Capítulo 5. Análisis Dimensional.

La planificación experimental es fundamental en la investigación científica. A la misma puede ayudar el conocimiento del Análisis Dimensional. Esta herramienta sencilla, pero que impregna toda la Física, se basa en los conceptos de medida de una magnitud física y de las dimensiones asociadas con ella, una vez fijada una base de magnitudes fundamentales para una determinada teoría física..

5.1. Introducción.

Es conocido que en Física las magnitudes tienen dimensiones. Así decimos que $[v]= LT^{-1}$ y $[F]=MLT^{-2}$. El concepto de dimensión se debe a Fourier que, en su obra "Théorie analytique de la chaleur", dice: "*Es necesario hacer notar que cada magnitud, indeterminada o constante, tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una no podrían ser comparados si no tuviesen el mismo exponente de dimensiones*". Es decir, las ecuaciones deben de ser homogéneas dimensionalmente hablando. Esta es la idea que subyace en el fondo de todo el Análisis Dimensional y es lo que hemos oído alguna vez cuando nos dicen que no se pueden sumar peras con manzanas; aunque esto no es estrictamente cierto, puesto que 3 peras y 2 manzanas son 5 frutas.

Del concepto de magnitud, dimensión y homogeneidad de las ecuaciones físicas se ocupa el llamado Análisis Dimensional.

El Análisis Dimensional tiene aplicaciones en:

1. Detección de errores de cálculo.
2. Resolución de problemas cuya solución directa conlleva dificultades matemáticas insalvables. Por ejemplo, Rayleigh, precursor del Análisis Dimensional junto a Fourier, lo empleo por primera vez en Mecánica de Fluidos.
3. Creación y estudio de modelos reducidos. Por ejemplo, los túneles aerodinámicos.
4. Consideraciones sobre la influencia de posibles cambios en los modelos, tanto cambios reales como imaginarios.

5.2. Conceptos básicos.

Observables: Se denominan observables a los entes que se pueden caracterizar por algún efecto observable. Ejemplo: Color, longitud, miedo, tiempo, etc.

Observables comparables: Dos observables, (A) y (B), se dicen que son comparables si se puede definir la relación

$$\frac{(A)}{(B)} = n \qquad (1)$$

siendo n un número cualquiera. La física sólo se interesa por los observables que son comparables. La longitud de una mesa puede compararse con la longitud de un bolígrafo y podemos decir que una es n veces la otra. Sin embargo, la hermosura o el miedo son observables no comparables, puesto que no podemos decir, por ejemplo, que una persona haya pasado 3.5 veces más miedo que otra viendo una película de terror.

En el caso de observables comparables, podemos definir criterios de igualdad y suma:
Criterio de igualdad: Diremos que un observable (A) es igual a otro (B), si ocurre:

$$\frac{(A)}{(B)} = n \qquad \text{con} \qquad n = 1 \tag{2}$$

Criterio de suma: Sean tres observables, (A_1), (A_2) y (A_3), comparables con otro observable (A_0), mediante las relaciones

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1 \ , \ \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2 \quad \text{y} \quad \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3 \ , \tag{3}$$

diremos que

$$(A_1) + (A_2) = (A_3) \qquad \text{cuando ocurra que} \qquad n_1 + n_2 = n_3 \tag{4}$$

Establecidos los entes de los que se hace cargo la Física, pasamos a la definición de magnitud, cantidad y unidad.

Magnitud: Se define como magnitud al conjunto de todos los observables que son comparables entre sí.
Cantidad: Se denomina cantidad a cada uno de los elementos del conjunto que define una magnitud.

La altura de un edificio, la distancia entre dos puntos, la amplitud de las oscilaciones de un péndulo, etc., son cantidades de la magnitud longitud. El día, la duración de un periodo lunar, etc., son cantidades de la magnitud tiempo.

Como vemos de los anteriores ejemplos, las magnitudes son entes abstractos a los que se llega a partir de entes concretos, tal y como corresponde al proceso natural del pensamiento.

Unidad: La unidad, U_A, de una magnitud es una cantidad (A_0)= U_A elegida arbitrariamente. Al formar las razones, respecto de esta cantidad:

$$\frac{(A_1)}{(U_A)} = A_1 \ , \ \frac{(A_2)}{(U_A)} = A_2, \quad \text{etc.} \tag{5}$$

se puede hacer corresponder, a cada cantidad (A_i) del observable, un número A_i que se llama medida de la cantidad (A_i) el observable, con la unidad U_A. Al cambiar de unidad, evidentemente, se obtendrá un diferente número y por tanto una medida diferente para la misma cantidad. Como vemos a continuación, la relación entre las medidas es inversamente proporcional al cociente de las unidades: Supongamos dos unidades U_A y $U_{A'}$. Al medir una misma cantidad (A) del observable obtendremos

$$\frac{(A)}{U_A} = A \quad \text{y} \quad \frac{(A)}{U_{A'}} = A' \quad \Rightarrow (A) = AU_A = A'U_{A'} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{U_A}{U_{A'}} \tag{6}$$

tal como queríamos demostrar. A las relaciones $\frac{A}{A'} = \frac{U_A}{U_{A'}}$ se les llama **razones de cambio**.

Para finalizar este apartado, digamos que las magnitudes pueden clasificarse en dos grandes grupos:

a) **Magnitudes primarias o simples**: Se definen sin necesidad de acudir a ninguna fórmula que las compare con otras magnitudes. Podemos decir que el hombre tiene un conocimiento intuitivo de estas magnitudes. Ejemplos: Longitud, tiempo, fuerza, masa.
b) **Magnitudes secundarias**: Se definen a través de fórmulas que las ligan a otras magnitudes. Ejemplos: Densidad, aceleración, campo eléctrico, viscosidad.

Por supuesto, el límite entre las de uno y otro tipo, a veces no está exento de discusiones filosóficas. Es el caso de la fuerza y la masa en las leyes de Newton.

5.3. Las constantes en la Física.

La elección arbitraria de la unidad introduce un carácter subjetivo a las medidas. Por un lado, es lógico pensar que sería deseable que las leyes físicas deben estar exentas de estas arbitrariedades y que, por ello, deberían formularse en términos de observables o cantidades de estos observables. Así, podríamos enunciar la segunda ley de Newton como:

$$(F) \propto (m)(a) \tag{7}$$

de modo que dicha ley nos indica que, si a una misma masa le aplicamos una fuerza doble que una determinada, la aceleración también se vería duplicada. Pero por otro lado, el deseo de cuantificar que posee el hombre ha hecho que encuentre más útil trabajar con medidas, salvándose el problema de la arbitrariedad, que introducen las unidades, mediante una constante. De este modo, la ley anterior entre observables se transforma en una ecuación entre medidas con unas determinadas unidades:

$$FU_F = C\ mU_m\ aU_a \tag{8}$$

donde la constante C es, por supuesto, tan convencional como el sistema de unidades elegido. La ecuación anterior se expresa en la forma convencional

$$F = ma \tag{9}$$

donde ahora los símbolos F, m y a llevan asociado un número (medida) y una unidad.

Por ejemplo, si el sistema de unidades es

U_F = 1 kp, $\quad U_m$ = 1kg $\quad$ y $\quad U_a$ = 1 m/s^2, para que se cumpla la igualdad (9), la constante deber ser $C = \frac{1}{9.81}$ (1 kp=9.81 N). Si, por el contrario, el sistema de unidades es

$$U_F = 1\text{ N}, \qquad U_m = 1\text{kg} \qquad \text{y} \qquad U_a = 1\text{ m/s}^2,$$

entonces la constante será C=1.

Vemos que, eligiendo el sistema de unidades adecuado, se ha podido eliminar la constante de la ecuación entre medidas. En general, no siempre es posible hacer esto. Cuando una constante puede ser obviada mediante la aplicación de un sistema de unidades, diremos que esa **constante** es **superflua**. Además, al sistema de unidades que elimina las constantes superfluas del conjunto de ecuaciones de una teoría física, le llamaremos **sistema coherente de unidades**.

En el caso de que las constantes no sean superfluas, podremos estar en los casos de

a) **Constantes particulares**: Son aquellas que dependen de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno y, por tanto, son ineludibles. Ejemplo: La constante recuperadora de un muelle. Podría elegirse un sistema de unidades que hiciese la unidad a la constante de un muelle, pero al cambiar de muelle volvería a aparecer la constante del nuevo muelle.

b) **Constantes universales**: Son las que no dependen de la naturaleza de los cuerpos en cuestión. Dicho de otro modo, a toda ecuación que se conserve invariante cuando cambian la naturaleza de los cuerpos con los que se opera, corresponde una constante universal.

En Física, se utilizan las siguientes constantes universales:

a) **La constante de gravitación universal, G =6.673·10^{-11} Nm^2/kg^2.**
Aparece en la ley de gravitación universal

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{10}$$

que expresa que la fuerza de atracción entre dos masas es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.

b) **La constante de Boltzmann, k =1.381·10^{-23} J/K.**
En todo sistema formado por un gran número de elementos en equilibrio, la energía media, $\bar{\varepsilon}$, que se asocia a cada grado de libertad, es proporcional a la temperatura absoluta:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}kT \tag{11}$$

c) **La velocidad de la luz, c =2.998·10^8 m/s.**
Una masa en reposo tiene asociada una energía E dada por

$$E = mc^2 \tag{12}$$

siendo c una constante que en un sistema de unidades coherente se corresponde con la velocidad de la luz en el vacío.

d) **La constante de Planck, h =6.626 · 10^{-34} Js**.
Esta constante está relacionada con la cuantificación de la energía que podemos expresar como que en todo proceso periódico de frecuencia f, la energía sólo puede experimentar cambios que sean múltiplos de

$$\Delta\varepsilon = hf \tag{13}$$

e) **La constante de Avogadro, N_A =6.022 · 10^{23} mol^{-1}**.
En todo cuerpo, el número de moles, n, es proporcional al número de moléculas, N, según

$$N = nN_A \tag{14}$$

Que también podemos expresar como que 1 mol de masa es la cantidad de materia que contiene un número N_A de partículas.

f) La permitividad eléctrica del vacío o constante dieléctrica del vacío, ε_0 =8.854·10^{-12} F/m.
Aparece en la ley de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{15}$$

que expresa la atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Cualquier combinación de constantes universales es una constante universal. Algunas de estas combinaciones reciben nombre especiales, como la constante de los gases $R = kN_A$, producto de la constantes de Boltzmann y Avogadro, que aparece en la ecuación de los gases perfectos cuando se expresa ésta a través del número de moles. Aclaremos esto, considerando un volumen V de gas en el que tenemos N moléculas a una presión P y temperatura absoluta T. Con n siendo el número de partículas por unidad de volumen, la ecuación de los gases perfectos la podemos escribir como

$$P = nkT = \frac{N}{V}kT \Rightarrow PV = n_{\text{moles}}N_A kT = n_{\text{moles}}(N_A k)T \Rightarrow PV = n_{\text{moles}}RT \tag{16}$$

Otra constante que se deriva de las seis primeras es la permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = \dfrac{1}{c^2\varepsilon_0}$ = 4π·10^{-7} H/m, que aparece en las ecuaciones que describen la interacción entre corrientes eléctricas, como la ley de fuerza de Ampère, o en la ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{r}}{r^3}dv' \tag{17}$$

que relaciona la densidad de corriente $\vec{J}$ en un punto $\vec{r}'$ con el campo magnético $\vec{B}$ que produce esta corriente en el punto del espacio $\vec{R}$, siendo $\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$.

5.4. Concepto de dimensión.

Algunos autores proponen como postulado, basado en la experiencia, que toda ecuación fundamental de la Física se puede expresar en forma de monomio:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = 1 \tag{18}$$

donde x_i son cantidades del observable (x_i) expresado en el sistema de unidades $\{U_i\}$ y α_i es un factor (número adimensional). Sin embargo otros (Bridgman, Isaacson) demuestran, a apartir de otros postulados, que toda ecuación que pretende mantener su forma, al cambiar de sistema de unidades, debe ser un monomio como el que muestra la ecuación (18).

Sea cual fuese el caso, consideremos una teoría física cuya totalidad total t de ecuaciones fundamentales es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots x_n^{\alpha_{1n}} = 1 \\ x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \cdots x_n^{\alpha_{2n}} = 1 \\ \cdots \\ x_1^{\alpha_{t1}} x_2^{\alpha_{t2}} \cdots x_n^{\alpha_{tn}} = 1 \end{array}\right\} \quad (t \text{ ecuacones}) \tag{19}$$

donde se ha elegido un sistema coherente de unidades, $\{U_i\}=\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, de modo que se eliminen las constantes superfluas. El conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse de forma más compacta como

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{ji}} = 1 \qquad \text{con} \quad j = 1, \cdots, t. \tag{20}$$

Tal como hacemos al expresar un resultado, por ejemplo v = 15 m/s, vamos a expresar, en la ecuación anterior, las unidades de las cantidades que intervienen en las ecuaciones de manera explícita; esto es

$$x_i = \tilde{x}_i [x_i] \quad \text{donde} \left\{ \begin{array}{l} x_i \text{ es una cantidad física (medida} \oplus \text{unidades)} \\ \tilde{x}_i \text{ representa la media (un número)} \\ [x_i] \text{ son las unidades de la cantidad } x_i \end{array} \right. \tag{21}$$

quedando la ecuación (20) en la forma

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\alpha_{ji}} [x_i]^{\alpha_{ji}} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\alpha_{ji}} \prod_{i=1}^{n} [x_i]^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con} \quad j = 1, \cdots, t. \tag{22}$$

Debiéndose de cumplir la ecuación anterior para las medidas (números) asociadas a las cantidades:

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con} \quad j = 1, \cdots, t. \tag{23}$$

y para las dimensiones:

$$\prod_{i=1}^{n} [x_i]^{\alpha_{ji}} = 1 \quad \text{con} \quad j = 1, \cdots, t. \tag{24}$$

Tomando logaritmos neperianos en la ecuación anterior, ésta se transforma en

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \ln[x_i] = 0 \quad \text{con} \quad j = 1, \cdots, t. \tag{25}$$

que representa un sistema de ecuaciones con t ecuaciones y n incógnitas ($\ln[x_i]$), donde la matriz de coeficientes α_{ji} es también la matriz de los exponentes. Vamos a suponer, como suele ser habitual en las teorías físicas, que el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones, esto es $n > t$. Si h es el rango de esta matriz (h coincidirá con t, si todas las ecuaciones son linealmente independiente o en caso contrario será menor que t), el número de incógnitas arbitrarias será $n - h = m$.

Tomando como arbitrarias o independientes a las m primeras incógnitas asociadas a las unidades $[x_1]$, $[x_2]$, ..., $[x_m]$, al conjunto de magnitudes B={x_1, x_2,..., x_m }, asociadas a las m unidades que hemos tomado como independientes o arbitrarias, se le denomina **base de la teoría física** y al número m de sus elementos se le llama **multiplicidad de la base**, mientras que a cada magnitud de la base se la llama **magnitud fundamental**.

A partir de la ecuación (24), el resto de unidades puede ser expresado por una función

$$[x_i] = \prod_{j=1}^{m} \left[x_j\right]^{\varepsilon_{ij}} = 1 \quad \text{con} \quad i = m+1, \cdots, n. \tag{26}$$

A este formato se le denomina **fórmula dimensional** de la magnitud física x_i, y al conjunto de coeficientes $\{\varepsilon_{ij}\}$ (j =1,...,m) se les llama **dimensiones** de la magnitud x_i **en la base B**.

5.5. Magnitudes base de la Física.

Veamos en primer lugar la base de la Mecánica, particularizando todo el desarrollo del apartado anterior para una parte de la Física conocida para nosotros como es la Mecánica. Como ya vimos el problema se reduce a poner las ecuaciones fundamentales en forma de monomios y luego calcular el rango de la matriz de los exponentes.

En Mecánica, tres ecuaciones fundamentales e independientes son (eliminamos el carácter vectorial de las ecuaciones por simplicidad en las ecuaciones y por no estar implicado el carácter vectorial en lo que diremos a continuación, también puede obviarse el carácter vectorial tomando las diferentes componentes de las ecuaciones implicadas):

$$\left.\begin{aligned} F &= ma \\ F &= G\frac{Mm}{r^2} \\ a &= \frac{d^2r}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

que podemos expresar en la forma general dada por las ecuaciones (19) y (20):

$$\left.\begin{aligned} Fm^{-1}a^{-1} &= 1 \\ Fr^2G^{-1}M^{-1}m^{-1} &= 1 \\ a\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^{-1} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Debiéndose cumplir las ecuaciones anteriores tanto para los números que expresan las medidas como para las unidades asociadazas a las cantidades medidas. Procediendo como en el apartado anterior, la ecuación de las unidades, similar a la ecuación (24), viene dada por

$$\left.\begin{aligned} [F][m]^{-1}[a]^{-1} &= 1 \\ [F][r]^2[G]^{-1}[m]^{-2} &= 1 \\ [a][r]^{-1}[t]^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Tomando logaritmos en la ecuación anterior:

$$\left.\begin{aligned} \ln[F]-\ln[m]-\ln[a] &= 0 \\ \ln[F]+2\ln[r]-\ln[G]-2\ln[m] &= 0 \\ \ln[a]-\ln[r]+2\ln[t] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

que en forma matricial se expresa como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln[F] \\ \ln[m] \\ \ln[a] \\ \ln[G] \\ \ln[r] \\ \ln[t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

La matriz de los exponentes dimensionales α_{ji} viene dada por

$$\alpha_{ji} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} F & m & a & G & r & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1^{a}\ \text{ecuación} \\ 2^{a}\ \text{ecuación} \\ 3^{a}\ \text{ecuación} \end{array} \qquad (32)$$

El rango de la matriz de coeficientes anterior es h =3, ya que si tomamos, por ejemplo, las tres primeras columnas, el determinante de la matriz que se forma con estas columnas viene dado, desarrollándolo por la última fila que sólo tiene un elemento distinto de cero, por

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0 \tag{33}$$

Como el número de magnitudes que intervienen es las ecuaciones es n =6 y el rango de la matriz de los exponentes dimensionales es h=3, el número de magnitudes linealmente independientes que forman la base es 6–3=3. Generalmente se eligen [r], [m] y [t] y se escriben como L, M, T. Como es conocido, en el Sistema Internacional de Unidades, las unidades de estas magnitudes son respectivamente el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s).

Volviendo a la ecuación (29), las dimensiones del resto de magnitudes, no incluidas en la base, pueden ponerse en función de los elementos M, L, T de la base:

$$\left.\begin{array}{r} [F][a]^{-1} = M \\ [F][G]^{-1} = M^2L^{-2} \\ [a] = LT^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [a] = LT^{-2} \\ [F] = M^{-1}LT^{-2} \\ [G] = L^3T^{-2} \end{array}\right. \tag{34}$$

Al considerar fenómenos térmicos se hace necesario la inclusión de la temperatura, cuya unidad en el sistema internacional es el grado kelvin (K), y si además se consideran fenómenos eléctricos, debe incluirse la corriente eléctrica, cuya unidad es el amperio (A); aunque en principio parece más intuitivo la inclusión de la carga eléctrica, en la práctica ésta es una magnitud física más difícil de medir que la corriente eléctrica. También son necesarias la cantidad de sustancia, cuya unidad en el sistema internacional es el mol (mol), y la intensidad luminosa para expresar la luminosidad que nuestros ojos perciben al observar una fuente que emite luz y cuya unidad es la candela (cd), única unidad física cuyo nombre es de raíz española.

De esta forma, la base que adoptamos para la Física está compuesta por L, M, T, Θ, I (corriente eléctrica), I (corriente luminosa) y *cantidad de materia*, cuyas unidades podrían elegirse de forma arbitraria y que determinan las unidades del resto de las magnitudes físicas. El Sistema Internacional de Unidades es un punto de encuentro para que todos los hombres utilicemos las mismas magnitudes base y las mismas unidades, en aras de una comunicación más fácil.

5.6. Homogeneidad de las ecuaciones físicas.

Las leyes físicas deben de ser invariantes respecto del sistema de unidades elegido. Veamos que esta invarianza implica que la función que defina una ley física debe ser homogénea tanto dimensionalmente como matemáticamente hablando.

5.6.1. Homogeneidad dimensional

Diremos que una ley física es dimensionalmente homogénea si todos sus términos (sumandos) tienen la misma dimensión. Como veremos, esto asegura su invarianza respecto del sistema de unidades.

Si los términos de la ecuación $A + B = C$ tienen todos la misma dimensión y cambiamos el sistema de unidades de modo que se duplique la medida de A, obteniéndose $A' = 2A$, como todos los términos responden a la misma ecuación de dimensiones, también se habrán duplicado B y C, pasando a ser $B' = 2B$ y $C' = 2C$, de modo que la ley se seguirá cumpliendo,

$$2A = 2B + 2C \quad \Rightarrow \quad A' = B' + C' \tag{35}$$

en el nuevo sistema de unidades.

La homogeneidad dimensional implica que los argumentos de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. deben ser adimensionales.

Ejemplo 1:

$$\text{Sea } \; A = \ln B \Rightarrow dA = \frac{dB}{B}, \; \text{ luego } \; [A] = \frac{[B]}{[B]} = 1. \text{ De } \; B = e^{A}, \text{ si } [A] = 1 \Rightarrow [B] = 1. \tag{36}$$

Ejemplo 2:

$$\text{Sea } \; A = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} \Rightarrow \; \text{De } \; \left[\cos^2 B\right] = [1] = 1 \Rightarrow [B] = 1. \tag{37}$$

5.6.2. Homogeneidad matemática.

Una función

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{38}$$

es homogénea, matemáticamente hablando, si

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n) = 0 \tag{39}$$

Veamos que, en efecto, una ecuación física debe ser homogénea matemáticamente.

Sea la ecuación (38) representativa de una ley física en la que intervienen las medidas x_1, x_2, …, x_n de sendas magnitudes en un sistema coherente de unidades. Al utilizar otro sistema de unidades cuyas razones de cambio sean

$$\lambda_i = \frac{x_i}{x_i'} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{40}$$

la ecuación (38) se transforma en

$$f(\lambda_1 x_1', \lambda_2 x_2', \cdots, \lambda_n x_n') = 0 \tag{41}$$

Pero, al representar $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ una ley física universal, debe ser invariante frente a cambios de sistemas de unidades y cumplirse

$$f(x_1',x_2',\cdots,x_n')=0 \tag{42}$$

Resultando evidente, de las ecuaciones (41) y (42), que f es una función homogénea matemáticamente hablando.

5.7. Teorema de Buckingham o teorema de pi.

El enunciado del teorema pi dice así:

1) Toda ecuación

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\,, \tag{43}$$

que sea una ley representativa de un fenómeno física, puede expresarse como

$$F(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)=0 \tag{44}$$

donde los π_i son los monomios independientes de dimensión nula o monomios π, que pueden formarse con las magnitudes consideradas en la ley física.

2) El número de estos monomios es $m=n-h$, donde h es el rango de la matriz formada con los exponentes dimensionales de las magnitudes, en relación a una base dada.

Demostración:

Sea la ecuación (43), representativa de un fenómeno físico, y sean dadas las dimensiones de las magnitudes x_i, en función de la base {L, M, T} por

$$[x_i]=M^{\alpha_{1i}}L^{\alpha_{2i}}T^{\alpha_{3i}} \qquad \text{con} \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{45}$$

(Tomamos una base con tres elementos por sencillez en las expresiones, pero podría formarse una base con n elementos).

Se pretende formar agrupaciones de monomios adimensionales en la forma:

$$\pi=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\varepsilon_i} \qquad \text{que cumplan} \qquad [\pi]=1 \tag{46}$$

Sustituyendo (45) en (46) y reagrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}[\pi]&=\prod_{i=1}^{n}[x_i]^{\varepsilon_i}=\prod_{i=1}^{n}\left[M^{\alpha_{1i}}L^{\alpha_{2i}}T^{\alpha_{3i}}\right]^{\varepsilon_i}=\prod_{i=1}^{n}M^{\alpha_{1i}\varepsilon_i}L^{\alpha_{2i}\varepsilon_i}T^{\alpha_{3i}\varepsilon_i}=\\&=\left(M^{\alpha_{11}\varepsilon_1}M^{\alpha_{12}\varepsilon_2}\ldots M^{\alpha_{1n}\varepsilon_n}\right)\left(L^{\alpha_{21}\varepsilon_1}L^{\alpha_{22}\varepsilon_2}\ldots L^{\alpha_{2n}\varepsilon_n}\right)\left(T^{\alpha_{31}\varepsilon_1}T^{\alpha_{32}\varepsilon_2}\ldots T^{\alpha_{3n}\varepsilon_n}\right)=M^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\varepsilon_i}L^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\varepsilon_i}T^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{3i}\varepsilon_i}=1\end{aligned} \tag{47}$$

Para que se cumpla la ecuación anterior y el monomio sea adimensional, los tres exponentes deben ser igual a la unidad; es decir

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \varepsilon_i = 0 \quad \text{con} \quad j = 1,2,3. \tag{48}$$

La ecuación anterior representa un sistema homogéneo de n incógnitas (ε_i) y 3 ecuaciones. Si el rango de la matriz es h (h puede tomar los valores 1, 2 ó 3 y $h<n$), los conjuntos de variables ε_i que pueden elegirse de forma arbitraria (monomios independientes) es $m = n-h$. Luego, eligiendo m conjuntos diferentes e independientes de ε_i, que notaremos ε_{ik} con $i=1,...,n$ y $k=1,...,m$, podemos formar los m monomios adimensionales siguientes:

$$\pi_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\varepsilon_{ik}} \quad \text{con} \quad k = 1,\ldots,m. \tag{49}$$

Finalmente, como la función $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ es dimensionalmente homogénea, agrupamos las variables en la forma que indican los monomios adimensionales π_k y el resultado obtenido será una nueva función de los π_k, esto es $F(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)=0$, tal como queríamos demostrar.

De la función $F(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)=0$ podría despejarse uno de los monomios en función de los otros, de modo que la información obtenida del análisis dimensional tome la forma

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2,\ldots,\pi_m) \tag{50}$$

Si sólo se obtiene un monomio, tendremos

$$f(\pi_1)=0 \Rightarrow \pi_1 = f^{-1}(0) \Rightarrow \pi_1 = \text{cte} \tag{51}$$

y se conocería toda la información del sistema físico, salvo una constante.

Repetición de todo el proceso de demostración del teorema para un caso particular simple.

Tomemos la función $e = vt + \frac{1}{2}at^2$, que podemos expresar en la forma general

$$f(v,a,e,t)=0 \quad \text{como} \quad e - vt - \frac{1}{2}at^2 = 0 \tag{52}$$

Formemos un monomio con todas las variables que intervienen en la función

$$\pi = v^{\varepsilon_v} a^{\varepsilon_a} e^{\varepsilon_e} t^{\varepsilon_t} \tag{53}$$

e imponemos que sea adimensional $\Leftrightarrow [\pi]=1$. Sustituyendo $[v]=LT^{-1}$, $[a]=LT^{-2}$, $[e]=L$ y $[t]=T$, en $[\pi]=1$ queda:

$$\left(LT^{-1}\right)^{\varepsilon_v}\left(LT^{-2}\right)^{\varepsilon_a}\left(L\right)^{\varepsilon_e}\left(T\right)^{\varepsilon_t}=1\Rightarrow L^{\varepsilon_v+\varepsilon_a+\varepsilon_e}T^{-\varepsilon_v-2\varepsilon_a+\varepsilon_t}=1\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_v+\varepsilon_a+\varepsilon_e=0\\-\varepsilon_v-2\varepsilon_a+\varepsilon_t=0\end{cases}\qquad(54)$$

Hemos obtenido dos ecuaciones (h =2) con 4 incógnitas (n =4, ε_v, ε_a, ε_e y ε_t) $\Rightarrow$ $m = n-h$ = 4–2 = 2. Tenemos dos incógnitas arbitrarias, lo que nos da la posibilidad de encontrar dos conjuntos de soluciones linealmente independientes que hagan $[\pi]=1$. Elegimos:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_e=1,\varepsilon_a=0\\\varepsilon_e=0,\varepsilon_a=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_e=1,\varepsilon_a=0,\varepsilon_v=-1,\varepsilon_t=-1 & \Rightarrow\pi_1=\dfrac{e}{vt}\\\varepsilon_e=0,\varepsilon_a=1,\varepsilon_v=-1,\varepsilon_t=1 & \Rightarrow\pi_2=\dfrac{at}{v}\end{cases}\qquad(55)$$

Encontrándose dos monomios independientes. La función $e=vt+\frac{1}{2}at^2$ la podemos expresar como $\frac{e}{vt}-1-\frac{1}{2}\frac{at^2}{vt}=0\Rightarrow$ $\pi_1-1-\frac{1}{2}\pi_2=0$ que es nuestro caso particular de $F(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m)=0$.

5.8. Aplicación del teorema de pi.

En la demostración del teorema de pi, hemos demostrado que la función que describe un fenómeno físico puede expresarse como función de los monomios pi independientes que podemos formar con las magnitudes físicas que intervienen en el proceso. En la aplicación del teorema pi, vamos a seguir, normalmente, un camino contrario: Construiremos los monomios independientes adimensionales que podamos formar con las variables que intervienen en el proceso y con estos monomios intentaremos construir la ecuación que rige el proceso físico, supuesto que sea desconocida esta ecuación.

Los pasos a seguir en la resolución de un problema son:

a) Considerar todas las magnitudes que intervienen en el fenómeno, incluyendo las constantes no eludibles.
b) Establecer la matriz de coeficientes y su rango.
c) Determinar el número de monomios independientes.
d) Hallar estos monomios.

Ejemplo 1: Un cuerpo de masa m cae libremente desde una altura h por efecto de la gravedad, partiendo del reposo. Hallar la relación entre la velocidad de llegada al suelo, v, la gravedad, g, h y m.

a) Siguiendo la sistemática marcada, en primer lugar, hacemos una recopilación de las magnitudes que intervienen en el fenómeno y expresamos sus dimensiones en la base $\{L,M,T\}$.

$$\left.\begin{array}{l} [m] = M \\ [h] = L \\ [g] = LT^{-2} \\ [v] = LT^{-1} \end{array}\right\}$$

b) Formulamos la matriz de coeficientes y calculamos su rango.

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & h & g & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \alpha_{ji}$$

El rango de la matriz anterior es h=3 y tenemos 4 magnitudes (n=4).

c) Se determinan los monomios independientes que se pueden formar.
Sólo se pueden formar $m = n-h$ =4-3=1 monomio.

d) Desarrollando la ecuación $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\varepsilon_i = 0$, obtenemos el monomio buscado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_h \\ \varepsilon_g \\ \varepsilon_v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m = 0 \\ \varepsilon_h + \varepsilon_g + \varepsilon_v = 0 \\ -2\varepsilon_g - \varepsilon_v = 0 \end{array} \right.$$

Eligiendo $\varepsilon_h = 1 \Rightarrow \varepsilon_g = 1$ y $\varepsilon_v = -2$. Usando la ecuación (46), $\pi = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\varepsilon_i}$, el monomio de este caso particular toma la forma $\pi = v^{-2}hg$, que de be ser una constante, tal como indica la ecuación (51). De $v^{-2}hg = \text{cte} \Rightarrow v = \text{cte}\sqrt{hg}$. Por otros caminos se sabe que $v = \sqrt{2hg}$ y que por tanto el valor de la constate es $\sqrt{2}$, pero esta información no la aporta el Análisis Dimensional.

Ejemplo 2: Relación de v, a, e, y t en un movimiento rectilíneo.

a) Variables que intervienen en el fenómeno físico y sus dimensiones.

$$\left.\begin{array}{l} [v] = LT^{-1} \\ [a] = LT^{-2} \\ [e] = L \\ [t] = T \end{array}\right\}$$

b) Matriz de los coeficientes en la base $\{L, M, T\}$.

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v & a & e & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \alpha_{ji}$$

El rango de la matriz es h =2.

c) Número de monomios independientes.

El número de monomios independientes es $m = n - h$ =4-2=2 monomios, a los que llamaremos π_1 y π_2.

d) Cálculo de los monomios.

El sistema de ecuaciones de los exponentes de los monomios viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_v \\ \varepsilon_a \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_v + \varepsilon_a + \varepsilon_e = 0 \\ -\varepsilon_v - 2\varepsilon_a + \varepsilon_t = 0 \end{cases}$$

Pudiéndose elegir libremente, dos de las incógnitas.

1ª elección: $\varepsilon_e = 1$ y $\varepsilon_a = 0 \Rightarrow \varepsilon_v = -1$ y $\varepsilon_t = -1 \Rightarrow \pi_1 = ev^{-1}t^{-1} \Rightarrow \pi_1 = \dfrac{e}{vt}$.

2ª elección: $\varepsilon_e = 0$ y $\varepsilon_a = 1 \Rightarrow \varepsilon_v = -1$ y $\varepsilon_t = 1 \Rightarrow \pi_2 = av^{-1}t \Rightarrow \pi_2 = \dfrac{at}{v}$.

La función que rige el proceso físico tiene la forma general $F(\pi_1, \pi_2) = 0$, que es equivalente a $\pi_1 = \varphi(\pi_2)$. Para nuestro caso $\dfrac{e}{vt} = \varphi\left(\dfrac{at}{v}\right)$.

El análisis dimensional no nos dice nada más. Por otros caminos sabemos que si $\varphi\left(\dfrac{at}{v}\right) = 1$, entonces $e = vt$ y se obtiene la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme. Y si $\varphi\left(\dfrac{at}{v}\right) = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{at}{v}$, entonces $e = vt\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{at}{v}\right) = vt + \dfrac{1}{2}at^2$ que es la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Ejemplo 3: Factores de forma. Aplicación al cálculo del periodo de un péndulo.

Ocurre a veces, que en el cálculo de monomios es muy fácil encontrar algunos de ellos, sin necesidad de calcularlos. Esto ocurre con las magnitudes adimensionales, tales como los ángulos, que forzosamente son ya monomios adimensionales. Igual para cuando en el fenómeno a estudiar aparecen 2 magnitudes de igual dimensión: Su cociente ha de ser forzosamente de dimensión nula. A estos monomios tan sencillos se les llama factores de forma y su uso simplifica mucho la resolución de problemas.

Vamos a estudiar, utilizando el Análisis Dimensional, el movimiento de un péndulo simple intentado calcular su periodo. Ahora en el paso primero, además de considerar las magnitudes que intervienen en el proceso físico, debemos de tener en cuenta los posibles factores de forma.

a) Variables que intervienen en el fenómeno físico, sus dimensiones y factores de forma.

Intervienen las magnitudes: l (longitud del hilo), g (gravedad), τ (periodo), m (masa) y θ (amplitud angular). La amplitud angular es un factor de forma, no lo consideraremos en el cálculo y lo tendremos en cuenta como monomio sólo al final.

$$\left.\begin{array}{l}[l]=L\\ [g]=LT^{-2}\\ [\tau]=T\\ [m]=M\end{array}\right\}$$

b) Matriz de los coeficientes en la base $\{L,M,T\}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} l & g & \tau & m \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ L \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_{ji} \end{array}$$

El rango de la matriz es h =3.

c) Número de monomios independientes.

El número de monomios independientes es m =n–h =4-3=1 monomio, más el factor de forma θ que es en sí un segundo monomio.

d) Cálculo del monomio.

El sistema de ecuaciones de los exponentes viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_g \\ \varepsilon_\tau \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_m = 0 \\ \varepsilon_l + \varepsilon_g = 0 \\ -2\varepsilon_g + \varepsilon_\tau = 0 \end{cases}$$

Pudiéndose elegir libremente, una de las incógnitas. Cómo buscamos el periodo hacemos:

$$\varepsilon_\tau = 1 \quad \Rightarrow \varepsilon_m = 0, \quad \varepsilon_g = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \varepsilon_l = -\frac{1}{2} \Rightarrow \pi_1 = \tau\, g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \pi_1 = \tau\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

La función que rige el proceso físico tiene la forma $\pi_1 = \varphi(\vartheta) \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\varphi(\theta)$ y puede afirmarse que en la función $\varphi(\theta)$ no pueden figurar, además de θ, más que constantes.

El resultado correcto para este problema es $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta^2}{16}+\cdots\right)$, luego $\varphi(\theta) = 2\pi\left(1+\frac{\theta^2}{16}+\cdots\right)$.

Vemos, en este y otros ejemplos, que el Análisis Dimensional no proporciona la fórmula exacta del proceso; pero, sin embargo, la información que proporciona es extraordinaria. Por ejemplo, en este sistema físico nos dice: ¡El periodo del péndulo no depende de su masa!

Llegado este punto, resulta claro que la pregunta que hay que formular al Análisis Dimensional no es ¿Cuál es la ley del péndulo o del sistema físico que estudiamos?, sino ¿Cómo es la ley del péndulo o del sistema físico que analizamos?

Ejemplo 4: Estudio del movimiento planetario.

a) Variables que intervienen en el fenómeno físico, sus dimensiones y factores de forma.

Intervienen las magnitudes: M_S (masa del Sol), m_p (masa de un planeta), τ (periodo de revolución), r (distancia entre el Sol y el planeta), y G (constante de gravitación universal. Como intervienen dos masas, la del Sol y la del planeta, formamos un factor de forma que será un primer monomio $\pi_1 = \dfrac{M_S}{m_p}$. El resto de magnitudes y una de las masas tienen las siguientes dimensiones:

$$\left.\begin{array}{l} [M_S] = M \\ [\tau] = T \\ [r] = L \\ [G] = M^{-1}L^3T^{-2} \end{array}\right\}$$

b) Matriz de los coeficientes en la base $\{L, M, T\}$.

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_S & \tau & r & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} = \alpha_{ji}$$

El rango de esta matriz es h =3.

c) Número de monomios independientes.

El número de monomios independientes es $m = n - h$ =4-3=1 monomio, más el factor de forma π_1 que es en sí un monomio más.

d) Cálculo del monomio.

El sistema de ecuaciones de los exponentes viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{M_S} \\ \varepsilon_\tau \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_G \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{M_S} - \varepsilon_G = 0 \\ \varepsilon_r + 3\varepsilon_G = 0 \\ \varepsilon_\tau - 2\varepsilon_G = 0 \end{cases}$$

Pudiéndose elegir libremente, una de las incógnitas. Elegimos:

$$\varepsilon_{M_S}=1 \Rightarrow \varepsilon_G=1,\ \varepsilon_r=-3 \ \text{ y } \ \varepsilon_\tau=2 \Rightarrow \pi_2=M_S\tau^2r^{-3}G \Rightarrow \pi_2=\frac{M_S\tau^2G}{r^3}.$$

La función que rige el proceso físico tiene la forma $\pi_2=\varphi(\pi_1)\Rightarrow\tau^2=\frac{r^3}{M_SG}\varphi(\frac{M_s}{m_p})$, siendo φ una función desconocida. La información obtenida, $\tau^2\propto r^3$, es la famosa 3ª ley de Kepler.

Ejemplo 5: Velocidad de sonido en un gas.

a) Variables que intervienen en el fenómeno físico, sus dimensiones y factores de forma.

Consideraremos que intervienen en el proceso, además de c (velocidad del sonido en el gas), las siguientes variables: P (presión del gas donde se propaga), θ (temperatura del gas) y ρ (densidad del gas). Las dimensiones de estas variables vienen dadas por

$$\left.\begin{array}{l}[c]=LT^{-1}\\ [P]=ML^{-1}T^{-2}\\ [\rho]=ML^{-3}\\ [\theta]=\theta\end{array}\right\}$$

y, en esta ocasión, no tenemos factores de forma.

b) Al aparecer la temperatura, tenemos que aumentar la base que será $\{L,M,T,\theta\}$. La matriz de exponentes toma la forma:

$$\begin{array}{c} \\ M\\ L\\ T\\ \theta\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}c & P & \rho & \theta\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -3 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}=\alpha_{ji}$$

En principio el rango parece 4, pero si obtenemos el determinante desarrollando por la última fila o por la última columna que sólo tienen un elemento distinto de cero, se obtiene el determinante

$$|\alpha_{ji}|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=3-2+1=0$$

por lo que el rango de la matriz es h =3.

c) Número de monomios independientes.

El número de monomios independientes es $m=n-h$ =4-3=1 monomio.

d) Cálculo del monomio.

El sistema de ecuaciones de los exponentes viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_P \\ \varepsilon_\rho \\ \varepsilon_\vartheta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_P + \varepsilon_\rho = 0 \\ \varepsilon_c - \varepsilon_P - 3\varepsilon_\rho = 0 \\ -\varepsilon_c - 2\varepsilon_\rho = 0 \\ \varepsilon_\vartheta = 0 \end{cases}$$

Como las ecuaciones son linealmente dependientes, hacemos

$$\varepsilon_P = 1 \quad \Rightarrow \varepsilon_\rho = -1. \text{ Con } \varepsilon_c = -2\varepsilon_P \Rightarrow \varepsilon_c = -2. \text{ Por tanto } \pi = P\rho^{-1}c^{-2} = \text{cte} \Rightarrow c = \text{cte}\sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Si el gas se aproxima al comportamiento de un gas perfecto y se cumple la ecuación de los gases perfecto $P = nK\theta$, y la densidad la expresamos como $\rho = nM_m$ donde M_m es la masa molecular, la velocidad queda $c = \text{cte}\sqrt{\frac{P}{\rho}} = \text{cte}\sqrt{\frac{nK\theta}{nM_m}} = \text{cte}\sqrt{\frac{K\theta}{M_m}}$

Este resultado también lo hubiésemos conseguido directamente si las magnitudes consideradas hubiesen sido: c (velocidad del sonido en el gas), P (presión del gas donde se propaga), θ (temperatura del gas), M_m (la masa molecular) y K (la constate de Boltzmann). Las dimensiones de estas variables vienen dadas por

$$\left.\begin{array}{l} [c] = LT^{-1} \\ [P] = ML^{-1}T^{-2} \\ [\theta] = \theta \\ [M_m] = M \\ [K] = ML^2T^{-2}\theta^{-1} \end{array}\right\}$$

e) Con estas magnitudes, la matriz de exponentes toma la forma:

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \\ \theta \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c & P & \theta & M_m & K \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \alpha_{ji}$$

que tienen de rango h =4.

f) Número de monomios independientes.

El número de monomios independientes es $m = n - h$ =5-4=1 monomio.

g) Cálculo del monomio.

El sistema de ecuaciones de los exponentes viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_P \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{M_m} \\ \varepsilon_K \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_P + \varepsilon_{M_m} + \varepsilon_K = 0 \\ \varepsilon_c - \varepsilon_P + 2\varepsilon_K = 0 \\ -\varepsilon_c - 2\varepsilon_P - 2\varepsilon_K = 0 \\ \varepsilon_\vartheta - \varepsilon_K = 0 \end{cases}$$

Eligiendo el exponente del la velocidad del sonido, magnitud que buscamos, igual a la unidad: $\varepsilon_c = 1 \quad \Rightarrow \varepsilon_P = 0, \varepsilon_{M_m} = \frac{1}{2}, \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2}$ y $\varepsilon_K = -\frac{1}{2}$. Por tanto $\pi = c\theta^{-\frac{1}{2}} M_m^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = cte \Rightarrow c = cte\sqrt{\frac{K\theta}{M_m}}$

que es el resultado que buscábamos.

5.9. Principio de similitud.

El principio de similitud no es más que una generalización del carácter de homogeneidad dimensional de las ecuaciones de la Física. Dice así: "*Las leyes de la Física son invariantes ante cambios de las medidas de un fenómeno físico en un mismo sistema de unidades, ya sean estos cambios reales o imaginarios*".

La utilidad práctica más evidente de este principio radica en el estudio de las propiedades físicas de una maqueta realizada a escala reducida, para después aplicar los resultados al objeto real. Esta práctica es de gran importancia en la construcción de aviones, navíos y obras hidráulicas. Además de esta práctica resulta interesante hacer disquisiciones sobre cambios imaginarios o reales en las medidas. Por ejemplo, si tenemos dos péndulos, uno de longitud doble que el otro, ¿qué relación existe entre sus periodos?

Poincaré se formuló la siguiente pregunta: ¿Qué pasaría en el universo si todas las medidas quedarán bruscamente multiplicadas, por ejemplo, por 10? El opinaba que nadie se iba a dar cuenta del hecho y que el nuevo universo sería idéntico al anterior. Se cuenta que el carnicero de Poincaré argumentó en contra. Pensaba el carnicero que el peso de un chorizo dependía de su tamaño (volumen) y que aumentaría según L^3 (10^3), mientras que la cuerda que lo sustentaba tendría una resistencia proporcional a su sección y, por tanto, aumentaría según L^2 (10^2). Esto haría que el peso del chorizo aumentaría desproporcionadamente y el chorizo caería. ¿Quién tenía razón?

Vemos que el carnicero pensaba que el chorizo caía debido a su masa y no a su peso y, dado que $M = \rho L^3$, podemos decir que el carnicero además pensaba que la densidad permanecía constante en la transformación. Al considerar ρ =cte se está admitiendo la creación de materia en la transformación por el aumento de los volúmenes; admitamos esto. En realidad, el carnicero debía haber considerado el peso, y como [*peso*]= MLT^{-2}= $(ML^{-3})L^4\ T^{-2}$=$[\rho]L^4T^{-2}$, con lo que el chorizo caería incluso antes de lo que él creía.

Por otro lado consideremos la resistencia R de la cuerda. Si la cuerda tiene una sección S, la resistencia de la misma a romperse vendrá dada por una relación de proporcionalidad entre la resistencia y la superficie, $R = kS$, donde k es una constante característica de la cuerda. Admitiendo la homogeneidad de las ecuaciones de la Física, las dimensiones de esta constante vendrán dadas por $[k]=[R][S]^{-1}=(MLT^{-2})(L^{-2})=ML^{-3}\ L^3L^{-1}T^{-2}=[\rho]L^3L^{-1}T^{-2} \Rightarrow [k]=[\rho]L^2T^{-2}$. Luego, la resistencia de la cuerda aumenta según L^2 debido al aumento de su sección y según L^2 debido al aumento de su constante k. De este modo el aumento de resistencia es proporcional a L^4 y el chorizo no caería.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, este principio es válido, como se dice explícitamente en su enunciado, no sólo para cambios reales, sino también para imaginarios. Apliquemos, ahora, este tipo de cambios a situaciones más reales. Por ejemplo, ¿qué pasaría si las longitudes de un animal cambiasen, permaneciendo constantes las del resto del universo? Antes de responder a la pregunta, pensemos, ¿es disparatada? ¿No es un boquerón un arenque más pequeño?

Volviendo al tema que nos ocupa, le peso del animal será [*peso*]= [*masa*][*gravedad*]=MLT^{-2}= $=ML_a^{-3}\ L_a^3 = [\rho]\,L_a^3\,LT^{-2}$, donde L_a representa las longitudes del animal y L la del resto del universo que permanecen inalterables.

La fuerza del los músculos del animal dependen de su sección y, por tanto, de L_a^2, de modo que comparando la dependencia de su peso (L_a^3) con la fuerza de sus músculos (L_a^2), podemos sacar la siguiente conclusión: "Los animales pequeños mueven mejor sus cuerpos que los grandes". Es por esto que:

- Los niños son tan ágiles e inquietos.
- Un pigmeo normal salta su propia altura.
- Si un elefante saltara en proporción como una pulga, sus saltos serían de 800 m. (Longitud de la pulga = 2 mm, salto de la pulga = 40 cm, longitud del elefante = 4 m).
- Un hombre de 10 m de altura sólo podría vivir tumbado.

Un animal cazador no puede ser muy grande porque perdería agilidad; así, todos los grandes animales son herbívoros. Además, el exceso de temperatura en la carrera sería según L_a^3, mientras que la pérdida de calor, a través de la piel, sería según L_a^2. Por tanto, el animal grande pierde con dificultad el exceso de calor que genera en la carrera. Otro inconveniente del animal grande es que necesita ingerir mucha comida (L_a^3).

Sin embargo, los animales cazadores tampoco podrían ser demasiado pequeños, pues de nada les serviría su velocidad, si pueden ser devorados con facilidad. ¿Por qué hay animales grandes? Porque así no se ven atacados por los depredadores. Un ejemplo de esto último ocurrió en la última glaciación en la que desaparecieron los depredadores de algunas islas del Mediterráneo y, precisamente en ellas, se han encontrado fósiles de elefantes enanos con menos de 1 m de altura.