NOTAS DE TRABAJO, 30

ARITMÉTICA Y COMBINATORIA
(I. SUCESIONES RECURRENTES)

Pascual Jara Martínez

Departamento de Álgebra. Universidad de Granada

Granada, 2004–2013

Primera redacción: Julio 2004.
Segunda redacción: Marzo 2006.
Tercera redacción: Febrero 2007.
Cuarta redacción: Mayo 2009.
Quinta redacción: Enero 2013.

Introduction

This text is a compilation of Discrete Mathematics.

Índice general

Introduction I

I Sucesiones recurrentes 1

Introducción 3

I Sucesiones 5
- 1 Progresiones aritméticas . . . 6
- 2 Progresiones aritméticas de order superior . . . 7
- 3 Progresiones geométricas . . . 13
- 4 Ejercicios con solución . . . 14

II Sucesiones recurrentes 19
- 5 Sucesiones recurrentes homogéneas . . . 20
- 6 Sucesiones recurrentes no homogéneas . . . 31
- 7 Funciones generatrices . . . 35
- 8 Ejercicios con solución . . . 41

III Ejercicios de repaso 47
- 9 Ejercicios de repaso . . . 47

IV Ejercicios avanzados 83
- 10 Ejercicios avanzados . . . 83

V Ejemplos 91
- 11 Ejemplos . . . 91

VI Miscelánea 111
- 12 Números naturales. El principio de inducción . . . 111
- 13 Progresiones aritméticas . . . 114
- 14 Progresiones geométricas . . . 117
- 15 Sucesiones recurrentes . . . 118
- 16 Ejercicios resueltos. Selección . . . 121
- 17 Recurrencia en combinatoria . . . 122
- 18 Ampliación de números combinatorios . . . 131

Bibliografía 135

Índice alfabético **137**

Parte I

Sucesiones recurrentes

Introducción

Pretendemos en este pequeño *panfleto* resumir algunas ideas elementales sobre el estudio de las sucesiones recurrentes, esto es, sucesiones recurrentes, lineales o no, con coeficientes constantes. Ejemplos de esta teoría abundan en múltiples aplicaciones y además son una buena excusa para tratar sobre la aritmética de números: enteros, reales y complejos, y también de polinomios.

No hemos pretendido ser exhaustivos en el tratamiento de la teoría, de hecho hemos adoptado una presentación más bien *light*, pero hemos procurado que los argumentos utilizados queden claros y sirvan de ejemplo para posteriores desarrollos. Es evidente que quedan fuera algunos temas que iremos incluyendo en sucesivas versiones de este texto.

En el desarrollo que hemos hecho comenzamos con una presentación de las progresiones aritméticas de orden uno y superior; de forma que tenemos una fácil introducción a las sucesiones definidas por recurrencia lineal con coeficientes constantes. Luego, para tratar de hacer un estudio completo de estas últimas sucesiones, introducimos las progresiones geométricas y el polinomio característico que éstas definen. En este punto un poco de Álgebra Lineal sería necesaria, sobre todo para ver las sucesiones definidas por recurrencia como elementos de un espacio vectorial, y calcular una base del mismo.

El resto del texto se centra en el estudio de ejemplos y ejercicios relacionados con la teoría expuesta. Tal vez se eche en falta una ordenación más racional de los ejercicios y problemas que se presentan, pero dejamos esto al lector. También hemos realizado una recopilación de problemas que presentamos sin solución; la no inclusión de la solución podemos achacarla a la falta material de tiempo para completar el texto.

Vamos a hacer responsable a esta falta de tiempo de las numerosas erratas que sin duda salpicarán el texto por aquí y por allá. Por esto agradeceríamos al lector interesado en esta materia cualquier comentario o información sobre las mismas con objeto de corregir algunas de éstas en próximas versiones del texto, aunque no somos muy optimistas sobre su total eliminación; “*ni cuartel sin ratas ni libro sin erratas*" dice un viejo proverbio castellano.

Hemos preferido hacer uso de la red de internet y de los numerosos textos que en ella *viven* para documentarnos, no vamos a citar ninguno de ellos en particular, pero desde aquí agradecemos a los autores su generosidad al compartir con todos su inestimable trabajo. Sin embargo nos gustaría citar dos textos publicados en papel por gente próxima a la organización de la Olimpíada Matemática Española que nos han ayudado mucho en la elaboración de este trabajo.

[1] Manual de matemáticas para preparación olímpica de Cristobal Sánchez Rubio y Manuel Ripollés Amela, publicado por la *Universita Jaume I* de Castellón en 2000.

[2] *Sessions de preparació per a l'olimpíada matemàtica*. Publicado por la *Societat Catalana de Matematiques* en el año 1999.

Capítulo I

Sucesiones

1	Progresiones aritméticas	**6**
2	Progresiones aritméticas de order superior	**7**
3	Progresiones geométricas	**13**
4	Ejercicios con solución	**14**

Introducción

Sea $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números (enteros, racionales, reales o complejos). Vamos a representar esta sucesión por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_n$ o simplemente por a_* si necesitamos abreviar.

Estamos interesados en aquellas sucesiones en las que cada término es construido en función de los anteriores mediante fórmulas o reglas, que más adelante determinaremos.

Los primeros ejemplos de esta teoría son las progresiones aritméticas y geométricas.

1. Progresiones aritméticas

Un tipo especial de sucesiones son las **progresiones aritméticas**. Éstas son sucesiones $\{a_n\}_n$ para las que existe un número d, la **diferencia**, tal que el término a_{n+1} está definido como $a_{n+1} = a_n + d$, para cada $n \geq 0$.
Es claro que en una progresión aritmética $\{a_n\}_n$ de diferencia d se tiene

$$a_n = a_0 + n \cdot d.$$

Ésta es la expresión del **término general** de la progresión.
Dada una sucesión $\{a_n\}_n$, llamamos m**–ésima suma parcial** a

$$S_m = a_0 + \cdots + a_m.$$

Podemos calcular los valores de las sumas parciales de forma sencilla; basta hacer inducción sobre m; se obtiene

$$S_m = \frac{(a_0 + a_m)(m+1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado es cierto para $m = 0$. Suponemos $t \geq 1$, que el resultado es cierto para $m = t$ y vamos a ver qué ocurre para $m = t+1$. Tenemos

$$\begin{aligned} S_{t+1} = S_t + a_{t+1} &= \tfrac{(a_0+a_t)(t+1)}{2} + a_{t+1} \\ &= \tfrac{a_0(t+1)+a_0(t+1)+td(t+1)+2a_0+2(t+1)d}{2} = \tfrac{a_0 2(t+2)+(t+1)(t+2)d}{2} \\ &= \tfrac{(a_0+a_0+(t+1)d)(t+2)}{2} = \tfrac{(a_0+a_{t+1})(t+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Observa que también se tiene $S_m = (m+1)a_0 + \frac{m(m+1)}{2}d$.
Ver el ejercicio (4.1.).
Otros ejercicios relacionados: (4.1.).

2. Progresiones aritméticas de order superior

Diferencias

Dada una sucesión $\{a_n\}_n$ llamamos **diferencia de orden uno** de $\{a_n\}_n$ a la sucesión $\{\Delta a_n\}_n$, en donde

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Podemos representar esta sucesión también por $\Delta\{a_n\}_n$.
Por recurrencia se define la **diferencia de orden** $k > 1$ de $\{a_n\}_n$ como la sucesión

$$\Delta^k\{a_n\}_n = \Delta\Delta^{k-1}\{a_n\}_n.$$

La definición se completa tomando $\Delta^0\{a_n\}_n = \{a_n\}_n$.
La expresión de los términos de $\Delta^k\{a_n\}$, en función de los a_n, se calcula fácilmente por inducción sobre k. En efecto, se tiene

$$\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{n+t-i}.$$

DEMOSTRACIÓN. Hacemos la demostración para el término a_0; para otros valores basta sumar una constante a cada uno de los índices.
Tenemos $\Delta a_0 = a_1 - a_0$, entonces $\Delta^2 a_0 = \Delta a_1 - \Delta a_0 = a_2 - 2a_1 + a_0$. Supongamos que $t \geq 1$ y hacemos la hipótesis

$$\Delta^t a_0 = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t-i}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta^{t+1}a_0 &= \Delta^t a_1 - \Delta^t a_0 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t+1-i} - \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t-i} \\
&= a_{t+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t+1-i} - \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t-i} - (-1)^t a_0 \\
&= a_{t+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}a_{t+1-i} - \sum_{i=1}^{t}(-1)^{i-1}\binom{t}{i-1}a_{t+1-i} - (-1)^t a_0 \\
&= a_{t+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{t}(-1)^i\left[\binom{t}{i} + \binom{t}{i-1}\right]a_{t+1-i} - (-1)^t a_0 \\
&= a_{t+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{t}(-1)^i\binom{t+1}{i}a_{t+1-i} - (-1)^t a_0 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{t+1}(-1)^i\binom{t+1}{i}a_{t+1-i}
\end{aligned}$$

□

La sucesión $\{a_n\}_n$ es una **progresión aritmética de grado** $k \geq 0$ si la sucesión $\Delta^k\{a_n\}_n$ es constante.
Las progresiones aritméticas de la sección (1) son progresiones aritméticas de grado uno.

Si $\{a_n\}_n$ es una progresión aritmética de grado k, podemos escribir:

$$\begin{array}{ll}
\Delta a_0 & = a_1 - a_0 \\
\Delta^2 a_0 & = a_2 - 2a_1 + a_0 \\
\Delta^3 a_0 & = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0 \\
\vdots & \\
 & \\
\Delta^k a_0 & = a_k - \binom{k}{1} a_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} a_1 + (-1)^k a_0 = cte. \\
\Delta^{k+1} a_0 & = a_{k+1} - \binom{k+1}{1} a_k + \cdots + (-1)^k \binom{k+1}{k} a_1 + (-1)^{k+1} a_0 = 0
\end{array}$$

En resumen:

$$\Delta^k a_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{k-i}. \tag{I.1}$$

Surge ahora la pregunta de si el valor de a_{k+1} se puede calcular en función de los $\Delta^j a_0$, con $0 \leq j \leq k+1$. La respuesta es sí.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos las sucesiones de las diferencias por columnas:

$$\begin{array}{llll}
a_0 & \Delta a_0 & \Delta^2 a_0 & \Delta^3 a_0 \ldots \\
a_1 & \Delta a_1 & \Delta^2 a_1 & \Delta^3 a_1 \ldots \\
a_2 & \Delta a_2 & \Delta^2 a_2 & \Delta^3 a_2 \ldots \\
a_3 & \Delta a_3 & \Delta^2 a_3 & \Delta^3 a_3 \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Es claro que esta tabla se puede también formar, a partir de la primera fila, haciendo sumas, en vez de diferencias. Veamos como hacer esos cálculos.

Se tiene $a_1 = a_0 + \Delta^1 a_0$, y $\left\{\begin{array}{l} a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 \\ \Delta^1 a_1 = \Delta^1 a_0 + \Delta^2 a_0 \\ a_1 = a_0 + \Delta^1 a_0 \end{array}\right\}$, luego $a_2 = a_0 + 2\Delta^1 a_0 + \Delta^2 a_0$. Suponemos que para $t \geq 1$ se verifica $a_t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \Delta^i a_0$, y análogamente $\Delta^1 a_t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \Delta\Delta^i a_0$, y vamos a probar que el mismo resultado se tiene para a_{t+1}.

$$\begin{aligned}
a_{t+1} &= a_t + \Delta^1 a_t \\
&= \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \Delta^i a_0\right) + \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \Delta^{i+1} a_0\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \Delta^i a_0\right) + \left(\sum_{i=1}^{t+1} \binom{t}{i-1} \Delta^i a_0\right) \\
&= \binom{t}{0} \Delta^0 a_0 + \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{t}{i} + \binom{t}{i-1}\right) \Delta^i + \binom{t}{t} \Delta^{t+1} a_0 \\
&= \binom{t}{0} \Delta^0 a_0 + \sum_{i=1}^{t} \binom{t+1}{i} \Delta^i + \binom{t}{t} \Delta^{t+1} a_0 \\
&= \sum_{i=0}^{t+1} \binom{t+1}{i} \Delta^i a_0.
\end{aligned}$$

En resumen

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_0. \tag{I.2}$$

□

Observa que la expresión (I.2) es un polinomio en n. Como consecuencia de este desarrollo tenemos el siguiente resultado:

Teorema. 2.1.
Una sucesión $\{a_n\}_n$ es una progresión aritmética de grado k si, y sólo si, existe un polinomio F de grado k tal que $a_n = F(n)$ para cada entero natural n.

DEMOSTRACIÓN. La condición suficiente es consecuencia del hecho expresado en la relación (I.2) de la página 9. El término a_n es: $a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_0 = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \Delta^i a_0$, que es un polinomio de grado k en n, ya que $\Delta^i a_0 = 0$, si $i > k$, y $\binom{n}{i} = 0$, si $i > n$.
Para la condición necesaria basta comprobar que para cada índice n, si $F(n)$ es un polinomio en n de grado k, entonces el polinomio $F(n+1) - F(n)$ es de grado menor o igual que $k-1$ en n. □

El término general de una progresión aritmética

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de grado k. Como se tiene $\Delta^{k+1} a_n = 0$ para cada índice n, la relación (I.3) de la página 9, escrita para el índice $k+1$ es:

$$0 = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} a_{k+1-i},$$

y por tanto el término a_{k+1} se escribe:

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{k+1}{i} a_{k+1-i}. \tag{I.3}$$

La misma relación es válida para índices mayores que $k+1$.
Por otro lado, de la relación (I.2) se tiene que el término a_n se expresa

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_0, \tag{I.4}$$

que como ya conocemos es un polinomio en n de grado como máximo k.

Ejemplo. 2.2.
Consideramos la sucesión aritmética definida por

$$a_0 = 1, \text{ con diferencia } d = 3,$$

esto es, la sucesión: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Se verifica:

n	$\Delta^0 a_n$	$\Delta^1 a_n$	$\Delta^2 a_n$
0	1	3	0
1	4	3	0
2	7	3	0
3	10	3	
4	13		

Tenemos una progresión aritmética de grado uno, esto es, $k = 1$, por lo que la fórmula (I.3) se escribe

$$a_2 = \binom{2}{1} a_1 - \binom{2}{2} a_0 = 2a_1 - a_0,$$

y podemos cambiar los índices obteniendo $a_{n+1} = 2a_{n+1} - a_n$.
La fórmula que se obtiene de (I.4) es:

$$a_n = \binom{n}{0} \Delta^0 a_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 a_0 = 1 + 3n.$$

Sucesiones de potencias

Un caso especial de progresión aritmética de grado superior lo proporcionan las progresiones de potencias: $\{n^k\}_n$. Vamos a estudiar en este caso como calcular las sumas parciales.
Llamamos S_n^k a la suma $0 + 1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$.
Si $k = 0$ este valor es conocido. Veamos el caso general $k \geq 1$.
Se verifica, por el desarrollo del binomio:

$$(m+1)^k - m^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} m^i.$$

Sumando en m, desde 1 hasta n, resulta:

$$\begin{aligned}(n+1)^k - 1 &= \textstyle\sum_{m=1}^n [(m+1)^k - m^k] = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} m^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{m=1}^n m^i \quad = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_n^i \\ &= \textstyle n + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} S_n^i.\end{aligned}$$

Se obtiene entonces la relación:

$$\binom{k}{k-1} S_n^{k-1} = (n+1)^k - (n+1) - \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k}{i} S_n^i. \tag{I.5}$$

Los primeros ejemplos son:

$$\begin{aligned}
S_n^1 &= \tfrac{1}{2}((n+1)^2 - (n+1)) = \tfrac{n^2+n}{2} \\
\\
S_n^2 &= \tfrac{1}{3}((n+1)^3 - (n+1) - \textstyle\sum_{i=1}^{1} \binom{3}{i} S_n^i) \\
&= \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - 3S_n^1) \\
&= \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n - \tfrac{3}{2}(n^2+n)) \\
&= \tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \\
&= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\\
S_n^3 &= \tfrac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1) - \textstyle\sum_{i=1}^{2} \binom{4}{i} S_n^i) \\
&= \tfrac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - (4S_n^1 + 6S_n^2)) \\
&= \tfrac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{I.6}$$

El cálculo explícito de S_n^i se hace fácilmente a partir de aquí de forma recursiva.
Ver el problema (9.14.).

Aplicación al cálculo del término general de una progresión aritmética

Consideramos una progresión aritmética $\{a_n\}_n$ de grado $k > 1$.
Supongamos que no conocemos el término general; vamos a dar un algoritmo para calcularlo determinando previamente los términos generales de las sucesiones de menor grado que aparecen asociadas a $\{a_n\}_n$.
Construimos la tabla siguiente:

$$\begin{array}{lllllll}
a_0 & \Delta^1 a_0 & \Delta^2 a_0 & \dots & \Delta^{k-2} a_0 & \Delta^{k-1} a_0 & \Delta^k a_0 \\
a_1 & \Delta^1 a_1 & \Delta^2 a_1 & \dots & \Delta^{k-2} a_1 & \Delta^{k-1} a_1 & \Delta^k a_1 \\
a_2 & \Delta^1 a_2 & \Delta^2 a_2 & \dots & \Delta^{k-2} a_2 & \Delta^{k-1} a_2 & \Delta^k a_2 \\
a_3 & \Delta^1 a_3 & \Delta^2 a_3 & \dots & \Delta^{k-2} a_3 & \Delta^{k-1} a_3 & \Delta^k a_3 \\
a_4 & \Delta^1 a_4 & \Delta^2 a_4 & \dots & \Delta^{k-2} a_4 & \Delta^{k-1} a_4 & \Delta^k a_4
\end{array}$$

Por hipótesis la sucesión $\Delta^k\{a_n\}_n$ es constante, por lo tanto su término general es sencillo de calcular.
La sucesión $\Delta^{k-1}\{a_n\}_n$ es de grado uno, su primer término es $\Delta^{k-1}a_0$ y su diferencia es exactamente la constante $\Delta^k a_0$, luego su término general es:

$$\Delta^{k-1} a_n = \Delta^{k-1} a_0 + n\Delta^k a_0.$$

Para calcular el término general de la sucesión $\Delta^{k-2}\{a_n\}_n$ consideramos la suma de los términos de la sucesión $\Delta^{k-1}\{a_n\}_n$, sea ésta

$$S_m^{k-1} = \Delta^{k-1}a_0 + \cdots + \Delta^{k-1}a_m, \text{ para } m \geq 0.$$

Observa que se tiene

$$S_m^{k-1} - \Delta^{k-1}a_m = \Delta^{k-1}a_0 + \cdots + \Delta^{k-1}a_{m-1} = \Delta^{k-2}a_m - \Delta^{k-2}a_0.$$

De aquí, cambiando el índice de m a n, se tiene

$$\Delta^{k-2}a_n = S_n^{k-1} + \Delta^{k-2}a_0 - \Delta^{k-1}a_n,$$

que nos da el término general de la sucesión $\Delta^{k-2}\{a_n\}_n$. Además el cálculo de S_n^{k-1} se realiza sumando las potencias de n; en este caso el término general de $\Delta^{k-1}\{a_n\}_n$ está dado por un polinomio de grado uno, $\Delta^{k-1}a_n = \Delta^{k-1}a_0 + n\Delta^k a_0$, y por tanto

$$\begin{aligned} S_n^{k-1} &= \textstyle\sum_{i=0}^n \Delta^{k-1}a_i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n \left(\Delta^{k-1}a_0 + i\Delta^k a_0\right) \\ &= (n+1)\Delta^{k-1}a_0 + \left(\textstyle\sum_{i=0}^n i\right)\Delta^k a_0 \\ &= (n+1)\Delta^{k-1}a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\Delta^k a_0. \end{aligned}$$

Una vez conocidos los términos generales de las sucesiones $\Delta^k\{a_n\}_n, \Delta^{k-1}\{a_n\}_n, \ldots, \Delta^{k-i}\{a_n\}_n$, podemos calcular el término general de $\Delta^{k-i-1}\{a_n\}_n$ siguiendo el mismo procedimiento, así se obtendrá

$$\Delta^{k-i-1}a_n = S_n^{k-i} + \Delta^{k-i-1}a_0 - \Delta^{k-i-1}a_n,$$

y el cálculo de S_n^{k-i} se realiza conociendo las sumas de las primeras potencias de los primeros $n+1$ enteros naturales.

Ver el problema (4.2.).

3. Progresiones geométricas

Un segundo tipo de sucesión son las **progresiones geométricas**; éstas son sucesiones $\{a_n\}_n$ para las que existe un número r, al que vamos a llamar la **razón** tal que el término a_{n+1} está definido como

$$a_{n+1} = a_n r,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos probar por inducción que $a_n = a_0 r^n$.
Dada una progresión geométrica $\{a_n\}_n$, consideramos la m–ésima suma parcial a

$$S_m = a_0 + \cdots + a_m.$$

Los valores de las sumas parciales podemos calcularlos de forma sencilla: En el caso en que $r = 1$ se tiene que $a_n = a_0$ para cada índice n, luego $S_m = (m+1)a_0$. En el caso en que $r \neq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} S_m &= a_0 + \cdots + a_m \\ &= a_0(1 + r + \cdots + r^m) \\ &= a_0 \frac{(1+r+\cdots+r^m)(1-r)}{1-r} = a_0 \frac{1-r^{m+1}}{1-r}. \end{aligned}$$

4. Ejercicios con solución

Sucesiones

Ejercicio. 4.1.
Se considera un cuadrado 5×5 *con algunas casillas marcadas.*

	74			
				186
		103		
0				

¿Es posible completar el cuadrado sabiendo que cada fila y cada columna forma una progresión aritmética (de grado uno)?
[From Erdös to Kiev. Problems of Olympiad Caliber. MAA, 1996, pag. 93]

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (4.1.)
Consideramos la primera columna, sea $4d, 3d, 2d, d, 0$, entonces podemos completar con x la cuarta fila, comenzando ésta por $d, x, 103$, y la tercera fila que es: $2d, y, -, -, 186$. Tenemos entonces parte de la segunda columna, $74, y, x$.

4d				
3d	74			
2d	y			186
d	x	103		
0				

Escribiendo las relaciones tenemos:
Cuarta fila. $x - d = 103 - x$, equivalentemente $x = \frac{103+d}{2}$.
Segunda columna. $74 - y = y - x$, o equivalentemente $y = \frac{74+x}{2} = \frac{251+d}{4}$.
Tercera fila. $186 = 2d + 4d' = y + 3d'$.
La última relación da las siguientes:

$$d' = y - 2d = \frac{251 - 7d}{4} \quad \text{y} \quad 2d + 4d' = 186.$$

Se obtiene entonces $d = 13$, $x = \frac{103+13}{2} = 58$ e $y = \frac{251+13}{4} = 66$. Entonces la diferencia en la progresión de la segunda columna es: 8 y esto permite completar el cuadrado.
El resultado es:

30	52	82	112	142	172
35	39	74	109	144	179
40	26	66	106	146	186
45	13	58	103	148	193
50	0	50	100	150	200
	13	8	3	2	7

□

Ejercicio. 4.2.
Determinar el término general de la sucesión 1, -7, -45, -23, 389, 1881, 5623, 13385, 27657, 51769.

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (4.2.)
Primero comprobamos si son términos de una progresión aritmética calculando las diferencias sucesivas:

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$	$\Delta^4 a_n$	$\Delta^5 a_n$
0	1	-8	-30	90	240	120
1	-7	-38	60	330	360	120
2	-45	22	390	690	480	120
3	-23	412	1080	1170	600	120
4	389	1492	2250	1770	720	120
5	1881	3742	4020	2490	840	
6	5623	7762	6510	3330		
7	13385	14272	9840			
8	27657	24112				
9	51769					

Es pues una progresión aritmética de orden cinco. Se trata ahora de averiguar cuál es su término general, ver página 9 y siguiente.
El término general de $\Delta^5\{a_n\}_n$ es $\Delta^5 a_n = 120$.
El término general de $\Delta^4\{a_n\}_n$ es: $\Delta^4 a_n = \Delta^4 a_0 + n\Delta^5 a_0 = 240 + 120n = 120(n+2)$.
Para calcular el término general de $\Delta^3\{a_n\}_n$ tenemos que calcular

$$S_n^4 = \sum_{i=0}^{n} \Delta^4 a_i = \sum_{i=0}^{n} 120(i+2) = 120\sum_{i=0}^{n}(i+2) = 120\frac{(2+n+2)(n+1)}{2} = 60(n+4)(n+1).$$

A partir de aquí calculamos $\Delta^3 a_n$.

$$\Delta^3 a_n = S_n^4 + \Delta^3 a_0 - \Delta^4 a_n = 60(n+4)(n+1) + 90 - 120(n+2) = 30(2n^2+6n+3).$$

Para calcular el término general de $\Delta^2\{a_n\}_n$ tenemos que calcular

$$S_n^3 = \sum_{i=0}^{n} \Delta^3 a_i = \sum_{i=0}^{n}(30(2i^2+6i+3)) = 30\left(2\sum_{i=0}^{n} i^2 + 6\sum_{i=0}^{n} i + 3\sum_{i=0}^{n} 1\right)$$
$$= 30\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1)\right) = 10(2n^3+12n^2+19n+9)$$

Ahora calculamos $\Delta^2 a_n$.

$\Delta^2 a_n = S_n^3 + \Delta^2 a_0 - \Delta^3 a_n = 10(2n^3+12n^2+19n+9) - 30 - 30(2n^2+6n+3) = 10(2n^3+6n^2+n-3).$

Para calcular el término general de $\Delta\{a_n\}_n$ tenemos que calcular

$$S_n^2 = \sum_{i=0}^{n} \Delta^2 a_i = \sum_{i=0}^{n}(10(2i^3+6i^2+i-3))$$
$$= 10\left(2\sum_{i=0}^{n} i^3 + 6\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i - 3\sum_{i=0}^{n} 1\right)$$
$$= 10\left(2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1)\right)$$
$$= 5(n^4+6n^3+8n^2-3n-6).$$

Ahora calculamos Δa_n.

$$\Delta a_n = S_n^2 + \Delta a_0 - \Delta^2 a_n$$
$$= 5(n^4+6n^3+8n^2-3n-6) - 8 - 10(2n^3+6n^2+n-3)$$
$$= 5n^4+10n^3-20n^2-25n-8.$$

Para calcular el término general de $\{a_n\}_n$ tenemos que calcular

$$S_n^1 = \sum_{i=0}^{n} \Delta a_i = \sum_{i=0}^{n}(5i^4+10i^3-20i^2-25i-8)$$
$$= 5\sum_{i=0}^{n} i^4 + 10\sum_{i=0}^{n} i^3 - 20\sum_{i=0}^{n} i^2 - 25\sum_{i=0}^{n} i - 8\sum_{i=0}^{n} 1$$
$$= 5\left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right) + 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 20\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$- 25\frac{n(n+1)}{2} - 8(n+1) = n^5+5n^4-20n^2-24n-8.$$

En donde hemos utilizado que $\sum_{i=0}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Ahora calculamos a_n.

$$\begin{aligned}a_n = \Delta^0 a_n = S_n^1 + \Delta^0 a_0 - \Delta^1 a_n \\ = n^5 + 5n^4 - 20n^2 - 24n - 8 + 1 - (5n^4 + 10n^3 - 20n^2 - 25n - 8) \\ = n^5 - 10n^3 + n + 1.\end{aligned}$$

En consecuencia el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ es:

$$a_n = n^5 - 10n^3 + n + 1.$$

<u>Otra solución</u>.
De la ecuación (I.2) se deduce que el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ es:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} = \binom{n}{i}\Delta^i a_0,$$

por lo tanto en este caso resulta:

$$\begin{aligned}a_n &= \binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{1}\Delta^1 a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 a_0 + \binom{n}{4}\Delta^4 a_0 + \binom{n}{5}\Delta^5 a_0 \\ &= a_0 + n\Delta a_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 a_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^3 a_0 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\Delta^4 a_0 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}\Delta^5 a_0 \\ &= 1-8n-15n(n-1)+15n(n-1)(n-2)+10n(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\ &= n^5 - 10n^3 + n + 1.\end{aligned}$$

El término general de la sucesión es:

$$a_n = n^5 - 10n^3 + n + 1.$$

□

Capítulo II

Sucesiones recurrentes

5 Sucesiones recurrentes homogéneas 20
6 Sucesiones recurrentes no homogéneas 31
7 Funciones generatrices 35
8 Ejercicios con solución 41

Introduction

La fórmula (I.3) de la página 9

$$a_{k+1} = \binom{k+1}{1} a_k + \cdots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k} a_1 + (-1)^{k+2} a_0$$

nos indica que los términos de una sucesión aritmética de orden superior se pueden construir de forma recurrente. En este capítulo vamos a adentrarnos en el estudio de este tipo más general de sucesiones.

5. Sucesiones recurrentes homogéneas

Una sucesión $\{a_n\}_n$ se llama **recurrente de orden** t si existen números $c_1, \ldots, c_t$, con $c_t \neq 0$, y un índice $m \geq 0$ tal que para cada $n \geq m$ se verifica:

$$a_{n+t} = a_{n+t-1}c_1 + \cdots + a_n c_t. \tag{II.1}$$

Podemos suponer, prescindiendo de los términos necesarios, que en la definición se verifica $m = 0$.
Una sucesión recurrente de orden t está definida por dos t-uplas,
- una los elementos $c_1, \ldots, c_t$, con $c_t \neq 0$, y
- otra los t primeros términos de la sucesión $a_0, \ldots, a_{t-1}$, a los que llamaremos **condiciones iniciales** de la sucesión. El resto de los elementos se define por:

$$a_{n+t} = a_{n+t-1}c_1 + \cdots + a_n c_t, \qquad (n \geq 0). \tag{II.2}$$

Llamamos a (II.1) ó a (II.2) la **ecuación de recurrencia de la sucesión**.

Ejemplo. 5.1.
Cada progresión aritmética de orden k es una sucesión recurrente de orden $k+1$.

Ver página 9.

Ejemplo. 5.2.
Cada progresión geométrica es una sucesión recurrente de orden 1.

La sucesión

$$a_0 = a,\ a_1 = ar,\ a_2 = ar^2,\ \ldots, a_n = ar^n\ \ldots$$

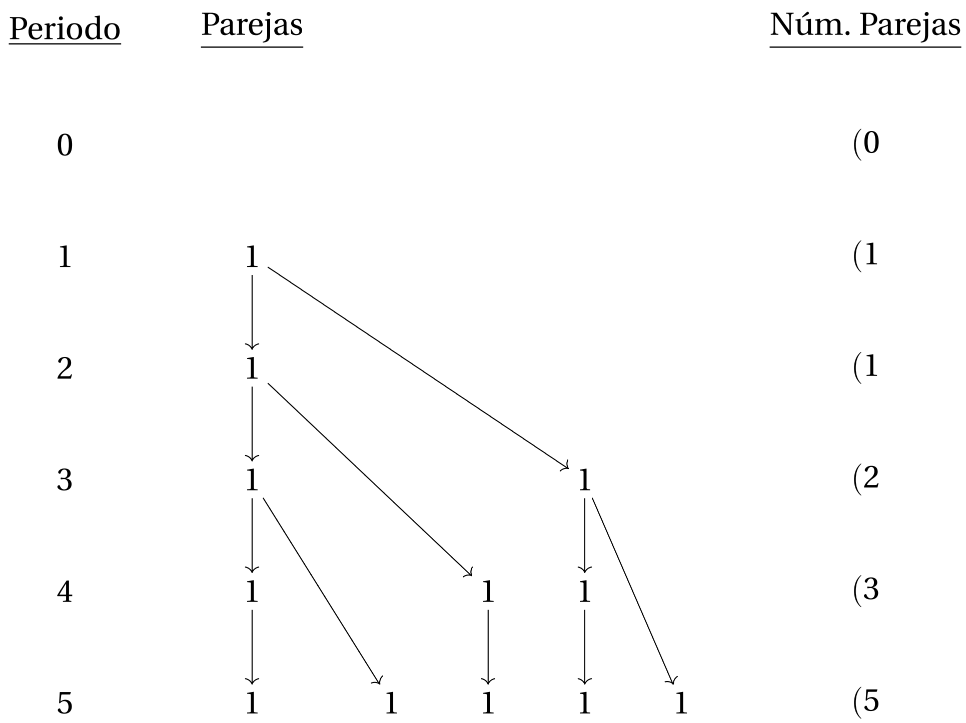
cumple con la ecuación recurrente $a_{n+1} = a_n r$, para $n \geq 0$.

Ejemplo. 5.3. (Sucesión de Fibonacci.)
El prototipo de sucesión recurrente es la **sucesión de Fibonacci** definida:

$$a_0 = 0,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ la ecuación de recurrencia para } n \geq 0.$$

El problema que estudia Fibonacci es la evolución de una población de conejos sometida a las siguientes reglas:
(1) Se inicia el proceso con una pareja recién nacida.
(2) Cada pareja es fértil al cabo de un mes, y se reproduce cada mes dando lugar a una nueva pareja.
(3) En el momento cero no hay ninguna pareja.

La evolución es la siguiente: Al inicio del primer periodo se introduce una pareja. Al inicio del segundo periodo solamente tenemos una pareja. Al inicio del tercer periodo tenemos dos parejas. Al inicio del cuarto periodo tenemos tres parejas, y así sucesivamente.
La siguiente es una representación gráfica de este proceso:



En este caso a_n es el número de parejas, de nuestra población de conejos, al inicio del periodo n.
La sucesión es: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

El espacio vectorial

Para cada t números: $c_1, \ldots, c_t$, $c_t \neq 0$, el conjunto de las sucesiones recurrentes con ecuación recurrente

$$a_{n+t} = a_{n+t-1}c_1 + \cdots + a_nc_t. \qquad (n \geq 0) \tag{II.3}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión t, ya que tenemos en principio $t+1$ grados de libertad, uno para cada a_i, $i = n, n+1, \ldots, n+t$, y una restricción, justo la que da la ecuación (II.3).
Podemos calcular una base de este espacio, pero vamos primero a ver qué progresiones geométricas podemos encontrar en este espacio vectorial.
Consideramos una progresión geométrica, por ejemplo $a_n = a_{n-1}r = a_0r^n$, con $a_0 \neq 0$ y $r \neq 0$ para evitar casos triviales.
Se verifican entonces las igualdades

$$a_0r^{n+t} = a_0r^{n+t-1}c_1 + \cdots + a_0r^nc_t. \tag{II.4}$$

$$r^t = r^{t-1}c_1 + \cdots + rc_{t-1} + c_t. \tag{II.5}$$

Llamamos a ésta la **ecuación característica de la sucesión**.
Cada solución α de esta ecuación determina una progresión geométrica $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ que pertenece al espacio vectorial.
Cuando α tiene multiplicidad al menos dos tenemos en este mismo espacio otra sucesión recurrente, ahora no geométrica, la definida por $0, \alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \ldots$. Para comprobarlo, como α es también raíz de la derivada de $r^t - r^{t-1}c_1 - \cdots - c_t$, entonces α es raíz del polinomio:

$$tr^{t-1} - (t-1)r^{t-2}c_1 - \cdots - 2rc_{t-2} - c_{t-1}, \tag{II.6}$$

y al multiplicar por r, también es raíz de

$$tr^t - (t-1)r^{t-1}c_1 - \cdots - 2r^2c_{t-2} - rc_{t-1}. \tag{II.7}$$

De esta forma la sucesión $0, \alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \ldots$ también verifica la ecuación (II.4) y pertenece el espacio de soluciones..
Cuando la multiplicidad de α es tres o superior podemos seguir un proceso similar para encontrar nuevas sucesiones. Veamos el caso de tres: Tras derivar tenemos que α es raíz de

$$t(t-1)r^{t-2} - (t-1)(t-2)r^{t-3}c_1 - \cdots - 3\cdot 2rc_{t-3} - 2c_{t-2}, \tag{II.8}$$

multiplicando por r^2 se obtiene que α es raíz de:

$$t(t-1)r^t - (t-1)(t-2)r^{t-1}c_1 - \cdots - 3\cdot 2r^3c_{t-3} - 2r^2c_{t-2}. \tag{II.9}$$

Ahora es fácil comprobar que (II.7)+(II.9) nos da

$$t^2r^t - (t-1)^2r^{t-1}c_1 - \cdots - 3^2r^3c_{t-3} - 2r^2c_{t-2} - r^2c_{t-1}, \tag{II.10}$$

y que α es raíz de este polinomio, tenemos entonces la solución: $0, \alpha, 2^2\alpha^2, 3^2\alpha^3, \ldots$
Para multiplicidades superiores se obtienen resultados análogos, ya que basta desarrollar los productos $t(t-1)(t-2)$, $t(t-1)(t-2)(t-3)$, etc., y obtener la máxima potencia de t en términos de las restantes.
De esta forma podemos obtener nuevas sucesiones recurrentes en el mismo espacio vectorial. De hecho si la multiplicidad de α es s, obtenemos la siguientes sucesiones recurrentes, que son linealmente independientes:

$$\begin{array}{rlllll}
1: & 1, & \alpha, & \alpha^2, & \alpha^3, \ldots \\
2: & 0, & \alpha, & 2\alpha^2, & 3\alpha^3, \ldots \\
3: & 0, & \alpha, & 2^2\alpha^2, & 3^2\alpha^3, \ldots \\
\vdots & & & & \\
s: & 0, & \alpha, & 2^{s-1}\alpha^2, & 3^{s-1}\alpha^3, \ldots
\end{array}$$

Si las raíces del polinomio $r^t - r^{t-1}c_1 - \cdots - c_t$ son $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ con multiplicidades $s_1, \ldots, s_h$, respectivamente, uniendo las construcciones para cada una de ellas obtenemos una base del espacio vectorial formada por $s_1 + \cdots + s_h$ sucesiones recurrentes.

Ejemplo. 5.4. (Sucesión de Fibonacci.)
Vamos a calcular el término general de la sucesión de Fibonacci dada por la ecuación de recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para $n \geq 0$ con las condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Ver ejemplo (5.3.).

En este caso $t = 2$, y $c_1 = 1 = c_2$.
La ecuación característica es: $r^2 - r - 1 = 0$.
Las raíces son: $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, y son raíces simples.
Una base del espacio de las sucesiones recurrentes está formado por las dos progresiones geométricas: $\{\alpha_1^n\}_n$ y $\{\alpha_2^n\}_n$. Entonces el término general a_n se escribe

$$a_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n, \text{ para cada entero no negativo } n.$$

En donde λ_1 y λ_2 son números que vamos a determinar utilizando las condiciones iniciales.
Para $n = 0$ se verifica: $0 = \lambda_1 + \lambda_2$, y para $n = 1$ se tiene: $1 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.
Tenemos pues un sistema lineal $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 = 1 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

El término general de la sucesión de Fibonacci es:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esta expresión se conoce como la **Fórmula de Binet**,y para cada entero no negativo da siempre valores enteros.
Ver también otro ejemplo en el problema (8.5.).

Construcción de sucesiones recurrentes. Producto

Supongamos que tenemos dos sucesiones recurrentes, $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dadas por las ecuaciones de recurrencia

$$\begin{array}{l} a_{n+t} = a_{n+t-1}c_1 + \cdots + a_nc_t \\ b_{m+s} = b_{m+s-1}d_1 + \cdots + b_md_s \end{array}$$

podemos suponer que tenemos términos generales dados por expresiones del tipo siguiente:

$$\begin{array}{l} a_n = \sum_{i=1}^h p_i\alpha_i^n, \\ b_n = \sum_{j=1}^k q_j\beta_j^n \end{array}$$

en donde p_i y q_j son polinomios en n, cuyo grado depende de la multiplicidad de la raíz α_i ó β_j, respectivamente en la ecuación característica.
Definimos una nueva sucesión mediante:

$$x_n = a_n \cdot b_n, \text{ para cada índice } n.$$

El término general de la nueva sucesión $\{x_n\}_n$ es el producto de los términos de las sucesiones factores.

$$x_n = \sum_{i=1}^h p_i\alpha_i^n \sum_{j=1}^k q_j\beta_j^n = \sum_{i,j} p_iq_j(\alpha_i\beta_j)^n,$$

entonces el problema es el cálculo de la ecuación característica de $\{x_n\}_n$; ésta va a depender de los polinomios p_i y q_j que aparezcan. Vamos a estudiar dos ejemplos.

Proposición. 5.5. (Caso cuadrático)
Consideramos las sucesiones recurrentes

$$\begin{array}{l} a_{n+2} = a_{n+1}c_1 + a_nc_2 \text{ y condiciones iniciales } a_0, a_1; \\ b_{n+2} = b_{n+1}d_1 + b_nd_2 \text{ y condiciones iniciales } b_0, b_1. \end{array}$$

Si α_1, α_2 son las raíces de la ecuación característica $r^2 = rc_1 + c_2$ y si β_1, β_2 son las raíces de la ecuación característica $r^2 = rd_1 + d_2$, entonces tenemos:

$$\begin{array}{l} a_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n, \\ b_n = \mu_1\beta_1^n + \mu_2\beta_2^n, \\ x_n = \lambda_1\mu_1(\alpha_1\beta_1)^n + \lambda_1\mu_2(\alpha_1\beta_2)^n + \lambda_2\mu_1(\alpha_2\beta_1)^n + \lambda_2\mu_2(\alpha_2\beta_2)^n \end{array}$$

(Los casos en que existen raíces múltiples se tratan de la misma manera.)
Como consecuencia el polinomio característico de $\{x_n\}_n$ es:

$$(r - \alpha_1\beta_1)(r - \alpha_1\beta_2)(r - \alpha_2\beta_1)(r - \alpha_2\beta_2),$$

la cual se puede expresar en función de los polinomios característicos originales ya que sus coeficientes son polinomios simétricos en los α_i y polinomios simétricos en los β_j.

En nuestro caso tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&(r-\alpha_1\beta_1)(r-\alpha_1\beta_2)(r-\alpha_2\beta_1)(r-\alpha_2\beta_2)\\
&\qquad = \alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2^2 - \left(\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^2\beta_2 + \alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2 + \alpha_1^2\alpha_2\beta_1\beta_2^2 + \alpha_1\alpha_2^2\beta_1\beta_2^2\right) r\\
&\qquad\quad + \left(\alpha_1\alpha_2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_2^2\right) r^2\\
&\qquad\quad - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2)\, r^3 + r^4\\
&\qquad = c_2^2 d_2^2 - c_1c_2d_1d_2 r - (c_1^2 d_2 + c_2 d_1^2 + 2c_2d_2)r^2 - c_1d_1r^3 + r^4
\end{aligned}$$

Ejercicio. 5.6.
Se consideran las sucesiones recurrentes definidas por

$$\begin{array}{l}
a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ y la fórmula } a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \text{ para } n \geq 0 \text{ y}\\
b_0 = 1, b_1 = 2 \text{ y la fórmula } b_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \text{ para } n \geq 2.
\end{array}$$

Se define la nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n \cdot b_n$. Vamos a calcular el término general de x_n y su ecuación característica.

Primero el polinomio característico es:

$$c_2^2 d_2^2 - c_1c_2d_1d_2 r - (c_1^2 d_2 + c_2 d_1^2 + 2c_2d_2)r^2 - c_1d_1r^3 + r^4,$$

y como $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $d_1 = 3$, $d_2 = -2$, tenemos el valor:

$$r^4 - 6r^3 + 13r^2 - 12r + 4.$$

Las raíces de este polinomio son $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 2$ y $\gamma_4 = 2$. Los valores iniciales son:

$$\begin{aligned}
x_0 &= a_0 \cdot b_0 = 0 \cdot 1 = 0,\\
x_1 &= a_1 \cdot b_1 = 1 \cdot 2 = 2,\\
x_2 &= a_2 \cdot b_2 = 2 \cdot 4 = 8,\\
x_3 &= a_3 \cdot b_3 = 3 \cdot 8 = 24.
\end{aligned}$$

La solución general es:

$$x_n = (\lambda_1 + n\lambda_2) + (\lambda_3 + n\lambda_4)2^n.$$

Para averiguar el término general de la solución al problema, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\lambda_1 & & +\lambda_3 & & = 0,\\
\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2,\\
\lambda_1 & +2\lambda_2 & +4\lambda_3 & +8\lambda_4 & = 8,\\
\lambda_1 & +3\lambda_2 & +8\lambda_3 & +24\lambda_4 & = 24
\end{array}\right\}$$

que tiene la solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$.

El término general de la solución es:

$$x_n = n2^n.$$

La comprobación de que el resultado es correcto es fácil, ya que el término general de $\{a_n\}_n$ es $a_n = n$ y el de $\{b_n\}_b$ es $b_n = 2^n$, y por lo tanto el término general del producto es $n2^n$.

Ejercicio. 5.7.
Se considera las sucesiones recurrentes definidas por

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ y la fórmula } a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n \text{ para } n \geq 0 \text{ y}$$
$$b_0 = 1, b_1 = 0 \text{ y la fórmula } b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n \text{ para } n \geq 0.$$

Se define una nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n \cdot b_n$. Vamos a averiguar el término general de x_n y su ecuación característica.

Primero el polinomio característico es: $c_2^2d_2^2 - c_1c_2d_1d_2r - (c_1^2d_2 + c_2d_1^2 + 2c_2d_2)r^2 - c_1d_1r^3 + r^4$, y como $c_1 = -2$, $c_2 = -1$, $d_1 = 5$, $d_2 = -6$, tenemos el valor:

$$r^4 + 10r^3 + 37r^2 + 60r + 36.$$

Las raíces de este polinomio son $\gamma_1 = -3$, $\gamma_2 = -3$, $\gamma_3 = -2$ y $\gamma_4 = -2$. Los valores iniciales son:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 = 1, \\ x_1 &= a_1 \cdot b_1 = -1 \cdot 0 = 0, \\ x_2 &= a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot (-6) = -6, \\ x_3 &= a_3 \cdot b_3 = -1 \cdot (-30) = 30. \end{aligned}$$

Para calcular el término general de la solución al problema calcular una solución general,

$$x_n = (\lambda_1 + n\lambda_2)(-3)^n + (\lambda_3 + n\lambda_4)(-2)^n,$$

e imponemos que verifique las condiciones iniciales. Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 & +\lambda_3 & = 1, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)(-3) & (\lambda_3 + \lambda_4)(-2) & = 0, \\ (\lambda_1 + 2\lambda_2)(-3)^2 & (\lambda_3 + 2\lambda_4)(-2)^2 & = -6, \\ (\lambda_1 + 3\lambda_2)(-3)^3 & (\lambda_3 + 3\lambda_4)(-2)^2 & = 30 \end{array}\right\}$$

que tiene la solución $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 0$. Así pues tenemos el término general

$$x_n = -2 \cdot (-3)^n + 3 \cdot (-2)^n.$$

La comprobación es fácil, ya que el término general de $\{a_n\}_n$ es $a_n = (-1)^n$ y el de $\{b_n\}_b$ es $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

Ejercicio. 5.8.
Se considera las sucesiones recurrentes definidas por

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3 \text{ y la fórmula } a_{n+2} = -2a_{n+1} + a_n \text{ para } n \geq 0 \text{ y}$$
$$b_0 = 1,\ b_1 = 0 \text{ y la fórmula } b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n \text{ para } n \geq 0.$$

Se define la nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n \cdot b_n$. Vamos a averiguar el término general de x_n y su ecuación característica.

Primero el polinomio característico es: $c_2^2d_2^2 - c_1c_2d_1d_2r - (c_1^2d_2 + c_2d_1^2 + 2c_2d_2)r^2 - c_1d_1r^3 + r^4$, y como $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $d_1 = 5$, $d_2 = -6$, tenemos el valor:

$$r^4 + 10r^3 + 11r^2 - 60r + 36.$$

Las polinomio raíces de este son $\gamma_1 = 2(-1-\sqrt{2})$, $\gamma_2 = 3(-1-\sqrt{2})$, $\gamma_3 = 2(-1+\sqrt{2})$ y $\gamma_4 = 3(-1+\sqrt{2})$. Los valores iniciales son:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 = 1, \\ x_1 &= a_1 \cdot b_1 = 3 \cdot 0 = 0, \\ x_2 &= a_2 \cdot b_2 = -5 \cdot (-6) = 30, \\ x_3 &= a_3 \cdot b_3 = 13 \cdot (-30) = -390. \end{aligned}$$

Para calcular el término general, $x_n = \lambda_1(2(-1-\sqrt{2}))^n + \lambda_2(3(-1-\sqrt{2}))^n + \lambda_3(2(-1+\sqrt{2}))^n + \lambda_4(3(-1+\sqrt{2}))^n$, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{lllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = 1 \\ \lambda_1(2(-1-\sqrt{2})) & +\lambda_2(3(-1-\sqrt{2})) & +\lambda_3(2(-1+\sqrt{2})) & +\lambda_4(3(-1+\sqrt{2})) & = 0 \\ \lambda_1(2(-1-\sqrt{2}))^2 & +\lambda_2(3(-1-\sqrt{2}))^2 & +\lambda_3(2(-1+\sqrt{2}))^2 & +\lambda_4(3(-1+\sqrt{2}))^2 & = 30 \\ \lambda_1(2(-1-\sqrt{2}))^3 & +\lambda_2(3(-1-\sqrt{2}))^3 & +\lambda_3(2(-1+\sqrt{2}))^3 & +\lambda_4(3(-1+\sqrt{2}))^3 & = -390 \end{array}\right\}$$

que tiene la solución

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}(1-2\sqrt{2}), \lambda_2 = -1+2\sqrt{2}, \lambda_3 = \frac{3}{2}(1+2\sqrt{2}), \lambda_4 = -1-2\sqrt{2}.$$

Así pues tenemos el término general

$$\begin{aligned} x_n = \tfrac{3}{2}&(1-2\sqrt{2})(2(-1-\sqrt{2}))^n + (-1+2\sqrt{2})(3(-1-\sqrt{2}))^n \\ &+\tfrac{3}{2}(1+2\sqrt{2})(2(-1+\sqrt{2}))^n + (-1-2\sqrt{2})(3(-1+\sqrt{2}))^n. \end{aligned}$$

La comprobación es fácil, ya que el término general de $\{a_n\}_n$ es

$$a_n = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})(-1-2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})^n$$

y el de $\{b_n\}_b$ es

$$b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

Proposición. 5.9. (Caso cúbico)
Consideramos las sucesiones recurrentes

$$\begin{array}{l} a_{n+3} = a_{n+2}c_1 + a_{n+1}c_2 + a_nc_3 \text{ y condiciones iniciales } a_0, a_1, a_2; \\ b_{n+2} = b_{n+1}d_1 + b_nd_2 \text{ y condiciones iniciales } b_0, b_1. \end{array}$$

Y se define la nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n \cdot b_n$*. Si* α_1*,* α_2*,* α_3 *son las raíces de la ecuación característica* $r^3 = r^2c_1 + rc_2 + c_3$ *y si* β_1*,* β_2 *son las raíces de la ecuación característica* $r^2 = rd_1 + d_2$*, entonces tenemos:*

$a_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n + \lambda_3\alpha_3^n$,
$b_n = \mu_1\beta_1^n + \mu_2\beta_2^n$,
$x_n = \lambda_1\mu_1(\alpha_1\beta_1)^n + \lambda_1\mu_2(\alpha_1\beta_2)^n + \lambda_2\mu_1(\alpha_2\beta_1)^n + \lambda_2\mu_2(\alpha_2\beta_2)^n + \lambda_3\mu_1(\alpha_3\beta_1)^n + \lambda_3\mu_2(\alpha_3\beta_2)^n$

(Los casos en que existen raíces múltiples se tratan de la misma manera.) Como consecuencia el polinomio característico de $\{x_n\}_n$ es:

$$(r - \alpha_1\beta_1)(r - \alpha_1\beta_2)(r - \alpha_2\beta_1)(r - \alpha_2\beta_2)(r - \alpha_3\beta_1)(r - \alpha_3\beta_2),$$

la cual se puede expresar en función de los polinomios característicos originales ya que sus coeficientes son polinomios simétricos en los α_i y polinomios simétricos en los β_j.

En nuestro caso tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
(r-\alpha_1\beta_1)(r-\alpha_1\beta_2)(r-\alpha_2\beta_1)(r-\alpha_2\beta_2)(r-\alpha_3\beta_1)(r-\alpha_3\beta_2) \\
= \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^3\beta_2^3 \\
- \Big(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\beta_1^3\beta_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2\beta_1^3\beta_2^2 + \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^3\beta_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\beta_1^2\beta_2^3 \\
+ \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^3 + \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^3\Big)\, r \\
+ \Big(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\beta_1^3\beta_2 + \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\beta_1^3\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\beta_1^3\beta_2 + \alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2^2 \\
+ 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^2 \\
+ \alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2^3 + \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\beta_1\beta_2^3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\beta_1\beta_2^3\Big)\, r^2 \\
- \Big(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2\beta_1^2\beta_2 + \alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2 + \alpha_1^2\alpha_3\beta_1^2\beta_2 \\
+ 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1^2\beta_2 + \alpha_2^2\alpha_3\beta_1^2\beta_2 + \alpha_1\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2 + \alpha_2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2 \\
+ \alpha_1^2\alpha_2\beta_1\beta_2^2 + \alpha_1\alpha_2^2\beta_1\beta_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3\beta_1\beta_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2^2 \\
+ \alpha_2^2\alpha_3\beta_1\beta_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2\beta_1\beta_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2\beta_1\beta_2^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_2^3\Big)\, r^3 \\
+ \Big(\alpha_1\alpha_2\beta_1^2 + \alpha_1\alpha_3\beta_1^2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \\
+ \alpha_2^2\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_3\beta_1\beta_2 + 2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2 + \alpha_3^2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_2^2 \\
+ \alpha_1\alpha_3\beta_2^2 + \alpha_2\alpha_3\beta_2^2\Big)\, r^4 \\
- (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_2)\, r^5 + r^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= -c_3^2d_2^3 + c_2c_3d_1d_2^2r - (c_1c_3(d_1^2d_2 + 2d_2^2) - c_2^2d_2^2)r^2 \\
- (c_2c_1(d_1d_2) + c_3(d_1^3 + 3d_1d_2))r^3 - (c_2(d_1^2 + 2d_2) + c_1^2d_2)r^4 \\
- c_1d_1r^5 + r^6 \quad \text{(II.11)}
\end{aligned}$$

Así pues el polinomio característico es:

$$\begin{aligned}
&-c_3^2d_2^3 \\
&+c_2c_3d_1d_2^2r \\
&-\left(c_1c_3(d_1^2d_2 + 2d_2^2) - c_2^2d_2^2\right) r^2 \\
&-\left(c_2c_1(d_1d_2) + c_3(d_1^3 + 3d_1d_2)\right) r^3 \\
&-\left(c_2(d_1^2 + 2d_2) + c_1^2d_2\right) r^4 \\
&-c_1d_1r^5 \\
&+r^6
\end{aligned}$$

Ejercicio. 5.10.
Se considera las sucesiones recurrentes definidas por

$$a_0 = 6,\ a_1 = 5,\ a_2 = 11 \text{ y la fórmula } a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n \text{ para } n \geq 0 \text{ y}$$
$$b_0 = 1,\ b_1 = 0 \text{ y la fórmula } b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n \text{ para } n \geq 0.$$

Se define la nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n \cdot b_n$. Vamos a averiguar el término general de x_n y su ecuación característica.

Primero el polinomio característico es el dado en la fórmula (II.11). Como $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$, $d_1 = 5$, $d_2 = -6$, tenemos el valor:

$$r^6 - 39r^4 - 70r^3 + 324r^2 + 1080r + 864.$$

Cuyas raíces son $\gamma_1 = -3$, $\gamma_2 = -3$, $\gamma_3 = -2$, $\gamma_4 = -2$, $\gamma_5 = 4$ y $\gamma_6 = 6$. Los valores iniciales son:

$$\begin{aligned}
x_0 &= a_0 \cdot b_0 = 6 \cdot 1 = 6,\\
x_1 &= a_1 \cdot b_1 = 5 \cdot 0 = 0,\\
x_2 &= a_2 \cdot b_2 = 11 \cdot (-6) = -66,\\
x_3 &= a_3 \cdot b_3 = 27 \cdot (-30) = -810\\
x_4 &= a_4 \cdot b_4 = 43 \cdot (-114) = -4902\\
x_5 &= a_5 \cdot b_5 = 103 \cdot (-390) = -40170.
\end{aligned}$$

Para calcular el término general, $x_n = (\lambda_1 + n\lambda_2)(-3)^n + (\lambda_3 + n\lambda_4)(-2)^n + \lambda_5 4^n + \lambda_6 6^n$, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda_1 + 0\lambda_2)(-3)^0 + (\lambda_3 + 0\lambda_4)(-2)^0 + \lambda_5 4^0 + \lambda_6 6^0 = 6,\\
(\lambda_1 + 1\lambda_2)(-3)^1 + (\lambda_3 + 1\lambda_4)(-2)^1 + \lambda_5 4^1 + \lambda_6 6^1 = 0,\\
(\lambda_1 + 2\lambda_2)(-3)^2 + (\lambda_3 + 2\lambda_4)(-2)^2 + \lambda_5 4^2 + \lambda_6 6^2 = -66,\\
(\lambda_1 + 3\lambda_2)(-3)^3 + (\lambda_3 + 3\lambda_4)(-2)^3 + \lambda_5 4^3 + \lambda_6 6^3 = -810,\\
(\lambda_1 + 4\lambda_2)(-3)^4 + (\lambda_3 + 4\lambda_4)(-2)^4 + \lambda_5 4^4 + \lambda_6 6^4 = -4902,\\
(\lambda_1 + 5\lambda_2)(-3)^5 + (\lambda_3 + 5\lambda_4)(-2)^5 + \lambda_5 4^5 + \lambda_6 6^5 = -40170,
\end{array}\right\}$$

que tiene la solución $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = -6$, $\lambda_5 = 9$ y $\lambda_6 = -6$. Así pues tenemos el término general

$$x_n = (-6 + 4n)(-3)^n + (9 - 6n)(-2)^n + 9 \cdot 4^n - 6 \cdot 6^n.$$

La comprobación es fácil, ya que el término general de $\{a_n\}_n$ es

$$a_n = (3 - 2n)(-1)^n + 3 \cdot 2^n,$$

y el de $\{b_n\}_n$ es

$$b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

6. Sucesiones recurrentes no homogéneas

Las sucesiones recurrentes no homogéneas son las soluciones a ecuaciones del tipo

$$a_n = a_{n-1}c_1 + \cdots + a_{n-t}c_t + f(n), \qquad (n \geq t), \tag{II.12}$$

en donde $f(n)$ es una función de n.
Para distinguir esta sucesión recurrente de las sucesiones antes introducidas, las vamos a llamar **sucesiones recurrentes no homogéneas**.
Las sucesiones recurrentes no homogéneas no constituyen un espacio vectorial, como fácilmente se puede observar. Pero sí podemos considerar el espacio vectorial de las sucesiones recurrentes (homogéneas) asociado; esto es, el definido por la ecuación (homogénea)

$$a_n = a_{n-1}c_1 + \cdots + a_{n-t}c_t, \qquad (n \geq t), \tag{II.13}$$

de forma que cada sucesión recurrente que verifica la ecuación (II.12) se va a obtener como una combinación lineal de una solución particular de (II.12) y una combinación lineal de sucesiones en el espacio vectorial definido por la ecuación (II.13).

Una construcción de sucesiones recurrentes. La suma

Supongamos que tenemos dos sucesiones recurrentes, $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dadas por las ecuaciones de recurrencia

$$\begin{array}{l} a_n = a_{n-1}c_1 + \cdots + a_{n-t}c_t \\ b_m = b_{m-1}d_1 + \cdots + b_{m-s}d_s \end{array}$$

podemos suponer que tenemos términos generales dados por expresiones del tipo siguiente:

$$\begin{array}{l} a_n = \sum_{i=1}^{h} p_i\alpha_i^n, \\ b_n = \sum_{j=1}^{k} q_j\beta_j^n \end{array}$$

en donde p_i y q_j son polinomios en n, cuyo grado depende de la multiplicidad de la raíz α_i ó β_j, respectivamente en el polinomio (ecuación) característica.
Definimos una nueva sucesión mediante:

$$x_n = a_n + b_n, \text{ para cada índice } n.$$

El término general de la nueva sucesión $\{x_n\}_n$ es la suma de los términos de las sucesiones.

$$x_n = \sum_i p_i\alpha_i^n + \sum_j q_j\beta_j^n,$$

entonces el problema es el cálculo de la ecuación característica de $\{x_n\}_n$; ésta depende de los polinomios p_i y q_j que aparezcan y de las raíces α_i y β_j.

Cuando las raíces α_i y β_j son distintas, resulta que el polinomio característico de la sucesión $\{x_n\}_n$, es exactamente el producto de los polinomios característicos de $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_b$.
Cuando existe una raíz común, entonces el polinomio característico se obtiene a partir del producto de los polinomios característicos, pero considerando las raíces comunes con la máxima multiplicidad.
En cualquier caso podemos siempre suponer que las raíces son distintas y tomar como polinomio característico el producto de los dos polinomios característicos; la razón es que en cualquier caso la sucesión $\{x_n\}_n$ pertenece al espacio vectorial determinado por el producto de los dos polinomios.

Ejercicio. 6.1.
Consideramos las sucesiones

$$\{a_n\}_n \text{ definida por } a_0 = 6,\ a_1 = 5,\ a_2 = 11 \text{ y } a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3},\ n \geq 3 \text{ y}$$
$$\{b_n\}_n \text{ definida por } b_0 = 1,\ b_1 = 0 \text{ y } b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2},\ n \geq 2.$$

Se define la nueva sucesión recurrente con $x_n = a_n + b_n$. Vamos a averiguar el término general de x_n y su ecuación característica.

Primero calculamos el término general de $\{a_n\}_n$, que es: $a_n = (3-2n)(-1)^n + 3 \cdot 2^n$; su polinomio característico es: $r^3 - 3r - 2 = (r+1)^2(r-2)$.
Ahora calculamos el término general de $\{b_n\}_n$, que es: $b_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$; su polinomio característico es: $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$.
El término general de $\{x_n\}_n$ es:

$$x_n = (3-2n)(-1)^n + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n = (3-2n)(-1)^n + 6 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n.$$

Su polinomio característico es $(r+1)^2(r-2)(r-3)$, pero es también una sucesión asociada a $(r+1)^2(r-2)^2(r-3)$, y por tanto el término general de $\{x_n\}_n$ podemos obtenerlo a partir de cualquiera de estos dos polinomios característicos.

Cálculo del término general

Veamos una aplicación de la suma de sucesiones recurrentes. Se considera una sucesión recurrente no homogénea

$$a_n = a_{n-1}c_1 + \cdots + a_{n-t}c_t + f(n), \qquad (n \geq t), \tag{II.14}$$

si $f(n)$ es el término general de una sucesión recurrente con polinomio característico $Q(r)$, entonces podemos proceder como sigue: consideramos la fórmula de recurrencia homogénea

$$a_n = a_{n-1}c_1 + \cdots + a_{n-t}c_t, \qquad (n \geq 0), \tag{II.15}$$

el polinomio característico que define, sea $P(r)$ y tomamos una sucesión recurrente del espacio vectorial asociado, sea $\{h_n\}_n$. Entonces a_n se puede escribir

$$a_n = h_n + f(n),$$

esto es, $\{a_n\}_n$ es la suma de dos sucesiones: $\{h_n\}_n$ y $\{f(n)\}_n$; por lo tanto, cuando $\{f(n)\}_n$ es una sucesión recurrente, conocemos que la sucesión $\{a_n\}_n$ es una sucesión recurrente asociada al polinomio $P(r)Q(r)$.
Este simple argumento nos permite calcular fácilmente una solución particular de la recurrencia no lineal (II.14), pues sabemos calcular soluciones de recurrencias homogéneas. En este cálculo, por comodidad, los sumandos que corresponden a $P(r)$ podemos eliminarlos al obtener la solución particular, ya que estos aparecerán de nuevo al considerar la solución general.
Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 6.2.
Se considera la relación de recurrencia no homogénea

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2n + 5n^4,$$

sujeta a las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

Vamos a calcular una solución particular. Consideramos la ecuación característica que define una sucesión con $2n + 5n^4$ como término general; en este caso $(r-1)^5$.
Tenemos que $\{a_n\}_n$ es la suma de dos sucesiones, una definida por la relación $h_n = 3h_{n-2} + 2h_{n-3}$, con polinomio característico $r^3 - 3r - 2 = (r+1)^2(r-2)$, y otra por los términos $2n + 5n^4$. Entonces un polinomio característico para $\{a_n\}_n$ es:

$$(r-1)^5(r+1)^2(r-2)$$

Una solución genérica es:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 n^3 + \lambda_5 n^4) + (\lambda_6 + \lambda_7 n)(-1)^n + \lambda_8 2^n$$

Como antes hemos señalado, la parte $(\lambda_6 + \lambda_7 n)(-1)^n + \lambda_8 2^n$ podemos eliminarla, ya que la encontraremos de nuevo al obtener la solución general; así pues trabajamos con $\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 n^3 + \lambda_5 n^4$.
Al imponer que verifica la ecuación de definición se tiene:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 n^3 + \lambda_5 n^4 \\
&= 3(\lambda_1 + \lambda_2(n-2) + \lambda_3(n-2)^2 + \lambda_4(n-2)^3 + \lambda_5(-2)n^4) \\
&\quad +2(\lambda_1 + \lambda_2(n-3) + \lambda_3(n-3)^2 + \lambda_4(n-3)^3 + \lambda_5(n-3)^4) \\
&\quad +2n + 5n^4.
\end{aligned}$$

Al desarrollar se obtiene

$$\begin{aligned}
&-4\lambda_1 + 12\lambda_2 - 30\lambda_3 + 78\lambda_4 - 210\lambda_5 \\
&+(-2 - 4\lambda_2 + 24\lambda_3 - 90\lambda_4 + 312\lambda_5)n \\
&+(-4\lambda_3 + 36\lambda_4 - 180\lambda_5)n^2 \\
&+(-4\lambda_4 + 48\lambda_5)n^3 \\
&+(-5 - 4\lambda_5)n^4 = 0
\end{aligned}$$

De aquí se deducen las relaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} & -4\lambda_1 & +12\lambda_2 & -30\lambda_3 & +78\lambda_4 & -210\lambda_5 = 0 \\ -2 & & -4\lambda_2 & +24\lambda_3 & -90\lambda_4 & +312\lambda_5 = 0 \\ & & & -4\lambda_3 & +36\lambda_4 & -180\lambda_5 = 0 \\ & & & & -4\lambda_4 & +48\lambda_5 = 0 \\ -5 & & & & & -4\lambda_5 = 0 \end{array}\right\}$$

que tiene como solución:

$$\lambda_1 = -\frac{1341}{4}, \lambda_2 = -233, \lambda_3 = -\frac{315}{4}, \lambda_4 = -15, \lambda_5 = -\frac{5}{4}.$$

Entonces una solución particular es:

$$-\frac{1341}{4} - 233n - \frac{315}{4}n^2 - 15n^3 - \frac{5}{4}n^4$$

La solución general es la que se obtiene al sumar a la solución particular una solución general de $h_n = 3h_{n-2} + 2h_{n-3}$, cuya ecuación característica, como ya sabemos, es: $r^3 - 3r - 2 = (r+1)^2(r-2)$. Por tanto la solución general de la homogénea es:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 n)(-1)^n + \lambda_3 2^n$$

y una solución general de la recurrencia es:

$$-\frac{1341}{4} - 233n - \frac{315}{4}n^2 - 15n^3 - \frac{5}{4}n^4 + (\lambda_6 + \lambda_7 n)(-1)^n + \lambda_8 2^n$$

Para calcular λ_6, λ_7 y λ_8 tenemos considerar las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{rrrr} -\frac{1341}{4} & +\lambda_6 & & +\lambda_8 = 1 \\ -\frac{2653}{4} & -\lambda_6 & -\lambda_7 & +2\lambda_8 = 2 \\ -\frac{5025}{4} & +\lambda_6 & +2\lambda_7 & +4\lambda_8 = 3 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_6 = \frac{401}{36}$, $\lambda_7 = -\frac{157}{6}$, $\lambda_8 = \frac{2926}{9}$.
La solución general de la recurrencia no homogénea es:

$$-\frac{1341}{4} - 233n - \frac{315}{4}n^2 - 15n^3 - \frac{5}{4}n^4 + \left(\frac{401}{36} - \frac{157}{6}n\right)(-1)^n + \frac{2926}{9}2^n$$

7. Funciones generatrices

Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de números reales o complejos, podemos definir entonces una función formal mediante

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

Recordar que esta función formal no define una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ ó de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, ya que en general no está definida la suma infinita. Casos particulares se presentan cuando la sucesión $\{a_n\}_n$ es nula a partir de un índice; en este caso $f(x)$ está definido por un polinomio. Otro caso es cuando la serie que define $f(x)$ es convergente, entonces $f(x)$ estará definida en una parte de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, según el caso.

Nosotros estamos interesados en los coeficientes, o los términos de la sucesión que definen a $f(x)$, por lo que llamamos a $f(x)$ la **función generatriz** de la sucesión $\{a_n\}_n$.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 7.1.
Si consideramos la sucesión constante igual a 1 la función generatriz es: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, que corresponde al desarrollo en serie de la función $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Casos más sencillos se plantean cuando consideramos otras funciones.

Ejemplo. 7.2.
La función

$$x \mapsto (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^+ \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

es la función generatriz cuya sucesión es:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots$$

Ejemplo. 7.3.
La función

$$x \mapsto (1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}x^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

es la función generatriz cuya sucesión es:

$$\binom{n}{0}, -\binom{n}{1}, \ldots, (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}, (-1)^n\binom{n}{n}, 0, 0, \ldots$$

Como se verifica $1-x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$, entonces la función

$$x \mapsto \frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+\cdots+x^{n-1},$$

resulta que es la función generatriz de la sucesión 1, 1, ..., 1, 0, 0 ,..., en donde aparecen exactamente n unos.

Llevado el proceso al límite se obtiene que la función $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ es la función generatriz de la sucesión infinita en la que los coeficientes de todos los términos son iguales a uno, como hemos señalado anteriormente.

Realizando modificaciones a estas funciones obtenemos nuevas funciones generatrices.

Ejemplo. 7.4.
Si derivamos $\frac{1}{1-x}$ con respecto a x se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

La sucesión asociada es: 1, 2, 3, 4, 5, ... Al multiplicar por x se tiene $\frac{x}{(1-x)^2}$, que es la función generatriz de la sucesión: 0, 1, 2, 3, ...

Ejemplo. 7.5.
Si derivamos esta nueva función, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$$

La sucesión asociada es: $1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$

Un problema doméstico

Ejemplo. 7.6.
María tiene un montón de 12 monedas que quiere repartir entre tres huchas, sean A, B y C. ¿De cuántas formas lo puede hacer si en la hucha A tiene que introducir al menos 4 monedas, en las huchas B y C tiene que introducir al menos 2 monedas y en la hucha C no puede introducir más de 5 monedas?

SOLUCIÓN. Podríamos hacer una tabla y considerar todos los casos de forma exhaustiva, a modo de ejemplo tenemos:

A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
4	3	5	5	2	5	6	2	4	7	2	3	8	2	2
4	4	4	5	3	4	6	3	3	7	3	2			
4	5	3	5	4	3	6	4	2						
4	6	2	5	5	2									

Existe otra forma alternativa, que consiste en considerar:

- para la hucha A el polinomio $x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$; sus coeficientes son todos iguales a uno, que corresponde a la condición de que en la hucha A tiene que haber al menos 4 monedas.
- para la hucha B el polinomio $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$; sus coeficientes son todos iguales a uno. Como entre las huchas A y C tiene que haber al menos 6 monedas, quedan, como máximo, 6 monedas para la hucha B, y como al menos tiene que haber 2, de ahí el polinomio que se considera.
- para la hucha C el polinomio $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$; sus coeficientes son todos iguales a uno que corresponde a la condición de que en la hucha C tiene que haber al menos 2 y como máximo 5 monedas.

Al realizar el producto

$$\begin{aligned}&(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5)\\&\quad = x^{19}+3x^{18}+6x^{17}+10x^{16}+14x^{15}+16x^{14}+16x^{13}+14x^{12}+10x^{11}+6x^{10}+3x^9+x^8.\end{aligned}$$

El coeficiente de x^{12} es justamente el número que andamos buscado, en este caso 14. La ventaja es que es más sencillo realizar el producto de los tres polinomios para determinar este coeficiente que hacer un tratamiento combinatorio de este problema. □

Ejemplo. 7.7.
¿De cuántas formas es posible repartir 10 monedas entre tres personas si cada una debe recibir al menos 2 monedas?

SOLUCIÓN. Siguiendo el anterior método de los polinomios, basta determinar el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$. Como el desarrollo es:

$$x^6+3x^7+6x^8+10x^9+15x^{10}+18x^{11}+19x^{12}+18x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$

el valor pedido es 15. □

Series de Maclaurin

Se trata de calcular el desarrollo de $1/(1+x)^n$, o equivalentemente de $(1+x)^{-n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Para esto introducimos los números combinatorios $\binom{-n}{r}$, para $n, r \in \mathbb{N}$.
Se define $\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$.
Entonces la **serie de Maclaurin** de $(1+x)^{-n}$ es:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3+\cdots\\ &= 1+\sum_{r=1}\infty\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r,\end{aligned}$$

que es la expresión análoga al desarrollo del binomio $(1+x)^n$.
Por extensión se define la expansión en serie de Maclaurin de $(1+x)^r$ para cualquier número real r.

Series de Fibonacci

Consideramos la sucesión de Fibonacci:

$$a_0=0,\, a_1=1,\, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, \text{ si } n\geq 0.$$

La función generatriz definida por esta sucesión es:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=0+x+x^2+2x^3+3x^4+\cdots$$

La definición de la sucesión de Fibonacci nos proporciona la siguiente relación entre las funciones generatrices:

$$f(x)-xf(x)-x^2f(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)x^{n+2}+\cdots=x.$$

En consecuencia se tiene la **serie de Fibonacci**:

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Los coeficientes de $f(x)$ se puede determinar ahora atendiendo a esta fracción.
Método 1. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{\gamma - x} + \frac{B}{\delta - x} = \frac{A(\delta - x) + B(\gamma - x)}{(\gamma - x)(\delta - x)}.$$

Se tiene $x^2 + x - 1 = (x-\gamma)(x-\delta)$, donde $\gamma = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\delta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, con relaciones:

$$\alpha\beta = -1, \quad \alpha + \beta = -1 \quad \text{y} \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

Además se tiene

$$-x = A(\delta - x) + B(\gamma - x) = (A\delta + B\gamma) - (A+B)x,$$

de donde $A + B = 1$ y $A(\delta - x) + B(\gamma - x) = 0$, entonces $A = \frac{\gamma}{\gamma-\delta}$ y $B = \frac{-\delta}{\gamma-\delta}$. En consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{\gamma}{(\gamma-\delta)(\gamma-x)} + \frac{-\delta}{(\gamma-\delta)(\delta-x)} \\ &= \frac{1}{(\gamma-\delta)(1-\frac{x}{\gamma})} - \frac{1}{(\gamma-\delta)(1-\frac{x}{\delta})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{\gamma})} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{\delta})}. \end{aligned}$$

Basta entonces desarrollar en serie la fracción $\frac{1}{(1-\frac{x}{\gamma})}$ para obtener los términos de la sucesión de Fibonacci.

$$\frac{1}{1-\frac{x}{\gamma}} = 1 + \frac{x}{\gamma} + \left(\frac{x}{\gamma}\right)^2 + \cdots,$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{\gamma})} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{\delta})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{x}{\gamma} + \left(\frac{x}{\gamma}\right)^2 + \cdots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{x}{\delta} + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}\right)x + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Finalmente observar que $\gamma = -\beta$ y $\delta = -\alpha$, ver página 23. Por lo tanto se tiene $\frac{1}{\gamma} = \alpha$ y $\frac{1}{\delta} = \beta$, y obtenemos la fórmula de Binet, ver página 23.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\delta^n}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\alpha^n - \beta^n\right).$$

Método 2. Escribimos

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-x(1+x)}.$$

Consideramos el desarrollo $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, y aplicando a este caso se tiene:

$$\frac{x}{1-x(1+x)} = x(1 + x(1+x) + x^2(1+x)^2 + x^3(1+x)^3 + \cdots)$$

$$
\begin{aligned}
&= x \\
&\qquad x^2 + x^3 \\
&\qquad\qquad x^3 + 2x^4 + x^5 \\
&\qquad\qquad\qquad x^4 + 3x^5 + 3x^6 + x^7 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x^5 + 4x^6 + 6x^7 + 4x^8 + x^9 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdots \\
&= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

8. Ejercicios con solución

Sucesiones recurrentes

Ejercicio. 8.1.
Se considera la sucesión recurrente definida por

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n,\ \text{para } n \geq 0.$$

Calcular el término general.

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (8.1.)
La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tiene una raíz $\alpha = 3$ demultiplicidad dos. El término de una solución general es:

$$a_n = \lambda_1 3^n + \lambda_2 n 3^n,$$

Las condiciones iniciales son: $a_0 = 3$ y $a_1 = 3$.
Al resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \lambda_1, \\ 3 = \lambda_1 3 + \lambda_2 3 \end{array}\right\},$$

llegamos a las soluciones $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, y por tanto la sucesión que es solución es de este problema es:

$$a_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot n3^n = (3 - 2n)3^n.$$

□

Ejercicio. 8.2.
Se considera una sucesión de Fibonacci, esto es, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, siendo a_0 y a_1 arbitrarios. Si todos los a_n son no nulos, demuestra que se verifica:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_m a_{m+1}} = \sum_{j=n}^{m} \frac{1}{a_{j-1}a_{j+1}}, \qquad n \leq m.$$

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (8.2.)Llamamos $t = m - n$, y hacemos inducción sobre t. Si $t = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n-1} - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}$$

Supongamos que el resultado es cierto para t y vamos a ver qué ocurre para $m-n=t+1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_m a_{m+1}} &= \frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_{n+t+1}a_{n+t+2}}\\ &= \frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_{n+t}a_{n+t+1}}+\frac{1}{a_{n+t}a_{n+t+1}}-\frac{1}{a_{n+t+1}a_{n+t+2}}\\ &= \sum_{j=n}^{n+t}\frac{1}{a_{j-1}a_{j+1}}+\frac{1}{a_{n+t}a_{n+t+2}}\\ &= \sum_{j=n}^{n+t+1}\frac{1}{a_{j-1}a_{j+1}}\\ &= \sum_{j=n}^{m}\frac{1}{a_{j-1}a_{j+1}}.\end{aligned}$$

Tomar el ejemplo: $a_0=1$, $a_1=1$, entonces

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$a_{n-1}a_n$	–	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895	12816
$a_{n-1}a_{n+1}$	–	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920	

Tomando $n=5$ y $m=9$ se obtiene

$$\frac{1}{a_4a_5}=\frac{1}{a_9a_{10}}+\sum_{j=5}^{9}\frac{1}{a_{j-1}a_{j+1}}.$$

$$\frac{1}{a_4a_5}=\frac{1}{a_9a_{10}}+\frac{1}{a_4a_6}+\frac{1}{a_5a_7}+\frac{1}{a_6a_8}+\frac{1}{a_7a_9}+\frac{1}{a_8a_{10}}$$

$$\frac{1}{40}=\frac{1}{4895}+\frac{1}{65}+\frac{1}{168}+\frac{1}{442}+\frac{1}{1155}+\frac{1}{3026}$$

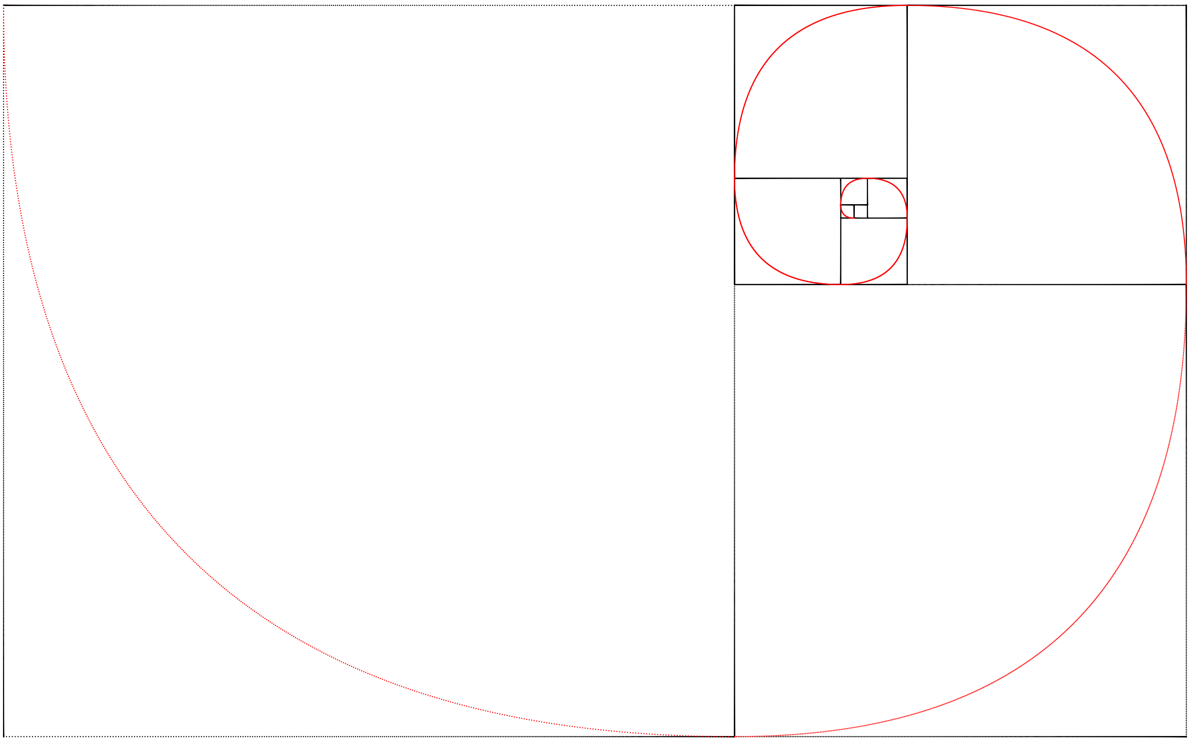
□

Ejercicio. 8.3.
REDACTAR.

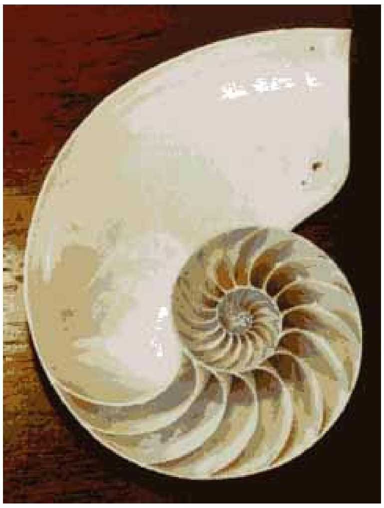
SOLUCIÓN

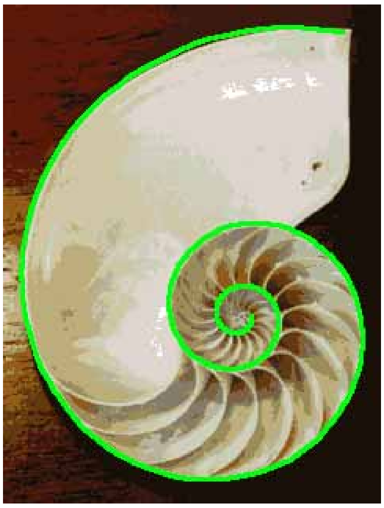
SOLUCIÓN. Ejercicio (8.3.)
HACER. □

Ejercicio. 8.4. (Espiral de Fibonacci)
Se considera la siguiente construcción de cuadrados:



Observa que el lado de cada uno de los cuadrados varía según la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
La curva obtenida se conoce como la espiral de Durero y recuerda al desarrollo del Nautilus.





SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (8.4.)
HACER. □

Ejercicio. 8.5. (Números de Perrin)
La sucesión a_n definida por

$$a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$$

fue introducida por Edouard Lucas (Amer. J. Math., vol. 1 (1978)). Años después fue utilizada por R. Perrin. En 1982 Dan Shanks y Bill Adams en Math. of Computation, vol. 39 (1982) hacen un estudio de esta sucesión a sus términos le dan el nombre de números de Perrin.
Determina la función generatriz de la sucesión de los números de Perrin.
De forma análoga a la espiral de cuadrados de Fibonacci se tiene una espiral de triángulos equiláteros; vamos a ver cómo asociada a la misma tenemos una sucesión de números de Perrin.

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN. Ejercicio (8.5.)

Si $f(x)$ es la función generatriz, se verifica:

$$\begin{array}{rl}
f(x) & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\
-x^2f(x) & \qquad\qquad a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots \\
-x^3f(x) & \qquad\qquad\qquad\quad a_0x^3 + a_1x^4 + \cdots
\end{array}$$

sumando se tiene

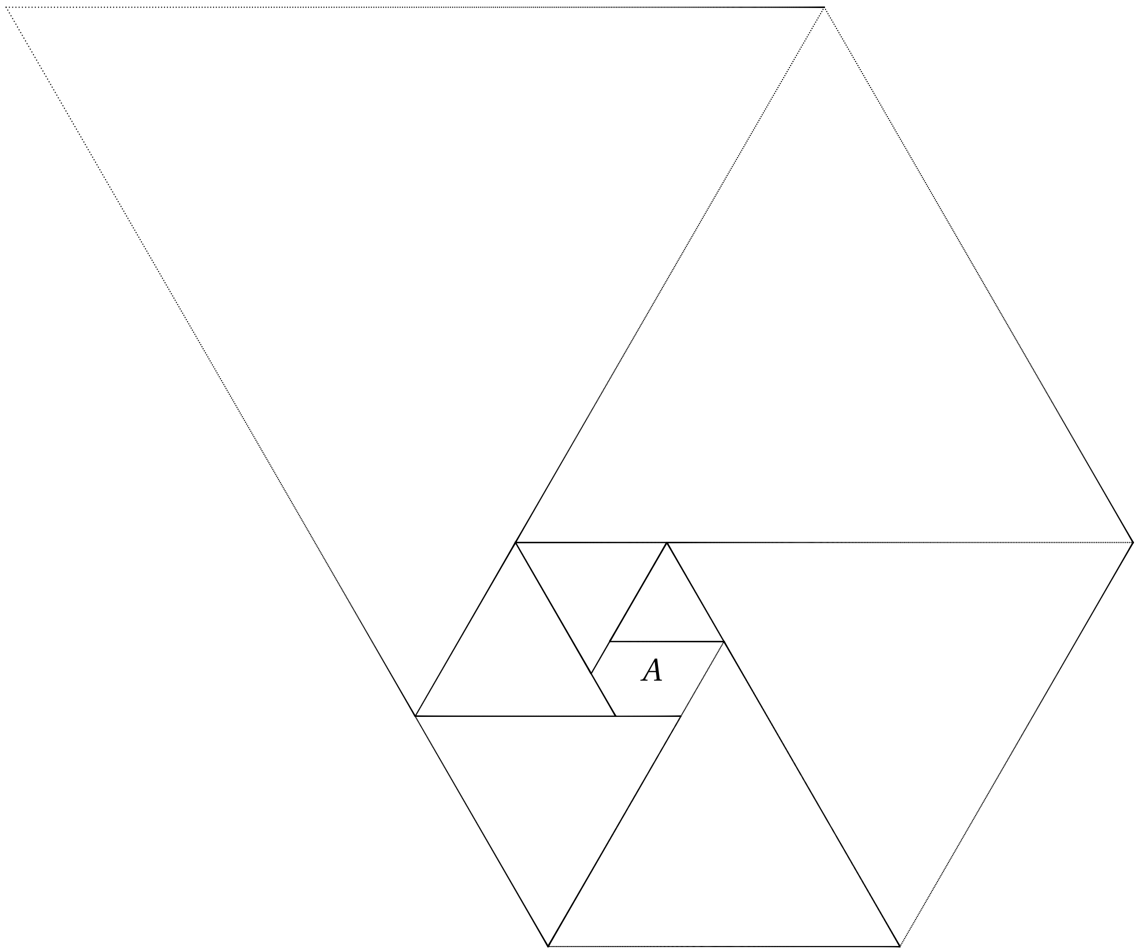
$$\left(1 - x^2 - x^3\right) f(x) = a_0 + a_1x + (a_2 - a_0)x^2 = 3 - x^2$$

En consecuencia

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

es la función generatriz.

Observa la siguiente construcción con triángulos equiláteros:



Se tiene $h_0 + h_1 = h_3$, $h_1 + h_2 = h_4$, etc. Por lo tanto las alturas de los triángulos están en la misma progresión que los números de Perrin. Esto nos debería permitir calcular la relación entre h_n y h_{n+1}. Primero observa que la ecuación característica de la sucesión de Perrin es:

$$X^3 = X + 1.$$

Calcula el área de la región marcada con la letra A.
Determina la expresión general del término n–ésimo de la sucesión de números de Perrin.

$\square$

Capítulo III

Ejercicios de repaso

9. Ejercicios de repaso

Ejercicios de repaso

Problema. 9.1.
Dados enteros positivos $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ verificando:

$$\left\{\begin{array}{r} a_1 > a_0, \\ a_2 = 3a_1 - 2a_0, \\ \ldots \\ a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}. \end{array}\right\}$$

Probar que $a_{100} > 2^{99}$.
[The problems of the All-Soviet-Union mathematical competitions 1961-1986. Problem 015]

SOLUCIÓN. Supongamos que $a_1 = a_0 + h$ para algún entero positivo h. Entonces

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3(a_0 + h) - 2a_0 = a_0 + 3h.$$

En general se tiene entonces $a_n = a_0 + f_n h$, para algún entero positivo f_n. La relación de definición de la sucesión f_n es la misma que para a_n, siendo $f_1 = 1$ y $f_2 = 3$, $f_{n+2} = 3f_{n-1} - 2f_n$. La sucesión f_n tiene por ecuación característica $r^2 = 3r - 2$. Las raíces son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$. Entonces una base del espacio de las sucesiones recurrentes es: $\{1\}_n$ y $\{2^{n-1}\}_n$. El término general f_n se expresa $f_n = \lambda_1 1 + \lambda_2 2^{n-1}$. Tenemos entonces

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ 3 = \lambda_1 + \lambda_2 2 \end{array}\right\}$$

La solución es $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_1 = 2$, y tenemos $f_n = -1 + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n - 1$.
Se tiene entonces $a_n = a_0 + f_n h = a_0 + (2^{100} - 1)h > 2^{99}$.

□

Problema. 9.2.
Se considera la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \text{ para } n \geq 2.$$

Esta sucesión comienza:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \ldots$$

Se observa fácilmente que los términos a_{2h} son los únicos que son múltiplos de 2, que los términos a_{4h} son los únicos que son múltiplos de 4, y que los términos a_{8h} son los únicos que son múltiplos de 8.
Se pide probar que para cada entero positivo t se tiene que a_n es múltiplo de 2^t si y sólo si n es múltiplo de 2^t.
[Crux Mathematicorum, 1988, 225. From Erdös to Kiev. Problems of Olympiad Caliber. MAA, 1996, pag. 79]

SOLUCIÓN. La ecuación de recurrencia es $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, luego la ecuación característica es: $r^2 = 2r + 1$. Las raíces de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$ son: $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$.
El término general de la sucesión a_n es: $a_n = \lambda_1\alpha_1^{n-1} + \lambda_2\alpha_2^{n-1}$. De donde resulta:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ 2 &= \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 \end{aligned}$$

Los valores son: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha_1$ y $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2$. Y el término general se expresa:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_1^n - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2^n \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \tfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\} \qquad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Cuando n es par, por ejemplo $n = 2h$ tenemos:

$$\begin{aligned} a_{2h} &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left\{(1+\sqrt{2})^{2h} - (1-\sqrt{2})^{2h}\right\} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left\{(1+\sqrt{2})^h + (1-\sqrt{2})^h\right\}\left\{(1+\sqrt{2})^h - (1-\sqrt{2})^h\right\} \end{aligned}$$

La expresión $(1+\sqrt{2})^h + (1-\sqrt{2})^h$ es múltiplo de 2 y no de 4.

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^h + (1-\sqrt{2})^h &= 2\sum_{i=0;par}^{h}\binom{h}{i}\sqrt{2}^i \\ &= 2(1 + \binom{h}{2}2 + \cdots) \end{aligned}$$

Como consecuencia la expresión de a_{2h} es:

$$a_{2h} = 2 \cdot X \cdot a_h, \qquad \text{siendo } X \text{ un número impar}$$

Como a_n es impar si y solo si n es impar, entonces tenemos el resultado haciendo inducción sobre n. □

Problema. 9.3.
Se considera una bandera, la cual se puede pintar, por franjas horizontales, de cuatro colores, sean A, B, C y D. Queremos averiguar cuál es el número total de banderas que podemos pintar con n franjas atendiendo a las siguientes condiciones:
(1) Cada franja está pintada de un color.
(2) Cada franja está pintada de un color y dos franjas contiguas lo están de colores distintos.
(3) Cada franja está pintada de un color, dos franjas contiguas están pintadas de colores distintos y la franja superior y la franja inferior están pintadas de distinto color.

SOLUCIÓN.
(1). Es claro que cada franja puede ser pintada de cualquiera de los cuatro colores, luego el número total de banderas de n franjas es: 4^n.

(2). La primera franja se puede pintar con cualquiera de los cuatro colores, en cambio la segunda, tercera, etc. sólo pueden pintarse de tres de los cuatro colores, luego el número total de banderas es: $4 \cdots 3^{n-1}$.

(3). Vamos a averiguar el número de banderas a_n que podemos pintar con n franjas, suponiendo que conocemos las banderas que se pueden pintar con menos franjas.
De cualquier bandera de $n-1$ franjas podemos obtener otra de n franjas sin más que pintar una n-ésima franja de un color distinto a la primera franja y a la última franja; el número total de banderas así obtenido es $2a_{n-1}$.
De cualquier bandera de $n-2$ franjas podemos obtener otra de n franjas sin más que pintar la franja $n-1$ del mismo color que la primera y la franja n-ésima de un color diferente; el número total de banderas así obtenido es $3a_{n-2}$.
Es claro que cada bandera de n franjas verificando las condiciones del enunciado está entre las consideradas, ya que si la franja primera y penúltima son distintas, se obtiene a partir de la primera construcción, y si son iguales a partir de la segunda.
Tenemos entonces $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ para $n \geq 4$. Los valores iniciales son: $a_2 = 12$; las banderas son: *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* y las que se obtienen cambiando el orden, en total 12. El valor de a_3 es 24, ya que tenemos las banderas *ABC*, *ABD*, *ACD* y *BCD* y todas las que se obtienen permutando los colores, en total $4 \times 6 = 24$. Los valores de a_0 y a_1 son iguales a cero; podemos no considerarlos en nuestra sucesión.
La ecuación característica es: $r^2 = 2r + 3$, sus raíces son:

$$\alpha_1 = -1 \text{ y } \alpha_2 = 3.$$

El término general es:

$$a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2(3)^n,$$

que da las ecuaciones:

$$\begin{cases} 12 = \lambda_1(-1)^2 + \lambda_2(3)^2 & \lambda_1 = 3 \\ 24 = \lambda_1(-1)^3 + \lambda_2(3)^3 & \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = 3(-1)^n + 3^n, \text{ para } n \geq 2.$$

□

Problema. 9.4.
Andrés tiene n euros para gastar. Puede gastarlos:
- en caramelos; una bolsa de caramelos le cuesta un euro, o
- en pasteles; hay dos tipos de pasteles y cada uno cuesta dos euros.
¿De cuántas formas distintas puede Andrés gastar los n euros? (Nota. Importa el orden en que Andrés hace el gasto.)

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de formas en que Andrés puede gastar n monedas. Veamos qué relaciones verifica a_n.
(1) Si el último gasto de Andrés fue de un euro, sólo lo puede gastar de una forma, luego tenemos a_{n-1} formas de gastar n euros.
(2) Si el último gasto de Andrés fue de dos euros, puede gastarlo en uno de los dos tipos de pasteles, luego tenemos $2a_{n-2}$ formas de gastar n euros.
La suma de estas posibilidades será el número que andamos buscando:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

Tenemos además los siguientes casos: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$. Así pues se trata de averiguar el término general de una sucesión recurrente de orden 2.
La ecuación característica es: $r^2 = r + 2$, y sus raíces son: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$.
La sucesión recurrente general es: $a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n$. Que verifica:

$$\begin{array}{ll} 1 = \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 = \frac{1}{3} \\ 1 = \lambda_1(-1) + \lambda_2 2, & \lambda_2 = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^{n+1}.$$

□

Problema. 9.5.
Calcular el número de listas de longitud n, formadas por los elementos 0, 1, y 2, en las que no aparezcan dos ceros seguidos.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n el número de listas de longitud n verificando las propiedades del enunciado.
(1) Si a una lista, en las condiciones del enunciado, de longitud $n-1$ le añadimos 1 ó 2, entonces tenemos una lista válida de longitud n; el número total es $2a_{n-1}$,

(2) Si a una lista, en las condiciones del enunciado, de longitud $n-2$ le añadimos 10 ó 20, entonces tenemos una lista válida de longitud n.
Como cualquier lista válida de longitud n se obtiene de una de estas formas, resulta la igualdad:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

Se tienen además las siguiente condiciones iniciales: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9 - 1 = 8$, ya que las listas 11, 12, 22, 10, 01, 20, 02, 21 son válidas, todas menos la 00.
La ecuación característica es: $r^2 = 2r + 2$, y las raíces son: $\alpha_1 = 1 + \sqrt{3}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{3}$.
La sucesión recurrente general es: $a_n = \lambda_1(1+\sqrt{3})^{n-1} + \lambda_2(1-\sqrt{3})^{n-1}$. Que verifica además:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 &= \tfrac{3+2\sqrt{3}}{6} \\ 3 &= \lambda_1(1+\sqrt{3}) + \lambda_2(1-\sqrt{3}), & \lambda_2 &= \tfrac{3-2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

La expresión del término general es:

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n.$$

□

Ejercicio. 9.6.
Se considera el conjunto de todas las listas de longitud n en el alfabeto $\{0,1,2\}$.

(1) ¿Cuántas listas verifican que cada elemento es menor o igual que anterior?

(2) ¿Cuántas son capicúas?

(3) ¿Cuantas contienen dos elementos consecutivos iguales?

(4) ¿Cuántas hay que que no tienen ni dos unos ni dos doses consecutivos?

SOLUCIÓN.

(1) Llamamos a_n al número de listas en las que cada elemento es menor o igual que el anterior. Observa que de cada lista de este tipo de n elementos podemos formar una con $n+1$, basta añadir un elemento 0 al final. Observa que solo hay una lista con 2 al final, y que ésta está formada solo por elementos iguales a 2. Veamos que hay exactamente $n+1$ listas de este tipo con $n+1$ elementos que acaben en l; hacemos la demostración por inducción sobre n. Para $n = 0$ el resultado es cierto, ya que solo hay una lista con un elemento que acabe en 1. Supongamos que hay t listas de longitud t de este tipo que acaben en uno; de cada una de ellas formamos una de $t+1$ elementos simplemente añadiendo un 1 al final; por otro lado como hay una sola lista que acaba en 2, si le agregamos un 1 al final tenemos una lista de longitud $t+1$ que acaba en 1. Es decir en total tenemos $t+1$ listas de longitud $t+1$ de este tipo que acaban en 1.

Así pues $a_{n+1} = a_n + n + 2$.

Buscamos el polinomio característica de una sucesión con término general del tipo $n+2$; éste es: $(r-1)^2$. Por otro lado la recurrencia $a_{n+1} = a_n$ tiene el polinomio característico $r-1$. La sucesión general determinada por el polinomio característico $(r-1)^3$ es $\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2$. Si esta sucesión verifica la relación $a_{n+1} = a_n + n + 2$ tenemos:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2(n+1) + \lambda_3(n+1)^2 = \lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + n + 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)n + \lambda_3 n^2 = (\lambda_1 + 2) + (\lambda_2 + 1)n + \lambda_3 n^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 2 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_2 + 1 \\ \lambda_3 = \lambda_3 \end{array}\right\}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Al imponer que verifique las condiciones iniciales resulta:

$$a_1 = 3 = \lambda_1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

Esto es, $\lambda_1 = 1$. Así pues el término general de la solución es: $a_n = 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.

(2) Recordar que una lista es capicúa si leída en el orden habitual o en el orden inverso el resultado es el mismo. Observar que una lista capicúa de $2n+1$ elementos se construye a partir de una lista capicúa de $2n$ elementos agregando uno en la posición central, y que toda lista de $2n+2$ elementos también se obtiene de una de $2n$ elementos agregando, en este caso, dos iguales en las posiciones centrales. Por lo tanto si llamamos a_n al número de listas capicúas de n elementos, se tiene $a_{2n+1} = a_{2n+2} = 3a_{2n}$. Basta pues considerar los elementos $a_2, a_4, a_6, \ldots$. renombramos estos números en la forma $b_n = a_{2n}$. La relación para los a_i escrita para los b_j es: $b_{n+1} = 3b_n$ para $n \geq 1$, ya que no estamos consideramos listas vacías, con la condición inicial $b_1 = 3$. Tenemos pues ua sucesión geométrica de término general $b_n = 3^n$, con $n \geq 1$. Por lo tanto el valor que andamos buscando es:

$$a_{2n-1} = a_{2n} = b_n = 3^n, \quad n \geq 1.$$

(3) Llamamos a_n al número de listas con dos elementos consecutivos iguales; tiene sentido esta definición para $n \geq 2$. Se verifica $a_2 = 3$. Si llamamos b_n al número de listas en las que no hay elementos consecutivos iguales, entonces $b_2 = 6$ y se verifica $a_2 + b_2 = 3 + 6 = 9 = 3^2$, que es el número total de listas de dos elementos. Tal vez sea más sencillo calcular b_n que a_n. Se tiene $b_3 = 2b2$, ya que cada lista de dos elementos distintos proporciona dos listas de tres elementos en las que no hay dos elementos consecutivos iguales. Este argumento es válido para cualquier longitud mayor que dos, y por tanto se tiene $b_{n+1} = 2b_n$, si $n \geq 2$. Como $b_2 = 6 = 2 \times 3$, resulta $b_n = 3 \times 2^{n-1}$.

Como consecuencia $a_n = 3^n - b_n = 3^n - 3 \times 2^{n-1} = 3(3^{n-1} - 2^{n-1})$.

(4) Llamamos a_n al número de listas de longitud n en las que no hay dos unos o dos doses consecutivos. Es claro que $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ y $a_3 = 17$. Vamos a ver una recurrencia entre estos números. Dada una lista de n elementos verificando las condiciones, si agregamos un 0 al final tendremos una lista de $n+1$ elementos verificando las condiciones. Además, a cada lista de n elementos podemos agregar al final 1 o 2 según si finaliza en 2 o en 1, de esta forma tenemos una lista de $n+1$ elementos que verifica las condiciones; nos quedan las listas de n elementos que acaben un 0; en este caso agregamos al final 1. Observar que de esta forma no tenemos todas las listas de $n+1$ elementos que verifican las condiciones; nos faltan justamente las que finalizan en ..,02; pero de éstas hay exactamente a_{n-1}, que son los posibles inicios de $n-1$ elementos. Si contamos ahora todas las listas obtenidas, resulta la igualdad

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}.$$

Ésta es la ecuación de recurrencia que verifica la sucesión $\{a_n\}_n$. Su polinomio característico es: r^2-2r-1, y sus raíces son $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$. La sucesión general tiene la expresión $\lambda_1(1+\sqrt{2})^n + \lambda_2(1-\sqrt{2})^n$. Al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 = \lambda_1(1+\sqrt{2}) + \lambda_2(1-\sqrt{2}) \\ a_2 = 7 = \lambda_1(1+\sqrt{2})^2 + \lambda_2(1-\sqrt{2})^2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, de forma que el término general de la sucesión es:

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right).$$

□

Problema. 9.7.
Dado un entero positivo n un desorden *de n es una ordenación del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *en la que ningún elemento ocupa su lugar original.*
Calcular el número de desórdenes posibles de un conjunto de n elementos.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de desórdenes del conjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Veamos como podemos construir un estado de desorden de estos n elementos a partir un conjunto menor de elementos.
(1) Dado un estado de desorden de los $n-1$ elementos $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, conseguimos otro estado de desorden intercambiando n con cada uno de los otros elementos. En total tenemos $(n-1)a_{n-1}$ estados de desorden;
(2) Otra forma de obtener un estado de desorden de n elementos es considerar una permutación de los $n-1$ primeros elementos en la que un solo elemento esté en su posición original, sea i. Ahora en el lugar de i ponemos n y ponemos i al final (derecha); se obtiene así un estado de desorden. En total tenemos $(n-1)a_{n-2}$ estados de desorden.

El total de estados de desorden es $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$. Se verifica además: $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$; como consecuencia $a_3 = 2(1+0) = 2$; estos son los dos ciclos 231 y 312.

Vamos a calcular el término general de esta sucesión. Para ello introducimos dos sucesiones auxiliares:

$$b_n = n - 1, \text{ si } n \geq 1,$$

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \text{ si } n \geq 3, c_1 = 1, c_2 = 1$$

Es claro que la sucesión $\{c_n\}_n$ es la sucesión de Fibonacci, cuyo término general es: $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Tenemos entonces que el término general de $\{a_n\}_n$ es:

$$a_n = \frac{(n-1)\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

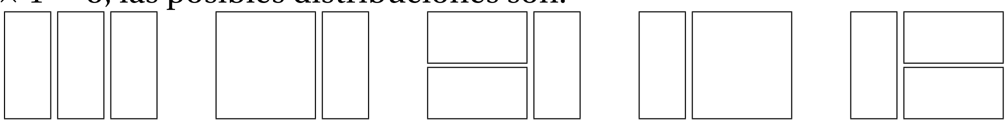
□

Problema. 9.8.
¿De cuántas formas se puede cubrir un tablero rectangular de dimensión $2 \times n$ *con piezas de dimensiones* 1×2 *y* 2×2.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de formas en que podemos cubrir un tal tablero $2 \times n$, y observamos cómo es la última o últimas piezas que ponemos.
(1) La última pieza es una 1×2, en esta caso sólo se puede poner de una forma, supuesto que hemos completado en tablero de dimensión $2 \times (n-1)$, luego el número de formas que aporta es a_{n-1}.
(2) La última pieza es una pieza 2×2, podemos hacerlo de dos formas: bien una pieza 2×2, o bien dos piezas 1×2 horizontales, de ambas formas podríamos acabar el tablero, el número total de formas de completarlo que aporta es $2a_{n-2}$.
Como consecuencia el número a_n está determinado por las relaciones:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Los valores iniciales son: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, esto es, dos piezas 1×2 verticales, dos piezas 1×2 horizontales y una pieza 2×2. Veamos el caso de a_3, el valor por la fórmula es: $a_3 = 3 + 2 \times 1 = 5$, las posibles distribuciones son:



Para calcular el término general primero determinamos la ecuación característica: $r^2 = r + 2$; las raíces son: $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 2$.
El término general de la sucesión es: $A_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n$. Al imponer las condiciones iniciales se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_1 = 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. El término general de la sucesión buscada es: $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n$.

Nota: Semejante al problema de la página 50. □

Problema. 9.9.
Bernardo sube la escalera de su casa saltando en cada paso uno o dos escalones. Si la escalera de la casa de Bernardo tiene treinta escalones, de cuántas formas diferentes puede subir Bernardo la escalera.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de formas distintas en que puede Bernardo subir una escalera de n escalones.
(1) Si el último paso de Bernardo es de un escalón, entonces Bernardo sube la escalera de a_{n-1} formas distintas,
(2) Si el último paso de Bernardo es de dos escalones, entonces Bernardo cube la escalera de a_{n-2} formas distintas.
El número total de formas de subir una escalera de n escalones es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Los casos iniciales son: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$; esto es, estamos en presencia de la sucesión de Fibonacci. □

Problema. 9.10.
Determinar el número de cadenas binarias (con ceros y unos) de longitud n que contienen dos ceros consecutivos.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de cadenas válidas de longitud n. Dada una cadena válida de longitud n, estudiamos las siguientes posibilidades:
(1) La cadena acaba en 1; en este caso la cadena proviene de una cadena válida de longitud $n-1$; tenemos en total a_{n-1},
(2) La cadena acaba en 0; en este caso la cadena puede haber sido obtenida a partir de una cadena válida de longitud $n-2$ agregando bien 00 ó bien 10, tenemos en total $2a_{n-2}$ de éstas; o bien a partir de una cadena no válida de longitud $n-2$ a la que hemos agregado 00, tenemos $2^{n-2} - a_{n-2}$ de éstas.
El número total de cadenas válidas de longitud n es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$. Los valores iniciales son: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$
La ecuación característica es: $r^2 = r + 1$, cuyas raíces son: $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, que fue estudiada con la sucesión de Fibonacci
Falta ahora encontrar una solución particular de la ecuación de recurrencia no homogénea $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$. Supongamos que ésta sea $\alpha 2^{n-2}$, entonces se verifica:

$$\alpha 2^{n-2} = \alpha 2^{n-3} + \alpha 2^{n-4} + 2^{n-2},$$

$$\alpha = 4.$$

Una solución particular es 2^n. La solución general es

$$a_n = 2^n + \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Al introducir las condiciones iniciales tenemos:

$$0 = 2 + \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \lambda_1 = -\tfrac{2\sqrt{5}+5}{5},$$
$$1 = 2^2 + \lambda_1\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \qquad \lambda_2 = \tfrac{2\sqrt{5}-5}{5}$$

La solución es:

$$a_n = 2^n - \frac{2\sqrt{5}+5}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{2\sqrt{5}-5}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

□

Problema. 9.11.
Calcular el término general de la sucesión definida por

$$a_n = a_{n-1} + n^2 + 3n - 5, \text{ si } n \geq 1, \text{ y } a_1 = 2$$

SOLUCIÓN. Tenemos que al calcular las diferencias, éstas son:

$$\begin{array}{rcccccc}
a_* & 2 & 1 & 6 & 19 & 42 & 77\cdots \\
\Delta a_* & & -1 & 5 & 13 & 23 & 35\cdots \\
\Delta^2 a_* & & & 6 & 8 & 10 & 12\cdots \\
\Delta^3 a_* & & & & 2 & 2 & 2\ \cdots
\end{array}$$

Entonces la sucesión es una progresión aritmética de orden 3. La fórmula para calcular el término general es:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_1.$$

Ver la fórmula (I.2) en la página 9.

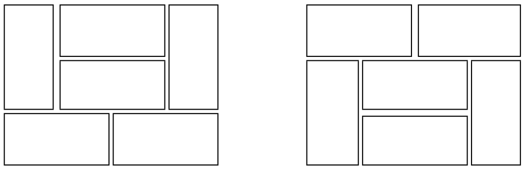
$$\begin{aligned}
a_n &= \binom{n}{0} a_1 + \binom{n}{1} \Delta a_1 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^3 a_1 \\
&= \binom{n}{0} 2 + \binom{n}{1} (-1) + \binom{n}{2} 6 + \binom{n}{3} 2 \\
&= \tfrac{n^3+6n^2-10n+6}{3}.
\end{aligned}$$

□

Problema. 9.12.
¿De cuántas formas se puede cubrir un tablero de tamaño $3\times 2n$ con piezas de tamaño 1×2?

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de formas de cubrir el tablero $3 \times 2n$. En función de tableros completos este tablero se puede terminar de llenar:
(1) con tres piezas horizontales,

(2) con una pieza horizontal y dos verticales
(2.1) con las dos piezas verticales en la parte superior
(2.2) con las dos piezas verticales en la parte inferior
En resumen un tablero de tamaño $3 \times 2(n-1)4$ se puede rellenar de tres formas diferentes.
Si el tablero tiene tamaño $3 \times 2(n-2)$, entonces se puede rellenar de dos formas, según el siguiente esquema



El número total de formas en que podemos completar el tablero es: $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

□

Problema. 9.13.
Se considera la sucesión recurrente definida por:

$$a_0 = 2 = a_1 \text{ y } a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Hallar el término general.

SOLUCIÓN. Es claro que la ecuación característica es: $r^2 = 2r - 2$, por lo que las raíces son:

$$\alpha_1 = 1 + i \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 1 - i.$$

Entonces el término general es:

$$a_n = \lambda_1(1+i)^n + \lambda_2(1-i)^n,$$

sujeto a las condiciones iniciales $a_0 = 2 = a_1$. Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 = 1 \\ 2 = \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i), & \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

El término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Problema. 9.14.
Calcular la suma de las potencias cuartas y quintas de los números enteros positivos $1, 2, \ldots, n$.

SOLUCIÓN. Potencias cuartas. De la fórmula de la página 11,

$$\binom{k}{k-1} C_n^{k-1} = (n+1)^k - (n+1) - \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k}{i} C_n^i$$

se obtiene para $k = 5$ las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} 5C_n^4 &= (n+1)^5 - (n+1) - \textstyle\sum_{i=1}^3 \binom{5}{i} C_n^i \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 - (5C_n^1 + 10C_n^2 + 10C_n^3) \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - (5\tfrac{n^2+n}{2} + 10\tfrac{2n^3+3n^2+n}{6} + 10\tfrac{(n(n+1))^2}{4}) \\ &= n^5 + \tfrac{5n^4}{2} + \tfrac{5n^3}{3} - \tfrac{n}{6} \\ &= \tfrac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{6}. \end{aligned}$$

Potencias quintas. Utilizando la misma fórmula, para $k = 6$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 6C_n^5 &= (n+1)^6 - (n+1) - \textstyle\sum_{i=1}^4 \binom{6}{i} C_n^i \\ &= n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n + 1 - n - 1 \\ &\quad -(6C_n^1 + 15C_n^2 + 20C^3 - n + 15C_n^4) \\ &= \tfrac{1}{2} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \end{aligned}$$

□

Problema. 9.15.
Se considera la sucesión de Fibonacci: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.
(1) Probar que $a_{n+k} = a_n a_{k+1} + a_{n-1} a_k$.
(2) Probar que a_{nk} múltiplo de a_k.
(3) Se puede extender la definición de la sucesión de Fibonacci para incluir a índices negativos definiendo $a_k = a_{k+2} - ak + 1$ cuando k es un entero negativo. Probar que se verifica: $a_{-n} = (-1)^{n+1} a_n$ para cada entero positivo n.
(4) $\text{m. c. d.}\{a_n, a_k\} = a_{\text{m.c.d.}\{n,k\}}$.

SOLUCIÓN. (1). Hacemos inducción sobre k.
Para $k = 0$ tenemos: $a_n = a_n a_1 + a_{n-1} a_0 = a_n$.
Para $k = 1$ tenemos: $a_{n+1} = a_n a_2 + a_{n-1} a_1 = a_n + a_{n-1} = a_{n+1}$.
Suponemos que el resultado es cierto para todo $m \leq k$, entonces se verifica:

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= a_{n+k} + a_{n+k-1} \\ &= (a_n a_{k+1} + a_{n-1} a_k) + (a_n a_k + a_{n-1} a_{k-1}) \\ &= a_n(a_{k+1} + a_k) + a_{n-1}(a_k + a_{k-1}) \\ &= a_n a_{k+2} + a_{n-1} a_{k+1}. \end{aligned}$$

(2). Hacemos inducción sobre k.

Para $k = 0$ tenemos $a_0 = 0$ y el resultado es cierto. Suponemos que el resultado es cierto para todo $m \leq k$, entonces se verifica:

$$a_{n(k+1)} = a_{nk+n} = a_{nk}a_{k+1} + a_{nk-1}a_k$$

Por la hipótesis a_k divide a a_{nk} y a a_k, luego divide a $a_{n(k+1)}$.
(3). Hacemos inducción sobre n. Comprobamos que si $n = 1$ el resultado es correcto:

$$a_{-1} = a_{-1+2} - a_{-1+1} = a_1 - a_0 = 1 = (-1)^2 a_1$$

Suponemos que el resultado es cierto para todo $m \leq n$, entonces se verifica:

$$\begin{aligned} a_{-(n+1)} &= a_{-n+1} - a_{-n} \\ &= a_{-(n-1)} - a_{-n} \\ &= (-1)^n a_{n-1} - (-1)^{n+1} a_n \\ &= -(-1)^{n+1}(a_{n-1} + a_n) \\ &= (-1)^{(n+1)+1} a_{n+1} \end{aligned}$$

(4). Sea $d = \text{m.c.d.}\{n, k\}$ y sea $X = \text{m.c.d.}\{a_n, a_k\}$. Como $n = dn'$ y $k = dk'$ para ciertos enteros positivos o nulos n' y k', resulta

$$a_n = a_{dn'} \text{ es un múltiplo de } a_d.$$

El mismo argumento vale para a_k, luego a_d es un divisor de a_n y de a_k, por tanto es un divisor de X.
Por otro lado, la identidad de Bezout expresa d en función de n y k, en la forma $d = n\alpha + k\beta$, entonces resulta

$$a_d = a_{n\alpha+k\beta} = a_{n\alpha}a_{k\beta+1} + a_{n\alpha-1}a_{k\beta}.$$

Como a_n divide a $a_{n\alpha}$, entonces X divide a $a_{n\alpha}$, y como a_k divide a $a_{k\beta}$, entonces X divide a $a_{k\beta}$. En consecuencia X divide a a_d, y tenemos el resultado. □

Problema. 9.16.
Se considera la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_n$, y se define una nueva sucesión $F_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Encontrar una expresión recurrente para esta nueva sucesión y determinar su término general.

SOLUCIÓN. Se tiene $F_n = F_{n-1} + a_n$, entonces

$$F_n - F_{n-1} = a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (F_{n-1} - F_{n-2}) + (F_{n-2} - F_{n-3},$$

de donde resulta que $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-3}$. Los valores iniciales son: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_2 = 2$, y la ecuación característica es:

$$r^3 = 2r^2 - 1$$

Sus raíces son: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

El término general de F_n es:

$$F_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_3 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

que el imponer las condiciones iniciales nos da el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda_3 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}\right\}$$

cuya solución es: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$ y $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$. De forma que el término general es:

$$F_n = -1 + \frac{1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

que toma los valores: 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, 232, 376, 609, 986, 1596, 2583, ... □

Problema. 9.17.
Se considera la sucesión de Fibonacci: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Si definimos $P_n = a_{2n}$ y definimos $I_n = a_{2n+1}$, encontrar una relación de recurrencia lineal para P_n e I_n.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$P_n = a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2} = a_{2n-1} + P_{n-1}.$$

De aquí se obtiene $s_{2n-1} = P_n - P_{n-1}$, y por tanto podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} P_n &= a_{2n-1} + P_{n-1} \\ &= a_{2n-2} + a_{2n-3} + P_{n-1} \\ &= P_{n-1} + a_{2n-3} + P_{n-1} \\ &= P_{n-1} + a_{2(n-1)-1} + P_{n-1} \\ &= P_{n-1} + (P_{n-1} - P_{n-2}) + P_{n-1} \\ &= 3P_{n-1} - P_{n-2} \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$.
Para el cálculo del término general de P_n primero calculamos la ecuación característica: $r^2 = 3r - 1$, cuyas raíces son: $\alpha_:1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, entonces el término general es: $P_n = \lambda_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$; al imponer las condiciones iniciales se tiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right\}$$

que tiene solución $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. El término general es:

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para I_n procedemos en la misma forma y obtenemos $I_n = 3I_{n-1} - I_{n-2}$ con las condiciones iniciales $I_0 = 1$, $I_1 = 2$.
Para el cálculo del término general de I_n procedemos en la misma forma. En este caso tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2 = \lambda_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right\}$$

que tiene solución $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ y $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. El término general es:

$$I_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Problema. 9.18. (Los números de Lucas)
Consideramos la sucesión recurrente definida por: $l_0 = 2$. $l_1 = 1$ y la fórmula $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ para $n \geq 2$. Los números l_n se llaman los números de Lucas. *Determinar el término general de la sucesión de los números de Lucas, y probar que si $\{f_n\}_n$ es la sucesión de Fibonacci, entonces se verifica:*

$$\begin{array}{l} l_n = f_{n-1} + f_{n+1}; \\ l_n = f_{n+2} - f_{n-2}; \\ f_h l_n = f_{n+h} + (-1)^{h+1} f_{n-h}. \end{array}$$

Probar la siguiente relación entre números de Fibonacci y números de Lucas $f_{2n} = f_n l_n$.

SOLUCIÓN. La ecuación característica es $r^2 = r + 1$, y sus raíces son: $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. El término general es: $l_n = \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Al imponer las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. De forma que el término general es: $l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Podemos hacer uso de la expresión del término general de la sucesión de Fibonacci: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}+f_{n+1} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\
&= l_n
\end{aligned}$$

La misma relación para f_{n+2} se puede probar ahora como sigue:

$$\begin{aligned}
l_n &= f_{n+1}+f_{n-1} \\
&= f_{n+1}+f_n-f_n+f_{n-1} \\
&= f_{n+2}-f_{n-2},
\end{aligned}$$

ya que de la relación $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$ se obtiene $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$.
Podemos extender estas relaciones a números de Fibonacci y números de Lucas con índices no necesariamente positivos. Al estudiar diferentes casos, observamos la relación:

$$f_h l_n = f_{n+h} + (-1)^{h+1} f_{n-h}.$$

Cuya demostración es sencilla si hacemos inducción sobre h:

$$\begin{aligned}
f_{h+1} l_n &= f_h l_n + f_{h-1} l_n \\
&= f_{n+h} + (-1)^{h+1} f_{n-h} + f_{n+h-1} + (-1)^h f_{n-h+1} \\
&= (f_{n+h}+f_{n+h-1}) + (-1)^{h+2}(-f_{n-h}+f_{n-h+1}) \\
&= f_{n+h+1} + (-1)^{h+2} f_{n-h-1}
\end{aligned}$$

La relación final del enunciado es evidente, basta tomar $h = n$. □

Problema. 9.19.
Consideramos $\{f_n\}_n$ la sucesión de Fibonacci, probar que se verifican las siguientes identidades:

(1) ***Identidad de Cassini.*** $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n-1}f_1^2$.

(2) ***Identidad de Catalan.*** $f_n^2 - f_{n+r}f_{n-r} = (-1)^{n-r}f_r^2$, $r \geq 1$.

(3) ***Identidad de d'Ocagne.*** $f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (-1)^n f_{m-n}$.

(4) ***Identidad de Gelin–Cesàro.*** $f_n^4 - f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2} = 1$.

SOLUCIÓN.

$\square$

Problema. 9.20.
Considerar las sumas parciales de la sucesión de los números de Lucas.

SOLUCIÓN. . $\square$

Problema. 9.21.
Determinar un polinomio $p(x)$ de grado cuatro, sin término independiente, que verifique $p(x) - p(x-1) = x^3$. Demuestra que la suma de los cubos de los n primeros números enteros positivos es $p(n)$.
XXVIII Olimpíada Matemática Dist. Univ. Valencia. Problema núm. 5

SOLUCIÓN. Tenemos $p(0) = 0$, y de $p(x) - p(x-1) = x^3$ se deduce que $p(0) - p(-1) = 0$, luego $p(-1) = 0$. Entonces se tiene la factorización $p(x) = x(x+1)(ax^2 + bx + c)$.
Vamos a dar nuevos valores:

$$\begin{array}{l} n = 1\ p(1) - p(0) = 1 \ \Rightarrow p(1) = 1 = 1 \cdot 2(a+b+c) \\ n = 2\ p(2) - p(1) = 2^3 \Rightarrow p(2) = 2^3 - 1 = 7 = (2 \cdot 3(4a+2b+c) \\ n = 3\ p(3) - p(2) = 3^3 \Rightarrow p(3) = 3^3 - 7 = 20 = 3 \cdot 4(9a+3b+c) \end{array}$$

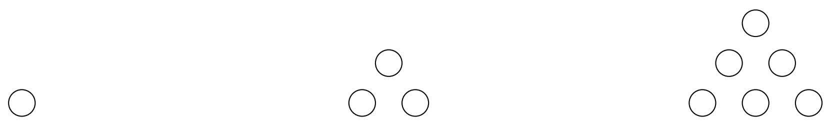
Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c = \frac{1}{2} \\ 4a+2b+c = \frac{7}{6} \\ 9a+3b+c = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \end{array}\right\}$$

La solución es: $a = \frac{1}{4} = b$, $c = 0$. El polinomio es: $p(x) = x(x+1)(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x) = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$.
Por inducción sobre n se prueba que la suma de los n primeros enteros positivos es $p(n)$.

$\square$

Problema. 9.22.
Se considera la sucesión de los números triangulares, esto es, los números que representan los puntos que formas los triángulos siguientes:



Esta sucesión tiene los siguientes elementos: 1, 3, 6, 10, 15, ...
Se trata de encontrar la fórmula del término general de esta sucesión.

SOLUCIÓN. Al hacer las diferencias sucesivas de los elementos de esta sucesión tenemos:

$$\begin{array}{rcccccc}
a_n & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots \\
\Delta a_n & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \\
\Delta^2 a_n & 1 & 1 & 1 & \cdots & &
\end{array}$$

Para construir el término general procedemos al igual que en el problema (4.2.).

$$\begin{aligned}
\Delta a_{n-1} &= \Delta a_0 + S_n^2 - \Delta^2 a_{n-1} \\
&= 2 + n \cdot 1 - 1 \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= a_0 + S_n^1 - \Delta a_{n-1} \\
&= 1 + \tfrac{(2+(n+1))n}{2} - (n+1) \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Problema. 9.23.
Se considera la sucesión de los números tetraédricos, esto es, los números que representan los puntos que formas los tetraedros siguientes:

Esta sucesión tiene los siguientes elementos: 1, 4, 10, 20, 35, ...
Se trata de encontrar la fórmula del término general de esta sucesión.

SOLUCIÓN. Al hacer las diferencias sucesivas de los elementos de esta sucesión tenemos:

$$\begin{array}{rcccccc}
a_n & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdots \\
\Delta a_n & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & \\
\Delta^2 a_n & 3 & 4 & 5 & \cdots & & \\
\Delta^3 a_n & 1 & 1 & \cdots & & &
\end{array}$$

Para construir el término general procedemos al igual que en el problema (4.2.).

$$\begin{aligned}
\Delta^2 a_{n-1} &= \Delta^2 a_0 + S_n^2 - \Delta^3 a_{n-1} \\
&= 3 + n \cdot 1 - 1 \\
&= n + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta a_{n-1} &= \Delta a_0 + S_n^2 - \Delta^2 a_{n-1} \\
&= 3 + \tfrac{(3+(n+2))n}{2} - (n+2) \\
&= \tfrac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_0 + S_n^1 - \Delta a_{n-1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}C_n^2 + \tfrac{3}{2}C_n^1 + C_n^0 - \tfrac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{2n^3+3n^2+n}{6} + \tfrac{3}{2}\tfrac{n(n+1)}{2} + n - \tfrac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \tfrac{2n^3+6n^2+4n}{12} \\ &= \tfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Nota. Los números tetraédricos son la cuarta fila oblicua del triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

La tercera son los números triangulares, por lo tanto las fórmulas para el término general son $\binom{n}{3}$ y $\binom{n}{2}$ respectivamente. □

Problema. 9.24.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ verificando la ecuación de recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + k,$$

verificando las condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = h$.

SOLUCIÓN. Calculamos una solución particular. Sea $\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2$, entonces se tiene:

$$\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2(n-1) + \lambda_3(n-1)^2) + (\lambda_1 + \lambda_2(n-2) + \lambda_3(n-2)^2) - k \\ = 2\lambda_3 - k,$$

entonces si tomamos $\lambda_3 = \frac{k}{2}$, $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$, tenemos la solución particular $\frac{k}{2}n^2$.
La parte homogénea tiene por ecuación característica $r^2 = 2r - 1$; la solución es $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, entonces la solución general de la parte homogénea es: $\lambda_4 + \lambda_5 n$, y la solución general de la ecuación de recurrencia no homogénea es: $\frac{k}{2}n^2 + \lambda_4 + \lambda_5 n$.
Al hacer intervenir ahora a las condiciones iniciales, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_4 = 0 \\ \frac{k}{2} + \lambda_4 + \lambda_5 = h \end{array}\right\}$$

cuya solución es: $\lambda_4 = 0$ y $\lambda_5 = h - \frac{k}{2}$. La solución general es:

$$a_n = \frac{k}{2}n^2 + (h - \frac{k}{2})n = \frac{k}{2}(n^2 - n) + hn.$$

□

Problema. 9.25.
Sean a y b enteros positivos. Hallar el término general de la ecuación recurrente

$$a_n = a_{n-1} + a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}},\ \text{si } n \geq 1, \quad a_0 = 0.$$

[Generalización de un problema propuesto en IMO 1981]

SOLUCIÓN. Vamos a tratar de eliminar los radicales.
Tenemos

$$a_n - a_{n-1} = a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}}, \tag{III.1}$$

y se verifica

$$\begin{aligned} b^2 + 4aa_n &= (b^2 + 4aa_{n-1}) + 4a^2 + 4a\sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}} \\ &= (2a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}})^2. \end{aligned}$$

Luego $\sqrt{b^2 + 4aa_n} = 2a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}}$, lo que da lugar a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_{n-2} + a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-2}} \\ &= a_{n-2} + a - 2a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}}. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$a_{n-1} - a_{n-2} = -a + \sqrt{b^2 + 4aa_{n-1}}. \tag{III.2}$$

Al realizar (III.1)–(III.2) se tiene:

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2a.$$

Además:

$$a_1 = a_0 + a + \sqrt{b^2 + 4aa_0} = a + \sqrt{b^2} = a + b,$$

luego tenemos una sucesión verificando:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a,\ \text{si } n \geq 2, \qquad a_0 = 0, a_1 = a + b,$$

entonces aplicando el problema (9.24.) el término general es:

$$a_n = \frac{2a}{a}n^2 + (a + b - \frac{2a}{a})n = an^2 + bn = (an + b)n, \quad n \geq 2.$$

□

Problema. 9.26.
Demostrar que en la sucesión definida por los siguientes datos:

$a_0 = 0$ *y*
$a_{n+1} = (a_n + 1)k + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$, $n \geq 0$, *k un entero positivo.*

todos sus términos a_n, $n \geq 1$, *son enteros positivos.*
[No elegido en la IMO 1983]

SOLUCIÓN. Como la sucesión es estrictamente creciente, y como $a_0 = 0$, entonces todos los términos a_n, $n \geq 1$ son positivos. Vamos a ver que son enteros.
Al tratar de eliminar los radicales se tiene:

$$a_{n+1} - (a_n + 1)k - (k+1)a_n = 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$$

Elevando al cuadrado y agrupando en el primer miembro se obtiene:

$$a_n^2 - 2a_n(a_{n+1} + k + 2a_{n+1}k) + (a_{n+1} - k)^2 = 0.$$

Resolvemos esta ecuación en a_n y se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{2(a_{n+1}+k+2a_{n+1}k)\pm\sqrt{4(a_{n+1}+k+2a_{n+1}k)^2-4(a_{n+1}-k)^2}}{2} \\ &= a_{n+1}(2k+1) + k \pm 2\sqrt{a_{n+1}(a_{n+1}+1)(k+1)k} \end{aligned}$$

Ahora, como la sucesión es estrictamente creciente, en el radical debemos tomar el signo “menos":

$$a_n = a_{n+1}(2k+1) + k - 2\sqrt{a_{n+1}(a_{n+1}+1)(k+1)k}$$

entonces, utilizando la definición para a_{n+2} se tiene:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1}(2k+1) + k - 2\sqrt{a_{n+1}(a_{n+1}+1)(k+1)k} \\ &= a_{n+1}(2k+1) + k - (a_{n+2} - (a_{n+1}+1)k - (k+1)a_{n+1}) \\ &= a_{n+1}(3k+2) + k + (a_{n+1}+1)k - a_{n+2} \\ &= a_{n+1}(4k+2) + 2k - a_{n+2}. \end{aligned}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1}(4k+2) - a_n + 2k,$$

Tenemos entonces que todos los valores son enteros, ya que

$$a_1 = (a_0+1)k + (k+1)a_0 + 2\sqrt{k(k+1)a_0(a_0+1)} = k$$

es también entero. □

Problema. 9.27.
Sean m, n y r enteros positivos verificando $1 + m + n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{2r-1}$. Demostrar que entonces m es un cuadrado perfecto.
[II Olimpíada Iberoamericana Uruguay 1987 (Felipe Fritz Braga, mención especial del jurado)]

SOLUCIÓN. Al conjugar por $\sqrt{3}$ tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} 1 + m + n\sqrt{3} &= (2+\sqrt{3})^{2r-1} \\ 1 + m - n\sqrt{3} &= (2-\sqrt{3})^{2r-1}, \end{aligned}$$

que al sumar dan: $2 + 2m = (2+\sqrt{3})^{2r-1} + (2-\sqrt{3})^{2r-1}$.

Si consideramos $\alpha_1 = 2+\sqrt{3}$ y $\alpha_2 = 2-\sqrt{3}$, éstas son raíces del polinomio $(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3})) = x^2-4x+1$. Podemos considerar la sucesión recurrente con ecuación característica x^2-4x+1, cuyo término general es:

$$a_r = \lambda_1(2+\sqrt{3})^r + \lambda_2(2-\sqrt{3})^r.$$

Si tomamos las condiciones iniciales $a_0 = -1$ y $a_1 = 1$, entonces tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1(2+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3}) \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. El término general es:

$$a_r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(2+\sqrt{3})^r - \frac{\sqrt{3}+1}{2}(2-\sqrt{3})^r$$

Se verifica ahora:

$$\begin{aligned}
(a_r)^2 &= \left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2(2+\sqrt{3})^{2r} + \left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2(2-\sqrt{3})^{2r} - 2\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \\
&= \tfrac{2-\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^{2r} + \tfrac{2+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^{2r} - 1 \\
&= \tfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{2r-1} + \tfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{2r-1} - 1 \\
&= m
\end{aligned}$$

□

Problema. 9.28.
Sea m un entero positivo y definamos la sucesión siguiente:

$$\begin{array}{l} a_1 = 2(m+1), \\ a_{n+1} = \frac{1}{4m}(ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n}), \ \textit{si } n \geq 1. \end{array}$$

Obtener una expresión explícita del término a_n en función de n y m.
[Gazeta Matematica. 1988. Rumania]

SOLUCIÓN. Observamos el valor de a_2.

$$\begin{aligned}
a_2 &= \tfrac{1}{4m}(ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n}) \\
&= \tfrac{1}{4m}(m2(m+1) - 1 + \sqrt{1+2m2(m+1)}) \\
&= \tfrac{1}{4m}(2m^2 - 2m - 1 + 2m + 1) \\
&= \tfrac{m+2}{2}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $a_1 > a_2$, ya que si $a_1 < a_2$, entonces

$$\begin{aligned}&2(m+1) < \tfrac{m+2}{2};\\&4m+4 < m+2;\\&3m+2 < 0;\\&m < -\tfrac{2}{3},\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Además $a_1, a_2 > 0$.
Veamos ahora la diferencia $a_{n+1} - a_n$.

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \tfrac{1}{4m}(ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n}) - a_n\\&= \tfrac{1}{4m}(-3ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n}).\end{aligned}$$

Si $-3ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n} > 0$, entonces $\sqrt{1+2ma_n} > 3ma_n + 1$. Vamos a suponer que $a_n > 0$, entonces podemos tomar cuadrados manteniendo la desigualdad:

$$\begin{aligned}&1 + 2ma_n > 9m^2a_n^2 + 1 + 6ma_n\\&0 > 9m^2a_n^2 + 4ma_n,\end{aligned}$$

lo cual es imposible. Tenemos pues que si $a_n > 0$, entonces $a_n > a_{n+1}$.
Vamos a ver que también $a_{n+1} > 0$ en este caso. Si $a_{n+1} \le 0$, entonces

$$\begin{aligned}&ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n} \le 0\\&\sqrt{1+2ma_n} \le 1 - ma_n\\&0 \le \sqrt{1+2ma_n} \le 1 - ma_n \qquad (\Rightarrow \quad ma_n \le 1)\\&1 + 2ma_n \le 1 + m^2a_n^2 - 2ma_n\\&4ma_n \le m^2a_n^2\\&4m \le m^2a_n\\&4 \le ma_n\end{aligned}$$

Llegamos así a una contradicción: $ma_n \le 1 < 4 \le ma_n$. Como consecuencia tenemos una sucesión decreciente de números positivos (no necesariamente enteros).
Vamos ahora a eliminar radicales.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \tfrac{1}{4m}(ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n})\\4ma_{n+1} &= ma_n - 1 + \sqrt{1+2ma_n}\\4ma_{n+1} - ma_n + 1 &= \sqrt{1+2ma_n}\end{aligned}$$

Al tomar cuadrados tenemos:

$$\begin{aligned}&16m^2a_{n+1}^2 + m^2a_n^2 + 1 + 8ma_{n+1} - 8m^2a_na_{n+1} - 2ma_n = 1 + 2ma_n\\&ma_n^2 - 4(2ma_{n+1}+1)a_n + 8a_{n+1}(2ma_{n+1}+1) = 0\end{aligned}$$

Calculando las raíces se tiene:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{4(2ma_{n+1}+1) \pm \sqrt{4^2(2ma_{n+1}+1)^2 - 4m8a_{n+1}(2ma_{n+1}+1)}}{2m}\\&= \frac{4(2ma_{n+1}+1) \pm 4\sqrt{2ma_{n+1}+1}}{2m}\\&= \frac{2(2ma_{n+1}+1) \pm 2\sqrt{2ma_{n+1}+1}}{m}.\end{aligned}$$

$$ma_n = 2(2ma_{n+1}+1) \pm 2\sqrt{2ma_{n+1}+1}.$$

Para averiguar el signo, supongamos que $ma_n = 2(2ma_{n+1}+1)+2\sqrt{2ma_{n+1}+1}$, entonces al introducir este valor en la relación original se tiene

$$4ma_{n+1} = 2(2ma_{n+1}+1)+2\sqrt{2ma_{n+1}+1}-1+\sqrt{2ma_n+1}$$

$$0 = 1+2\sqrt{2ma_{n+1}+1}+\sqrt{2ma_n+1},$$

lo que es imposible, pues todos los términos del miembro de la derecha son positivos.
Se tiene entonces $ma_n = 2(2ma_{n+1}+1)-2\sqrt{2ma_{n+1}+1}$.
Podemos considerar entonces las dos relaciones siguientes:

$$4ma_{n+2} = ma_{n+1}-1+\sqrt{1+2ma_{n+1}}$$

$$ma_n = 2(2ma_{n+1}+1)-2\sqrt{2ma_{n+1}+1}$$

al sumar el doble de la primera y la segunda se obtiene:

$$8ma_{n+2}+ma_n = 2ma_{n+1}-2+4ma_{n+1}+2,$$

de donde resulta:

$$8a_{n+2} = 6a_{n+1}-a_n.$$

Resolvemos esta recurrencia con los valores iniciales $a_1 = 2(m+1)$ y $a_2 = \frac{m+2}{2}$. La ecuación característica $8r^2 = 6r-1$ tiene raíces $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, entonces tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{4}\lambda_2 = 2(m+1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\lambda_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2\lambda_2 = \frac{m+2}{2} \end{array}\right\}$$

Se obtiene $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 8m$, luego el término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+8m\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \\ &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+8m\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. □

Problema. 9.29.
Sea k un entero positivo, se define una sucesión mediante las reglas:

$$\begin{aligned} &x_1 = k, \\ &x_{n+1} = kx_n+\sqrt{(k^2-1)(x_n^2-1)}, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Demostrar que todos los x_n son enteros positivos.
[Competición Kürschak. Hungría. 1988]

SOLUCIÓN. Vamos a eliminar radicales; se tiene:

$$x_{n-1} - kx_n = \sqrt{(k^2-1)(x_n^2-1)}$$

$$x_{n+1}^2 + k^2x_n^2 - 2kx_nx_{n+1} = (k^2-1)(x_n^2-1)$$

$$x_n^2 - x_n(2kx_{n+1}) + (x_{n+1}^2 + k^2 - 1) = 0$$

Al resolver esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2kx_{n+1} \pm \sqrt{4k^2x_{n+1}^2 - 4(x_{n+1}^2 + k^2 - 1)}}{2} \\ &= kx_{n+1} \pm \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)} \end{aligned}$$

Supongamos que $x_n = kx_{n+1} + \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)}$, como

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= kx_n + \sqrt{(k^2-1)(x_n^2-1)} \\ &= k(kx_{n+1} + \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)}) + \sqrt{(k^2-1)((kx_{n+1} + \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)})^2-1)}, \end{aligned}$$

entonces

$$(1-k^2)x_{n+1} = k\sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)} + \sqrt{(k^2-1)((kx_{n+1} + \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)})^2-1)}$$

lo que implica que $(1-k^2)x_{n+1} \geq 0$, pero $(1-k^2) \leq 0$, luego $x_{n+1} < 0$, pero como $x_1 > 0$ la la sucesión es creciente, llegamos a una contradicción.

Tenemos entonces $x_n = kx_{n+1} - \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)}$. De aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} x_n &= kx_{n+1} - \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1)} \\ x_{n+2} &= kx_{n+1} + \sqrt{(k^2-1)(x_{n+1}^2-1}. \end{aligned}$$

Al sumar se tiene

$$x_{n+2} + x_n = 2kx_{n+1},$$

de donde $x_{n+2} = 2kx_{n+1} - x_n$. La ecuación característica es: $r^2 = 2kr - 1$, cuyas raíces son: $\alpha_1 = k + \sqrt{k^2-1}$ y $\alpha_2 = k - \sqrt{k^2-1}$. El término general es:

$$x_n = \lambda_1(k + \sqrt{k^2-1})^{n-1} + \lambda_2(k - \sqrt{k^2-1})^{n-1};$$

al imponer las condiciones iniciales $x_1 = k$ y

$$x_2 = kx_1 + \sqrt{(k^2-1)(x_1^2-1)} = k^2 + \sqrt{(k^2-1)^2} = 2k^2 - 1,$$

tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=k\\(k+\sqrt{k^2-1})\lambda_1+(k-\sqrt{k^2-1})\lambda_2=2k^2-1\end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1=\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{2}$ y $\lambda_2=\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{2}$. Tenemos que el término general es:

$$\begin{aligned}x_n&=\tfrac{k+\sqrt{k^2-1}}{2}(k+\sqrt{k^2-1})^{n-1}+\tfrac{k-\sqrt{k^2-1}}{2}(k-\sqrt{k^2-1})^{n-1}\\&=\tfrac{1}{2}(k+\sqrt{k^2-1})^n+\tfrac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-1})^n\\&=\tfrac{1}{2}\sum_{i,par}\binom{n}{i}2k^{n-i}\sqrt{k^2-1}^{\,i}\\&=\sum_{i,par}\binom{n}{i}k^{n-i}(k^2-1)^{i/2},\end{aligned}$$

que es un entero positivo. □

Problema. 9.30.
Sean m un entero positivo y p un entero arbitrario. Se define la sucesión $\{x_n\}_n$ mediante

$$\begin{aligned}&x_1=0,\\&x_{n+1}=mx_n+\sqrt{(m^2-1)x_n^2+p^2},\ \textit{si } n\geq 1.\end{aligned}$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son enteros.
[Gazeta Matematica. Rumania. 1990]

SOLUCIÓN. Vamos a eliminar radicales:

$$x_{n+1}-mx_n=\sqrt{(m^2-1)x_n^2+p^2}$$

$$x_{n+1}^2+m^2x_n^2-2mx_nx_{n+1}=(m^2-1)x_n^2+p^2$$

$$x_n^2-2mx_{n+1}x_n+x_{n+1}^2-p^2=0$$

Al resolver esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{2mx_{n+1}\pm\sqrt{4m^2x_{n+1}^2-4x_{n+1}^2+4p^2}}{2}\\&=\frac{2mx_{n+1}\pm 2\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2}}{2}\\&=mx_{n+1}\pm\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2}.\end{aligned}$$

La sucesión $\{x_n\}_n$ es creciente, ya que $x_1=0$ y el resto se deduce de la ecuación de recurrencia. Vamos a determinar qué signo es el correcto. Si suponemos que $x_n=mx_{n+1}+\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2}$, se verifica:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=mx_n+\sqrt{(m^2-1)x_n^2+p^2}\\&=m(mx_{n+1}+\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2})+\sqrt{(m^2-1)(mx_{n+1}+\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2})^2+p^2}\end{aligned}$$

De aquí se tiene

$$(1-m^2)x_{n+1} = m(\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2}) + \sqrt{(m^2-1)(mx_{n+1}+\sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2})^2+p^2}$$

Tenemos que $(1-m^2)x_{n+1} > 0$, como $(1-m^2) \leq 0$, se tiene $x_{n+1} < 0$, lo que es una contradicción.
Obtenemos pues $x_n = mx_{n+1} - \sqrt{x_{n+1}^2(m^2-1)+p^2}$. Con ésta y la relación inicial se tiene:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= mx_{n+1} + \sqrt{(m^2-1)x_{n+1}^2+p^2} \\ x_n &= mx_{n+1} - \sqrt{(m^2-1)x_{n+1}^2+p^2}, \end{aligned}$$

sumando se tiene:

$$x_{n+2} + x_n = 2mx_{n+1}.$$

Tenemos la ecuación característica $r^2 = 2mr - 1$, cuyas raíces son: $\alpha_1 = m + \sqrt{m^2-1}$ y $\alpha_2 = m - \sqrt{m^2-1}$. Las condiciones iniciales son: $x_1 = 0$ y

$$x_2 = mx_1 + \sqrt{(m^2-1)x_1^2+p^2} = p.$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (m+\sqrt{m^2-1})\lambda_1 + (m-\sqrt{m^2-1})\lambda_2 = p \end{array}\right\}$$

Las raíces son: $\lambda_1 = \frac{p}{2\sqrt{m^2-1}}$ y $\lambda_2 = \frac{-p}{2\sqrt{m^2-1}}$. Entonces el término general es:

$$\begin{aligned} x_n &= (m+\sqrt{m^2-1})^{n-1}\lambda_1 + (m-\sqrt{m^2-1})^{n-1}\lambda_2 \\ &= (m+\sqrt{m^2-1})^{n-1}\frac{p}{2\sqrt{m^2-1}} + (m-\sqrt{m^2-1})^{n-1}\frac{-p}{2\sqrt{m^2-1}} \\ &= \frac{p}{2\sqrt{m^2-1}}\sum_{i,impar} 2\binom{n-1}{i} m^{n-i-1}(\sqrt{m^2-1})^i \\ &= p\sum_{i,impar}\binom{n-1}{i} m^{n-i-1}(\sqrt{m^2-1})^{\frac{i-1}{2}} \end{aligned}$$

que es un entero. □

Problema. 9.31.
Sea $p(x)$ un polinomio de grado n que verifica

$$p(j) = 2^{j-1},\ \text{para } j = 1,2,3,\ldots,n,n+1.$$

Determinar $p(n+2)$.
[Olimpíada de Israel 1988].

SOLUCIÓN. Consideramos la sucesión $p(1), p(2), \ldots, p(n+1)$; como $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces esta sucesión es una progresión aritmética de orden n, a la cual podemos calcular el término general. Veamos cuales son las diferencias sucesivas. Tenemos $\Delta p(i) = p(i+1) - p(i) = 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1} = p(i)$. En general se tiene $\Delta^t p(i) = p(i)$, siendo siempre $i < n+1-t$. Cuando $t = n$ sólo tenemos una diferencia, y ésta es $\Delta^n p(1) = 1$.

Podemos calcular el término general aplicando la teoría que hemos desarrollado o bien la teoría más general de interpolación de Lagrange.

Otra forma directa, para este caso, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
p(n+2) &= p(n+1) + \Delta p(n+1) = p(n+1) + p(n+1) \\
&= p(n+1) + p(n) + \Delta p(n) = p(n+1) + p(n) + p(n) \\
&= \cdots \\
&= p(n+1) + p(n) + p(n-1) + \cdots + p(2) + \Delta p(2) \\
&= p(n+1) + p(n) + p(n-1) + \cdots + p(2) + p(1) + \Delta p(1) \\
&= 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 + 1 \\
&= 2^{n+1} - 1 + 1 = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Problema. 9.32.
Sean $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ sucesiones de enteros positivos definidas por:

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 1 = x_1, & x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1},\ \text{si } n \geq 1. \\
y_0 = 1, y_1 = 7, & y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1},\ \text{si } n \geq 1.
\end{array}$$

Demostrar que $x_0 = x_1 = y_0 = 1$ es el único término que tienen en común ambas sucesiones.
[Olimpíada EEUU. 1973]

SOLUCIÓN. Calculamos los términos generales de las sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$:

$$x_n = \tfrac{2}{3}2^n + \tfrac{1}{3}(-1)^n,$$

$$y_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n.$$

Supongamos que existen n y m tales que $x_n = y_m$, entonces se tiene:

$$\tfrac{2}{3}2^n + \tfrac{1}{3}(-1)^n = 2 \cdot 3^m - (-1)^m$$

$$2^{n+1} + (-1)^n = 2 \cdot 3^{m+1} - 3(-1)^m$$

$$2^{n+1} - 2 \cdot 3^{m+1} = -((-1)^n + 3(-1)m)$$

$$2^n - 3^{m+1} = -\tfrac{1}{2}((-1)^n + 3(-1)^m)$$

Los valores del miembro de la derecha son:

n par	m par	$-\frac{1}{2}(1+3)=-2$
n par	m impar	$-\frac{1}{2}(1-3)=1$
n impar	m par	$-\frac{1}{2}(-1+3)=-1$
n impar	m impar	$-\frac{1}{2}(-1+-3)=2$

Si $2^n-3^{m+1}=-2$ y $n\neq 0$, entonces $2\mid 3^{m+1}$, lo que es una contradicción; si $n=0$, entonces $1-3^{m+1}=-2$, y resulta $-3^{m+1}=-3$, esto es, $m+1=1$, o equivalentemente $m=0$. (éste da el caso $x_0=1=y_0$)
Si $2^n-3^{m+1}=2$, como $n\neq 0$, ya que n es impar, resulta $2\mid 3^{m+1}$, lo que es una contradicción.
Si $2^n-3^{m+1}=1$, tenemos que n es par; sea $n=2t$, y m es impar, sea $m+1=4h$; tenemos:

$$2^{2t}=3^{m+1}+1=3^{2h}+1=9^h+1.$$

Tomando clases de resto módulo 4 tenemos $0\equiv 1^h+1 \pmod{4}$, lo que es una contradicción.
Si $2^n-3^{m+1}=-1$, tenemos que n es impar, sea $n=2t+1$ y m es par, sea $m=2h$, entonces:

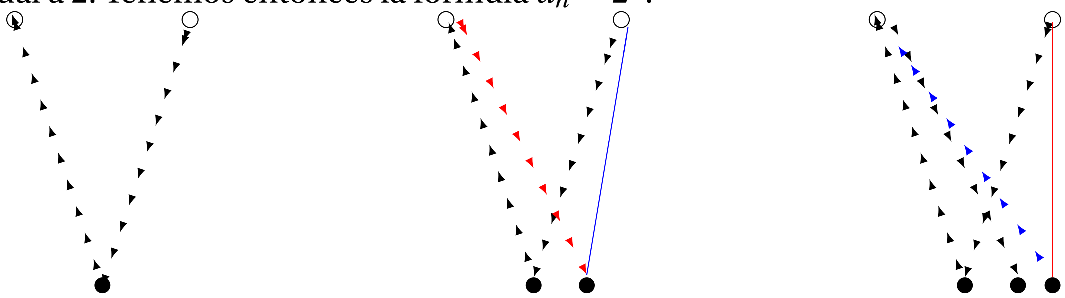
$$2^{2t+1}=3^{m+1}-1=3^{2h+1}.-1$$

Si $t=0$, entonces $2=3^{2h+1}-1$, tomando $h=0$ tenemos una solución. Si $t\neq 0$, entonces $8\mid 2^{2t+1}$ y tomando clases de resto módulo 8 resulta $0\equiv 3^{2h+1}-1\equiv 9\cdot 3-1\equiv 3-1\equiv 2 \pmod{8}$, lo que es una contradicción. (éste da el caso $x_1=1=y_0$) □

Problema. 9.33.
Tenemos un plano con dos puntos pintados de rojo y n puntos pintados de negro. Podemos pintar segmentos solo entre puntos de distinto color.
(1) Calcular el número mínimo de segmentos que son necesarios para que todos los puntos estén conectados.
(2) De cuántas formas diferentes se puede dibujar este número mínimo de segmentos para que todos los puntos estén conectados.

SOLUCIÓN. (1). Para que todos los puntos estén conectados, de cada punto negro debe salir un segmento, y como el otro extremos ha de ir a un punto rojo, tenemos al menos n segmentos. Pero en esta situación los dos puntos rojos no están conectados, luego necesitamos un segmento más, de forma que una punto negro esté unido a los dos puntos rojos. De forma que el número mínimo de segmentos es $n+1$.

(2). La forma es tener el número mínimo de segmentos para el caso de n puntos negros se puede construir a partir de una situación con $n-1$ puntos. Por ello si a_n es el número de formas diferentes en que se puede dibujar el número mínimo para n puntos negros, y como a partir de una situación con $n-1$ puntos se puede pasar a una situación de n puntos de dos formas distintas (uniendo el n-ésimo punto negro con cada uno de los puntos rojos), se tiene la relación $a_n=2an-1$. Así pues la relación de recurrencia es: $a_n=2a_{n-1}$, obteniendo pues una progresión geométrica de razón 2. El término a_0 no tiene significado, y el término a_1 es igual a 2. Tenemos entonces la fórmula $a_n = 2^n$.



□

Problema. 9.34.
Determinar una fórmula explícita para el término general de la sucesión definida:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= \tfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hacemos inducción sobre n; supongamos que se tiene $a_n = \frac{1}{n}$, entonces se verifica:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1/n}{(n+1)/n} = \frac{1}{n+1}.$$

□

Problema. 9.35.
Calcular la suma

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

SOLUCIÓN. Llamamos $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$ y $a_0 = 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}_n$ es una progresión aritmética de orden cuatro.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
b^{[4]} & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\
b^{[3]} & & 1\cdot 2\cdot 3 & & 2\cdot 3\cdot 4 & & 3\cdot 4\cdot 5 & & 4\cdot 5\cdot 6 & & 5\cdot 6\cdot 7 & \\
b^{[2]} & & & 3\cdot 2\cdot 3 & & 3\cdot 3\cdot 4 & & 3\cdot 4\cdot 5 & & 3\cdot 5\cdot 6 & & \\
b^{[1]} & & & & 3\cdot 2\cdot 3 & & 3\cdot 2\cdot 4 & & 3\cdot 2\cdot 5 & & 3\cdot 2\cdot 5 & \\
b^{[0]} & & & & & 3\cdot 2 & & 3\cdot 2 & & 3\cdot 2 & &
\end{array}$$

□

Problema. 9.36.
Se considera para cada entero positivo o nulo n el polígono regular de $n+3$ lados, y llamamos a_n al número de diagonales de dicho polígono.
Dar una expresión explícita de a_n en función de n y comprobar que la sucesión $\{a_n\}_n$ es una progresión aritmética de orden 2.

SOLUCIÓN. Si numeramos los vértices de un polígono de $n+3$ lados a partir del 1 siguiendo el sentido de las agujas del reloj, vamos a ver cuantas diagonales podemos construir.
Con base el vértice 1 tenemos exactamente n diagonales, una por cada vértice distinto de los vértices 1, 2 y $n+3$.
Con base el vértice 2 tenemos exactamente n diagonales, una por cada vértice distinto de los vértices 2, 3 y 1.
Con base el vértice 3 tenemos exactamente $n-1$ diagonales, una por cada vértice distinto de los vértices 3, 4 y 2, a los que hay que añadir el vértice 1, pues la diagonal $(1,3)$ ya la hemos contado.
Es claro que con base el vértice 4 tenemos $n-2$ diagonales, y para el vértice j tenemos $n-j+2$.
Por tanto el número total de vértices es:

$$n+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n+\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n(n+3)}{2}.$$

Tenemos pues una progresión aritmética de orden 2. □

Problema. 9.37.
Se considera para cada entero positivo o nulo n el prisma recto de bases los polígonos regulares de $n+3$ lados, y llamamos d_n al número de todas las diagonales de dicho prisma.
Dar una expresión explícita de d_n en función de n y comprobar que la sucesión $\{d_n\}_n$ es una progresión aritmética de orden 2.

SOLUCIÓN. Consideramos un prisma recto de base un polígono de $n+3$ lados. Numeramos los vértices del polígono de $n+3$ lados de la base superior a partir del 1 siguiendo el sentido de las agujas del reloj, y hacemos la misma numeración en la base de forma que los vértices con el mismo número estén unidos por una arista vertical. Veamos cuantas diagonales podemos construir.
Tenemos todas las diagonales de las bases, en total $2a_n$ siguiendo la notación del problema (9.36.).
Para cada cara lateral, que es un rectángulo tenemos dos diagonales, en total $2(n+3)$ ya que tenemos $n+3$ caras.
Sólo nos queda por contar las diagonales interiores al prisma. Del vértice 1, de la base superior, podemos construir las diagonales a los vértices de la base inferior, una por cada vértice distinto del vértice 1, tenemos entonces n diagonales, una para cada uno de los vértices distintos de 1, 2 y $n+3$. Como esta construcción la podemos hacer para cada vértice de la base superior, tenemos por tanto $n(n+3)$.

Al sumar todos estos números tenemos que el número total de diagonales es:

$$2\frac{n(n+3)}{2}+2(n+3)+n(n+3)=2(n+1)(n+3).$$

Si llamamos d_n a este número, resulta que la sucesión $\{d_n\}_n$ es una progresión aritmética de orden 2. □

> **Problema. 9.38.**
> *Sea $f(1)=1$ y $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$. Calcular razonadamente f(2001).*
> *[Gacetilla Matemática. Problema 107]*

SOLUCIÓN. De entre las muchas formas de resolver este problema vamos a mostrar una en la que se utilizan progresiones aritméticas.

Tenemos

$$\begin{array}{l} f(1)+f(2)=2^2f(2),\\ 1=(2^2-1)f(2),\\ f(2)=\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3)=3^2f(3),\\ 1+\frac{1}{3}=(3^2-1)f(3),\\ f(3)=\frac{1}{6} \end{array}$$

En la misma forma se tiene $f(4)=\frac{1}{10}$, $f(5)=\frac{1}{15}$. Podemos conjeturar que se tiene $f(n)=\frac{1}{\binom{n+1}{2}}=\frac{2}{(n+1)n}$; esto es, las denominadores son los números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$, con término general $\binom{n+1}{2}$ comenzando en a_1.

Vamos a hacer inducción para probar este resultado. Supongamos que el resultado es cierto para n y vamos a probarlo para $n+1$.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1)}{(n+1)^2-1}\\ &= \frac{n^2f(n)}{(n+1)^2-1}\\ &= \frac{n^2\frac{1}{\binom{n+1}{2}}}{(n+1)^2-1}\\ &= \frac{\frac{2n^2}{(n+1)n}}{(n+1)^2-1}\\ &= \frac{2n^2}{(n+1)n((n+1)^2-1)}\\ &= \frac{2n^2}{(n+1)n(n+2)n}\\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

Para el valor que se pide, tenemos:

$$f(2001) = \frac{2}{(2001+1)2001} = \frac{1}{1001 \cdot 2001} = \frac{1}{2003001}.$$

□

Problema. 9.39. (Los números de Pell)
Se define al ***sucesión de Pell*** *mediante las condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ y la ecuación de recurrencia*

$$a_n = 2a_{n-1} + a_n, \text{ si } n \geq 2.$$

Determinar el término general de la sucesión de Pell.

SOLUCIÓN.

□

Problema. 9.40. (Números de Padovan)
Se considera la sucesión recurrente definida por:

$$\begin{array}{l} a_0 = a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-3}, \text{ si } n \geq 3. \end{array}$$

Determinar el término general de esta sucesión. Los números de la sucesión $\{a_n\}_n$ se llaman números de Padovan.
Los números de Padovan aparecen en el lugar $(2,2)$ (coeficiente central) de la matriz M^{n+2}, siendo M la matriz $\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

□

Problema. 9.41. (Números de Jacobsthal)
Se considera la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por:

$$\begin{array}{l} a_0 = 0, a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ si } n \geq 2. \end{array}$$

Dar una descripción explícita del término general a_n.Demostrar que se verifican las siguientes condiciones:
(1) $a_n + 1 a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n a^{n-1}$.
(2) $\sum_{i=2}^{n} a_i = \frac{1}{2}(a_{n+2} - 3)$.

SOLUCIÓN. . □

Problema. 9.42.
Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado hasta que aparezcan dos números pares. Determinar una relación de recurrencia para el número de experimentos que finalizan en el n-ésimo lanzamiento o antes.

SOLUCIÓN. Llamamos a_{n-1} al número de experimentos que finalizan antes del n-ésimo lanzamiento. Si un experimento finaliza en el n-ésimo lanzamiento, puede ser debido a una de las siguientes posibilidades:
(a). uno de los $n-1$ lanzamientos anteriores era par; tenemos $n-1$ posibilidades,
(b). si uno de los lanzamientos era para tenemos para cada uno tres posibles valores; tenemos 3 posibilidades,
(c). tenemos exactamente $n-2$ números impares, y en total el número de posibilidades para estos es: 3^{n-2}.
(d). el último lanzamiento es para, tenemos tres posibilidades.
En total se tiene entonces

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)\cdot 3 \cdot 3^{n-2} \cdot 3 = a_{n-1} + (n-1)\cdot 3^n.$$

con valores iniciales $a_0 = 0$, $a_1 = 0$
Se trata ahora de dar un valor explícito para a_n. Como es una recurrencia lineal no homogénea, tenemos que determinar una solución particular y una solución general de la recurrencia homogénea. Comencemos por ésta última.
La ecuación característica es: $r = 1$, luego una solución general es: $a_n = \lambda_1$.
Como la parte no homogénea es: $(n-1)3^n$, y ésta proviene de la ecuación característica $(r-3)(r-3)$, entonces una solución particular se obtiene al considerar la ecuación característica $(r-1)(r-3)^2$, y eliminar de la solución la parte correspondiente a $(r-1)$; se tiene entonces $(\lambda_2 + \lambda_3 n)3^n$; al introducir este valor en la recurrencia se tiene:

$$(\lambda_2 + \lambda_3 n)3^n - (\lambda_2 + \lambda_3(n-1))3^{n-1} - (n-1)\cdot 3^n = 0$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3 n)3 - (\lambda_2 + \lambda_3(n-1)) - (n-1)\cdot 3 = 0$$

$$3\lambda_2 + 3\lambda_3 n - \lambda_2 - \lambda_3 n + \lambda_3 - 3n + 3 = 0$$

$$3\lambda_2 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3 + (3\lambda_3 - \lambda_3 - 3)n = 0$$

De aquí se obtiene $\left\{\begin{array}{l} 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3 = 0 \\ 2\lambda_3 - 3 = 0 \end{array}\right\}$ cuya solución es: $\lambda_2 = -\frac{9}{4}$ y $\lambda_3 = \frac{3}{2}$.
La solución general de la recurrencia no homogénea es: $(-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}n)3^n + \lambda_1$. Al imponer las condiciones iniciales se tiene:

$$\begin{array}{l} (-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}0)3^0 + \lambda_1 = 0, \\ (-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}1)3^1 + \lambda_1 = 0, \end{array}$$

luego $\lambda_1 = \frac{9}{4}$, y el término general es: $a_n = (-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}n)3^n + \frac{9}{4}$. $\square$

Problema. 9.43.
Encontrar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = -a_{n-2}, \text{ si } n \geq 2, a_0 = -1, a_1 = 0.$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica es: $r^2 = -1$, cuya raíces son $\alpha_1 = i$ y $\alpha_2 = -i$, entonces una solución general es: $a_n = \lambda_1 i^n + \lambda_2(-i)^n$, al imponer las condiciones iniciales se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 i + \lambda_2(-i) = 0 \end{array}\right\}$$

de donde resulta: $\lambda_1 =$ y $\lambda_2 =$. El término general es: $a_n = -(\frac{1}{2}i^n + \frac{1}{2}(-i)^n)$. $\square$

Problema. 9.44.
Se considera la sucesión $\{a_n\}_n$ verificando la recurrencia

$$\begin{array}{l} a_1 = 1, \\ a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} + n^3, \text{ si } n \geq 2. \end{array}$$

Determinar el término general.

SOLUCIÓN. Definimos sucesiones auxiliares $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ mediante:

$$b_n = \frac{n!}{(n-1}! = n, \text{ si } n \geq 1,$$

$$c_1 = 1, c_n = c_{n-1} + \frac{n^3}{b_n} = c_{n-1} + n^2, \text{ si } n \geq 2.$$

Si suponemos que $a_r = b_r c_r$ para $r < n$, por inducción tenemos:

$$b_n c_n = n(c_{n-1} + n^2) = nc_{n-1} + n^3 = \frac{n}{n-1}(n-1)c_{n-1} + n^3 = \frac{n}{n-1}a_{n-1} + n^3 = a_n.$$

El término general de $\{c_n\}_n$ es fácil, ya que es la suma de los n primeros cuadrados: $c_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, y por tanto

$$a_n = b_n c_n = n\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^4 + 3n^3 + n^2}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\square$

Problema. 9.45.
Se considera la sucesión $\{a_n\}_n$ verificando la recurrencia

$$\begin{array}{l} a_0 = 1, \\ a_n = na_{n-1} + (-1)^n, \text{ si } n \geq 1. \end{array}$$

Determinar el término general.

SOLUCIÓN. Definimos sucesiones auxiliares $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ mediante:

$$b_n = n!,$$

$$c_0 = 1, c_n = c_{n-1} + \tfrac{(-1)^n}{b_n} = c_{n-1} + \tfrac{(-1)^n}{n!}, \text{ si } n \geq 1.$$

Se verifica $a_n = b_n c_n$. Como el término general de $\{c_n\}_n$ es

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!},$$

resulta que el término general de a_n es:

$$n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}).$$

$\square$

Capítulo IV

Ejercicios avanzados

10. Ejercicios avanzados

Ejercicios avanzados

Problema. 10.1.
Se considera la sucesión $\{S_n\}_n$ definida para cada entero positivo o nulo n mediante:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

Determinar el término general de esta sucesión.

SOLUCIÓN. Es claro que si $n = 0$, entonces $S_0 = 1 + (-1) = 0$ y $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$, etc. Además se verifica la siguiente relación de recurrencia

$$S_n = S_{n-1} + (2n-1).$$

Como consecuencia la ecuación característica es: $r = 1$, pero como no es una recurrencia homogénea, el término no homogéneo es: $2n - 1$. Una solución particular será de la forma $an^2 + bn + c$; vamos a ver cuales son los coeficientes:

$$a^n + bn + c = a(n-1)^2 + b(n-1) + c + (2n-1),$$

$$2an - a + b - 2n + 1 = 0$$

$$2(a-1)n + (-a + b + 1) = 0,$$

luego $\left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ a - b - 1 = 0 \end{array}\right\}$, esto es, $a = 1$, $b = 0$ y c es indeterminado. Una solución particular es: n^2. La solución de la recurrencia homogénea $S_n = S_{n-1}$ es 1, luego la solución general es:

$$\lambda_1 + n^2,$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, luego tenemos:

$$\lambda_1 + 0^2 = 0,$$

de donde se tiene $\lambda_1 = 0$ y el término general es $S_n = n^2$.
Nota. Podríamos haber considerado también la solución de $\lambda_1 + 1^2 = 1$, obteniendo el mismo resultado.
Nota. También podríamos haber supuesto al inicio que el término general es $S_n = n^2$, algo que se deduce de una simple observación, y probar el resultado por inducción sobre n. □

Problema. 10.2.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 7^n, \text{ si } n \geq 1 \text{ y } a_0 = 2.$$

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = \frac{1}{4}(35 \cdot 7^n - 27 \cdot 3^n)$. □

Problema. 10.3.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 3^n, \text{ si } n \geq 1 \text{ y } a_0 = 2.$$

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = (2 + 5n)3^n$. □

Problema. 10.4.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2, \text{ si } n \geq 2 \text{ y } a_0 = 0, a_1 = 2.$$

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = -\frac{55}{54}n(-2)^n + \frac{1}{27}(3n^2 - 4n)$. □

Problema. 10.5.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}, \text{ si } n \geq 3 \text{ y } a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3.$$

SOLUCIÓN.

□

Problema. 10.6.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n - a_{n-1} = 4[(a_{n-1} - a_{n-2}) - (a_{n-2} - an - 3)], \text{ si } n \geq 2 \text{ y } a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3.$$

SOLUCIÓN. $a_n = 2^n - 1$ □

Problema. 10.7.
Los dos primeros términos de una sucesión son, respectivamente, 1 y 2. Si cada término es la media aritmética del anterior con la media aritmética de los dos adyacentes (anterior y posterior), determinar:
(1) Una forma explícita del término general de la sucesión.
(2) Probar mediante inducción la validez del resultado obtenido.
(3) Un procedimiento para calcular el término cuadragésimo realizando a lo más 10 operaciones.

SOLUCIÓN.

□

Problema. 10.8.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2},\ \text{si } n \geq 2 \text{ y } a_0 = 1, a_1 = 6.$$

SOLUCIÓN. $a_n = (n+1)3^n$ □

Problema. 10.9.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4n,\ \text{si } n \geq 2 \text{ y } a_0 = 1, a_1 = 6.$$

SOLUCIÓN. $a_n = (8n-6)3^{n-1} + n + 3.$ □

Problema. 10.10.
Determinar a y b, siendo a el número de enteros positivos menores o iguales que 100 que no son divisores ni por 3 ni por 7 ni por 11 y b es el número de enteros positivos, en el mismo rango, que son divisibles por 2 y por 9.
Dar la forma explícita del término general de la sucesión definida por la recurrencia

$$a_n = aa_{n-1} - (130b+)a_{n-2},\ \text{si } n \geq 2, a_0 = 0, A_1 = 10.$$

Siendo a y b los números obtenidos en el apartado anterior. Probar que cada término de la sucesión es un múltiplo de 10.

SOLUCIÓN. $a = 52$, $b = 5$ $a_n = 31^n - 21^n = (31-21)(31^{n-1} + 31^{n-2} \cdot 21 + 31^{n-3} \cdot 21^2 + \cdots + 31^2 \cdot 21^{n-3} + 31 \cdot 21^{n-2} + 21^{n-1})$ □

Problema. 10.11.
Nos regalan tres sellos y decidimos comenzar una colección. El año siguiente compramos 8 nuevos sellos, de forma que tenemos ya 11 sellos en nuestra colección. Si cada año compramos un número de nuevos sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado los 100.000 sellos?

SOLUCIÓN. $a_n = 2^{n+2} - 5$. El número de años es 13. □

Problema. 10.12.
Se trazan en el plano n rectas de forma que cada una de ellas corta a todas las demás y no existen tres que se corten en un mismo punto.
Dar una fórmula explícita para a_n, el número de regiones en que estas n rectas dividen al plano?
Dar una fórmula para b_n el número de regiones no acotadas que aparecen en la configuración anterior.

SOLUCIÓN.

□

Problema. 10.13.
Existe un país de cuyo nombre no puedo ahora acordarme cuya moneda oficial es el euro, y que tiene los siguientes valores faciales para sus monedas y billetes:

Monedas		*9 y 19 euros*
Billetes		*9, 19, 125 y 232 euros*

¿Puede cambiarse algún billete de más de 100 euros en monedas?
En caso afirmativo, ¿de cuántas formas puede hacerse?
Se ha propuesto por el consejo de ministros de este país realizar una emisión de nuevos billetes hasta completar una serie de billetes con cien valores diferentes. El ministro de hacienda ha observado que los actuales billetes cumplen la recurrencia siguiente:

$$a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} + 329n - 815, \text{ si } n \geq 3, a_1 = 9, a_2 = 19.$$

y ha decidido que los nuevos billetes también cumplan con esta relación. ¿Cuál es el valor del último billete de la nueva serie?

SOLUCIÓN. $a_n = \frac{1}{4}[(-1)^n(97n - 290) + 329n - 486]$ $a_{100} = \frac{1}{4}[(-1)^{100}(97 \cdot 100 - 290) + 329 \cdot 100 - 486] = 10456$ euros. □

Problema. 10.14.
Determinar el término general de la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por la recurrencia

$$a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} - 2, \text{ si } n \geq 3 \text{ y } a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 11.$$

SOLUCIÓN. $a_n = 2^n + n^2 + n + 1$ □

Problema. 10.15.
Ana ha abierto una cuenta en un banco y ha realizado una imposición por valor de 1.000 euros. Resulta que el banco le da a Ana un interés anual del 6 %, y que le hace ingresos mensuales del interés. ¿Qué cantidad tiene Ana al cabo de un año?

SOLUCIÓN. Si llamamos a_n a la cantidad de dinero de Ana en el mes n, resulta que $a_0 = 1{,}000$ y $a_n = a_{n-1} + 0,005a_{n-1} = 1,005a_{n-1}$, ya que el interés del 6 % anual se traduce en un interés del 0,5 % mensual. S tiene entonces $a_n = 1,005^n a_0$. □

Problema. 10.16.
Este es el cuento de la lechera para hacerse tremendamente rico. Primero ahorramos todo lo que podamos hasta que juntemos un capital respetable, y del que podamos prescindir en caso de necesidad*, por ejemplo supongamos que en un año podemos ahorrar 1.000 euros. El segundo año seguimos ahorrando y comenzamos a hacer negocios, compra–venta de productos y acciones, etc., que menos que juntar al menos 4.000 euros. Ya con esta respetable cantidad podemos dedicarnos a más actividades económicas, de forma que podemos cada año comprar bienes por cuatro veces nuestro capital del año anterior y venderlo por tres veces el capital de ese año, parece una situación posible verdad?*
Determinar una fórmula que nos dé el capital al final de n años.
¿Al cabo de cuanto tiempo tendremos al menos un millón de euros de capital?
¿Qué cantidad tendremos al cabo de 15 años?

SOLUCIÓN.

□

Problema. 10.17.
Se tiene la siguiente recurrencia:

$$\begin{array}{l} a_0 = 0, a_1 = -9, a_2 = -1, a_3 = 21, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + 8a_{n-4}, \text{ si } n \geq 4. \end{array}$$

Dar una descripción explícita del término general.

SOLUCIÓN. $a_n = (n^2 - n - 3)2^n + 3(-1)^n$. □

Problema. 10.18.
Se tiene la siguiente recurrencia:

$$\begin{array}{l} a_0 = 0, a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + n, \text{ si } n \geq 2. \end{array}$$

Dar una descripción explícita del término general.

SOLUCIÓN. $a_n = \frac{1}{36}(5 - 6(n+1) + 9 \cdot 3^n - 8 \cdot (-2)^n)$. □

Problema. 10.19.
Se tiene la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \\ &a_n = 2a_{n-1} + 4^n, \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Dar una descripción explícita del término general.

SOLUCIÓN.

□

Problema. 10.20.
Se considera la sucesión definida por:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \text{ si } n \geq 0.$$

(1) Prueba que $\{a_n\}n$ es una sucesión monótona creciente.

(2) Prueba que $\{a_n\}_n$ está acotada superiormente por 3.

(3) Calcula el límite de $\{a_n\}_n$.

SOLUCIÓN.

(1) Tenemos $a_1 = \sqrt{6} > a_0$, Supongamos que para todos $t \leq n$ se verifica $a_{t-1} < a_t$, sumando 6 se tiene:
$$6 + a_{t-1} < 6 + a_t,$$
calculando la raíz cuadrada se tiene:
$$a_t = \sqrt{6 + a_{t-1}} < \sqrt{6 + a_t} = a_{t+1},$$
por lo tanto la sucesión es creciente.

(2) Supongamos que $a_t < 3$ para cada $t \leq n$, entonces $6 + a_t < 6 + 3 = 9$, y tomando raíz cuadrada resulta
$$a_{t+1} = \sqrt{6 + a_t} < \sqrt{9} = 3.$$

(3) Como $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, tomando límite, si éste existe, se tiene $l = \sqrt{6 + l}$, luego $l^2 = 6 + l$, de donde resulta que l es raíz de $l^2 - l - 6$. luego $l = 2$ ó 3. Por lo tanto el límite es 3.

□

Problema. 10.21.
Determina el número a_n de permutaciones π del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que verifican $|\pi(i) - i| \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

SOLUCIÓN. Consideramos que n permanece fijo, entonces el número de las permutaciones pedidas es el número de permutaciones de este tipo del conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, por lo tanto son a_{n-1}

Ahora consideramos que n no es fijo, en este caso se tiene $\pi(n) = n-1$, y también se verifica $\pi(n-1) = n$. Resulta que el número de permutaciones pedidas es en ese caso el del conjunto $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, por lo tanto son a_{n-2}.

Los valores iniciales son: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, por lo tanto la sucesión es la de Fibonacci $\{f_n\}_n$ pero corrida una posición, esto es, $a_n = f_{n+1}$. Tenemos pues $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$. □

Problema. 10.22.
Determina el número b_n de permutaciones π del conjunto circular $\{1, 2, \ldots, n\}$ que verifican $|\pi(i) - i| \leq 1$. (En este caso suponemos que $1 = n+1$ cuando sea necesario.)

SOLUCIÓN. Analizamos los distinto casos según n.

1. n queda fijo; tenemos exactamente a_{n-1} permutaciones, siendo $\{a_n\}_n$ la sucesión del problema (10.21.).

2. $\pi(n) = n-1$. Puede ocurrir que $\pi(n-1) = n$, en este caso tenemos exactamente a_{n-1} permutaciones. Por el contrario, si $\pi(n-1) \neq n$ tiene que ser $\pi(1) = n$, lo que obliga a que $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, ..., $\pi(n-1) = n-2$, que es una permutaciones cíclica. Por lo tanto el número total de permutaciones en este caso es: $a_{n-2} + 1$.

3. Si $\pi(n) = 1$. Puede ocurrir que $\pi(1) = n$, y tenemos a_{n-2} permutaciones o por el contrario que $\pi(1) \neq n$, en este caso tenemos la permutación circular: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, ..., $pi(n-1) = n$. El número total de permutaciones es: $a_{n-2} + 2$.

Tenemos entonces $b_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2$. Vamos a calcular este valor. Sabemos que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, luego se tiene: $b_n = a_n + a_{n-2} + 2$. Por otro lado $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$, entonces:

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + 2 = \tfrac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^{n-1}(\alpha^2+1) - \beta^{n-1}(\beta^2+1)) + 2 \\ &= \alpha^{n-1}\tfrac{\sqrt{5}(\alpha^2+1)}{5} - \beta^{n-1}\tfrac{\sqrt{5}(\beta^2+1)}{5} + 2 \quad = \alpha^{n-1}\alpha - \beta^{n-1}(-\beta) + 2 \\ &= \alpha^n + \beta^n + 2. \end{aligned}$$

□

Capítulo V

Ejemplos

11. Ejemplos

Ejemplos

Ejemplo. 11.1.
Se considera n rectas en el plano de forma que se corten dos a dos y no hay tres coincidentes. Llamamos a_n al número de regiones en que se divide el plano cuando tenemos n rectas, y llamamos b_n al número de regiones no acotadas. Dar fórmulas para a_n y b_n.

SOLUCIÓN. Si tenemos una sola recta, entonces $a_1 = 2 = b_1$. Para el caso $n = 2$ resulta $a_2 = 4 = b_2$. Para $n = 3$ ya tenemos regiones no acotadas. En efecto, la nueva recta corta a cada una de las existentes y hace aparece nuevas regiones, exactamente tres, una más que las rectas previamente existentes. Para ver esto basta con considerar los puntos de corte de la nueva recta con las rectas existentes, en este caso dos, que dividen a la nueva recta en tres segmentos, una acotado y dos no acotados; cada uno de estos segmentos no acotados es una frontera de regiones no acotadas, y el segmento acotado determina una región acotada y otra no acotada. Así pues en este caso resulta $a_3 = 4 + 3 = 7$, y $b_3 = 4 + 2 = 6$. Para $n > 3$ tenemos $a_n = a_{n-1} + n$, ya que la nueva recta queda dividida en n segmentos, por los puntos de corte con las rectas existentes; y cada segmento divide regiones previas en dos, luego tenemos n nuevas regiones. Para contar las regiones no acotadas, basta ver que los segmentos no acotados dividen regiones no acotadas en regiones no acotadas, mientras que un segmento acotado divide una región acotada en dos regiones acotadas, y una región no acotada en dos, una acotada y la otra no, luego tenemos la recurrencia $b_n = b_{n-1} + 2$.

Caso de la sucesión a_n. La fórmula de recurrencia es $a_n = a_{n-1} + n$, luego la recurrencia homogénea es $a_n = a_{n-1}$; la solución homogénea es la sucesión contante igual a 1. La solución de la parte no homogénea es $\mu_2 n^2 + \mu_1 n + \mu_0$. Al comprobar la fórmula de recurrencia tenemos:

$$\mu_2 n^2 + \mu_1 n + \mu_0 = \mu_2 (n-1)^2 + \mu_1 (n-1) + \mu_0 + n$$

$$0 = -2\mu_2 n + \mu_2 - \mu_1 + n$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} = \mu_1$$

La solución general es: $\lambda + \frac{1}{2}(n^2 + n)$; al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 1 = 2 \\ \lambda + \frac{1}{2}(4+2) = 4 \\ \lambda + \frac{1}{2}(9+3) = 7 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda = 1$, luego el término general a_n es: $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$.
Caso de la sucesión b_n. La fórmula de recurrencia es $b_n = b_{n-1} + 2$, luego la recurrencia homogénea es $b_n = b_{n-1}$; la solución homogénea es la sucesión contante igual a 1. La solución de la parte no homogénea es $\mu_1 n + \mu_0$. Al comprobar la fórmula de recurrencia tenemos:

$$\mu_1 n + \mu_0 = \mu_1 (n-1) + \mu_0 + 2$$

$$0 = -\mu_1 + 2$$

$$\mu_1 = 2$$

La solución general es: $\lambda + 2n$; al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 2 = 2 \\ \lambda + 2(2) = 4 \\ \lambda + 2(3) = 6 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda = 0$, luego el término general b_n es: $b_n = 2n$. □

Ejemplo. 11.2.
Se considera un conjunto de 2^n, $n \geq 1$, números reales. ¿Cuántas comparaciones son necesarias hacer, entre pares de estos números, para determinar el máximo y el mínimo de este conjunto?

SOLUCIÓN. Llamamos a_n el número de comparaciones necesarias en el caso de n. Tenemos $a_1 = 1$. Para $n \geq 2$, para calcular a_n consideramos el conjunto $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\}$. Si descomponemos $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2^{n-1}}\} \cup \{x_{2^{n-1}+1}, x_{2^{n-1}+2}, \ldots, x_{2^n}\}$ y aplicamos el paso previo, necesitamos entonces $2a_{n-1}$ comparaciones. Finalmente comparamos los máximos y los mínimos de cada conjunto, por lo que necesitamos hacer dos comparaciones más. Entonces $a_n = 2a_{n-1} + 2 = 2(a_{n-1} + 1)$, si $n \geq 1$.
La solución general de la resolución homogénea es $\lambda 2^n$, y la solución de la pate no homogénea es la sucesión contante, luego una solución genérica será μ. Comprobamos la fórmula de

recurrencia para esta solución genérica:

$$\mu = 2\mu + 2$$

$$\mu = -2$$

La solución general es: $\lambda 2^n - 2$, y al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\lambda 2 - 2 = 1$$

Entonces $\lambda = \frac{3}{2}$. La solución es: $a_n = \frac{3}{2}2^n - 2 = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$, si $n \geq 1$. □

Ejemplo. 11.3.
Pablo pide un anticipo de A euros que debe pagar en t plazos. Si llamamos i al interés en cada uno de los plazos, ¿qué cantidad, contante, P debe pagar Pablo al final de cada plazo?

SOLUCIÓN. Llamamos a_n a la cantidad de dinero que debe al final del plazo n-ésimo. Tenemos la siguiente relación de recurrencia: $a_{n+1} = a_n + ia_n - P$, con las condiciones $a_0 = A$, $a_t = 0$ y $0 \leq n \leq t-1$.
Consideramos la relación de recurrencia homogénea: $a_{n+1} = (1+i)a_n$; una solución general es $\lambda(1+i)^n$.
La parte no homogénea es $-P$, una solución genérica es μ; el imponer la fórmula de recurrencia tenemos:

$$\begin{array}{l} \mu = (1+i)\mu - P \\ \mu = \frac{P}{i} \end{array}$$

La solución general es: $\lambda(1+i)^n + \frac{P}{i}$; si imponemos las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(1+i)^0 + \frac{P}{i} = A \\ \lambda(1+i)^t + \frac{P}{i} = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda = A - \frac{P}{i} \\ \lambda(1+i)^t + \frac{P}{i} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(A - \frac{P}{i}\right)(1+i)^t + \frac{P}{i} = 0$$

$$\frac{P}{i}\left(1 - (1+i)^t\right) = -A(1+i)^t$$

$$P = \frac{-A(1+i)^t i}{1-(1+i)^t} = \frac{A(1+i)^t i}{(1+i)^t - 1} = \frac{Ai}{1 - \frac{1}{(1+i)^t}}$$

□

Ejemplo. 11.4.
Resolver la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 3^n$ con la condición inicial $a_0 = 2$.

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = 3a_{n-1} + f(n)$, y consideramos la relación de recurrencia homogénea $a_n = 3a_{n-1}$; una solución general es: $\lambda 3^n$.

Consideramos también la solución del término no homogéneo, en este caso $\mu n 3^n$. Al sustituir en la fórmula de recurrencia se tiene

$$\mu n 3^n = 3\mu(n-1)3^{n-1} + 5 \cdot 3^n,$$

simplificando se obtiene $\mu = 5$. Una solución particular es: $5n3^n$.
La solución general es: $\lambda 3^n + 5n3^n$; al imponer las condiciones iniciales resulta:

$$\lambda = 2.$$

La solución es: $a_n = 2 \cdot 3^n + 5n3^n = (2+5n) \cdot 3^n$. □

Ejemplo. 11.5.
Resolver la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 5 \cdot 7^n$ con la condición inicial $a_0 = 2$.

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = 3a_{n-1} + f(n)$, y consideramos la relación de recurrencia homogénea $a_n = 3a_{n-1}$; una solución general es: $\lambda 3^n$.
Consideramos también la solución del término no homogéneo, en este caso $\mu 7^n$. Al sustituir en la fórmula de recurrencia se tiene

$$\mu 7^n = 3\mu 7^{n-1} + 5 \cdot 7^n,$$

simplificando se obtiene $\mu = \frac{35}{4}$. Una solución particular es: $\frac{35}{4}7^n = \frac{5}{4}7^{n+1}$.
La solución general es: $\lambda 3^n + \frac{5}{4}7^{n+1}$; al imponer las condiciones iniciales resulta:

$$\lambda = -\frac{27}{4}.$$

La solución es: $a_n = -\frac{27}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{4} \cdot 7^{n+1} = \frac{5}{4} \cdot 7^{n+1} - \frac{1}{4} \cdot 3^{n+3}$. □

Ejemplo. 11.6.
Resolver la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 3n^2$ con la condición inicial $a_0 = 7$.

SOLUCIÓN. Tenemos $a_n = a_{n-1} + f(n)$, y consideramos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_0 + f(1)\\
&a_2 = a_1 + f(2) = a_0 + f(1) + f(2)\\
&\vdots\\
&a_n = a_0 + f(1) + \cdots + f(n)
\end{aligned}$$

Se tiene entonces $a_n = a_0 + \sum_{i=1}^n 3i^2 = a_0 + 3\sum_{i=1}^n i^2 = 7 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. □

Ejemplo. 11.7.
Sea a_n el número de sucesiones de los dígitos 0, 1 y 2 en las que no hay dos ceros consecutivos. Determinar una fórmula para a_n.

SOLUCIÓN. Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 3$. Para $n = 2$ tenemos $a_2 = 8$, ya que la posibles sucesiones son: 0,1; 0,2; 1,0; 1,1; 1,2; 2,0; 2,1; 2,2.
La forma de construir una sucesión de longitud n a partir de una de longitud $n-1$ es agregando un 1 ó y 2; de esta forma tenemos todas las posibles sucesiones que acaban en 1 ó 2. Si una sucesión de longitud n acaba en 0, entonces los $n-2$ primeros términos pueden ser arbitrarios, pero el término $n-1$ es o bien 1 o bien 0; esto significa que el valor es a_n es:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

La ecuación característica es: $r^2 = 2r + 2$; las soluciones de esta ecuación son: $\alpha = 1 + \sqrt{3}$ y $\beta = 1 - \sqrt{3}$.
La solución general es:

$$\lambda_1(1+\sqrt{3})^n + \lambda_2(1-\sqrt{3})^n.$$

Al imponer las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(1+\sqrt{3}) + \lambda_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ \lambda_1(1+\sqrt{3})^2 + \lambda_2(1-\sqrt{3})^2 = 8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(1+\sqrt{3}) + \lambda_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ \lambda_1(4+2\sqrt{3}) + \lambda_2(4-2\sqrt{3}) = 8 \end{array}\right\}$$

Al multiplicar la primera ecuación por 2 y restarla a la segunda se obtiene: $2(\lambda_1 + \lambda_2) = 2$, esto es, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Al sustituir este valor en la primera ecuación resulta: $\lambda_1(1+\sqrt{3}) + (1-\lambda_1)(1-\sqrt{3}) = 3$, esto es, $(2\lambda_1 - 1)\sqrt{3} + 1 = 3$; y de aquí $\lambda_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ y $\lambda_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$.
El resultado final es:

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n.$$

□

Ejemplo. 11.8.
Sea a_n el número de sucesiones de los dígitos 0, 1 y 2 en las que no hay dos uno ó dos ceros consecutivos. Dar una fórmula para a_n.
Ver el problema (9.5.).

SOLUCIÓN. Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 3$. Para $n = 2$ tenemos $a_2 = 7$, ya que las sucesiones que podemos construir son: 0,1; 0,2;1,0; 1,2;2,0; 2,1; 2,2. Para $n = 3$ tenemos $a_3 = 17$, ya que las sucesiones que podemos construir son: 0,1,0; 0,1,2; 0,2,0; 0,2,1; 0,2,2;

1,0,1; 1,0,2; 1,2,0; 1,2,1; 1,2,2;

2,0,1; 2,0,2; 2,1,0; 2,1,2; 2,2,0; 2,2,1; 2,2,2.

A partir de una sucesión se longitud $n-1$ podemos construir otra de longitud n agregando un 2; si el lugar $n-1$ es distinto de 2, entonces podemos construir una secesión de longitud n agregando 0 ó 1, según corresponda; si el lugar $n-1$ es igual a 2, entonces podemos construir dos de longitud n, agregando 0 y 1; el número de sucesiones válidas de longitud $n-1$ con un dos en el lugar $n-1$ es exactamente a_{n-2}, entonces tenemos la siguiente fórmula para a_n.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Vamos a comprobarlo: $a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$. Otra comprobación se puede hacer al calcular a_4; será $a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 \cdot 17 + 7 = 41$; en efecto, tenemos
0,1,0,2; 0,1,2,2; 0,2,0,2; 0,2,1,2; 0,2,2,2;
1,0,1,2; 1,0,2,2; 1,2,0,2; 1,2,1,2; 1,2,2,2;
2,0,1,2; 2,0,2,2; 2,1,0,2; 2,1,2,2; 2,2,0,2; 2,2,1,2; 2,2,2,2;
0,1,0,1; 0,1,2,0; 0,2,0,1; 0,2,1,0; 0,2,2,0;
1,0,1,0; 1,0,2,0; 1,2,0,1; 1,2,1,0; 1,2,2,0;
2,0,1,0; 2,0,2,1; 2,1,0,1; 2,1,2,0; 2,2,0,1; 2,2,1,0; 2,2,2,0;
0,1,2,1; 0,2,2,1;
1,0,2,1; 1,2,2,1;
2,0,2,1; 2,1,2,1; 2,2,2,1.
Tenemos entonces que la ecuación característica es:

$$r^2 = 2r + 1,$$

cuyas raíces son: $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ y $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Una solución general es:

$$\lambda_1(1+\sqrt{2})^n + \lambda_2(1-\sqrt{2})^n;$$

al imponer las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(1+\sqrt{2}) + \lambda_2(1-\sqrt{2}) = 3 \\ \lambda_1(1+\sqrt{2})^2 + \lambda_2(1-\sqrt{2})^2 = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(1+\sqrt{2}) + \lambda_2(1-\sqrt{2}) = 3 \\ \lambda_1(3+2\sqrt{2}) + \lambda_2(3-2\sqrt{2})^2 = 7 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando a la segunda se tiene $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación resulta: $(2\lambda_1 - 1)\sqrt{2} + 1 = 3$, luego $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ y entonces $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.
Vamos a comprobar que realmente esta es la solución. En efecto,
$a_1 = \frac{1+\sqrt{2}+1}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} + \frac{3-\sqrt{2}}{2} = 3.$
$a_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^2 = \frac{(1+\sqrt{2})^3}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^3}{2} = 7.$ □

Ejemplo. 11.9.
Sea a_n el número de sucesiones de 1 y 2 de forma que su suma sea n. Dar una fórmula para a_n.

SOLUCIÓN. Para $n = 1$ tenemos $a_1 = 1$. Para $n = 2$ tenemos $a_2 = 2$, ya que existen dos sucesiones: 1,1; 2. Para $n = 3$ tenemos $a_3 = 3$, ya que existen tres sucesiones: 1,1,1; 1,2; 2,1.

De cada sucesión que suma $n-1$ podemos construir una sucesión que suma n agregando un 1, y de cada sucesión que suma $n-2$ podemos construir dos sucesiones que suman n, agregando un 2 ó agregando $1, 1$; este último caso ya ha sido considerado, por lo que la fórmula para a_n es la siguiente:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

La ecuación característica es: $r^2 = r + 1$. Las raíces son: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, y una solución general es:

$$\lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Al imponer las condiciones iniciales resulta

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \\ \lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 2 \end{array}\right\}$$

Las soluciones son: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ y $\lambda_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, por lo que el resultado final es:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Nota. Ver la sucesión de Fibonacci. □

Ejemplo. 11.10.
Tenemos motocicletas y coches. Determinar el número de formas de acomodar motocicletas y coches en una hilera de n huecos si cada motocicletas necesita un hueco y cada coche necesita dos. (Las motocicletas y los coches son indistinguibles entre sí.)

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de formas posibles para una hilera de n huecos. Si tenemos una ordenación de n huecos y al final tenemos una motocicleta, los $n-1$ huecos restantes se pueden ordenar de a_{n-1} formas, y si tenemos al final un coche, los $n-2$ huecos restantes se pueden ordenar de a_{n-2} formas, por lo tanto el valor de a_n es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Los valores iniciales son $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, por lo tanto la resolución del problema es similar al Ejercicio (11.9.). □

Ejemplo. 11.11.
Si un caso de una enfermedad infecciosa se descubre en un colegio, se p_n la probabilidad de que al menos un caso se descubra en la semana n–ésima. Se tiene la siguiente evidencia:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{1}{4}p_{n-2}, \text{ si } n \geq 2.$$

Con las condiciones iniciales $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$. ¿Cuándo se tendrá una probabilidad inferior a $\frac{1}{100}$?

SOLUCIÓN. La ecuación característica es: $r^2 = r - \frac{1}{4}$, y sus raíces son: $\alpha = \frac{1}{2}$ con multiplicidad dos.

Las soluciones básicas son $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ y $b_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La solución general es:

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \lambda_2 0\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \\ \lambda_1\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Luego $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_1 = 2$. La solución de la sucesión recurrente es:

$$p_n = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Para que este valor sea menor que $\frac{1}{100}$ tiene que ser $2n\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100}$, luego $100n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1$, esto es, $100n < 2^{n-1}$; $25n < 2^{n-3}$. Cuando $n \leq 11$ tenemos $25n > 2^{n-3}$ $(275 > 2^8 = 2^4 \cdot 2^4 = 256)$, y para $n = 12$ resulta $300 < 2^9 = 512$.

La solución es para $n \geq 12$ ya que la función $2^{n-3} - 25n$ es una función estrictamente creciente. $\square$

Ejemplo. 11.12.
Se considera $b \in \mathbb{R}^+$ y el determinante d_n de la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} b & b & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & & & \\ b & b & b & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & b & b & b & 0 & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & b & b & b & \cdots\cdots\cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\cdots\cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b & b \end{pmatrix}$$

la diagonal, la diagonal superior y la diagonal inferior tienen todas sus entradas iguales a b. Calcular el valor de d_n.

SOLUCIÓN. Tenemos $d_1 = b$, $d_2 = \begin{vmatrix} b\,b \\ b\,b \end{vmatrix} = 0$ y $d_3 = \begin{vmatrix} b\,b\,0 \\ b\,b\,b \\ 0\,b\,b \end{vmatrix} = -b^3$.

En general $A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A_n & \vdots \\ & b \\ \hline 0\cdots\ b & b \end{array}\right)$, luego $d_{n+1} =\mid A_n \mid b- \mid B_n \mid b$, siendo $B_n = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A_{n-1} & \vdots \\ & b \\ \hline 0\cdots\ 0 & b \end{array}\right)$,
entonces $\mid B_n \mid=\mid A_{n-1} \mid b$.
Resulta entonces $d_{n+1} = |A_n|b - |A_{n-1}|b^2 = d_nb - d_{n-1}b^2$.
La ecuación característica es: $r^2 = rb - b^2$. Las raíces son: $\alpha = b\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ y $\beta = b\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.
La solución general es:

$$\lambda_1 b^n \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n + \lambda_2 b^n \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n.$$

Al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 b\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right) = b \\ \lambda_1 b^2\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 + \lambda_2 b^2\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right) = b \\ \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2\sqrt{-3}}$ y $\lambda_2 = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2\sqrt{-3}}$.

El término general es:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1+\sqrt{-3}}{2\sqrt{-3}} b^n \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{-3}}{2\sqrt{-3}} b^n \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n \\ &= \frac{b^n}{\sqrt{-3}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{b^n(-i)}{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Tenemos $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\theta + \sin\theta$ con $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego $\theta = \frac{\pi}{3} (= 60^o)$.
Entonces $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{n+1} = \cos\frac{(n+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$ y $i\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = i\cos\frac{(n+1)\pi}{3} - \sin\frac{(n+1)\pi}{3}$.
De la misma forma resulta $i\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = i\cos\frac{(n+1)\pi}{3} + \sin\frac{(n+1)\pi}{3}$.
Como consecuencia $d_n = \frac{b^n}{\sqrt{3}} 2\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$. □

Ejemplo. 11.13.
Resolver la sucesión recurrente

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), \quad n \geq 2$$

con las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

SOLUCIÓN. La ecuación característica es $r^2 = 2(r-1)$. Las raíces son $\alpha = 1+i$, $\beta = 1-i$.
Las soluciones básicas son: $b_n = (1+i)^n$ y $c_n = (1-i)^n$.
La solución general es: $\lambda_1(1+i)^n + \lambda_2(1-i)^n$. Al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i) = 2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_2 = \frac{1+i}{2}$ y $\lambda_1 = \frac{1-i}{2}$.
La solución es: $a_n = \frac{1}{2}\left((1-i)(1+i)^n + (1+i)((1-i)^n)\right) = (1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}$.
Tenemos que $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4})$, luego $(1+i)^n = \sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4})$. Como consecuencia resulta

$$\begin{aligned} a_n &= (1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1} \\ &= \sqrt{2}^{n-1}(\cos\frac{(n-1)\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) + \sqrt{2}^{n-1}(\cos\frac{(n-1)\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2}^{n+1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 11.14.
Resolver la sucesión recurrente

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 =$.

SOLUCIÓN. La ecuación característica es: $2r^3 = r^2 + 2r - 1$. Las raíces son $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$.

Las soluciones básicas son: $b_n = 1$, $c_n = (-1)^n$ y $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La solución general es: $\lambda_1 + \lambda_2(-1)^n + \lambda_3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Al imponer las condiciones iniciales tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 = 2 \end{array}\right\}$$

De aquí se obtiene $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2\frac{1}{6}$, $\lambda_3 = -\frac{8}{3}$.

La solución es: $a_n = \frac{5}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. □

Ejemplo. 11.15.
Encontrar una relación de recurrencia para el número de sucesiones binarias de longitud n que no tienen dos ceros consecutivos.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número en cuestión. Es claro que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 5$, pues las sucesiones de longitud tres son: 0,1,0; 0,1,1; 1,0,1; 1,1,0; 1,1,1.

En general dada una sucesión de n términos, si acaba en 1, entonces los $n-1$ primeros términos son arbitrarios, tenemos entonces a_{n-1} sucesiones. Si acaba en 0, entonces el término que ocupa el lugar $n-1$ es un 1, y los primeros $n-2$ términos son arbitrarios, tenemos entonces a_{n-2}. La fórmula de recurrencia es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, con la condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Nota. Ver la sucesión de Fibonacci. □

Ejemplo. 11.16.
Se considera un reactor al que en el momento cero se le inyecta un neutrón de alta energía. En cada periodo de tiempo, por ejemplo un microsegundo (10^{-6} segundos) se produce el siguiente proceso:
(1). Un neutrón se alta energía interactúa con un núcleo (de material de fusión, por ejemplo uranio) y en este proceso para el siguiente periodo se producen dos nuevos neutrones de alta energía y uno de baja energía.
(2). Un neutrón de baja energía interactúa con un núcleo, y en este proceso se produce un electrón de alta energía y uno de baja energía.
Si suponemos una situación ideal en la que cada neutrón libre interactúa con un núcleo en cada periodo, y si llamamos a_n al número de neutrones de alta energía y b_n al número de neutrones de baja energía en el periodo n–ésimo. Determinar una fórmula general para a_n y b_n.

SOLUCIÓN. Los valores iniciales son $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ y la regla de formación es:

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}\right\}$$

Si llamamos $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$, entonces tenemos:

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}x^{n+1} &= 2a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \\ b_{n+1}x^{n+1} &= a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum a_{n+1}x^{n+1} &= 2x\sum a_n x^n + x\sum b_n x^n \\ \sum b_{n+1}x^{n+1} &= x\sum a_n x^n + x\sum b_n x^n \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) - a_0 &= 2xf(x) + xg(x) \\ g(x) - b_0 &= xf(x) + xg(x) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x)(1-2x) &= xg(x) + a_0 \\ xf(x) &= g(x)(1-x) - b_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(x)(1-2x)x = x^2 g(x) + xa_0 \\ &f(x)(1-2x)x = g(x)(1-x)(1-2x) - b_0(1-2x) \end{aligned}\right\}$$

$$0 = g(x)(x^2 - (1-x)(1-2x)) + xa_0 + (1-2x)b_0$$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{x}{x^2-3x+1} \\ f(x) &= \tfrac{g(x)(1-x)}{x} = \tfrac{1-x}{x^2-3x+1} \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ entonces } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Valor de $g(x)$.

$$\frac{x}{x^2-3x+1} = \frac{A}{\alpha - x} + \frac{B}{\beta - x} = \frac{(\beta - x)A + (\alpha - x)B}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

$$x = (\beta - x)A + (\alpha - x)B = -x(A+B) + B\alpha + A\beta$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=-1 \\ B\alpha + A\beta = 0 \end{array}\right\}$$

$$B\alpha + (-1-B)\beta = 0; \quad B(\alpha - \beta) = \beta;$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{(3-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} \\ A = -1 - B = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10} \end{array}\right\}$$

$$g(x) = -\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha - x} + \frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\beta - x}.$$

Valor de $f(x)$.

$$\frac{1-x}{x^2-3x+1} = \frac{A}{\alpha - x} + \frac{B}{\beta - x} = \frac{(\beta - x)A + (\alpha - x)B}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

$$1 - x = (\beta - x)A + (\alpha - x)B = -x(A+B) + B\alpha + A\beta$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ B\alpha + A\beta = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1-(3-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ A = 1 - B = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{array}\right\}$$

$$f(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha - x} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\beta - x}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{-(n+1)} + \tfrac{5-\sqrt{5}}{10}\beta^{-(n+1)} = \tfrac{5+\sqrt{5}}{10}\beta^{n+1} + \tfrac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^{n+1} \\ &= \tfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \tfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= -\tfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{-(n+1)} + \tfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}\beta^{-(n+1)} = -\tfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\beta^{n+1} + \tfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{n+1} \\ &= -\tfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \tfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nota. Se tiene: $\alpha^{-1} = \beta$ y $\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha} + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \cdots\right)$ □

Ejemplo. 11.17.
Dado un conjunto de n elementos distintos y $r \geq 0$, llamamos $a(n,r)$ al número de formas en que se pueden elegir r elementos (incluso con repetición) de este conjunto de n elementos. Determinar una fórmula para $a(n,r)$.

SOLUCIÓN. Tenemos la fórmula $a(m,r) = a(n-1,r) + a(n,r-1)$, ya que fijado un elemento b_1 del conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$, el valor de $a(n,r)$ se calcular teniendo en cuenta que b_1 no intervenga en cuyo caso es $a(n-1,r)$, o bien b_1 interviene, lego el valor es $a(n,r-1)$, y en conjunto tenemos

$$a(n,r) = a(n-1,r) + a(n-1,r).$$

Construimos las funciones generatrices

$$f_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a(n,r)x^r,$$

con $a(n,0) = 1$ y $a(o,r) = 0$ para cada n, $r > 0$.
La relación anterior significa, para $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \sum a(n,r)x^r = \sum a(n-1,r)x^r + \sum a(n,r-1)x^r = f_{n-1}(x) + xf_n(x)$$

$$f_n(x)(1-x) = f_{n-1}(x)$$

$$f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)}{1-x}.$$

Por inducción tenemos $f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$, y resulta

$$f_n(x) = \sum_r \binom{-n}{r}(-1)^r x^r = \sum_r \binom{n+r-1}{r} x^r,$$

luego la solución es: $a(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$. □

Ejemplo. 11.18.
Se considera la recurrencia no homogénea

$$a_n = 3a_{n-1} + n,$$

con la condición inicial $a_0 = 1$. Determinar una fórmula para a_n.

SOLUCIÓN. Escribimos todos los casos desde $n = 1$, multiplicamos por x^n y hacemos la suma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = 3\sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1}x^i + \sum_{i=1}^{\infty} ix^i.$$

Definimos la función $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$. Se verifica:

$$f(x) - a_0 = 3xf(x) + \sum_{i=1}^{\infty} ix^i$$

La función generatriz $\sum_{i=0}^{\infty} ix^i = \sum_{i=1}^{\infty} ix^i$ es la función generatriz de $\frac{d}{dx}\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots$, luego $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} ix^i$, y obtenemos:

$$f(x) - a_0 = 3xf(x) + \frac{x}{(1-x)^2},$$

de donde

$$f(x) = \frac{x/(1-x)^2 + a_0}{1-3x} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} + \frac{1}{1-3x}$$

Para descomponer en fracciones simples.

$$\frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} = \frac{A(1-x)(1-3x) + B(1-3x) + C(1-x)^2}{(1-x)^2(1-3x)}$$

$$x = A(1-x)(1-3x) + B(1-3x) + C(1-x)^2 = (3A+C)x^2 - (4A+3B+2C)x + (A+B+C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A+C=0 \\ 4A+3B+2C=-1 \\ A+B+C=0 \end{array}\right\}$$

de donde $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$ y $C = \frac{3}{4}$. Tenemos entonces $f(x) = -\frac{1/4}{1-x} - \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{3/4}{1-3x} + \frac{1}{1-3x} = -\frac{1/4}{1-x} - \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{7/4}{1-3x}$. El coeficiente de x^n es:

$$-\frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\binom{2+n-1}{n}(-1)^{2n} + \frac{7}{4}\cdot 3^n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\binom{n+1}{n} + \frac{7}{4}\cdot 3^n = -\frac{1}{4} - \frac{n}{2} + \frac{7}{4}\cdot 3^n,$$

ya que $\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \cdots$.
Nota. ¡Hacer este ejercicio si utilizar funciones generatrices! □

Ejemplo. 11.19.
Determinar cuántos subconjuntos de cuatro elementos del conjunto $\{1,2,3,\ldots,14,15\}$ existen que no contienen dos enteros consecutivos.

SOLUCIÓN. Dado un subconjunto válido, sea $\{a,b,c,d\}$, con $a < b < c < d$, tenemos que

$$a-1, b-a, c-b, d-c, 15-d$$

son enteros y su suma es 14, siendo todos menores que 14.
Entonces cada subconjunto admisible está determinado por un quinteto a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5, verificando:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 14, \\ 0 \le a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \\ 2 \le a_2, a_3, a_4 \end{array}\right\}$$

La función que define esta situación es:

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^2(x^2+x^3+x^4+\cdots)^3 = x^6(1+x+x^2+x^3+\cdots) = x^6\frac{1}{(1-x)^5}.$$

Tenemos que calcular el coeficiente de x^{14} en $f(x)$, o equivalentemente el coeficiente de x^8 en $\frac{1}{(1-x)^5}$. Como

$$\frac{1}{(1-x)^5} = (1-x)^{-5} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-5}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{5+r-1}{r}x^r,$$

entonces tenemos que calcular

$$\binom{5+8-1}{6} = \binom{12}{6} = \binom{12}{4} = \frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2} = \frac{11\times 10\times 9}{2} = 99\times 5 = 495.$$

□

Ejemplo. 11.20.
Determinar el coeficiente de x^8 en $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$.

SOLUCIÓN. Descomponemos $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-3)}{(x-3)(x-2)^2}$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-4A-5B+C)x + (4A+6B-3C),$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -4A-5B+C=0 \\ 4A+6B-3C=1 \end{array}\right\}$$

La solución es: $A=1$, $B=-1$ y $C=-1$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{(x-3)(x-2)^2} &= \tfrac{1}{(x-3)} - \tfrac{1}{(x-2)} - \tfrac{1}{(x-2)^2} \\
&= -\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{1-\frac{x}{3}} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{1-\frac{x}{2}} - \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} \\
&= -\tfrac{1}{3}\sum_r \left(\tfrac{x}{3}\right)^r + \tfrac{1}{2}\sum_r \left(\tfrac{x}{2}\right)^r - \tfrac{1}{4}\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}\left(\tfrac{-x}{2}\right) + \binom{-2}{2}\left(\tfrac{-x}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

El coeficiente de x^8 es:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2^8} - \tfrac{1}{4}\binom{-2}{8}\tfrac{1}{2^8} &= -\tfrac{1}{3^9} + \tfrac{1}{2^9} - \tfrac{1}{4}\binom{2+8-1}{8}\tfrac{1}{2^8} \\
&= -\tfrac{1}{3^9} + \tfrac{1}{2^9} - \tfrac{1}{2^{10}}\binom{9}{8} \\
&= -\tfrac{1}{3^9} + \tfrac{1}{2^9} - \tfrac{1}{2^{10}}9 \\
&= -\tfrac{1}{3^9} + \tfrac{2-9}{2^{10}} \\
&= -\tfrac{1}{3^9} - \tfrac{7}{2^{10}}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 11.21.
Comprobar que $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

SOLUCIÓN. Tenemos $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)^2$, entonces

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 11.22.
De cuántas formas puede un maestro repartir 24 libros entre cuatro alumnos si cada alumno debe tener al menos tres y no más de ocho.

SOLUCIÓN. Para cada alumno la distribución de libros es $x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ y como tenemos cuatro alumnos, la distribución es: $f(x) = (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4$. Vamos a calcular el coeficiente de x^{24} en $f(x)$.

$$f(x) = (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4 = x^{12}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4.$$

Se trata entonces de determinar el coeficiente de x^{12} en la expansión de $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 &= (1-x^6)^4\,\frac{1}{(1-x)^4}\\ &= \left[1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+x^{24}\right]\left[\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\binom{-4}{2}(-x)^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

Este coeficiente es:

$$\begin{aligned}&1\cdot\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}\\ &= \binom{4+12-1}{12}-\binom{4}{1}\binom{4+6-1}{6}+\binom{4}{2}\binom{4+0-1}{0}\\ &= \binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}\binom{3}{0}\\ &= \binom{15}{3}-4\binom{9}{3}+6\binom{3}{0}\\ &= \frac{15\times14\times13}{3\times2}-4\frac{9\times8\times7}{3\times2}+6\times3 = 560-336+6 = 230.\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 11.23.
Determinar el coeficiente de x^{15} en la expansión de $f(x) = (x^2+x^3+x^4+\cdots)^4$.

SOLUCIÓN. Tenemos $x^2+x^3+x^4+\cdots = x^2(1+x+x^2+\cdots) = \frac{x^2}{1-x}$.

Tenemos $f(x) = \frac{x^8}{(1-x)^4}$, y por tanto basta determinar el coeficiente de x^7 en la expansión de $\frac{1}{(1-x)^4}$.

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-4}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{4+i-1}{i} x^r.$$

Luego el coeficiente es: $\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$.

□

Ejemplo. 11.24.
De cuántas formas se puede seleccionar r objetos de un conjunto de n objetos distintos (está permitida la repetición).

SOLUCIÓN. Si solo tenemos un objeto las diferentes formas de seleccionar $0, 1, 2, 3, \ldots$ objetos están dadas por la serie geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
Si en vez de uno tenemos n objetos, las diferentes formas estarán dadas por la función

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n.$$

Se trata de determinar el coeficiente de x^r en $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r,$$

luego la solución es: $\binom{n+r-1}{r}$. □

Ejercicio. 11.25.
Se considera la sucesión $\{a_n\}_n$ definida por $a_0 = -6$, $a_1 = 22$, $a_2 = -38$ y $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$ para $n \geq 0$. Determina el término general de la sucesión.

SOLUCIÓN. $a_n = 2(-3)^{n+1} + n2^{n+1}$ □

Ejercicio. 11.26.
En un taller de reparaciones de coches un operario se dice que está en el nivel n si le faltan n etapas para llegar a reparar el vehículo en el que está trabajando. Sabemos que desde cada nivel n hay dos formas de llegar al nivel $n-1$ y tres de llegar al nivel $n-2$. Si llamamos a_n al número de formas en que se puede llegar a reparar un vehículo estando en el nivel n y si $a_0 = 1$. Da una fórmula para calcular a_n si $a_1 = 2$.

SOLUCIÓN. Observa que se tiene la relación $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n+2}$. Por tanto $\{a_n\}_n$ es una sucesión recurrente con polinomio característico $r^2 - 2r - 3$. Las raíces de este polinomio son -1 y 3, entonces una solución general es: $a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 3^n$. Al imponer las condiciones iniciales se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ a_1 = 2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{array}\right\}$$

La solución es $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ y $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. El término general de la sucesión pedida es: $a_n = \frac{1}{4}(-1)^n +$ $^o frac343^n = \frac{(-1)^n}{4} + \frac{3^{n+1}}{4}$. □

Ejercicio. 11.27.
Se supone que la facturación de una empresa es cada año la media entre la del año anterior y la del año siguiente. Si las ventas en el año 2000 fueron $a_0 = a$ y el año 2001 fueron $a_1 = b$. Calcula las ventas en el año $2000 + n$.

SOLUCIÓN. Si llamamos a_n a las ventas en el año $2000 + n$ se verifica:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}.$$

Se trata de una sucesión recurrente cuyo polinomio característico es $r^2 - 2r + 1$ que tiene raíz 1 con multiplicidad dos. La expresión de la solución general es: $a_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 n 1^n = \lambda_1 + n\lambda_2$. Al imponer las condiciones iniciales se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = a = \lambda_1, \\ a_1 = b = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b - a$. El término general de la sucesión es:

$$a_n = a + n(b - a) = a(1 - n) + bn.$$

□

Ejercicio. 11.28.
Un sistema luminoso emite tres tipos de señales, una de las cuales dura un segundo y las otras dos dos segundos cada una. Halla el número de señales diferentes que se pueden emitir en n segundos suponiendo que las señales se emiten de forma continua.

SOLUCIÓN. Llamamos a_n al número de señales que se pueden emitir en n segundos. Observar que $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$. Además se tiene $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ para $n \geq 0$. Tenemos pues una sucesión recurrente con polinomio característica $r^2 - r - 2$, cuyas raíces son: -1 y 2. La solución general es: $a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n$, que al imponer las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ a_2 = 3 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ y $\lambda_2 = \frac{2}{3}$. El término general de la sucesión es: $a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n = \frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{2^{n+1}}{3}$. □

Capítulo VI

Miscelánea

12. Números naturales. El principio de inducción

Se considera $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, esto es,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Una propiedad $\mathcal{P}$ de números naturales determina un subconjunto $X_{\mathcal{P}}$ de $\mathbb{N}$, el formado por todos los números naturales que verifican la propiedad $\mathcal{P}$. Veamos un ejemplo, sea $\mathcal{P}$ la propiedad ser múltiplo de 2, en este caso se tenemos

$$X_{\mathcal{P}} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Este conjunto se representa por $2\mathbb{N}$. Si $\mathcal{P}$ es la propiedad ser un número impar, entonces

$$X_{\mathcal{P}} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Este conjunto es el complemento de $2\mathbb{N}$, esto es, $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$.
Existe una fórmula para la suma de los primeros números naturales hasta n :

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta fórmula podemos comprobarla para algunos números. Veamos algunos ejemplos:

n	$0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1)$	$\frac{(n-1)n}{2}$
0	0	0
1	1	1
2	3	3
3	6	6
4	10	10

Pero no basta esta comprobación para afirmar que la fórmula es correcta, por esto hacemos el siguiente razonamiento. Llamamos X al subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos los números naturales para los que la fórmula es cierta. Ya hemos comprobado que $0, 1, 2, 3, 4 \in X$. Como queremos ver que la fórmula es cierta para todos los números naturales debemos comprobar que $X = \mathbb{N}$. Para probar nos apoyamos en que los números naturales verifican la propiedad siguiente: *Si un subconjunto S de* $\mathbb{N}$ *contiene a 0 y al siguiente de cada elemento de S, entonces* $S = \mathbb{N}$. Es el llamado **Principio de Inducción.**

Nos vamos a basar en esta propiedad para ver que la fórmula es cierta para todos los números naturales. En efecto, ya hemos comprobado que $0 \in X$, y supongamos que $x \in X$, esto es, que se verifica

$$0 + 1 + 2 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Vamos a comprobar que también $x + 1 \in X$ y tendremos $X = \mathbb{N}$. Este es inmediato:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + x + (x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x+1) = (x+1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{(x+1)(x+2)}{2}.$$

Obtenemos por tanto

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Este método se conoce como el método de inducción y es muy útil a la hora de probar propiedades de números naturales.

Existen muchas otras fórmulas de este tipo. Por ejemplo:

$$0 + 2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En este caso no es necesario hacer inducción, basta sacar el 2 factor común a todos los sumandos.

Otra fórmula útil es:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En este caso basta considerar el siguiente desarrollo:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = (0+1+2+\cdots+2n) - (0+2+4+\cdots+2n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2.$$

Ejercicio. 12.1.
Dados enteros positivos $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ verificando:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 > a_0, \\ a_2 = 3a_1 - 2a_0, \\ \cdots \\ a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}. \end{array} \right\}$$

Probar que $a_{100} > 2^{99}$.
[The problems of the All-Soviet-Union mathematical competitions 1961-1986. Problem 015]

SOLUCIÓN. [Ver también el Ejercicio (9.1.)] De la relación $a_1 > a_0$ sabemos que existe $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $a_1 = a_0 + h$.
De la relación $a_2 = 3a_1 - 2a_0$ se obtiene:

$$a_2 = 3(a_0 + h) - 2a_0 = a_0 + 3h.$$

De esta forma también obtenemos:

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3(a_0 + 3h) - 2(a_0 + h) = a_0 + 7h$$

Es decir, para cada índice n se tiene una expresión:

$$a_n = a_0 + f_n \cdot h,$$

siendo $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 7, \ldots$.
La sucesión $\{f_n\}_n$ sigue una ley de formación, por ejemplo $f_n = 2^n - 1$. Esta ley que se comprueba para los valores $0, 1, 2, 3$, queremos probar que es cierta para todo número natural. Vamos a probar este hecho por inducción sobre n. Llamamos X al subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por los números naturales x tales que $f_x = 2^x - 1$. Ya hemos comprobado que $0, 1 \in X$; supongamos que $0, 1, 2, \ldots, x \in X$, siendo $x \geq 2$, y vamos a probar que también $x + 1 \in X$. en efecto, se tiene:

$$\begin{aligned}
a_{x+1} &= 3a_x - 2a_{x-1} = 3(a_0 + (2^x - 1)h) - 2(a_0 + (2^{x-1} - 1)h) \\
&= a_0 + (3(2^x - 1) - 2(2^{x-1} - 1))h = a_0 + (3 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{x-1} - 1)h \\
&= a_0 + (2^{x+1} - 1)h.
\end{aligned}$$

Como consecuencia $f_{x+1} = 2^{x+1} - 1$ y también $x + 1 \in X$. Entonces $X = \mathbb{N}$.
Al estudiar el caso de a_{100} tenemos: $a_{100} = a_0 + (2^{100} - 1)h$, y como $a_0 \geq 0$ y $h \geq 1$, resulta que $a_{100} > 2^{99}$. □

13. Progresiones aritméticas

Una sucesión de números reales $\{a_n\}_n = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ se llama una progresión aritmética si cada término a_n se obtiene del anterior sumando un número fijo d. El número d se llama la **diferencia** de la progresión. Esto es, si $a_{n+1} = a_n + d$ para cada $n \geq 0$. Observar que la progresión aritmética está dada por el primer término a_0 y la diferencia, ya que para cada índice n se tiene $a_n = a_0 + nd$. (La demostración de este hecho se debe hacer por inducción.)
La descripción $a_n = a_0 + nd$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se conoce como el término general de la progresión.
La suma de los primeros términos de una progresión aritmética se calcula de forma sencilla aplicando lo ya conocido sobre la suma de los primeros números naturales.

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_0 + (a_0 + d) + \cdots + (a_0 + nd) = na_0 + (0 + 1 + \cdots + n)$$

$$= na_0 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2na_0+n(n+1)}{2} = \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}.$$

Observar que si queremos sumar términos consecutivos de la progresión $\{a_n\}_n$ se tiene:

$$a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{r+s} = \frac{(a_0 + a_{r+s})(r + s + 1)}{2} - \frac{(a_0 + a_{r-1})r}{2} = \frac{(a_r + a_{r+s})(s + 1)}{2}.$$

Esto es la suma del primero más el último por el número de términos divido por 2.
Vamos a intentar sumar los cuadrados de los primeros números naturales:

$$0 + 1 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Si llamamos s_n a este valor, tenemos una sucesión $\{s_n\}_n$. Como no es una progresión aritmética, tal y como anteriormente hemos definido, no sabemos como hacer esta suma. Vamos a hacer algunas operaciones con los números s_n. Los escribimos en una columna y a la derecha de cada uno escribimos la diferencia con el siguiente; esto nos forma una segunda columna, formada por los cuadrados de los números naturales. Repetimos el proceso para obtener una tercera columna que, ahora sí, es una progresión aritmética. Si a esta columna le hacemos lo mismo obtenemos una cuarta columna en la que todos los términos con constantes. Decimos que la sucesión $\{s_n\}_n$ es una progresión aritmética de tercer grado, mientras que la sucesión $\{n^2\}_n$ es una progresión aritmética de segundo grado.

n	s_n	Δs_n	$\Delta^2 s_n$	$\Delta^3 s_n$
0	0	1	3	2
1	1	4	5	2
2	5	9	7	2
3	14	16	9	
4	30	25		
5	55			

En general una sucesión $\{a_n\}_n$ forma una progresión aritmética de grado t si al someterla a este proceso la columna t tiene todos sus términos iguales.

Podemos probar que el término general, a_n, de una progresión aritmética de grado t se obtiene como

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i a_0.$$

En donde hemos utilizado la siguiente notación:

- $\Delta_0 a_0$ es el término a_0,
- $\Delta^1 a_0$ es el término que ocupa el primer lugar en la segunda columna, y en general $\Delta^i A_0$ es el elemento que ocupa el primer lugar en la columna $i+1$.

En el caso de la suma de cuadrados de los primeros números naturales se tiene:

$$\begin{aligned} s_n &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i s_0 = \binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 s_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 s_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 s_0 \\ &= 1 \cdot 0 + n \cdot 1 + \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot 3 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 2 = n + \tfrac{n(n-1)}{2} + \tfrac{3n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \tfrac{n^3+n^2+n}{6} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio. 13.1.
Determina la fórmula para la suma de los cubos de primeros números naturales.

SOLUCIÓN. Llamamos $\{s_n\}_n$ a la sucesión definida $s_n = 0 + 1 + 2^3 + \cdots + n^3$. Hacemos la construcción en este caso:

n	s_n	Δs_n	$\Delta^2 s_n$	$\Delta^3 s_n$	$\Delta^4 s_n$
0	0	1	7	12	6
1	1	8	19	18	6
2	9	27	37	24	6
3	36	64	61	30	
4	100	125	91		
5	225	216			
6	441				

El término general es:

$$\begin{aligned} s_n &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i s_0 = \binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 s_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 s_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 s_0 + \binom{n}{4} \Delta^4 s_0 \\ &= 1 \cdot 0 + n \cdot 1 + \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot 7 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 12 + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot 6 \\ &= n + \tfrac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Ejercicio. 13.2.
Demuestra que se verifica

$$0 + 1 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

14. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión $\{a_n\}_n$ verificando $a_{n+1} = a_n r$ para cada $n \geq 0$. Observa que una progresión geométrica está determinada por los valores de a_0 y de r. Llamamos a r la razón de la progresión. El caso en que $r = 0$ nos da una sucesión trivial, por lo en general no lo vamos a considerar. Observar que se tiene $a_n = a_0 r^n$ para cada $n \geq 0$.

Para progresiones geométricas es de interés calcular la suma de los primeros términos.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \cdots + a_n &= a_0 + a_0 r + \cdots + a_0 r^n \\ &= a_0(1 + r + \cdots + r^n) \\ &= a_0 \tfrac{x^{n+1}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

15. Sucesiones recurrentes

Otro tipo de sucesiones de interés son las sucesiones definidas por recurrencia. Una sucesión $\{a_n\}_n$ está definida por recurrencia si a partir de un índice cada término se puede calcular, mediante una fórmula, a partir de los términos anteriores. Los ejemplos que vamos a estudiar son aquellos que son semejantes a la sucesión de Fibonacci. Recordar que esta sucesión está definida mediante

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Consideremos por tanto el caso general, esto es, una sucesión definida por:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Siendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como ya hemos comentamos todas las sucesiones que verifican esta relación forman un espacio vectorial, por lo tanto para estudiarlas todas vamos a dar una base del mismo. No viene al caso, pero conviene señalar que la dimensión del espacio vectorial para la sucesión de Fibonacci es igual a dos, y por tanto una base está formada por dos elementos (dos sucesiones).

El método de cálculo consiste en ver qué progresiones geométricas verifican la relación. Consideremos una progresión geométrica $a_n = a_0 r^n$ (podemos suponer que $a_0 \neq 0$ y $r \neq 0$, ya que en otro caso estaríamos ante una sucesión trivial). Se tiene entonces las siguientes relaciones que se pueden simplificar en la forma obvia.

$$a_0 r^{n+2} = c_1 a_0 r^{n+1} + c_2 r^n, \quad r^2 = c_1 r + c_2 \text{ (ecuación característica)}.$$

Por tanto r es raíz del polinomio $X^2 - c_1 X - c_2$ (polinomio característico). Si α es una raíz de este polinomio (puede ser un número complejo), entonces la sucesión $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ verifica la relación $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$.

Si el polinomio tiene dos raíces distintas, α y β, entonces tenemos dos sucesiones distintas $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ y $\{1, \beta, \beta^2, \ldots\}$ que satisfacen la relación, y por tanto éstas forman una base del espacio vectorial.

Si α es una raíz doble del polinomio, como es también raíz de la derivada del polinomio, se tiene:

$$2\alpha - c_1 = 0.$$

Multiplicando por α se tiene:

$$2\alpha^2 - c_1\alpha = 0.$$

En este caso la sucesión $\{0, \alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \ldots\}$ verifica la relación $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$. En efecto, si $n \geq 0$ tenemos

$$c_1(n+1)\alpha^{n+1} + c_2 n\alpha^n = nc_1\alpha^{n+1} + nc_2\alpha^n + c_1\alpha^{n+1} = n\alpha^{n+2} + 2\alpha^2\alpha^n = (n+2)\alpha^{n+2}.$$

La base está formada por $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ y $\{0, \alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \ldots\}$.

En este caso cualquier sucesión genérica que verifica la relación será una combinación de estas dos sucesiones, esto es, es de la forma $d_1\alpha^n + d_2 n\alpha^n$, siendo $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Ahora los valores iniciales a_0 y a_1 nos permiten calcular los coeficientes d_1 y d_2.

Ejemplo. 15.1.
Determinar el término general de una sucesión $\{a_n\}_n$ que verifica las condiciones:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

SOLUCIÓN. En este caso $c_1 = 4$ y $c_2 = -4$ y el polinomio característico es: $X^2 - 4X + 4$. Este polinomio tiene una única raíz, $\alpha = 2$, con multiplicidad dos. Por lo tanto las sucesiones que forman la base son:

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\} = \{1, 2, 2^2, \ldots\} \text{ y}$$

$$\{0, \alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \ldots\} = \{0, 2, 8, 24, \ldots\}.$$

Una sucesión genérica tiene término general igual a:

$$d_1\alpha^n + d_2 n\alpha^n.$$

Al verificar las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} d_1\alpha^0 + d_2 \cdot 0 \cdot \alpha^0 = 1 \\ d_1\alpha^1 + d_2 \cdot 1 \cdot \alpha^1 = 6 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = 1 \\ 2d_1 + 2d_2 = 6 \end{array}\right\}$$

La única solución es: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$. la sucesión $\{a_n\}_n$ tiene término general igual a

$$a_n = \alpha^n + 2n\alpha^n = (1 + 2n)\alpha^n = (1 + 2n)2^n.$$

¡Comprobar que esta sucesión verifica las condiciones! □

Vamos a hacer un ejemplo del caso en que las raíces del polinomio característico son distintas.

Ejemplo. 15.2.
Determinar el término general de una sucesión $\{a_n\}_n$ que verifica las condiciones:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

SOLUCIÓN. En este caso $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$ y el polinomio característico es: $X^2 - X - 2$. Este polinomio tiene dos raíces distintas, $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Por lo tanto las sucesiones que forman la base son:

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\} \text{ y}$$

$$\{1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots\} = \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}.$$

Una sucesión genérica tiene término general igual a:

$$d_1\alpha^n + d_2\beta^n.$$

Al verificar las condiciones iniciales resulta:

$$\left.\begin{array}{l} d_1\alpha^0 + d_2\beta^0 = 1 \\ d_1\alpha^1 + d_2\beta^1 = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 + d_2 = 1 \\ (-1)d_1 + 2d_2 = 5 \end{array}\right\}$$

La única solución es: $d_1 = -1$, $d_2 = 2$. la sucesión $\{a_n\}_n$ tiene término general igual a

$$a_n = -\alpha^n + 2\beta^n = -(-1)^n + 2 \cdot 2^n = (-1)^{n+1} + 2^{n+1}.$$

¡Comprobar que esta sucesión verifica las condiciones! $\square$

16. Ejercicios resueltos. Selección

Ejercicio (9.4.)
Ejercicio (9.5.)
La parte (1) del siguiente ejercicio no la hemos estudiado.
Ejercicio (9.6.)
Ejercicio (9.8.)
Ejercicio (9.13.)
Ejercicio (11.25.)
Ejercicio (11.26.)
Ejercicio (11.27.)
Ejercicio (11.28.)

17. Recurrencia en combinatoria

El número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos se representa por $\binom{n}{r}$, y se calcula como

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Consecuencia de la definición son las siguientes propiedades:

Lema. 17.1.
Para n y r números enteros se tiene:

(1) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

(2) Si $n > r$, entonces $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(3) $\binom{n}{r} = 0$ *si* $r > n$.

Además se tiene la siguiente propiedad que permitirá dar un método recurrente para el cálculo de $\binom{n}{r}$.

Proposición. 17.2.
Para cada $n, r \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un conjunto $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $n+1$ elementos y $r \in \mathbb{N}$, si $r > n+1$, entones en la expresión del enunciado todos los elementos son iguales a cero y se tiene la relación. Si $r = n+1$, entonces $\binom{n}{r} = 0$ y se tiene la igualdad $1 = 1$, que evidentemente es cierta. Si $r < n+1$ al formar un subconjunto de X con r elementos, si este subconjunto no contiene a x_n, entonces podemos formarlo de $\binom{n}{r}$ formas distintas, y si contiene a x_n, entonces el subconjunto formado por los $r-1$ elementos restantes puede construirse de $\binom{n}{r-1}$ formas distintas. en consecuencia se tiene

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

para cualesquiera $n, r \in \mathbb{N}$. □

Fruto de este resultado se tiene el llamado **triángulo de Tartaglia**:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & \triangledown & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & \triangledown & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}
$$

La primera aplicación del triángulo de Tartaglia es el desarrollo del binomio, ya que la fila n–ésima tiene los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Podemos considerar lo anterior como un desarrollo en serie de la siguiente forma:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots$$

Si $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos un valor exacto de esta expansión. En cambio si tomamos $n = 1/2$ el valor que se obtiene:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

que da una aproximación al valor $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Para calcular $\sqrt{2}$ procedemos como sigue:

$$(1+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

En este caso no tenemos problemas, y la razón es que la serie $1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}+\cdots$ converge cuando $x \leq 1$. por esta razón no podemos aplicarla para aproximar por ejemplo

$\sqrt{35}$, pues el desarrollo de la serie $(1+34)^{\frac{1}{2}}$ no converge. Sin embargo, si se toma un cuadrado perfecto anterior a 35, en este caso 25, podemos escribir

$$\sqrt{35} = (25+10)^{\frac{1}{2}} = 5(1+\frac{10}{25})^{\frac{1}{2}} = \cdots$$

Para el cálculo de la raíz cúbica procedemos de la misma forma. En este caso tenemos que calcular el desarrollo de

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{-5}{3}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para el calculo de la raíz cúbica de 35, $\sqrt[3]{35}$ procedemos como sigue:

$$\sqrt[3]{35} = (27+8)^{\frac{1}{3}} = 3(1+\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}} = \cdots$$

en donde ahora hemos considerado un cubo menor que 35.

Problema. 17.3.
Determinar el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_m = n,$$

en donde $n, m \in \mathbb{N}$.

La solución a este problema nos da también el número de **combinaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n.

SOLUCIÓN. Llamamos $S_{n,m}$ al número de soluciones distintas de la ecuación anterior, en donde $n, m \in \mathbb{N}$. Observa que:

(1) $S_{0,m} = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

(2) $S_{n,0} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(3) $S_{n,1} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Además, dados $n, m \in \mathbb{N}$, el número de soluciones de $x_1 + \cdots + x_{m+1} = n+1$ con $x_{m+1} = 1$ es exactamente $S_{n,m}$, salvo en el caso en que $n = 0 = m$ que vale 1. Y si se tiene una solución con $x_{m+1} > 1$, se tiene una solución de la ecuación $y_1 + \cdots + y_{m+1} = n$ tomando $y_i = x_i$ si $i = 1, 2, \ldots, m$ e $y_{m+1} = x_{m+1} - 1$, y viceversa; por lo tanto el número de soluciones con $x_{m+1} > 1$ es $S_{n,m+1}$. En consecuencia se tiene

$$S_{n+1,m+1} = S_{n,m} + S_{n,m+1}.$$

en donde $n, m \in \mathbb{N}$ no son ambos iguales a 0, y $S_{1,1} = 1$. Todos estos valores podemos escribirlos en la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & S_{0,0} & & S_{0,1} & & S_{0,2} & & S_{0,3} & & \cdots \\
 & & & & S_{1,0} & & S_{1,1} & & S_{1,2} & & S_{1,3} & & \cdots & \\
 & & & S_{2,0} & & S_{2,1} & & S_{2,2} & & S_{2,3} & & S_{2,4} & & \cdots \\
 & & S_{3,0} & & S_{3,1} & & S_{3,2} & & S_{3,3} & & S_{3,4} & & \cdots & \\
 & S_{4,0} & & S_{4,1} & & S_{4,2} & \nabla & S_{4,3} & & S_{4,4} & & S_{4,5} & & \cdots \\
S_{5,0} & & S_{5,1} & & S_{5,2} & & S_{5,3} & & S_{5,4} & & S_{5,5} & & \cdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 0 & & 0 & 0 & 0 & & \cdots \\
 & & & & 0 & & 1 & 0 & 0 & & \cdots & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & 0 & 0 & & \cdots \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & 0 & \cdots & \\
 & 0 & & 1 & & 3 \nabla 3 & & 1 & & 0 & & \cdots \\
0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 & \cdots &
\end{array}
$$

Los puntos en color azul tienen el valor cero, y los puntos an color rojo o negro reproducen el triángulo de Tartaglia.
En efecto, vamos a probar que $S_{n+1,m+1} = \binom{n}{m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Hacemos inducción sobre n y m. Si $n = 0 = m$, entonces se tiene $S_{1,1} = 1 = \binom{0}{0}$, y el resultado es cierto.
El resultado es cierto para todos los pares $(n, 0)$, ya que $S_{n+1,1} = 1 = \binom{n}{0}$. Vamos a suponer que el resultado es cierto para todos los pares (n, m) siendo $n \leq t$, y sea cualquiera el valor de m. Tenemos entonces $S_{n+1,m+1} = S_{n,m} + S_{n,m+1} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}$. Por lo tanto el resultado es cierto para todos los pares $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
En consecuencia el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x_1 + \cdots + x_m = n$ es igual a

$$S_{n,m} = \binom{n-1}{m-1},$$

si $n, m \geq 1$ y $S_{n,m} = 0$ si $n = 0$ o $m = 0$. □

Problema. 17.4.
Determinar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_m = n,$$

en donde $n, m \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. Llamamos $S_{n,m}$ al número de soluciones distintas de la ecuación anterior, con $n, m \in \mathbb{N}$. Se tienen los siguientes valores:

(1) $S_{n,0} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(2) $S_{0,m} = 1$ para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ consideramos la ecuación $x_1 + \cdots + x_{m+1} = n + 1$. El número de soluciones con $x_{m+1} = 0$ es $\S_{n+1,m}$, salvo en el caso en que $m = 0$ que vale 1. Y si se tiene una solución con $x_{m+1} \neq 0$, entonces tenemos una solución de la ecuación $y_1 + \cdots + y_{m+1} = n$ tomando $y_i = x_i$ si $i = 1, \ldots, m$ e $y_{m+1} = x_{m+1} - 1$, y viceversa; por lo tanto el número de soluciones con $x_{m+1} \neq 0$ es $S_{n,m+1}$. En consecuencia se tiene

$$S_{n+1,m+1} = S_{n,m} + S_{n,m+1},$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $S_{n,1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Agrupamos estos valores en una tabla

$$\begin{array}{ccccc}
S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & S_{0,3} & S_{0,4}\cdots \\
S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4}\cdots \\
S_{2,0} & S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & S_{2,4}\cdots \\
S_{3,0} & S_{3,1} \lrcorner & S_{3,2} & S_{3,3} & S_{3,4}\cdots \\
S_{4,0} & S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & S_{4,4}\cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4\cdots \\
0 & 1 & 3 & 6 & 10\cdots \\
0 & 1 \lrcorner & 4 & 10 & 20\cdots \\
0 & 1 & 5 & 15 & 35\cdots
\end{array}$$

Se trata de calcular el valor exacto de cada $S_{n,m}$. Observa que una posible hipótesis es:

$$S_{n,m} = \binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n},$$

si $m \geq 1$, y $S_{n,0} = 0$ en otro caso. Consideramos el caso de $S_{n,m}$ con $m \neq 0$. Vamos a calcular $S_{0,m}$; sabemos que $S_{0,m} = 1$ cuando $m \neq 0$, y se tiene $\binom{m-1}{m-1} = 1$; por lo tanto el resultado es cierto para estos valores. Para cualquier valor de n se tiene $S_{n,1} = 1 = \binom{n}{n}$, y por tanto el resultado es cierto para estos valores.
Supongamos que el resultado es cierto para todos los pare (t, s), $s \neq 0$, con $t + s$ menor que un cierto $h > 0$; vamos a ver que es cierto para todos los pares (n, m), $m \neq 0$. Se tiene $S_{t+1,s} = S_{t,s} + S_{t+1,s-1} = \binom{t+s-1}{s-1} + \binom{t+s-1}{s-2} = \binom{t+s}{s-1}$, y de la misma forma $S_{t,s+1} = S_{t-1,s+1} + S_{t,s} = \binom{t+s-1}{s} + \binom{t+s-1}{s-1} = \binom{t+s}{s}$.
Como consecuencia se tiene

$$S_{n,m} = \binom{n+m-1}{m-1},$$

para $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $S_{n,0} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. □

Igualdades con números combinatorios.

Lema. 17.5.
$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$.

Esta igualdad expresa que en el triángulo de Pascal, el que aparece más abajo, cada elemento se consigue como la suma de los elementos de la columna anterior.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} & \cdots \\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \cdots \\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \cdots \\
\binom{4}{0} & \binom{5}{1} & \binom{6}{2} & \to & \binom{7}{3} & \binom{8}{4} & \cdots \\
\binom{5}{0} & \binom{6}{1} & \binom{7}{2} & & \binom{8}{3} & \binom{9}{4} & \cdots \\
\binom{6}{0} & \binom{7}{1} & \binom{8}{2} & & \binom{9}{3} & \binom{10}{4} & \cdots
\end{array}
$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	...
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	...
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	...
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	...
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	...

DEMOSTRACIÓN. Se parte de la formula de la adición, Proposición (17.2.), y se procede por recurrencia:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \\
&= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} \\
&= \binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} \\
&= \binom{0}{k+1} + \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} \\
&= \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

□

De forma semejante, trabajando ahora por filas en vez de columnas, se tiene la fórmula:

Lema. 17.6.
$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j}$.

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} & \cdots \\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \cdots \\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \cdots \\
\binom{4}{0} & \binom{5}{1} & \binom{6}{2} & \binom{7}{3}\downarrow & \binom{8}{4} & \cdots \\
\binom{5}{0} & \binom{6}{1} & \binom{7}{2} & \binom{8}{3} & \binom{9}{4} & \cdots \\
\binom{6}{0} & \binom{7}{1} & \binom{8}{2} & \binom{9}{3} & \binom{10}{4} & \cdots
\end{array}
$$

Otras identidades de interés son:

Lema. 17.7.
$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

DEMOSTRACIÓN.
$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\,\frac{m!}{k!(m-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}\\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.\end{aligned}$$
□

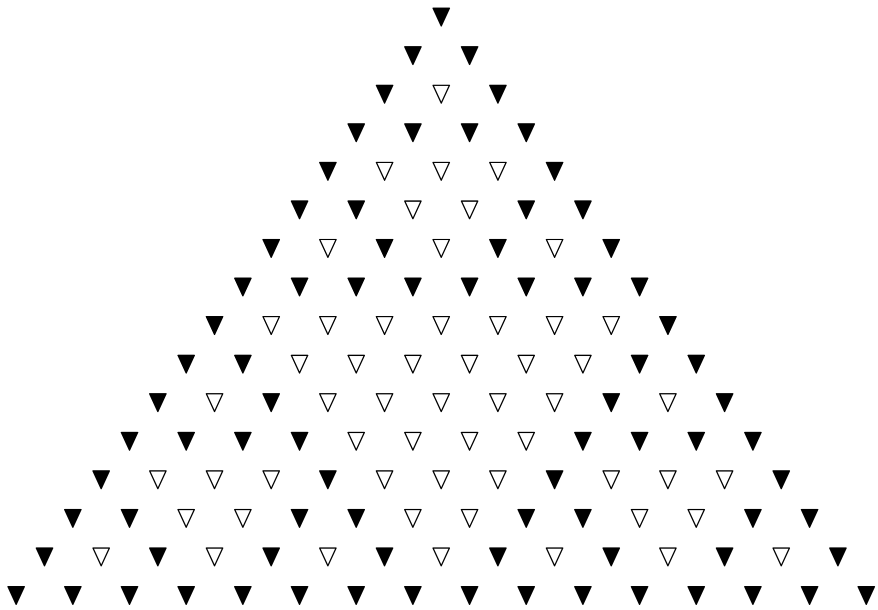
Lema. 17.8.
$\sum_{k=0}\binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$.

DEMOSTRACIÓN. Comparar los desarrollos de $(X+Y)^r(X+Y)^s$ y $(X+Y)^{r+s}$; los términos de la igualdad del enunciado son los coeficientes de $X^{r+s}Y^{r+s-(m+n)}$ en cada uno de los desarrollos. □

Triángulo de Sierpinski

El **triángulo de Sierpinski**. Consideramos el triángulo de Tartaglia y reducimos cada entrada módulo 2; de esta forma si el valor de una entrada es par aparecerá un 0 y si es impar aparecerá un 1.

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\\
1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\\
1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1
\end{array}$$



Problema. 17.9.
Se considera $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Determina la mayor potencia de 2 que divide a 2^t!

SOLUCIÓN. Primero comprobamos que

$$2 \mid 2^1, \quad 2^3 \mid 2^2!, \quad 2^7 \mid 2^3!$$

Vamos a probar que la mayor potencia de 2 que divide a 2^t! es 2^{2^t-1}. Tomamos como hipótesis de inducción que para cada $s \leq t$ la mayor potencia de 2 que divide a 2^s! es 2^{2^s-1}. Vamos a estudiar 2^{t+1}! Consideramos la fracción

$$\frac{2^{t+1}!}{2^t!} = (2^t+1)(2^t+2)\cdots(2^t+2^t).$$

Prescindiendo de los impares tenemos que estudiar la lista

$$2^t+2, 2^t+4, \ldots, 2^t+2^t.$$

Salvo el caso de $2^t + 2^t = 2^{t+1}$ que es divisible por 2^{t+1}, todos los demás son divisibles como máximo por 2^t, y en cada caso para estudiar la potencia de 2 que divide a $2^t + x$ basta estudiar la divisibilidad de x; observa que en el caso de 2^{t+1} tendremos que añadir un factor 2 extra al final.
Estudiamos la lista

$$2, 4, \ldots, 2^t$$

esta lista tiene 2^{t-1} elementos. Dividimos por 2 cada elemento y obtenemos

$$1, 2, \ldots, 2^{t-1}.$$

El número de potencias de 2 que dividen a estos elementos es el exponente de la mayor potencia de 2 que divide a $2^{t-1}!$, y por hipótesis es $2^{t-1}-1$. Así pues la mayor potencia de 2 que divide a $\frac{2^{t+1}!}{2^t!}$ es $2^{2^{t-1}} \times 2^{2^{t-1}-1} \times 2 = 2^{2^t}$.
Reuniendo los resultados anteriores se tiene que la mayor potencia de 2 que divide a $2^{t+1}!$ es

$$2^{2^t-1} \times 2^{2^t} = 2^{2^{t+1}-1}.$$

$\square$

Problema. 17.10.
Se considera $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Demuestra que $\binom{2^t-1}{i}$ es impar para cada $0 \leq i \leq 2^t-1$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\binom{2^t-1}{i} = \frac{(2^t-1)(2^t-2)\cdots(2^t-i)}{i(i-1)\cdots 2}$$

Podemos prescindir de los factores impares, y si $2h \leq i$ es el mayor par menor que i, entonces tendremos que estudiar la fracción

$$\frac{(2^t-2)(2^t-4)\cdots(2^t-2h)}{2h\cdots 2}$$

Como solo nos interesan las potencias de 2, las potencias que dividen al numerador y al denominador son las mismas, por tanto $\binom{2^t-1}{i}$ es impar. $\square$

Problema. 17.11.
Se considera el triángulo de Tartaglia. Determina cuanto números pares e impares hay en la línea 51 (corresponde a $\binom{51}{i}$).

SOLUCIÓN. En el triángulo de Tartaglia reducido módulo 2 la fila 2^t está formada solo por unos, ya que todos elementos de la misma en el triángulo de Tartaglia son impares. En la fila 2^t+1 se inician dos nuevos triángulos, en las posiciones primera y última, con 2^t filas que son iguales al triángulo que se inicia en la posición inicial. Como consecuencia el número de elementos impares en la fila 2^t+h es el doble que el de la fila h, siendo $1 \leq h \leq 2^t$.
Como consecuencia, como $51 = 32+19$, el número de elementos impares es el doble que el número de elementos de la fila 19. Ahora, como $19 = 16+3$, el número de elementos impares en la fila 19 es el doble que el de la fila 3. Como la fila 3 tiene 2 elementos impares, la fila 19 tiene 2×2 y la fila 51 tiene $2 \times 2 \times 2 = 8$. $\square$

18. Ampliación de números combinatorios

Números de Stirling de segunda especie

El número $\left\{ {n \atop m} \right\}$ indica el número de formas en que un conjunto de n elementos puede descomponerse en particiones de m conjuntos se llama un **número de Stirling se segunda especie**. Por ejemplo $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$ indica el número de particiones de un conjunto de 4 elementos que constan de exactamente dos conjuntos. Si $X = \{a, b, c, d\}$, las posibles particiones son:

$$\begin{array}{llll}
\{a, b, c\} & \{d\}; & \{a, b\} & \{c, b\} \\
\{a, b, d\} & \{c\}; & \{a, c\} & \{b, d\} \\
\{a, c, d\} & \{b\}; & \{a, d\} & \{b, c\} \\
\{b, c, d\} & \{a\}; & &
\end{array}$$

y por lo tanto $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Vamos a determinar una forma recursiva para los números de Stirling de segunda especie. Para calcular $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}$ consideramos el conjunto $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$, a partir del conjunto $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ construimos $\left\{ {n \atop m+1} \right\}$, ahora el elemento x_n podemos colocarlo en cada uno de los conjuntos que forman cada partición, obteniendo así particiones distintas con m elementos. Faltan las particiones en $m + 1$ conjuntos, uno de los cuales es $\{x_n\}$, pero éstas sabemos que son exactamente $\left\{ {n \atop m} \right\}$. Como consecuencia el número de Stirling de segunda especie verifica la relación:

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = (m+1) \left\{ {n \atop m+1} \right\} + \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

Los números de Stirling de segunda especie podemos agruparlos en la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{lllllll}
\left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}=1 & & & & & & \\
\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}=1 & & & & & \\
\left\{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}=1 & & & & \\
\left\{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}=3 & \left\{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\}=1 & & & \\
\left\{\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right\}=7 & \left\{\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right\}=6 & \left\{\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right\}=1 & & \\
\left\{\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right\}=15 & \left\{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right\}=25 & \left\{\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right\}=10 & \left\{\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right\}=1 & \\
\left\{\begin{matrix}6\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}6\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}6\\2\end{matrix}\right\}=31 & \left\{\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right\}=90\downarrow & \left\{\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right\}=65 & \left\{\begin{matrix}6\\5\end{matrix}\right\}=15 & \left\{\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right\}=1 \\
\left\{\begin{matrix}7\\0\end{matrix}\right\}=0 & \left\{\begin{matrix}7\\1\end{matrix}\right\}=1 & \left\{\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right\}=63 & \left\{\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right\}=301 & \left\{\begin{matrix}7\\4\end{matrix}\right\}=350 & \left\{\begin{matrix}7\\5\end{matrix}\right\}=140 & \left\{\begin{matrix}7\\6\end{matrix}\right\}=21
\end{array}
$$

Números de Stirling de primera especie

El **número de Stirling de primera especie** $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$ es el número de formas en que podemos descomponer un subconjunto de n elementos en m conjuntos mutuamente disjuntos considerando las ordenaciones cíclicas de cada uno de estos conjuntos. Por ejemplo, si consideramos $X=\{a,c,b,d\}$, entonces tenemos las siguientes descomposiciones:

$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=6.$

$$[a,b,c,d]\quad [a,b,c,d]\quad [a,c,b,d]\quad [a,d,c,b]\quad [a,c,d,b]\quad [a,d,b,c].$$

$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=11.$

$$
\begin{array}{cccc}
[a,b,c],[d] & [a,c,b],[d] & [a,b,d],[c] & [a,d,b],[c] \\
[a,c,d],[b] & [a,d,c],[b] & [b,c,d],[d] & [b,d,c],[a] \\
[a,b],[c,d] & [a,c],[b,d] & [a,d],[b,c]. &
\end{array}
$$

$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=6.$

$$[a,b],[c],[d]\quad [a,c],[b],[d]\quad [a,d],[b],[c]\quad [b,c],[a],[d]\quad [b,d],[a],[c]\quad [c,d],[a],[b].$$

Números trinomiales

Los números combinatorios $\binom{n}{m}$ aparecen el desarrollar el binomio $(a+b)^n$ según la Fórmula de Newton. Si se desarrolla el trinomio $(a+b+c)^n$ se obtiene una expresión similar:

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0, i+j\leq n}^{n} \binom{n}{i,j} a^i b^j c^{n-i-j}$$

Los números $\binom{n}{i,j}$ se llaman **números trinomiales**.

Problema. 18.1.
Determina el valor de $\binom{n}{i,j}$.

Por comodidad el trinomio $\binom{n}{i,j}$ lo representamos por $\binom{n}{i,j,k}$, siendo $i+j+k=n$. Observa que ahora la expresión del trinomio es:

$$\binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

El número $\binom{n}{i,j,k}$ representa el número de particiones ordenadas de un conjunto de n elementos en tres conjuntos con i, j y k elementos.
Por ejemplo, si $X=\{a,b,c\}$, entonces $\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$, que corresponde a las particiones:

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \quad \{\{a\},\{c\},\{b\}\}, \quad \{\{b\},\{a\},\{c\}\},$$
$$\{\{b\},\{c\},\{a\}\}, \quad \{\{c\},\{a\},\{b\}\}, \quad \{\{c\},\{b\},\{a\}\}.$$

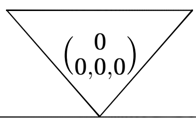
En cambio $\binom{3}{2,1,0} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ corresponde a las particiones:

$$\{\{a,b\},\{c\},\varnothing\}, \quad \{\{a,c\},\{b\},\varnothing\}, \quad \{\{b,c\},\{a\},\varnothing\},$$

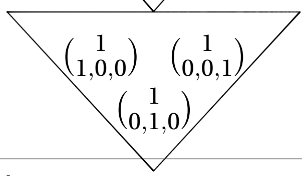
y $\binom{3}{1,0,2} = 3$ corresponde a las particiones:

$$\{\{c\},\varnothing,\{a,b\}\}, \quad \{\{b\},\varnothing,\{a,c\}\}, \quad \{\{a\},\varnothing,\{b,c\}\}.$$

De forma similar el triángulo de Tartaglia, se puede construir, en este caso una pirámide, en la que aparezcan todos los trinomios. el primer nivel de la pirámide es:



El segundo nivel es:



El tercer nivel es:

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{2}{2,0,0} & & \binom{2}{1,0,1} & & \binom{2}{0,0,2} \\
& \binom{2}{1,1,0} & & \binom{2}{0,1,1} & \\
& & \binom{2}{0,2,0} & &
\end{array}$$

El cuarto nivel es:

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{3}{3,0,0} & & \binom{3}{2,0,1} & & \binom{3}{1,0,2} & & \binom{3}{0,0,3} \\
& \binom{3}{2,1,0} & & \binom{3}{1,1,1} & & \binom{3}{0,1,2} & \\
& & \binom{3}{1,2,0} & & \binom{3}{0,2,1} & & \\
& & & \binom{3}{0,3,0} & & &
\end{array}$$

El quinto nivel es:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\binom{4}{4,0,0} & & \binom{4}{3,0,1} & & \binom{4}{2,0,2} & & \binom{4}{1,0,3} & & \binom{4}{0,0,4} \\
& \binom{4}{3,1,0} & & \binom{4}{2,1,1} & & \binom{4}{1,1,2} & & \binom{4}{0,1,3} & \\
& & \binom{4}{2,2,0} & & \binom{4}{1,2,1} & & \binom{4}{0,2,2} & & \\
& & & \binom{4}{1,3,0} & & \binom{4}{0,3,1} & & & \\
& & & & \binom{4}{0,4,0} & & & &
\end{array}$$

El sexto nivel es:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\binom{5}{5,0,0} & & {\color{blue}\binom{5}{4,0,1}} & & {\color{blue}\binom{5}{3,0,2}} & & {\color{blue}\binom{5}{2,0,3}} & & {\color{blue}\binom{5}{1,0,4}} & & \binom{5}{0,0,5} \\
& {\color{blue}\binom{5}{4,1,0}} & & {\color{red}\binom{5}{3,1,1}} & & {\color{red}\binom{5}{2,1,2}} & & {\color{red}\binom{5}{1,1,3}} & & {\color{blue}\binom{5}{0,1,4}} & \\
& & {\color{blue}\binom{5}{3,2,0}} & & {\color{red}\binom{5}{2,2,1}} & & {\color{red}\binom{5}{1,2,2}} & & {\color{blue}\binom{5}{0,2,3}} & & \\
& & & {\color{blue}\binom{5}{2,3,0}} & & {\color{red}\binom{5}{1,3,1}} & & {\color{blue}\binom{5}{0,3,2}} & & & \\
& & & & {\color{blue}\binom{5}{1,4,0}} & & {\color{blue}\binom{5}{0,4,1}} & & & & \\
& & & & & \binom{5}{0,5,0} & & & & &
\end{array}$$

Observa que la regla de formación es: Los puntos en azul se completan con la ley

$$\color{blue}\binom{n+1}{i,j,k}\color{black} = \binom{n}{i-1,j,k} + \binom{n}{i,j-1,k}$$

en sus tres versiones (observa que así se pasa de un nivel al siguiente), y los puntos en rojo se completan con la ley

$$\color{red}\binom{n+1}{i,j,k}\color{black} = \binom{n+1}{i+1,j-1,k} + \binom{n}{i-1,j+1,k}.$$

Problema. 18.2.
Prueba las leyes enunciadas en el párrafo anterior.

Ejercicio. 18.3.
Completa el séptimo nivel.

Bibliografía

[1] S. Lang, *Algebra 3rd. ed.*, Springer, 2002.

Índice alfabético

combinaciones con repetición, 124
condiciones iniciales, 20

diferencia, 6, 114
diferencia de orden $k > 1$, 7
diferencia de orden uno, 7

ecuación característica, 22
ecuación de recurrencia, 20
Espiral de Fibonacci, 42

Fórmula de Binet, 23
función generatriz, 35

Identidad de Cassini, 62
Identidad de Catalan, 62
Identidad de d'Ocagne, 62
Identidad de Gelin–Cesàro, 62

Números de Jacobsthal, 79
Números de Lucas, 61
Números de Padovan, 79
Números de Pell, 79
Número de Stirling de primera especie, 132
Número de Stirling se segunda especie, 131
Número trinomial, 133
Números de Perrin, 44

Principio de Inducción, 112
progresión aritmética de grado $k \geq 0$, 7
progresiones aritméticas, 6
progresiones geométricas, 13

razón, 13

Serie de Fibonacci, 38
Serie de Maclaurin, 38
Sucesión de Pell, 79
Sucesión de Fibonacci, 20
sucesión recurrente, 20
sucesiones recurrentes no homogéneas, 31
suma parcial, 6

término general, 6
Triángulo de Sierpinski, 128
Triángulo de Tartaglia, 123