10*) empiezan por* 4*, terminan en* 5 *y sus cifras suman* 18*?*

Ejercicio. 39.4.
Las formas distintas en las que 12 bolas iguales pueden repartirse entre tres cajas numeradas son:

(a) $\binom{12}{3}$, *(b)* $\binom{14}{2}$, *(c)* $\binom{12}{3}\cdot 3!$, *(d)* $\binom{15}{3}$.

40. Permutaciones con repetición

Ejercicio. 40.1.
¿Cuántos números de 6 cifras, escritos en binario, no contienen la secuencia 101?

Bibliografía

[1] N. L. Biggs, *Matemática discreta*, Vicens-Vives, 1994.

[2] F. García Merayo, G. Hernández Peñalver, A. Nevot Luna, *Problemas resueltos de matemática discreta*, Thonson, 2003.

[3] Ralph P. Grimaldi, *Matemática discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.

[4] Paul R. Halmos, *Teoría intuitiva de conjuntos*, Compañía Editorial Continental, 1982.

[5] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas discretas*, Iberoamericana, 1988.

[6] J. D. Lipson, *Elements of Algebra and Algebraic Computing*, Benjamin/Cummings, 1981

[7] N. Peermingeat, *Algebra de Boole. Teoría, métodos de cálculo. Aplicaciones*, Alianza editorial, 1988.

[8] Robin J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*, Longman Scientific and Technical, 1999.

[9] K. Rosen, *Matemática Discreta y sus Aplicaciones*, 5ª Edición, McGraw-Hill, 2004.

[10] K. A. Ross, C. R. B. Wright, *Discreta Mathematics*, Prentice-Hall, 1992.

Índice alfabético