

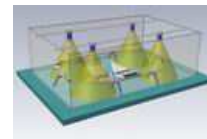
***Técnicas***



***Experimentales***



***Básicas***





***Técnicas***

***Experimentales***

***Básicas***

***Dpto. Física Aplicada***

***Universidad de Granada***



Estos apuntes han sido recopilados por los profesores de la asignatura de Técnicas Experimentales Básicas

- Miguel A. Cabrerizo Vílchez
- Francisco Martínez López (Coordinador de la edición)

Queremos agradecer a los profesores

- Andrew S. Kowalski
- Antonio Martín Rodríguez

que hagan uso de los mismos para sus clases. Y también queremos agradecer a Juan Antonio Morente su contribución en el desarrollo del capítulo de instrumentación.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objeto del curso . . . . .	1
1.2. Necesidad de la experimentación . . . . .	2
1.3. Programa de la asignatura . . . . .	3
1.4. Bibliografía . . . . .	4
<b>2. Método Experimental y Procedimiento Experimental</b>	<b>7</b>
2.1. Método científico/experimental . . . . .	7
2.2. Tipos de experimentos de laboratorio . . . . .	9
2.2.1. Experimentos ilustrativos. . . . .	9
2.2.2. Investigación Experimental . . . . .	10
2.2.3. Diseño . . . . .	10
2.2.4. Técnicas de medida . . . . .	10
2.3. Organigrama para una experimentación con método. . . . .	11
2.3.1. Objeto del experimento. . . . .	11
2.3.2. Variables que intervienen. . . . .	11
2.3.3. Equipo y ambiente de trabajo. . . . .	11
2.3.4. Instrumentos de medida. . . . .	12
2.3.5. Procedimiento experimental. . . . .	12
2.3.6. Evaluación de los resultados. . . . .	12
2.3.7. Presentación de los resultados. . . . .	13
2.3.8. Conclusiones. . . . .	13
2.4. Procedimiento experimental . . . . .	13
2.4.1. Secuencia de pruebas. . . . .	13
2.4.2. Nivel de respuesta y espaciado de los puntos. . . . .	14
2.4.3. Acciones a tener en cuenta durante el procedimiento. . . . .	16
2.4.4. Pruebas de naturaleza cualitativa. . . . .	18
<b>3. Errores Experimentales</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción. . . . .	21
3.2. Concepto de Error. Tipos y/o fuentes de Error. . . . .	22
3.2.1. Errores sistemáticos. . . . .	22
3.2.2. Errores aleatorios. . . . .	23
3.3. Cuantificación del error. . . . .	24
3.3.1. Error en una medida directa. . . . .	24
3.3.2. Error absoluto. . . . .	26
3.3.3. Error relativo. . . . .	26
3.3.4. Error por intervalo de confianza. . . . .	26
3.3.5. Error cuadrático medio. Desviación típica. . . . .	26
3.3.6. Errores en medidas indirectas. . . . .	27
3.4. Reglas para discernir el tipo de error. Necesidad de la Estadística. . . . .	28
3.5. Problemas. . . . .	29

<b>4. Instrumentación</b>	<b>31</b>
4.1. Actitudes hacia la instrumentación . . . . .	31
4.2. Selección del equipo . . . . .	32
4.3. Calibración . . . . .	33
4.4. Resumen del equipo de un laboratorio tipo . . . . .	35
4.4.1. Medidas de longitud . . . . .	35
4.4.2. Medidas de tiempo y velocidad . . . . .	38
4.4.3. Medidas de desplazamiento . . . . .	39
4.4.4. Medida de masas, fuerza y momento . . . . .	44
4.4.5. Medida de Presión . . . . .	46
4.4.6. Medidas en flujo de fluidos . . . . .	51
4.4.7. Medida de la temperatura . . . . .	57
4.4.8. Medidas eléctricas . . . . .	62
<b>5. Introducción al Análisis Dimensional</b>	<b>71</b>
5.1. Introducción . . . . .	71
5.2. Magnitud y medida . . . . .	72
5.3. Magnitudes fundamentales y derivadas . . . . .	75
5.4. Constantes dimensionadas . . . . .	76
5.5. Homogeneidad dimensional . . . . .	78
5.6. Postulados básicos del análisis dimensional . . . . .	80
5.7. Constantes dimensionadas ineludibles . . . . .	82
5.8. Variables superfluas . . . . .	82
5.9. Productos adimensionales . . . . .	83
5.10. El teorema II . . . . .	85
5.11. Problemas . . . . .	87
<b>6. Presentación de los resultados</b>	<b>89</b>
6.1. Análisis e interpretación de los resultados . . . . .	89
6.1.1. Requerimientos. . . . .	89
6.1.2. La virtud del escepticismo. . . . .	90
6.1.3. Trabajo preliminar . . . . .	90
6.1.4. La Ley de los promedios. . . . .	93
6.1.5. Tablas de posibilidades. . . . .	94
6.1.6. Fallos en las medidas . . . . .	94
6.1.7. Análisis de las lecturas . . . . .	96
6.1.8. Análisis de gráficos . . . . .	98
6.1.9. Integración . . . . .	102
6.1.10. Interpolación y extrapolación . . . . .	105
6.1.11. La inspiración. . . . .	108
6.2. Comunicación de los resultados . . . . .	108
6.2.1. La necesidad de una comunicación efectiva de los resultados. . . . .	108
6.2.2. Preparando un informe escrito. . . . .	109
6.2.3. Guía sobre la distribución de los informes escritos. . . . .	109
6.2.4. Construcción del informe. . . . .	112
6.2.5. Estilo de escritura. . . . .	112
6.2.6. Ilustraciones. . . . .	113
6.2.7. Gráficos. . . . .	113
6.2.8. Comunicaciones cortas. . . . .	116
6.2.9. Charlas (Comunicaciones Orales). . . . .	116
6.2.10. Referencias. . . . .	117
6.3. Problemas. . . . .	118



# Capítulo 1

## Introducción

---

<b>1.1. Objeto del curso</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1.2. Necesidad de la experimentación</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1.3. Programa de la asignatura</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.4. Bibliografía</b> . . . . .	<b>4</b>

---

En este capítulo se introduce el curso de Técnicas Experimentales Básicas, se justifica la necesidad del mismo dentro de la actualidad científica y se indica como se va a lograr el objetivo de aprender a hacer experimentos a lo largo de los distintos capítulos que lo componen.

### 1.1. Objeto del curso

Una frase muy frecuente y sin sentido es el decir que una cosa es la teoría y otra la práctica. Nada más fuera de la realidad. Tanto la Física Experimental como la Teórica constituyen los pilares básicos sobre los que se basa el progreso de las Ciencias Físicas, y están hasta tal punto ligadas que no se puede entender ningún desarrollo teórico sin una buena base experimental ni ningún avance experimental sin un apoyo teórico que guíe la investigación.

Ciertamente que las Técnicas Experimentales tratan sobre la Física Experimental, pero no se puede dar una definición precisa de una materia de estudio sobre todo si el contenido es heterogéneo, como lo es en este caso. En un intento de dar una definición podríamos decir que la asignatura trata de dar los conocimientos básicos para interpretar, expresar y comunicar los resultados en el lenguaje correcto. Por otra parte, el trabajo de laboratorio puede servir para:

- a) Demostrar teorías físicas.
- b) Conocer el manejo de aparatos.
- c) Aprender a realizar experimentos.
- d) Obtener valores de magnitudes de interés.

Consideremos con más detalle cada una de estas finalidades. A menudo adquirimos una mejor comprensión de los fenómenos que predice cierta teoría física si éstos se pueden observar en la práctica. Por ejemplo, la interferencia de la luz no es un concepto intuitivo. La idea de que dos haces de luz puedan anularse entre sí y producir oscuridad no es algo que se comprenda fácilmente; una demostración visual y palpable sería en este caso, decisiva. Las demostraciones experimentales de teorías son importantes también por otra razón: dan idea de los ordenes de magnitud de las distintas variables que intervienen en el fenómeno. Por supuesto que la

demostración experimental no sustituye completamente a una explicación teórica apropiada, por lo que, la demostración de las teorías en el laboratorio de enseñanza tiene una utilidad definida pero limitada.

El segundo objetivo, es quizás más importante a nivel introductorio, pero es necesario decidir exactamente lo que queremos decir con "aparato" en este contexto. En cualquier curso de prácticas se manejan un cierto número de instrumentos sencillos tales como potenciómetros, micrómetros calibrados, balanzas y osciloscopios de rayos catódicos, y la experiencia que se gana con el uso de éstos es evidentemente insustituible. Sin embargo, en el trabajo de investigación científica, el número de instrumentos que se pueden concebir es enorme. No es posible llevar a cabo un curso de prácticas en donde se pudiera aprender el manejo de todos ellos.

El sentido común y cierta dosis de originalidad hacen que un mismo instrumento cumpla su misión mejor o peor. Esto está ya en relación con el tercer objetivo del laboratorio y con la frase "aprender a realizar experimentos" queremos decir aprender a:

- a) Planificar un experimento cuya precisión es la apropiada para su propósito.
- b) Conocer y realizar las medidas necesarias para eliminar los errores sistemáticos en el método y en los instrumentos.
- c) Analizar los resultados para extraer las conclusiones correctas.
- d) Estimar la exactitud del resultado final.
- e) Registrar las medidas y cálculos con claridad.

Este tercer objetivo junto con el cuarto nos introducen directamente en la necesidad que se tiene de la experimentación.

## 1.2. Necesidad de la experimentación

Cuando nos enfrentamos con un fenómeno del mundo natural, la forma de proceder en Física es seleccionar lo que creemos que es esencial. Por ejemplo, los griegos veían que un cuerpo en movimiento terminaba siempre deteniéndose y por ello llegaron a la conclusión de que era necesaria una fuerza para mantener un cuerpo en movimiento. Galileo y Newton observaron el mismo fenómeno, pero afirmaban que el hecho de que el cuerpo acabara parándose era un aspecto esencial de la situación: depende del rozamiento. En ausencia de rozamiento un cuerpo no se detiene salvo que acte una fuerza sobre él. Si intentamos hacer un experimento para demostrar esta afirmación, nos encontramos que no podemos eliminar nunca el rozamiento, aunque sí podemos hacer que sea cada vez más pequeño, hasta un cierto límite, y el resultado sería que el cuerpo en movimiento acabará deteniéndose aunque recorriendo más espacio. Es razonable creer que llevando al caso límite de fricción nula, el movimiento permanecerá inalterable tal como se establece en la primera ley de Newton.

Esta es la forma de enfocar los problemas físicos: seleccionamos los aspectos esenciales de cada situación física real y de ellos hacemos una generalización, o teoría, y de la teoría, deducciones, y para comprobar una deducción hacemos varios experimentos más. Ahora bien, la deducción se refiere sólo a una situación idealizada o simplista. Para comprobarla tenemos que crear esta situación simple, en el complicado mundo natural, lo cual no siempre resulta fácil de hacer. Conseguirlo significa casi resolver el problema.

El mundo físico está descrito por teorías sencillas pero esenciales. Estos aspectos esenciales tienden a convertirse en el único motivo de estudio, y puede llegarse a pensar que realmente constituyen el mundo natural, en vez de una parte de él. Además, todo ajusta tan *naturalmente* que uno puede olvidar fácilmente el esfuerzo y genialidad de que hubo necesidad para *ver* estos aspectos esenciales. El antídoto más eficaz contra esto es ir al laboratorio y comprobar la complicación de los fenómenos en la vida real.

Para hacer Física Experimental, entonces, se necesita conocer primero algunos de los obstáculos para verificar una teoría, para medir lo que se quiere medir y no cualquier otra cosa, y aprender

cómo superarlos. Pero sobre todo hay que tener una visión panorámica de la Física como un todo y es esencial comprender la forma en que la teoría y el experimento se relacionan.

Actualmente, es cuando se puede ver de forma más palpable la necesidad de la experimentación en cualquier área de la ciencia y de la ingeniería relacionadas con el progreso industrial. En principio se prueban prototipos para verificar que todo funciona según lo previsto o que una cierta parte es lo suficientemente robusta. Si alguna de las partes falla, por ejemplo, se rompe, hay que llevar a cabo nuevos experimentos para encontrar las condiciones en que las características técnicas de dichas partes son diferentes de las que se habían previsto. Finalmente, puede que se haya desarrollado, por ejemplo, una nueva aleación y es necesario verificar que sus propiedades son, en efecto mejores que las anteriores aleaciones.

### 1.3. Programa de la asignatura

El contenido de esta asignatura lo vamos a dividir en los siguientes capítulos:

1. Introducción
2. Método Experimental y Procedimiento Experimental
3. Errores en la experimentación
4. Instrumentación
5. Introducción al análisis dimensional. Aplicaciones a la Experimentación
6. Presentación de los resultados

En este capítulo, **Introducción**, hemos presentado la asignatura, justificando cuales son los objetivos de la misma y como se van a abordar en los siguientes capítulo que componen el temario. También daremos una orientación bibliográfica que sea de utilidad tanto para el contenido teórico de la asignatura como para la parte práctica a realizar en el laboratorio.

Como hemos comentado, un experimento puede ser extremadamente laborioso y para obtener, con economía, mejores resultados y de más amplia aplicabilidad es vital la realización de una planificación metodológica cuidadosa, es decir, diseñar previamente el experimento en cuestión. Esto constituirá los objetivos de los capítulos 2 y 5.

El capítulo **2. Método Experimental y Procedimiento Experimental** responde a la pregunta ¿quién puede considerar hacer algo sin seguir un método? por lo que en dicho capítulo se tratará de hacernos y responder preguntas tales como:

- ¿Cuál es el fin real de un experimento?
- ¿Qué se conoce ya sobre el problema que nos estamos planteando?
- ¿Cuál es el primer paso que debemos dar? ¿Por qué?
- ¿De qué instrumentos disponemos o cuáles necesitamos?
- ¿Cuáles son sus limitaciones?
- ¿Necesitamos otros recursos?
- ¿Qué significado tienen los resultados?

Claramente una aproximación casual al problema no es ni económica ni fructífera, y los principiantes suelen descubrir rápidamente esto si no adoptan alguna clase de método en su experimentación. En el capítulo 2 veremos ciertos consejos sobre el método a seguir, recomendaciones que el alumno irá coleccionando a medida que aumente su experiencia.

En el capítulo **5. Introducción al análisis dimensional** trazaremos las líneas generales a seguir sobre algunos aspectos importantes de la planificación con la ayuda del análisis dimensional. Existen algunas herramientas sofisticadas disponibles para la planificación de experimentos pero generalmente estarán fuera del alcance de los no expertos. El análisis dimensional es una de dichas técnicas y surgió hace tiempo como una ayuda en la estrategia experimental. Este método tiene gran popularidad en los campos de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor, en donde se aplicó por primera vez, pero a lo largo de los años su uso se ha ido extendiendo a otros campos de la Ciencia. El análisis dimensional es un camino rápido y poderoso de obtener ciertas relaciones funcionales sin necesidad de hacer grandes discusiones teóricas.

Cualquier clase de experimentación lleva consigo cierta clase de instrumentación que puede variar desde una simple regla hasta un microscopio electrónico. Esta se estudiará en el capítulo **4. Instrumentación**. En él veremos algunos instrumentos simples y una introducción a los conceptos sobre el sentido, traducción y procesamiento de cantidades elementales tales como: longitud, velocidad de flujo, temperatura y otras. No se trata, pues, de describir una gran multitud de instrumentos de medida sino de aprender los principios de algunos instrumentos y de la instrumentación en general. A través del uso de instrumentos elementales se trata de que el alumno aprenda a apreciar términos tales como: precisión, sensibilidad, respuesta, interferencias, reproducibilidad, y otras características básicas. Posteriormente, podrá tener la oportunidad de utilizar instrumentación rápida y moderna pero primero ha de aprender a desarrollar un cierto escepticismo y respeto sobre los primeros instrumentos.

No importa cuál sea el experimento, uno de sus productos siempre será alguna forma de datos, y aún en los experimentos más simples dichos datos contendrán ciertos errores y éstos deben ser interpretados correctamente. Este será el objetivo del capítulo **3. Errores en la experimentación**. Así, una parte de la planificación metódica de cualquier experimentación es el estudio de los errores potenciales y las inestabilidades. Por muy cuidadosamente que se lleve a cabo un experimento siempre se producirá cierto tipo de error, aunque sea pequeño. Si dichos errores no se examinan de una forma crítica el experimento será una lamentable pérdida de tiempo y de dinero. Veremos los distintos tipos de errores que cualquier experimentador cuidadoso debe procurar fijar y cuantificar en importancia. Así mismo, discutiremos las bases matemáticas para el tratamiento adecuado de dichos errores.

En el capítulo **6. Presentación de resultados** se discute la necesidad del análisis correcto de los resultados. Se presenta el análisis gráfico como parte fundamental en la interpretación de los resultados experimentales. Desgraciadamente, el análisis gráfico puede inducir a ciertos tipos de errores si no se usa adecuadamente. Así un mal ajuste de una curva puede conducir a teorías falsas a menos que se hagan las comprobaciones adecuadas, por ejemplo, a través de ecuaciones de balance de conservación de magnitudes como: masa, energía, momento, intensidad de corriente, etc. Así mismo, el dibujo de una gráfica basado en un mal uso de tests de significación o rechazo puede conducir a falsas conclusiones sobre la localización y magnitud de mínimos y máximos. Finalmente veremos como la extrapolación e interpolación son algo más que una mera extensión de la línea que resulta de ajustar unos pocos puntos en una región restringida.

Finalmente, la comunicación de los resultados supone el punto final en la síntesis de diferentes disciplinas con un objetivo común, consistente en la realización con éxito de un experimento dentro de los objetivos de exactitud prefijados y con el mínimo coste de recursos, lo que sin duda es la esencia de un trabajo serio de investigación. En el capítulo **6. Presentación de resultados** también se trata de dar una serie de reglas básicas para la construcción de informes científicos, poniendo especial hincapié en los apartados de discusión y conclusiones. Se analizan los distintos enfoques que pueden darse atendiendo al tipo de la misma y de público al que va dirigida. Con carácter general se da un esquema para la distribución típica del material contenido en un informe.

## 1.4. Bibliografía

1. Squires, C. L. "Física práctica", McGraw-Hill, Méjico 1972

- 
2. Penny, R.K. "The Experimental Methods" Logman, London 1974
  3. Bunge, M. "La investigación científica" Ariel, Barcelona, 1983
  4. Baird, D.C. "Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design" Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1962
  5. Greenberg, L.H. "Discoveries in Physics for scientifics and engineers" W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1975



## Capítulo 2

# Método Experimental y Procedimiento Experimental

---

<b>2.1. Método científico/experimental . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>2.2. Tipos de experimentos de laboratorio . . . . .</b>	<b>9</b>
2.2.1. Experimentos ilustrativos. . . . .	9
2.2.2. Investigación Experimental . . . . .	10
2.2.3. Diseño . . . . .	10
2.2.4. Técnicas de medida . . . . .	10
<b>2.3. Organigrama para una experimentación con método. . . . .</b>	<b>11</b>
2.3.1. Objeto del experimento. . . . .	11
2.3.2. Variables que intervienen. . . . .	11
2.3.3. Equipo y ambiente de trabajo. . . . .	11
2.3.4. Instrumentos de medida. . . . .	12
2.3.5. Procedimiento experimental. . . . .	12
2.3.6. Evaluación de los resultados. . . . .	12
2.3.7. Presentación de los resultados. . . . .	13
2.3.8. Conclusiones. . . . .	13
<b>2.4. Procedimiento experimental . . . . .</b>	<b>13</b>
2.4.1. Secuencia de pruebas. . . . .	13
2.4.2. Nivel de respuesta y espaciado de los puntos. . . . .	14
2.4.3. Acciones a tener en cuenta durante el procedimiento. . . . .	16
2.4.4. Pruebas de naturaleza cualitativa. . . . .	18

---

Para que un trabajo se pueda realizar en un tiempo razonablemente corto y con unos costes adecuados es necesaria su planificación. En este capítulo se presenta el método científico y, como parte de este, el procedimiento experimental que sirve como guía en la planificación del trabajo de investigación en el laboratorio. Se darán ideas útiles en general para cualquier tipo de situación experimental tanto para la selección de la instrumentación como para la secuencia de experimentos a realizar.

### 2.1. Método científico/experimental

Los experimentos normalmente difieren en el aspecto externo pero generalmente todos ellos siguen la misma forma básica; están sujetos a un modelo secuencial de planificación, implementación y evaluación. Esto es lo que se conoce como método experimental y es tan importante en

el trabajo experimental como el método analítico que tiene en cuenta la formulación y solución de problemas. Cada uno de los pasos en la anterior secuencia requiere que el experimentador se cuestione su razón antes de proceder al siguiente paso. A diferencia del método analítico en el que es posible, normalmente, llegar a una única respuesta a través de un camino único, es raramente posible realizar un experimento significativo de la misma manera. Un programa experimental normalmente consiste en una serie de experimentos cada uno de los cuales es una parte en un proceso iterativo que se combina de forma adecuada con herramientas teóricas y analíticas. El diagrama de flujo de la figura 2.1 muestra esquemáticamente un método que podría ayudar en la obtención de un resultado significativo.

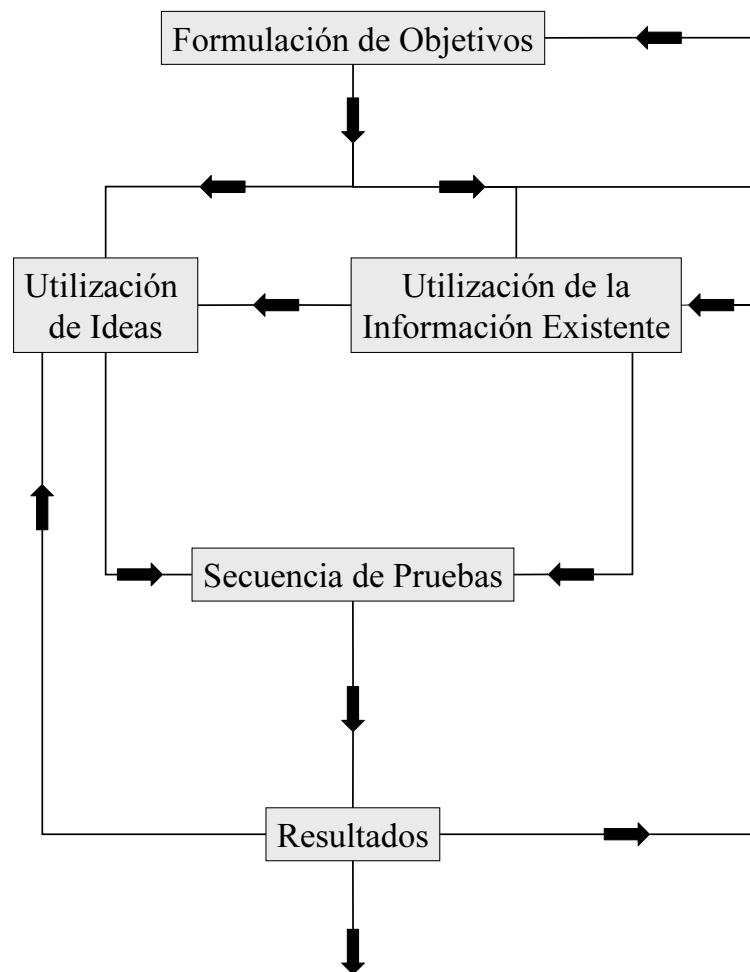


Figura 2.1: Detalles esenciales del método experimental.

El diagrama puede parecer algo trivial. Sin embargo, reúne las características esenciales, disponiéndolas de forma articulada, lo que permite la interacción entre ellas y una posible repetición, cuando se tengan que realizar varios pasos. A menudo no habrá información previa y el rectángulo correspondiente se llenará por primera vez cuando el experimentador haya realizado ciertas pruebas preliminares para establecer el efecto de una serie de variables, o se hayan probado nuevos instrumentos. Como resultado de las pruebas preliminares el experimentador tiene ahora alguna información sobre su problema que junto a la experiencia inicial del equipo podrá ayudarle a generar nuevas ideas e incluso a reformular objetivos. Este ejercicio, programación sensible de resultados y autointerrogatorio por el experimentador, es vital si los objetivos



han de ser realizados económicamente tanto en dinero como en tiempo. Las habilidades particulares que se han de aprender para implementar lo que aparece bajo el rótulo "sucesión de pruebas" se repetirán posteriormente en este y en otros capítulos del curso.

Hasta ahora no se ha introducido ningún concepto que haya restringido la discusión a alguna disciplina particular. Realmente, es un hecho notable que el campo de la experimentación es uno de los vínculos de unión entre los científicos e ingenieros.

## 2.2. Tipos de experimentos de laboratorio

El trabajo de laboratorio puede ser al menos de cuatro tipos:

1. Experimentos que ilustran nociones teóricas.
2. Experimentos de investigación.
3. Experimentos de diseño y síntesis.
4. Experimentos para adquirir entrenamiento en las técnicas de medida.

### 2.2.1. Experimentos ilustrativos.

Desgraciadamente, es un hecho que la mayoría de los experimentos que se realizan en los laboratorios de enseñanza pertenecen a este grupo, ya que tales experimentos son usualmente análogos a soluciones analíticas de un problema. Uno recuerda el caso de un investigador que afirmaba haber verificado una teoría sobre el movimiento de las mareas mediante la realización de experimentos que concordaban con sus predicciones. Con esto la teoría fue considerada correcta hasta que otro investigador midió el movimiento real del agua del mar de la región en cuestión. Sus resultados no coincidieron con la teoría del primero por la sencilla razón de que su teoría no era más que una grosera aproximación de la realidad. Los experimentos del primer hombre se idearon de acuerdo con las hipótesis incluidas en la teoría. Sin embargo, ésta no incluía ciertos rasgos físicos importantes. Si todos los rasgos de un experimento se ordenan cuidadosamente para ajustar la física y las ligaduras incluidas en el análisis, entonces los resultados concordarán. Estos experimentos se realizan mucho mejor en un ordenador cuando sea posible obtener amplias conclusiones de un estudio numérico en el que todas las variables del problema pueden ser exploradas rápidamente y sin mucho esfuerzo. La única parte creativa de tales experimentos, que puede estimular la curiosidad a cada paso y una comprensión del método experimental, es cuando se hace por primera vez. En efecto el alumno se puede hacer siempre preguntas tales como:

- ¿Por qué se ha seguido este camino?
- ¿Qué habría ocurrido si la carga, en el experimento de la viga, se hubiese aplicado de otra forma o se hubiera permitido el movimiento del soporte de la viga?
- ¿Qué pasaría si el material del que está fabricada la viga fuera no lineal?
- ¿Por qué utiliza instrumentos de medida capaces de discriminar la micra cuando lo que se necesita es una regla, ya que las cantidades a medir son del orden de los centímetros?

Todas estas preguntas fomentan el escepticismo que es una de las esencias vitales de la buena experimentación.

### 2.2.2. Investigación Experimental

Estos permiten una mayor apreciación de todos los aspectos del problema en ausencia de un conocimiento apropiado sobre el mismo. Siguiendo la figura, podemos formular un objetivo pero desgraciadamente nuestra tarea puede estar fuera de análisis y si nuestra tarea es nueva puede que no exista o sea muy escasa la información existente sobre ella. Como se dijo al principio, haremos un primer experimento, a menudo de forma tosca, a partir del cual podremos generar ideas que añadir a nuestro conocimiento del problema. A partir del primer experimento se puede realizar un análisis simple del problema con la consecuencia de que puede plantearse un segundo experimento de forma más cuidadosa. Así mismo se puede encontrar que la información existente es inútil en cuyo caso hay que rechazarla.

Frecuentemente, la investigación experimental es el único camino real para obtener la información que se necesita sobre un problema. Cuando esto es así, puede ser muy costosa y consumir mucho tiempo por lo que es vital un método que ponga en juego todas las habilidades de un experimentado especialista para obtener los resultados más significativos. En este caso no hay que perder nunca de vista el objetivo principal ya que es muy fácil desviarse entre las interesantes avenidas de la investigación hasta tal punto que el objetivo principal llega a hacerse irreconocible.

### 2.2.3. Diseño

Este tipo de experimentos es de gran ayuda para aprender a evaluar el efecto de la simplificación que se puede hacer al sintetizar partes complejas y comportamientos conceptuales elevados susceptibles de representación matemática. Por ejemplo, el comportamiento del ala del avión podría tratarse de forma simplificada, mediante el análisis teórico de las tensiones sobre una viga de la geometría adecuada. Sin embargo tal análisis normalmente sólo es capaz de describir el comportamiento global y no algunos detalles importantes, y es precisamente el estudio de los detalles donde se obtiene más éxito con el diseño. El experimentador trataría entonces de verificar que tal detalle es viable desde el punto de vista práctico y que su presencia no impide la función principal del conjunto. Otra forma en la que la experimentación juega un gran papel en el diseño es en la elección de un cierto material para una aplicación determinada. Suponiendo que ya se tiene verificado el análisis correspondiente del conjunto, es posible correlacionar el comportamiento de una parte compleja con una pieza de prueba mucho más simple. Dicha pieza de prueba se puede usar en el laboratorio para comparar diferentes materiales, y la elección final del material vendrá impuesta por una serie de propiedades tales como dureza, resistencia a la corrosión, peso, coste, facilidad de fabricación, etc.

Hablando en general, las posibilidades de un diseño dependerán de algunos rasgos de difícil evaluación, que marcarán la diferencia entre su éxito y su fracaso. Tales rasgos pueden ser:

- ¿Tendrá el trabajo diseñado la eficacia propuesta?
- ¿Tendrá tal diseño un período de vigencia suficiente?
- ¿Se podrá acoplar a las distintas partes para formar el conjunto según lo previsto?
- ¿Existe una vía de fabricación óptima?
- ¿Cómo reaccionará el usuario ante el nuevo diseño?

En ausencia de un método mejor para evaluar estos supuestos, la experiencia realizada sobre un prototipo o con un modelo físico o matemático, pondrá al investigador en la mejor posición para progresar hacia la etapa de detallar su diseño.

### 2.2.4. Técnicas de medida

La experimentación es tan importante para un científico como la base teórica que describe los fenómenos a investigar. Una de las habilidades necesarias para el trabajo experimental es el uso y la elección de instrumentos. Luego el entrenamiento en las técnicas de medida es fundamental

para la obtención de un conocimiento crítico del valor de la experimentación y el medio de desarrollar de forma más apropiada el curso de la experimentación. De nuevo es necesario cierto sentido de investigador ya que cuando uno se enfrenta con la elección de un instrumento para realizar un trabajo se ha de preguntar sobre el intervalo de las variables a cubrir, el efecto del medio, si los efectos dinámicos van a ser importantes, si ha ocurrido envejecimiento, cómo hacer la calibración, etc.

Si no se dispone de un instrumento específico ¿podría utilizarse otro? ¿Es posible idear uno fácilmente y barato para empezar?

A cada paso tanto los instrumentos como las técnicas se han de observar con escepticismo, los estándares se han de observar con cierto recelo, calibrarlos y volverlos a comprobar.

## 2.3. Organigrama para una experimentación con método.

Cualquiera que sea el tipo de experimento es altamente deseable una aproximación metódica. Debemos tener en cuenta los efectos del medio que puedan sumarse de forma aleatoria, planear las distintas secuencias, aprender a evaluar y fijar la importancia de los distintos errores, chequear y comunicar nuestros resultados de forma ordenada y que sea fácilmente comprendida por otros investigadores. En cualquier momento se pueden generar nuevos conceptos basados en datos dudosos y ciertamente puede que no se vea lo obvio aún después de una larga e innecesaria experimentación. Resumamos la secuencia de pasos a realizar en el **método experimental**. Dicha secuencia no es autosuficiente y el estudiante debe aplicar todo su poder de lógica y razonamiento en cada paso así como enriquecer el método según va adquiriendo experiencia. Ante todo, debe haber siempre un motivo para la experimentación que induzca a una cierta acción. La acción puede ser llevar a cabo un cierto análisis a la vista de nuevos resultados. Las posibles preguntas y acciones a realizar para una experimentación metódica son:

### 2.3.1. Objeto del experimento.

**P:** ¿Cuál es el objeto del experimento?

**A:** Hay que encontrarlo y enunciarlo sin ambigüedades.

### 2.3.2. Variables que intervienen.

**P:** ¿Cuales son las variables del problema?

**A:** Hay que hacer unas pruebas preliminares. A la vista de estas pruebas:

**P:** ¿Cuál de ellas es la más importante?

**P:** ¿Cuál es su intervalo de acción?

**P:** ¿Son todas las variables independientes?

**A:** Para responder a la última pregunta haremos uso del Análisis Dimensional.

### 2.3.3. Equipo y ambiente de trabajo.

**P:** ¿Es necesario un medio ambiente especial?

**P:** ¿Cuáles son los trabajos previos sobre el tema?

**A:** Hay que realizar un estudio bibliográfico sobre el tema.

**P:** ¿Existen algunos estándares? ¿Son relevantes?

**A:** Hay que consultar los códigos de prácticas.

**P:** ¿Qué equipamiento es necesario?

**A:** Posiblemente haya que diseñar algún equipo de medida.

**P:** ¿De qué equipamiento se dispone?

**A:** Hay que usar, a ser posible, el equipamiento ya existente.

**P:** ¿Se podría considerar realizar unas pruebas sobre un modelo simplificado?

**P:** ¿Qué tipo de elemento o pieza de trabajo debe considerarse?

**A:** Posiblemente haya que diseñarla y realizar una lista de pruebas.

**P:** ¿Cuál es la principal característica de la pieza de prueba?

#### **2.3.4. Instrumentos de medida.**

**P:** ¿Qué intervalo se va a considerar?

**A:** Hay que decidirlo en función del intervalo de las variables del problema.

**P:** ¿Qué precisión se requiere?

**A:** Se decide sobre la importancia relativa de las variables.

**P:** ¿De qué instrumentación se dispone?

**A:** A ser posible utilizar el equipo existente. Si no es así habrá que diseñar el nuevo.

**P:** ¿Son dichos instrumentos satisfactorios?

**A:** Hay que calibrarlos y realizar unas pruebas preliminares.

#### **2.3.5. Procedimiento experimental.**

**P:** ¿Qué secuencia hay que seguir al hacer variar los parámetros del problema?

**P:** ¿Qué pruebas nos darían información simultánea sobre varias variables a la vez?

**A:** Hay que realizar una planificación de las pruebas a realizar.

**P:** ¿Puede ser importante una observación cualitativa del fenómeno?

**A:** Tomar notas o grabar las observaciones durante las pruebas. Decidirse sobre un modelo de prueba.

#### **2.3.6. Evaluación de los resultados.**

**P:** ¿Son los resultados fiables?

**A:** Realizar chequeos cruzados.

**P:** ¿Qué realizaciones existen entre las variables? y ¿tienen dichas relaciones una significación real?

**A:** Hay que realizar gráficas de distintos tipos y considerar los métodos estadísticos de correlación.

### 2.3.7. Presentación de los resultados.

**P:** ¿Cuáles son los resultados más importantes?

**A:** Hay que identificarlos y ponerlos de manifiesto en un informe del experimento.

**P:** ¿Cuál sería la mejor forma de presentar los resultados?

**A:** Hay que considerar las representaciones gráficas, gráficas adimensionales, fórmulas empíricas, curvas de ajuste.

### 2.3.8. Conclusiones.

**P:** ¿Satisfacen las pruebas realizadas el objetivo original?

**P:** Si no es así, ¿dónde están las discrepancias? ¿son importantes?

**A:** Hay que identificar las discrepancias. Evaluar su importancia y proponer nuevas pruebas.

## 2.4. Procedimiento experimental

No hay reglas fijas para llevar a cabo un programa de experimentación. Los experimentadores las construyen según su propia pericia y tacto por el trabajo a realizar y conforme aumenta su experiencia lo evidente se hace natural. A menudo, esta experiencia se adquiere por el camino más duro y normalmente con un gran coste de tiempo y de dinero.

### 2.4.1. Secuencia de pruebas.

Esto es lo más importante ya que es aquí donde se puede hacer la mayor economía. Las decisiones se han de tomar a la vista de la importancia relativa de las variables independientes que se creen controlan los resultados de los experimentos y de aquí el número de experimentos y el orden en que han de ser realizados. Al mismo tiempo se han de hacer los suficientes experimentos para tener en cuenta los efectos de las variaciones debidas a la técnica empleada, los defectos de aparatos, etc.

Aunque hay técnicas matemáticas para la ayuda del diseño de experimentos, estas, normalmente, están fuera del alcance de los principiantes. Lo que vamos a ver aquí son sólo algunas guías básicas. En cuanto a la secuencia a seguir depende mucho de si el fenómeno a investigar es reversible o irreversible. Reversible significa que si la variable independiente aumenta o disminuye, la respuesta sigue siempre la misma pauta de comportamiento. Un ejemplo cotidiano de una prueba reversible es la sintonización de una emisora de radio. La emisora deseada se puede sintonizar yendo primero hacia la misma, pasar de largo, volver atrás y repetir hasta que, gradualmente, aproximándose cada vez más a ella por ambos lados se consiga una sintonización más satisfactoria. A menudo, los procesos reversibles son lineales en su respuesta con lo que se pueden aplicar incrementos o decrementos regulares. Según marche la prueba se podrá aumentar el espaciado de los puntos hasta que se establezcan las tendencias.

Como ejemplo consideremos el caso de la determinación del módulo elástico de una varilla, por ejemplo el módulo de Young  $Y = (F_l/A)/(\Delta l/l_o) = \text{esfuerzo unitario}/\text{deformación unitaria}$ . En tales experimentos una guía suficiente de trabajos previos nos informa que el esfuerzo unitario es proporcional a la deformación unitaria. La constante de proporcionalidad entre ambas no se puede calcular a menos que se hagan medidas de la deformación unitaria resultante de cambios en el esfuerzo unitario aplicado. Puede que al principio del experimento no se conozca la solidez del material por lo que al principio se habrán de aplicar pequeños esfuerzos. Los puntos 1 y 2 pueden ser dos de tales ensayos.

Si unimos mediante una recta o-a los puntos 1 y 2 con el origen podríamos equivocarnos muy fácilmente si intentamos calcular el módulo elástico a partir de la pendiente de dicha recta.

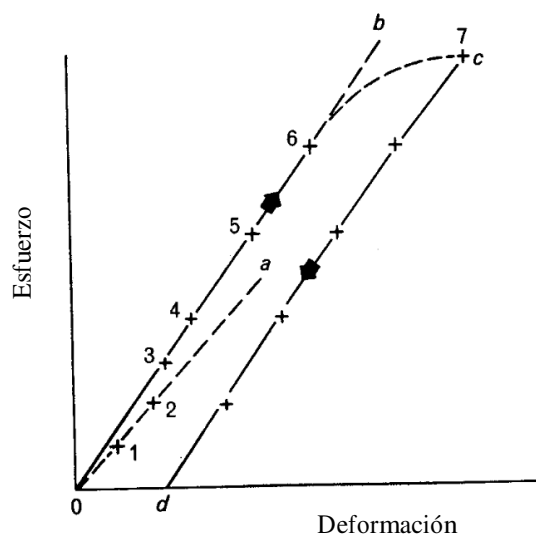


Figura 2.2: Determinación del módulo elástico.

Si el aparato utilizado no se ha devuelto a su posición de equilibrio o el material utilizado no se ha calentado, podemos aplicar más incrementos de esfuerzo unitario, puntos 3 y 4. Se establecerá una tendencia que permitirá al experimentador dudar de la validez del punto 2. Para verificar dicha tendencia se hacen los puntos 5 y 6. Un incremento final hasta el punto 7 deforma el material, que ya no está en la región elástica excepto durante la descarga. Se descarta este último punto y se traza la recta de mejor ajuste o-b. La pendiente de esta línea nos da el módulo elástico deseado. Como comprobación final, el experimentador experto ahora deberá reducir en incrementos el esfuerzo unitario aplicado obteniendo la línea c-d que deberá ser paralela a la o-b.

La descripción anterior es una simplificación de una prueba relativa a tensiones. Aún en la determinación de esta básica y elemental propiedad el experimentador puede encontrarse con algunos obstáculos e incluso puede ser aconsejable una secuencia de pruebas aleatorias como medio de promediar defectos del aparato, variaciones ambientales, diferentes sesiones de observaciones experimentales, etc. Las secuencias aleatorias se suelen aplicar a los fenómenos irreversibles, es decir, a aquellos procesos cuyo progreso futuro va a depender del estado actual y pasado. Existen muchos ejemplos de esto en las pruebas de materiales, siendo la más conocida la relativa a la fatiga del material. Durante la prueba de la fatiga el material se va dañando cada vez más hasta que finalmente se rompe; la cantidad de daño acumulado en el pasado merma la capacidad de soportar una cierta carga en el futuro y los daños sufridos no se pueden reparar.

### 2.4.2. Nivel de respuesta y espaciado de los puntos.

De las descripciones de la sección anterior es de destacar que tanto el nivel de respuesta como el espaciado de los puntos son importantes. Muchos de los fenómenos con los que nos enfrentamos son irreversibles, pero una vez obtenemos el nivel de la respuesta, el espaciado de los puntos experimentales se puede fijar fácilmente, procurando obtener la misma precisión en todo el intervalo de medida. El nivel de la respuesta se determinará, normalmente, realizando un número pequeño de pruebas que engloben la región de interés y establezcan la zona sobre la que concentrar el principal esfuerzo del experimento. Como ejemplo, consideremos la prueba de la fluencia de un material. Este fenómeno consiste en el que el material se alarga progresivamente con el tiempo, aún cuando se le aplique un peso constante, hasta que finalmente se rompe. El fenómeno de la fluencia adquiere una enorme importancia práctica en todos los equipos generadores de potencia donde se requiere que las distintas partes sustenten los máximos pesos

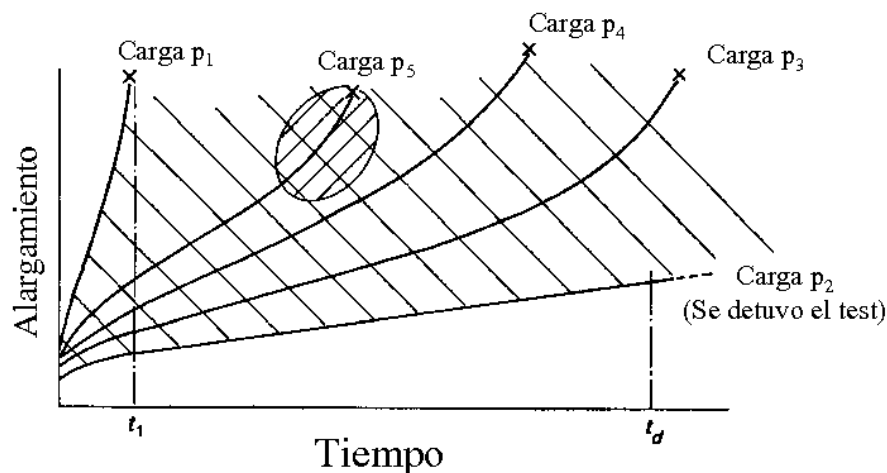


Figura 2.3: Resultados típicos de una prueba de cargas.

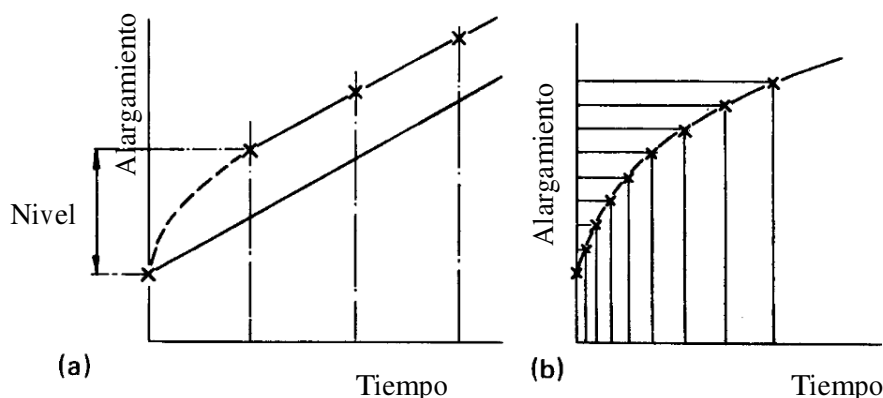


Figura 2.4: Espaciado de los puntos en una prueba de cargas.

posibles durante toda la vida de la instalación. No es posible de predecir teóricamente la fluencia de un material y el único camino para la obtención de datos es mediante pruebas de laboratorio. Cuando uno prueba un nuevo material no tiene idea de sus posibilidades excepto de la que tienen los materiales similares a él que previamente se hayan probado. Se sabe que la respuesta es altamente no lineal tanto en el alargamiento como en el tiempo en que falle, pero no se sabe mucho más. Se aplica un peso hasta que se establezca el nivel de respuesta de interés. Se planifican nuevas pruebas midiendo la respuesta frente a diferentes niveles de carga hasta obtener un espectro del fenómeno. La figura 2.3 ilustra uno de tales espectros.

Se aplicó primero el peso  $p_1$  dando origen a un fallo en el tiempo  $t_1$ , que se sabe es mucho menor que el tiempo requerido para la vida del diseño. Se hizo una segunda prueba con  $p_2$  y esta se cortó cuando se excedió el tiempo requerido para la vida del diseño  $t_d$  sin que se produjera fallo. Con esto sabemos que el nivel de los pesos de prueba está entre  $p_1$  y  $p_2$ , llevándose a cabo nuevas pruebas con los pesos  $p_3, p_4, p_5$ , etc. para obtener el espectro, área rayada.

Para determinar la forma de la curva elongación-tiempo, el espaciado de los puntos de prueba es de la máxima importancia. Debido a la elongación inicial no lineal de la fluencia del material, la medida de la elongación después de intervalos iguales de tiempo podría llevar a la omisión de la primera parte de la curva. En este caso es mejor tomar el tiempo requerido para la obtención

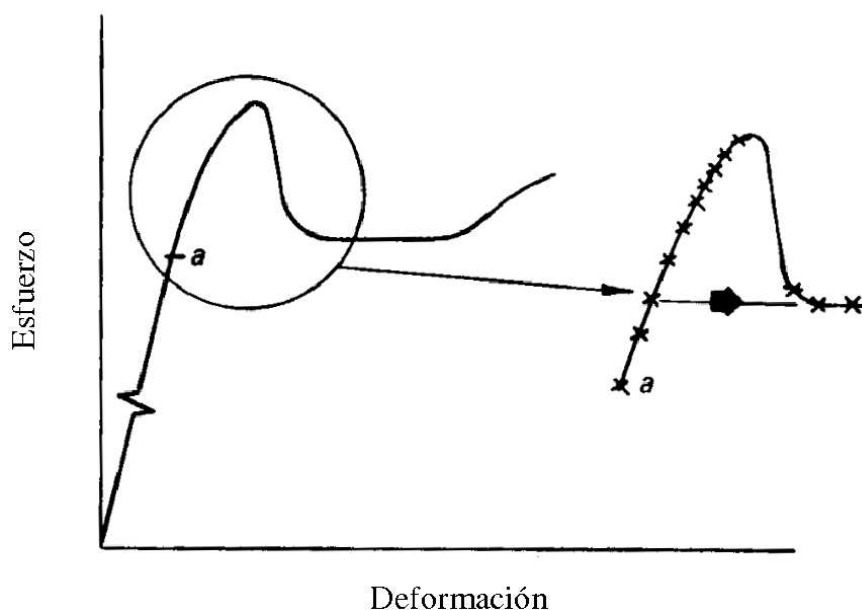


Figura 2.5: Detalle de una prueba de esfuerzos.

de incrementos iguales de elongación. Tal procedimiento está ligado con el nivel de respuesta ya que no sabemos cuando efectuar la primera medida de la elongación. Así pues, obtenidos los puntos de la figura 2.4(izquierda) a partir de los cuales se mide el primer nivel de respuesta, en la nueva experiencia se ha de ajustar dicho nivel para obtener datos correspondientes sin pérdida de información. Dicho espaciado se puede variar cuando se note que la velocidad de alargamiento aumenta cuando se aproxima el fallo del material (zona rayada del punto  $P_5$  en la figura 2.3).

### 2.4.3. Acciones a tener en cuenta durante el procedimiento.

#### Máximos, mínimos y otras situaciones simples.

Existen numerosos ejemplos en los que se requiere la determinación de máximos o mínimos u otros detalles de un fenómeno cuya respuesta se va a medir en el laboratorio. El detalle particular puede que no sea predecible; a primera vista puede ser una sutileza de la prueba. Cualquiera que sea la razón, una experimentación cuidadosa y la reducción de datos puede revelar algunos de estos puntos dependiendo de la paciencia, creatividad y experiencia de un buen observador. El ejemplo más simple en el que puede pensar uno es en la determinación del punto de máxima tensión que se puede observar en ciertos aceros. Aunque la determinación experimental de tal punto es complicada ya que depende mucho de la carga axial, control de temperatura y velocidad de carga, la enseñanza a aprender es muy típica. En cierto punto se detecta una desviación de la linealidad si se hace una observación cuidadosa y se va dibujando lo que se está obteniendo. Después de este punto se han de aplicar incrementos de esfuerzo mucho menores con la consecuente gran deformación en la respuesta según se aproxima al máximo.

Los detalles del area circundante se pueden trazar muy precisamente aunque el máximo absoluto puede que casi no se consiga durante la prueba. Si la prueba no se lleva a cabo con el suficiente cuidado y control no se obtendrán los detalles del máximo y puede ocurrir que la tendencia sea la señalada por la flecha de la figura 2.5.

Las curvas sobre las propiedades físicas son frecuentemente el resultado de dos o más efectos que interaccionan entre sí con lo que suele aparecer un cambio de pendiente cuando uno de



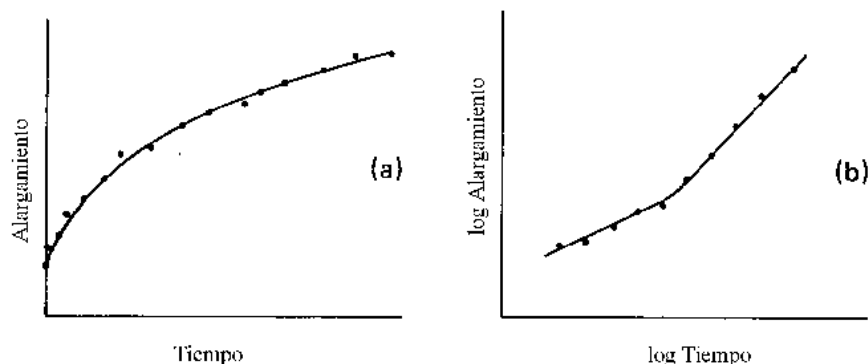


Figura 2.6: Ilustración del cambio de escala.

ellos predomina sobre el otro. A menudo, la región o punto donde ocurre suele ser de interés teórico. Un ejemplo ocurre con la prueba de la fluencia de un material descrita anteriormente. La figura 2.6 (izquierda) muestra los resultados de una tal prueba, en la que según el dibujo, no es evidente ninguna discontinuidad. Sin embargo, si los mismos datos se representan en una escala doblemente logarítmica (figura 2.6 derecha), entonces se ve claramente la zona de discontinuidad.

¿Cómo saber cuando usar una escala lineal, logarítmica u otra?

Para esto no hay una respuesta simple y la única recomendación es realizar diferentes combinaciones o experimentos con los datos obtenidos. Siempre se puede obtener alguna guía mediante consideraciones teóricas pero en algunos casos la experiencia del experimentador es lo más importante.

### Dispersión de las medidas.

El asunto de la dispersión de resultados ya se ha mencionado anteriormente. Si el experimentador no está atento puede no ver lo evidente o obscurecer alguna característica tan obvia como un mal funcionamiento del instrumento al eliminar puntos aislados. Debe tener siempre alerta los criterios para la eliminación. Los métodos estadísticos de reducción de datos, técnicas de representación cruzada, redibujado hasta linealizar la respuesta, son algunas de las técnicas que explicaremos con más detalle en otros capítulos. Al mismo tiempo el nivel y espaciado de los puntos es muy importante.

Un dibujo típico donde se describe la dispersión y el peligro potencial de eliminar detalles importantes de una prueba, se muestra en la figura 2.7 (izquierda) donde los puntos corresponden a varias pruebas realizadas repetidamente para la respuesta esfuerzo-deformación de un material. Para los no expertos, las diferencias en esta aparentemente simple prueba pueden ser exageradas. A pesar de que se haya utilizado el más sofisticado aparato para la prueba, que se hayan tomado las precauciones más elaboradas para la temperatura y la velocidad de carga, la característica de una muestra ligeramente curvada o alineada (a menudo del orden de unos milímetros) puede producir tales resultados.

Dibujados de nuevo, en la figura 2.7(derecha), en donde las pruebas se han distinguido unas de otras mediante símbolos diferentes, se puede ver que siguen una tendencia definida pero lo más importante de todo es la observación de que una de ellas es diferente de las demás. En este caso, los métodos estadísticos serán de poca ayuda ya que dicha prueba es la correcta.

### Consejos en el registro y comprobación de los datos.

A menudo se suele dar poca importancia al registro sistematizado de datos, y el experimentador debe aprender a dominar esta tarea. Tablas preparadas antes de las pruebas con columnas para ir rellenando con las medidas de esta o aquella magnitud pueden ahorrar mucho tiempo.

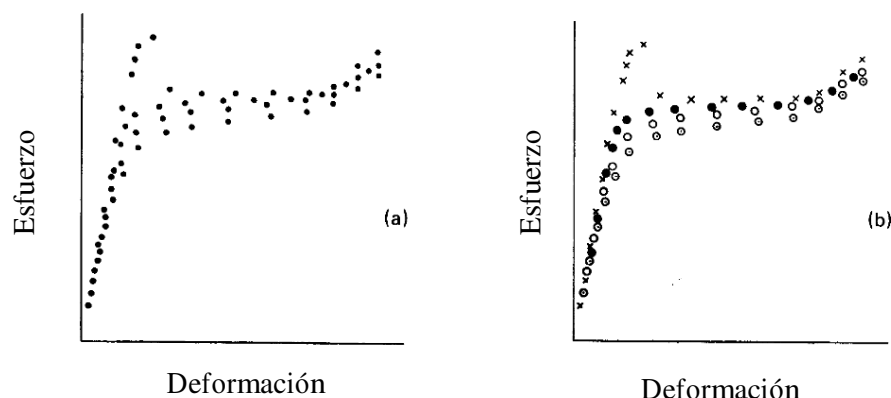


Figura 2.7: Dispersión de las medidas en pruebas de tensión.

Las tablas nunca se deben recoger en hojas sueltas necesitándose pues una **libreta de trabajo**. Suficiente espacio entre las tablas se puede utilizar para anotar las observaciones hechas en un instante particular. Deberá tenerse a mano durante el experimento papel para gráficas de diferentes tipos y tamaños. Las gráficas y cualquier otro registro se deben unir a la libreta de trabajo nombrándolos y fechándolos de una manera ordenada. Durante un experimento no se debe dejar de registrar ningún hecho. Cuando se hayan completado las pruebas y se deban comunicar mediante un informe los resultados y conclusiones, toda la información de la libreta de trabajo se debe separar y correlacionar cuidadosamente. Se puede ahorrar tiempo y momentos de frustración mediante la organización cuidadosa de la libreta de trabajo.

En cuanto a la comprobación de los datos, hemos mencionado ya algunos métodos. También se dispone de otros. Así, siempre que sea posible se debe llevar a cabo un simple chequeo de la conservación de la energía, masa, momento, corriente, balance de fuerzas, etc.

¿Es de esperar un máximo o un mínimo? ¿Cuál es el significado de una respuesta asintótica? ¿Qué se obtendría si fuera posible una extrapolación a cero o hacia grandes valores? ¿Es de esperar un estado estable?

Estas son algunas de las preguntas que el experimentador se ha de hacer y para obtener una respuesta es esencial el conocimiento de los fundamentos físicos del problema.

#### 2.4.4. Pruebas de naturaleza cualitativa.

Existen ocasiones en las que todo lo que se necesita de un experimento es una descripción cualitativa de un diseño o fenómeno. Aunque sigue siendo esencial una observación y medidas cuidadosas es posible la modelización de la situación real mediante una prueba significada. Un buen ejemplo de esta aproximación ocurre en las estructuras diseñadas para soportar cargas en compresión. Las características de carga-flexión de tales estructuras pueden ser de una de las formas mostradas en la figura 2.8.

Las estructuras peligrosas son las que siguen la tendencia  $Oa_1$  ya que pueden provocar un colapso violento al alcanzar el punto de bifurcación  $b$ . Las que siguen las tendencias  $Oa_2$  y  $Oa_3$  son fiables a pesar de que experimentan gran deformación después del punto de bifurcación. El tipo de comportamiento se calcula con facilidad y es una función de la geometría, material y tipo de estructura considerada. Bajo ciertas circunstancias se puede determinar el tipo mediante un modelo de prueba preliminar para obtener una descripción cualitativa de su posible comportamiento. Si se obtiene la tendencia  $Oa_1$  entonces se debe hacer un nuevo diseño de la estructura o al menos asignar un factor de seguridad a la carga de la bifurcación, que normalmente podrá ser calculada. Para las tendencias seguras se puede aplicar un menor factor de seguridad, incluso la unidad.

Otro artificio usado con frecuencia es el de llevar a cabo una prueba análoga. Muchos fenóme-

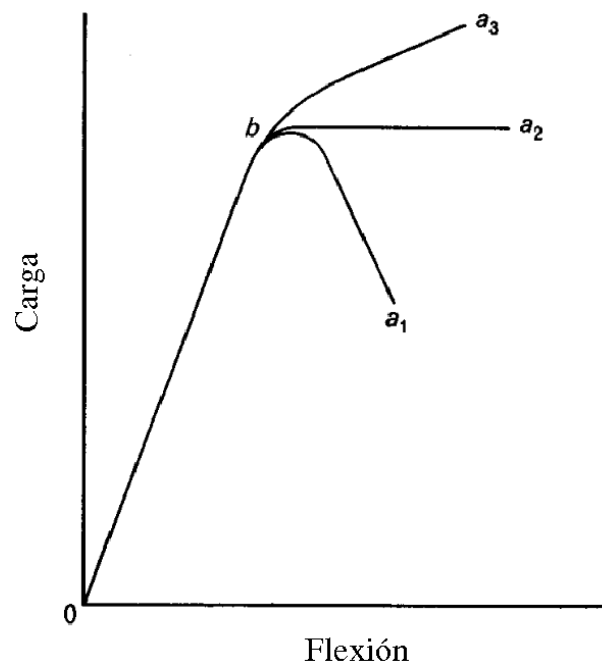


Figura 2.8: Características de deformación de una estructura con una carga en compresión.

nos físicos están gobernados por las mismas ecuaciones matemáticas. Por ejemplo, hay una gran analogía entre el comportamiento de las películas de agua jabonosa y la tensión de varillas. En este caso, el consejo a seguir es bien fácil, si es más sencillo hacer una prueba que otra y aún obtener datos significativos, hacer la más sencilla.



# Capítulo 3

## Errores Experimentales

---

<b>3.1. Introducción.</b>	<b>21</b>
<b>3.2. Concepto de Error. Tipos y/o fuentes de Error.</b>	<b>22</b>
3.2.1. Errores sistemáticos.	22
3.2.2. Errores aleatorios.	23
<b>3.3. Cuantificación del error.</b>	<b>24</b>
3.3.1. Error en una medida directa.	24
3.3.2. Error absoluto.	26
3.3.3. Error relativo.	26
3.3.4. Error por intervalo de confianza.	26
3.3.5. Error cuadrático medio. Desviación típica.	26
3.3.6. Errores en medidas indirectas.	27
<b>3.4. Reglas para discernir el tipo de error. Necesidad de la Estadística.</b>	<b>28</b>
<b>3.5. Problemas.</b>	<b>29</b>

---

En este capítulo se analiza el concepto de error como parte fundamental a la hora de interpretar los resultados experimentales. Además se justifica la necesidad de su tratamiento estadístico.

### 3.1. Introducción.

La Física es una ciencia experimental. Y como tal, la principal fuente de su conocimiento está en la observación y medida de las magnitudes que intervienen en los fenómenos objeto de su estudio. Siendo su objetivo fundamental el establecimiento de las Leyes Físicas que expresan la relación entre las magnitudes que intervienen y los valores de sus medidas.

Las medidas de las magnitudes que intervienen en un fenómeno físico se realizan siguiendo diferentes procedimientos de medición. Dos procedimientos para medir la misma magnitud se diferencian, en general, en las manipulaciones que se llevan a cabo sobre los sistemas, los instrumentos de medida utilizados y los cálculos realizados para la obtención final de la medida. En este sentido, los métodos de medida se dividen en directos, cuando la medida se obtiene directamente de la lectura del instrumento utilizado, e indirectos, si son necesarios cálculos adicionales para la determinación de la medida de la magnitud de interés.

A todos los procedimientos de medición se les exige que sean reproducibles, es decir, que si se repiten en las mismas condiciones, realizando las mismas manipulaciones sobre los sistemas e instrumentos de medida, los cálculos finales deben llevar al mismo valor para la medida obtenida.

Sin embargo, es habitual que mediante diferentes procedimientos de medida se obtengan diferentes valores para la cantidad de la magnitud en cuestión.

**Ejemplo:** *Determinación de la hora actual.*

Después de preguntar a algunos alumnos la hora que era en ese momento se obtuvieron los siguientes resultados: cinco y media, 17:32, 17:29, 17:28:45, etc.

Como se puede ver, cada uno dió un valor diferente para la hora. Además, el uso que cada uno hizo de su reloj fue diferente, pues todos ellos poseían segundero y muchos de ellos no hicieron uso de éste a la hora de indicar la hora.

Entonces ¿qué hora era?

## 3.2. Concepto de Error. Tipos y/o fuentes de Error.

El anterior ejemplo nos señala el hecho de que lo habitual es que el valor obtenido para la medida de una magnitud no coincida con el valor correcto o que realmente posee dicha medida. Cuando esto ocurre se dice que se está cometiendo un error en el procedimiento de medición y que la medida posee un error o que es errónea.

Así pues, *se llama error en una medida a la no coincidencia de su valor con el real de la misma*. Dicha diferencia de valores puede tener distintos orígenes o causas que aparecerán en cada una de las partes características de los procedimientos de medición: Operaciones o Manipulaciones, Cálculos e Instrumentos de Medida.

Dependiendo de la forma en que dichas fuentes de error afectan al valor medido se pueden clasificar en dos tipos: fuentes de error sistemáticas que producen errores sistemáticos y fuentes de errores aleatorias que generan errores aleatorios.

### 3.2.1. Errores sistemáticos.

Se denomina error sistemático a aquel que es contante a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afecta a todas las medidas de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Estos errores tienen un signo determinado, siendo siempre la medida mayor o menor que el valor real.

Los errores sistemáticos se pueden, normalmente, minimizar en cuánto sean detectables, predecibles o tenidos en cuenta. Antes de planificar un experimento uno debe considerar todas las fuentes posibles de errores sistemáticos y darse cuenta de su inherente naturaleza acumulativa.

A continuación se analizan los tipos más frecuentes de errores sistemáticos.

#### Errores de método.

Estos errores aparecen cuando se elige un método experimental equivocado o insuficiente. Puede ocurrir que se mida una magnitud en vez de otra o ciertos efectos desconocidos pueden influir en la medida de una magnitud de forma que el resultado sea erróneo. También conducen a errores de método una extrapolación injustificada de los datos experimentales.

#### Errores instrumentales.

Los errores de este tipo se originan por la utilización de un instrumento defectuoso, el mal uso de un instrumento o el uso de un instrumento en un medio ambiente para el que no ha sido diseñado. Los errores instrumentales están frecuentemente dirigidos en una dirección, aunque en algunas situaciones pueden ocurrir efectos de histéresis.

#### Errores de calibrado.

Muchos instrumentos no producen resultados correctos a menos que sean calibrados antes de su uso frente a una magnitud conocida. Esto puede llevar consigo la determinación de un sencillo punto de cero o la determinación de toda una curva de calibración (o escala). En cada caso los errores pueden deslizarse dentro del procedimiento de calibración.

**Errores humanos.**

Los errores humanos dependen de las características personales del observador. Un observador puede responder a una señal demasiado deprisa o demasiado lento; en cada caso podrá sobreestimar o subestimar la lectura. Tales errores son normalmente bastante consistentes ya que se cometen continuamente por el mismo observador en una única sesión. Los errores ocasionales cometidos intermitentemente, debidos, por ejemplo, a una relajación de la vigilancia, no se han de incluir aquí sino que se deben clasificar como equivocaciones.

**Errores aritméticos.**

Los cálculos aritméticos incluidos en la experimentación se realizan cada vez más mediante dispositivos de cálculo tales como ordenadores, calculadoras, reglas de cálculo, etc. Aberraciones de tales dispositivos, no obstante infrecuentes, no se pueden desechar completamente. Adicionalmente puede haber fallos en los procedimientos de cálculo actual (programas). También contribuye a los errores aritméticos los redondeos incorrectos de los números que intervienen en el cálculo.

**Errores de respuesta dinámica.**

Quizás esté fuera de lugar dedicar una sección aparte a los errores de respuesta dinámica. No obstante su significativa participación en la experimentación moderna, especialmente en conexión con la medida de variables dependientes del tiempo, justifica su énfasis por separado. A diferencia de los errores de respuesta estática (tales como la histerésis), los errores de respuesta dinámica surgen cuando un instrumento que registra una señal que cambia rápidamente no consigue una respuesta lineal a la variación de la señal (por ejemplo, un tubo de Pitot estático en un fluido de flujo fluctuante, o instrumentos eléctricos aplicados a corrientes eléctricas no senoidales, etc.)

El investigador ha de procurar eliminar todas las fuentes de error sistemático en sus medidas corrigiendo incluso los valores de las mismas adecuadamente.

**3.2.2. Errores aleatorios.**

Los errores aleatorios, accidentales o erráticos, son debidos a causas tan complejas que no es posible conocer ni evaluar. Cuando el número de observaciones es muy grande tienden a compensarse, al promediar, verificándose estas condiciones:

1. Los errores son tanto más frecuentes cuanto más pequeños.
2. Su promedio tiende hacia cero al crecer el número de observaciones.
3. El número de errores superiores a cierto número es sensiblemente nulo.

Cuando el promedio de los errores tiende hacia un valor distinto de 0, es preciso buscar alguna causa de error sistemática; y si no tiende hacia ningún valor, se dice que el sistema no es normal.

Los errores aleatorios son los de más difícil justificación aunque su contribución al nivel total de error puede ser considerable y a menudo dominante.

Los tipos más corrientes son:

**Equivocación o errores de discernimiento.**

Si se muestra una presión atmosférica estable sobre un manómetro de mercurio estándar y la lectura la realizan diez observadores distintos, entonces aún después de eliminar todos los errores sistemáticos (o después de reducirlos a un mínimo) nos encontraremos que no todas las medidas coinciden. Es decir, la gente tiende a juzgar de forma diferente. Más aún la misma persona puede juzgar de forma diferente la misma lectura en dos ocasiones distintas. Además, existen equivocaciones verdaderas, aunque pueden ser esporádicas. Factores humanos incontrolables tales

como distracciones repentinas, cansancio, malinterpretaciones, etc., afectan la corrección de las lecturas y toma de registros. Los cálculos también están sujetos a equivocaciones.

#### **Cambio en las condiciones experimentales.**

Esta es la segunda causa de error accidental. Una súbita e inesperada perturbación del flujo puede alterar temporalmente la lectura de un termómetro en la conducción de la tubería. Si da la casualidad de que se toma una lectura en dicho instante particular los resultados estarán sujetos a un error accidental. De forma similar, un micrófono medidor de sonido puede súbita e inesperadamente registrar un sonido extra del paso de un avión. Generalmente tales fuentes de error son de duración limitada o son debidos a medios ambientes específicos.

#### **Errores de especificación.**

Se derivan de unas indicaciones no lo suficientemente estrictas a la hora de la realización de la medida. Así, por ejemplo, una inspección intermedia del cojinete liso principal de un cigüeñal en una planta de automóviles, fácilmente puede estar sujeta a error si las especificaciones para medir su diámetro no son lo suficientemente estrictas en la determinación de la medida a una posición dada. El cojinete, aún después de pulido, puede estar ligeramente cónico, ovalado, o contener planos, y aunque el sistema de medida sea correcto, los resultados podrían resultar dispersos. Desde el punto de vista de la producción, no obstante, esta dispersión podría ser aceptable mientras esté dentro de la tolerancia prescrita.

### **3.3. Cuantificación del error.**

Debido a que, en general, no se pueden evitar los errores, uno debe aprender a vivir con ellos. Se debe ser capaz de evaluar su magnitud y, más aún, aprender a controlarla de acuerdo con las necesidades.

Cada científico e ingeniero debe ser capaz de evaluar la importancia relativa de una medición, sea ésta directa o indirecta. Debe desarrollar una "conciencia de error", alerta en todo tiempo, aún cuando no esté en completa operación. Esto es tan importante en el manejo de magnitudes de baja precisión como en el de magnitudes muy exactas.

Así pues, es importante cuantificar el error de una medida a la hora de evaluar la bondad de la misma; es decir, es necesario saber que error posee o se le ha de asignar. Siendo ésto a veces tan importante como conocer el propio valor de la medida.

A la hora de la cuantificación del error de una medida se han de considerar distintos conceptos y el propio hecho de que la medida se haya obtenido de forma directa o indirecta.

#### **3.3.1. Error en una medida directa.**

Las medidas directas son las que se obtienen por la lectura del instrumento adecuado utilizado en el procedimiento de medición. Por ello, a la hora de evaluar su error es necesario considerar cuatro conceptos importantes que cualifican a los instrumentos de medida: exactitud, precisión, sensibilidad y error instrumental.

#### **Exactitud.**

La exactitud de un instrumento define el grado de concordancia entre el valor verdadero y el proporcionado por él. De modo que un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor "verdadero" de la magnitud medida.



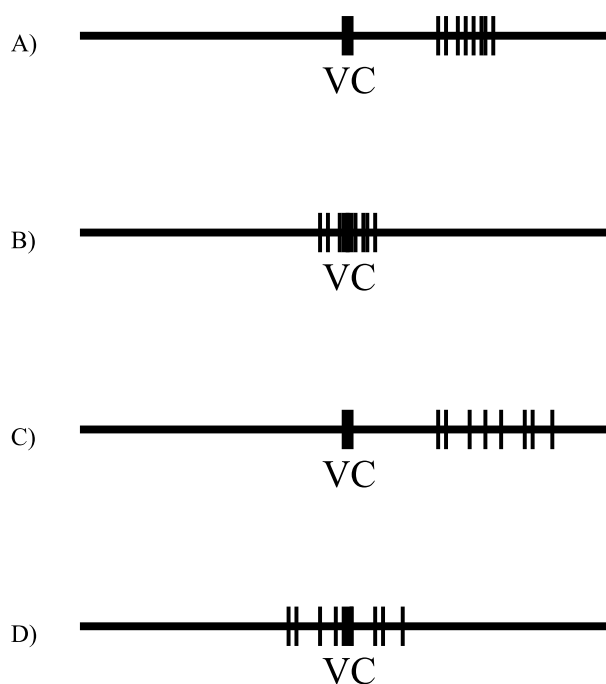


Figura 3.1: Medidas de: A) alta precisión y poca exactitud, B) alta precisión y gran exactitud, C) baja precisión y poca exactitud, y D) baja precisión y alguna exactitud. VC indica el valor correcto.

### Precisión.

La precisión de un instrumento de medida hace referencia a la concordancia entre una medida y otras de la misma cantidad de la magnitud, realizadas en condiciones sensiblemente iguales. De modo que un aparato será preciso cuando las diferencias entre las distintas medidas realizadas para la misma cantidad de la magnitud sean pequeñas.

La exactitud implica normalmente precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que poseen poca exactitud debido a errores sistemáticos, tales como el error de cero. En general, se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un aparato que su exactitud, ya que la exactitud involucra al valor "exacto" que es desconocido, mientras que el concepto de precisión sólo está relacionado con las medidas realizadas.

### Sensibilidad

La sensibilidad de un instrumento de medida es el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Por ejemplo, decir que la sensibilidad de una balanza es de 5 mg significa que, para masas inferiores a la citada, la balanza no presenta ninguna desviación. La sensibilidad de un instrumento viene indicada por el valor de la división más pequeña en la escala mínima de medida.

### Error instrumental.

El error instrumental es la cantidad mínima de magnitud en que sería necesario incrementar la magnitud que está midiendo el aparato, para que el indicador de medida pase a la siguiente posición. Si se está midiendo en la escala mínima del aparato (la dedicada a las magnitudes físicas más pequeñas que se pueden medir con el mismo) y la escala es homogénea, el error instrumental en esta escala coincide con la sensibilidad del aparato.

Normalmente, se considera que cada medida obtenida con un instrumento lleva asociado un error máximo igual al error instrumental, de modo la diferencia entre la medida y su valor correcto es menor que dicho error instrumental.

#### 3.3.2. Error absoluto.

Se llama error absoluto de una medida, o de un número aproximado, a la diferencia, con su signo, entre el valor medido o aproximado,  $x_m$ , y el valor exacto o verdadero  $x$

$$\Delta x = x_m - x$$

donde se supone o sería bueno que  $|\Delta x| \ll |x|$

#### 3.3.3. Error relativo.

El error absoluto no sirve para juzgar la calidad de una medida cuando se la pretende comparar con otra distinta. Por ejemplo, un error de 1 gramo cometido en la pesada de unos pocos gramos de un metal precioso es inadmisibles, mientras que el mismo error al pesar una tonelada carece de importancia. Por esto se recurre al error relativo, que se define como el cociente de dividir el error absoluto  $\Delta x$  por el valor medido o aproximado  $x_m$

$$e = \frac{\Delta x}{x_m}.$$

El error relativo es una cantidad adimensional y con frecuencia se multiplica por 100 para expresarla en tanto por ciento.

#### 3.3.4. Error por intervalo de confianza.

Es la región dentro de la cual se puede encontrar el valor verdadero,  $x$ . Si  $\delta_{\text{máx}}$  y  $\delta_{\text{mín}}$  denotan los límites de error máximo y mínimo, respectivamente, entonces

$$x = x_m \left. \begin{array}{l} +\delta_{\text{máx}} \\ -\delta_{\text{mín}} \end{array} \right] \Rightarrow x_m - \delta_{\text{mín}} \leq x \leq x_m + \delta_{\text{máx}}.$$

En el caso de que  $\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{mín}} = \delta \equiv \Delta x$ , escribiremos

$$x = x_m \pm \Delta x.$$

Por ejemplo,  $51,3 \pm 0,4$  significa que el valor verdadero se encuentra entre 50,9 y 51,5. Un valor experimental medido con una precisión del 5% se podrá escribir como

$$x = x_m(1,00 \pm 0,05).$$

#### 3.3.5. Error cuadrático medio. Desviación típica.

El error cuadrático medio de un conjunto de medidas  $x_1, \dots, x_N$  se define como

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

siendo  $\bar{x}$  el valor medio definido como  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i$  y  $N$  el número de datos.

La desviación típica  $s_x$  de una muestra se determina de forma parecida como

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Donde debe observarse que se divide por  $N - 1$  en lugar de por  $N$ .

### 3.3.6. Errores en medidas indirectas.

Cuando la medida de la magnitud  $y$  se realiza indirectamente, su valor se determina a partir de una forma funcional  $y = f(x_i, a_j)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$ ), en donde aparece el valor de ciertas magnitudes  $x_i$  y constantes  $a_j$ .

A partir de aquí, diferenciando se obtiene

$$dy = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i + \sum_j \frac{\partial y}{\partial a_j} da_j.$$

Dado que, como se verá, la desviación típica de una serie de medidas se asocia normalmente con el error de la misma, y que la variancia (cuadrado de la desviación típica)  $\sigma_y^2$  de una variable  $y$  derivada de otras  $x_i$  viene dada en función de las variancias de las variables de que depende mediante

$$\sigma_y^2 = \sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

identificando los errores  $\Delta y$ ,  $\Delta x_i$  con las raíces de las variancias y considerando la posibilidad de error en las constantes  $\Delta a_j$  se tendrá

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2 + \sum_j \left( \frac{\partial y}{\partial a_j} \right)^2 (\Delta a_j)^2}$$

La parte de error debido a las constantes se trata de diferente forma dependiendo de su tipo. Si dichas constantes son fenomenológicas, como pueden ser constantes elásticas de muelles, la constante de aceleración de la gravedad, etc., se tratan igual que las demás variables  $x_i$ . Sin embargo, si las constantes son de tipo irracional, siendo por tanto posible conocerlas con toda la precisión que se desee, deben tomarse con las suficientes cifras decimales como para que no afecten al valor y al error de la magnitud derivada.

Para que el error en las constantes irracionales  $a_j$  no influya en el resultado de  $\Delta y$  se suele requerir que

$$mT_j \leq 0,1A$$

siendo

$$A = \sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2$$

y

$$T_j = \left( \frac{\partial y}{\partial a_j} \right)^2 (\Delta a_j)^2$$

y  $m$  el número de constantes irracionales.

Con lo que

$$\Delta y \approx \sqrt{A + 0,1A} = \sqrt{1,1A} \approx \sqrt{A}.$$

Y el número de cifras con las que se debe expresar la constante irracional  $a_j$  para que su contribución al error de  $y$  sea despreciable se obtendrá a partir de la relación

$$T_j = \frac{0,1A}{m} = \left( \frac{\partial y}{\partial a_j} \right)^2 (\Delta a_j)^2.$$

	$T < 2\%$	$2\% < T < 8\%$	$8\% < T < 15\%$	$T > 15\%$
Nº medidas	3	6	15	50
Error	$e_I$	$\alpha = \text{máx}\{D/4, e_I\}$	$\alpha = \text{máx}\{\sigma_x, e_I\}$	$\alpha = \text{máx}\{\frac{\sigma_x}{\sqrt{N-1}}, e_I\}$
Expresión	$\bar{x} \pm e_I$	$\bar{x} \pm \alpha$	$\bar{x} \pm \alpha$	$\bar{x} \pm \alpha$

Tabla 3.1: Número de medidas a realizar según el tanto por ciento de dispersión de las medidas.

De donde

$$\Delta a_j = \sqrt{\frac{0,1A/m}{\left(\frac{\partial y}{\partial a_j}\right)^2}}$$

### 3.4. Reglas para discernir el tipo de error. Necesidad de la Estadística.

A pesar del esfuerzo que el investigador debe de realizar para eliminar las fuentes de error sistemático puede darse el caso de que no se haya logrado su objetivo plenamente. Siendo, por lo tanto, importante en el tratamiento de los datos experimentales discernir la causa de error, fundamentalmente si es de tipo aleatorio o sistemático ya que la expresión de los resultados depende del tipo de causa de incertidumbre.

Dada la imposibilidad de que a partir de una única medida se sepa si su valor es adecuado, y para analizar el tipo de error por el que se ven afectadas las medidas realizadas mediante un determinado procedimiento de medición; se hace necesario realizar más de una medida. En nuestras experiencias de laboratorio, se hacen tres medidas de la magnitud y se halla la dispersión entre ellas,  $D$ ,

$D$  = diferencia entre los valores extremos (Máximo-Mínimo).

Se pueden entonces dar varios casos:

- a) Si  $D$  es menor o igual que el error instrumental entonces la causa de error es debida a errores sistemáticos y se toma como el valor de la medida

la media ( $\bar{x}$ )  $\pm$  el error instrumental.

- b) Si  $D$  es mayor que el error instrumental entonces la causa de error es debida además a errores accidentales o de tipo aleatorio y hay que hacer más medidas.

Para saber cuántas medidas son necesarias se calcula el tanto por ciento de dispersión

$$T = \frac{100D}{\bar{x}}$$

y de su valor se determina el número de medidas que hay que realizar siguiendo la tabla 3.1. En esta tabla también se indica el error final a considerar y cual es la expresión final de la medida.

Las expresiones anteriores para el número de medidas y los errores se han obtenido considerando que sólo los errores de tipo aleatorio afectan a las medidas y que por tanto en promedio se compensarán. Para su correcta comprensión se hace necesario el estudio de la estadística.

### 3.5. Problemas.

1. Discuta los diferentes errores y sus tipos que se pueden cometer con los siguientes instrumentos: cronómetro, regla, polímetro y catetómetro.
2. Explique que haría para determinar el espesor de una lámina delgada uniforme si posee un calibre con una escala principal graduada en milímetros y un nonius de 10 divisiones, si sabe que el error instrumental de dicho calibre es mayor que el espesor de la lámina.
3. ¿Cuál puede ser el tipo de error más importante cuando se determinan medidas de magnitudes que cambian con el tiempo?
4. Sabiendo que el valor correcto de una cantidad de una magnitud es de 10.0 ¿qué opina de esta serie de medidas de dicha cantidad: 10.24, 10.30, 10.28, 10.26, 10.22?
5. Para el problema anterior determine el error absoluto y el relativo de cada uno de los valores de la serie. Además, calcule el valor medio de la serie de datos y el error absoluto de dicha media.
6. Calcule el valor del error cuadrático medio y la desviación típica de los siguientes valores: 10.4, 10.3, 10.8, 10.6 y 10.2.
7. Sabiendo que un folio A4 tiene de dimensiones 210 mm  $\times$  297 mm ¿Cuál es su área?
8. El material que constituye una esfera maciza tiene densidad  $\rho = 2,45 \text{ g/cm}^3$ . Sabiendo que su radio es 2.25 mm, determine su masa.
9. Si la esfera del problema anterior fuese de radio 3.0 mm ¿Cuál sería su peso?
10. ¿Qué precisión tienen que tener las medidas del radio de un círculo si se quiere que dicho valor no tenga influencia en el error de la determinación de su densidad?
11. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de radios 1.00 mm y 2.00 mm y altura 1.50 mm?
12. Determine la expresión para el error relativo que se comete en el cálculo del momento de inercia de un cilindro macizo. (Nota se suponen conocidas las magnitudes de interés con sus errores.)
13. En la determinación de la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo simple, discuta que error es el máximo admitido para el tiempo de modo que éste no afecte al error del valor de la gravedad.
14. Tras realizar una serie de medidas directas de una magnitud y los promedios adecuados para determinar un mejor valor de dicha cantidad ¿qué error es el mínimo que se le debe asignar al citado valor medio?
15. Usted está intentando medir la intensidad de corriente con un polímetro y observa que los valores indicados por éste fluctúan enormemente. Discuta qué está pasando y analice las diferentes fuentes de error que puedan existir.
16. Determine el radio de un cristal esférico sabiendo que con un esferómetro de patas separadas 3.00 cm se ha determinado una altura de 22.01 mm.
17. La pantalla de un osciloscopio está dividida en 10 divisiones horizontales y 10 verticales. Sabiendo que la base de tiempos está indicando 0.1  $\mu\text{s}$  ¿Cuál es el error mínimo que se podría cometer en la determinación del período de una señal medida con éste instrumento en dichas condiciones?
18. Sabiendo que el valor correcto de una cantidad de una magnitud es de 10.0, ¿qué opina de esta serie de medidas de dicha cantidad: 10.2, 9.3, 9.1, 11.2, 10.5?

19. Para el problema anterior determine el error absoluto y el relativo de cada uno de los valores de la serie. Además calcule el valor medio de la serie de datos y el error absoluto de dicha media?
20. Calcule el valor del error cuadrático medio y la desviación típica de los siguientes valores: 1.4, 1.3, 1.8, 1.6, 1.2
21. Sabiendo que un paralelepípedo tiene de dimensiones 150 mm  $\times$  200 mm  $\times$  320 mm ¿Cuál es su volumen?
22. El material que constituye un cono tiene densidad  $\rho = 2,50g/cm^3$ . Sabiendo que su radio es de 2.10 mm y su altura 3.25 mm. Determine su masa.
23. Si dicho cono tuviese un radio de 3.00 mm ¿Cuál sería su peso?
24. ¿Qué precisión tienen que tener las medidas del radio de un esfera si se quiere que dicho valor no tenga influencia en el error de la determinación de su densidad?
25. ¿Cuál es el volumen de un elipsoide de semiejes 1.00 mm, 2.00 mm y 1.50 mm?
26. Determine la expresión para el error relativo que se comete en el cálculo del momento de inercia de una esfera maciza. (Nota se suponen conocidas las magnitudes de interés con sus errores.)
27. En la determinación de la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo de kater, discuta que error es el máximo admitido para el tiempo de modo que éste no afecte al error del valor de la gravedad.

# Capítulo 4

## Instrumentación

---

<b>4.1. Actitudes hacia la instrumentación . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>4.2. Selección del equipo . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.3. Calibración . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>4.4. Resumen del equipo de un laboratorio tipo . . . . .</b>	<b>35</b>
4.4.1. Medidas de longitud . . . . .	35
4.4.2. Medidas de tiempo y velocidad . . . . .	38
4.4.3. Medidas de desplazamiento . . . . .	39
4.4.4. Medida de masas, fuerza y momento . . . . .	44
4.4.5. Medida de Presión . . . . .	46
4.4.6. Medidas en flujo de fluidos . . . . .	51
4.4.7. Medida de la temperatura . . . . .	57
4.4.8. Medidas eléctricas . . . . .	62

---

En este capítulo se estudia la instrumentación básica que un laboratorio suele tener. Se introducen distintos conceptos a cerca de las propiedades deseadas de los instrumentos, y de acuerdo con dichos criterios se analizan los instrumentos de un laboratorio básico clasificándolos según la magnitud que se mide con ellos. Aunque no todos los instrumentos sean utilizados por los alumnos a lo largo de las prácticas que componen el curso, una visión global de los mismos debería ayudarles a aumentar su criterio a la hora de elegir los adecuados para sus objetivos, en una situación práctica real.

### 4.1. Actitudes hacia la instrumentación

Hay que hacer hincapié desde el principio sobre la importancia de desarrollar y adoptar la actitud correcta frente a la instrumentación. Para el científico, la instrumentación es un medio para conseguir su fin, por lo que uno no se debe dejar intimidar por la complejidad del equipo. A menudo ni es necesario ni ventajoso tener un conocimiento total de las cajas negras empleadas, aunque evidentemente es aconsejable un claro conocimiento de los principios básicos. El equipo se ha de tratar con respeto y se debe evitar el pulsar los distintos botones de forma indiscriminada. Normalmente, se dispone de manuales aún para los instrumentos más sencillos por lo que se han de consultar estos siempre que sea necesario.

Como regla general, inicialmente se debe desarrollar una actitud desconfiada hacia el equipo hasta que las pruebas de calibración y su uso nos hagan ver que esto era injustificado: la confianza hacia otros individuos se adquiere sólo con el tiempo y la experiencia previa y de igual modo se debe proceder con los instrumentos. A continuación, surge la necesidad de una estricta honestidad al realizar las observaciones instrumentales. Esto no debería decirse, pero existe una tendencia

natural a querer ignorar un equipo defectuoso o resultados aparentemente inconsistentes cuando no se dispone de mucho tiempo. Si se tiene la sospecha de que un instrumento funciona mal se debe arreglar o reemplazar y si esto no es posible, se ha de conocer el error probable que se va a cometer. El reconocimiento de las limitaciones da más crédito a los informes de los resultados experimentales.

## 4.2. Selección del equipo

La función básica de la instrumentación científica es la conversión de magnitudes físicas, que no se pueden medir directamente, en otras que se pueden medir. Invariablemente, la última magnitud, que es la que medimos realmente es un desplazamiento lineal o angular, por ejemplo:

- En un manómetro de tubo en U los cambios de presión se miden mediante cambios del nivel del fluido.
- En los termopares los cambios de temperatura producen cambios de f.e.m. que se miden mediante la rotación de una aguja en un voltímetro.
- En una balanza de muelle los cambios de fuerza se miden mediante la deflexión del muelle.
- En un transductor de presión los cambios de presión producen cambios de f.e.m. que se miden mediante cambios en la escala del equipo.

Existen muchos factores que pueden influir en la elección de un equipo, empezando por su precisión y el intervalo de operación. Claramente, los dos están relacionados en el sentido de que se puede aumentar la precisión si el intervalo de operación es pequeño. Normalmente se conoce, dentro de unos límites razonables, el intervalo a medir, lo que permitirá la elección del instrumento más adecuado. No se debe confundir la precisión de un instrumento con su exactitud: la exactitud está relacionada con el error absoluto de la medida mientras que la precisión de un instrumento supone consistencia, es decir, repetitividad y estabilidad con el tiempo.

Otros factores con los que nos encontramos en la elección del instrumental son:

- a) Sensibilidad: Definida por la razón entre el cambio del índice con el que se mide y la magnitud que se mide: movimiento del índice / cambio en la magnitud.
- b) Discriminación o resolución: Definida como el cambio más pequeño que se puede detectar en la magnitud a medir. Este factor adquiere su mayor importancia en los métodos de 'balance nulo', por ejemplo el puente de Wheatstone.
- c) Respuesta dinámica: Que está relacionada con la habilidad de un instrumento para responder de forma precisa a una entrada que cambia rápidamente. Sistemas en los que esto adquiere su máxima importancia son, por ejemplo, el manómetro de tubo en U, el galvanómetro de bobina móvil y otros instrumentos de registro más complejos. La respuesta de tales instrumentos se puede aproximar mediante el sistema oscilante de la figura 4.1, que se puede representar mediante la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_{\text{aplicada}}(t).$$

Donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador hidráulico y  $k$  es la constante elástica del muelle.

Se pueden hacer las siguiente analogías:

Inercia del instrumento	Fuerza de inercia	$m \frac{d^2x}{dt^2}$
Resistencia del instrumento	Fuerza de amortiguamiento	$c \frac{dx}{dt}$
Rigidez del instrumento	Fuerza del muelle	$kx$
Señal del instrumento	Fuerza excitadora	$F_{\text{aplicada}}(t)$
Flexión del instrumento	Desplazamiento	$x$



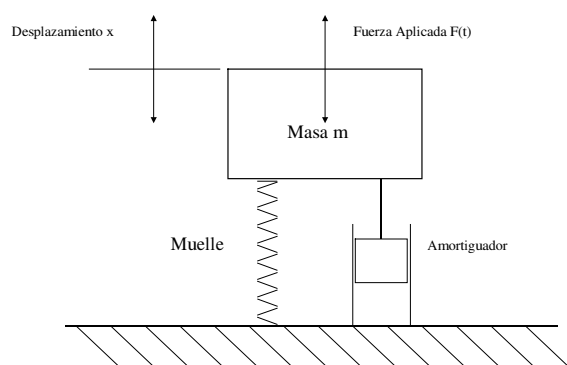


Figura 4.1: Oscilador amortiguado y forzado.

La figura 4.2 ilustra las categorías de las respuestas que se pueden obtener cuando se aplica una señal instantáneamente al instrumento y después se mantiene constante. Para aquellas situaciones en las que se puede controlar el amortiguamiento es normal tener un ligero subamortiguamiento que tiende a mejorar la precisión de las lecturas.

- d) Interferencias con la magnitud a medir. Ejemplos de esto podría ser el efecto de refuerzo sobre la medida de la deformación de una lámina delgada por la adición de una galga extensiométrica, el efecto del instrumento de medida de flujo introducido en el conducto, o el efecto de una resistencia de carga en los circuitos eléctricos.

Todos los factores citados se han de considerar en la selección de la correcta instrumentación para el trabajo a realizar. Naturalmente el alumno encontrará que ya se ha elegido el equipo para los trabajos de laboratorio, o que en el caso de un cierto equipamiento, no se dispone de la instrumentación adecuada. Esto es a menudo inevitable. La apreciación de los anteriores factores ayudará en la evaluación de los resultados y siempre es aceptable una crítica constructiva de la instrumentación en los informes de laboratorio. En cualquier caso, es beneficioso en las primeras etapas, aprender a improvisar cuando la calidad del equipo es limitada. Éste es, invariablemente, el caso cuando se abordan problemas reales con tiempo y financiación limitados.

### 4.3. Calibración

La calibración es la comparación entre un instrumento y otro que se sabe que es más exacto y preciso, bajo condiciones tan próximas como sea posible a las existentes en las pruebas de puesta a punto. Los estándares básicos corresponden a las siete magnitudes fundamentales:

- Longitud (metro)
- Masa (kilogramo)
- Tiempo (segundo)
- Corriente eléctrica (amperio)
- Cantidad de sustancia (mol)
- Temperatura termodinámica (grado kelvin)
- Intensidad lumínica (candela)

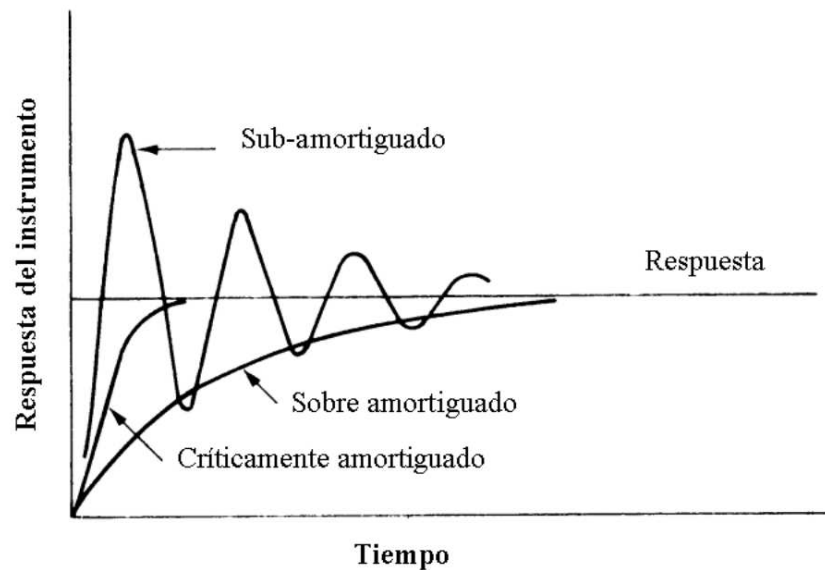


Figura 4.2: Características de amortiguamiento en la respuesta dinámica de un instrumento.

A partir de estos estándares básicos se obtienen los estándares locales cuya calibración se deberá haber llevado a cabo de la forma adecuada. Claramente, cuanto mayor sea el número de 'pasos' de calibración a partir de los estándares básicos, peor será la confianza en el instrumento en cuestión.

Hablando estrictamente, la verificación de las calibraciones se ha de realizar antes de cada serie de pruebas, pero donde esto no sea posible se deben llevar a cabo unos ensayos preliminares para cogerle el 'tacto' al equipo de trabajo. Permittedose la debida tolerancia para las posibles inexactitudes. Los registros de las calibraciones de los instrumentos son archivados a menudo de forma rutinaria y, como primer paso, estos deben ser verificados y usados si se han de poner al día.

Las fuentes de error en la experimentación se han tratado con más detalle en el capítulo anterior, y los errores de instrumentos específicos, que normalmente se puede uno encontrar, se incluirán posteriormente en el presente capítulo. No obstante, en general, a parte de las fuentes de error más obvias como la puesta incorrecta del cero, avería de los mecanismos indicadores, etc., existe un número de causas que contribuyen a las variaciones de los instrumentos de medida con el tiempo, entre las que están el envejecimiento de los muelles, el desgaste de las juntas y efectos de fricción.

Estos casos pueden darse en micrómetros, medidores de precisión y cronómetros. El resultado neto es a menudo, causar un efecto de histéresis en la salida del instrumento que resulta en lecturas diferentes dependiendo si el valor requerido se aproxima por arriba o por debajo.

Ya se ha mencionado la importancia de realizar la calibración en idénticas condiciones a las de operación. Un ejemplo que ilustra esta necesidad es el mal uso de escalas graduadas (reloj comparador o 'dial gauge'). Estos indicadores se calibran para las medidas del movimiento en la dirección axial y, evidentemente, si no está bien alineado con el eje se comete un error, el denominado 'error del coseno'. Por ejemplo, un desalineamiento de 10 grados da un error de 0.15 mm en la medida de un desplazamiento de 10 mm. ¿Será útil emplear un instrumento con precisión de 0.01 mm si no se mide con él en las condiciones adecuadas?

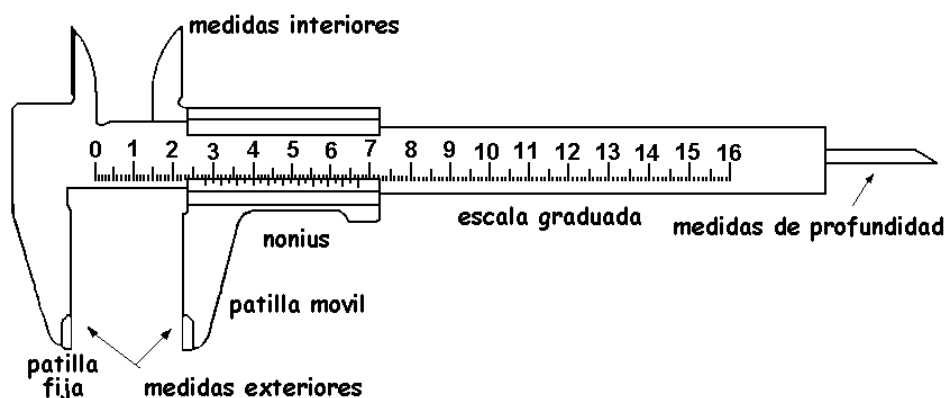


Figura 4.3: Pie de rey típico. Se indican los nombres de cada una de sus partes. Cuando se encuentra cerrado las caras para medida externa deben de coincidir.

Cuando se utilizan equipos electrónicos sofisticados se suelen introducir errores si no se cumple el período de calentamiento especificado en las instrucciones. En algunos casos este período de tiempo puede ser de 30 minutos con lo que si se hace la medida a lo largo de este período se obtendrán resultados muy dispares. Otra causa importante de error en los equipos electrónicos proviene de su interferencia con equipos vecinos. Esto último se suele evitar, normalmente, mediante una buena conexión a tierra y el uso de apantallamientos.

## 4.4. Resumen del equipo de un laboratorio tipo

En este apartado se intenta describir las distintas categorías de instrumentos que se pueden encontrar en el laboratorio. Veremos el principio de funcionamiento, discutiremos su precisión y el intervalo de operación.

### 4.4.1. Medidas de longitud

Estrictamente hablando, la medida de longitud es sólo un aspecto del campo general de la medición que incluye: medida de longitud, ángulo, área y volumen. Como los tres últimos se pueden obtener a partir de medidas de longitud, nos restringiremos aquí a las medidas de longitud.

Para la medida de las dimensiones de objetos (del tamaño del orden desde algunos centímetros hasta un metro) son satisfactorias en general las reglas de madera o acero. La madera tiene un coeficiente de dilatación térmica más pequeño que el acero, lo que puede ser una ventaja, pero las reglas de acero están mejor grabadas y no son tan susceptibles de fenecer con su uso. Con estas reglas se puede obtener una precisión del milímetro o del medio milímetro como mucho (en las buenas de metal). Pero en muchas ocasiones necesitamos que nuestra medida sea mucho más precisa y entonces recurrimos a instrumentos especiales, unas veces fundados en el nonius (como el calibrador, el catetómetro, ...), otras en el tornillo micrométrico (como el palmer, el esferómetro, ...). Y otros mucho más sofisticados y preciso, como métodos ópticos interferenciales.

El nonius es un instrumento formado por dos escalas, una fija y otra deslizable, llamadas regla y reglilla, respectivamente. Ambas están graduadas de modo que  $n$  divisiones de la reglilla corresponden con  $(n-1)$  divisiones de la regla. Si llamamos  $D$  y  $d$  al tamaño de las divisiones de la regla y de la reglilla tenemos:  $nd = (n-1)D$  de donde  $D-d = D/n$ , siendo las divisiones de la reglilla más cortas en  $D/n$  que las de la regla; de modo que el aparato nos permitirá apreciar  $n$ -ésimas de la unidad  $D$ . El cociente  $D/n$  define la precisión ( $p$ ) del instrumento. Así, si las

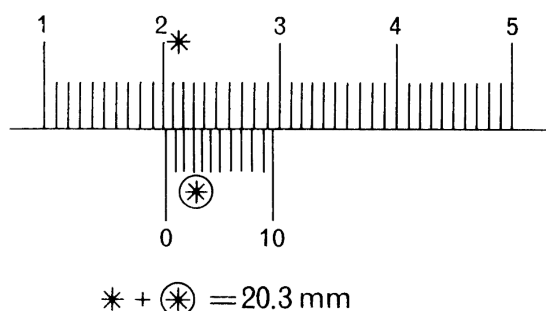


Figura 4.4: El fundamento de medida del calibre o pie de rey es el nonio. La escala auxiliar tiene unas divisiones más pequeñas que la principal.

divisiones de la regla son milímetros ( $D = 1 \text{ mm}$ ) y 10 divisiones de la reglilla abarcan 9 de divisiones de la regla, la precisión del instrumento es  $1/10 = 0,1 \text{ mm}$ .

Para medir una longitud, utilizando el nonio, se procede del modo siguiente: el cero de la regla se hace coincidir con un extremo de la longitud a determinar, y se desplaza la reglilla hasta que su cero coincida con el otro extremo. Se observa entonces la distancia  $R$  que queda antes del cero de la reglilla (20 mm en la figura 4.4) y se observa después que división  $K$  de la reglilla coincide con una división de la regla ( $K = 3$ ), la medida será  $R + Kp$ , donde  $p$  es la precisión del nonio (0,1 mm en la figura). En el ejemplo propuesto es  $20 \text{ mm} + 3 * 0,1 \text{ mm} = 20,3 \text{ mm}$ .

Las dimensiones nominales, por ejemplo, diámetros de tubos y ejes, se miden normalmente con los calibres mecánicos junto con las reglas de acero. El intervalo típico de aplicación de los calibres de nonio va desde 0 a 0,1 hasta 0 a 0,5 m y se pueden conseguir precisiones de hasta 0,02 mm.

Para obtener mayores precisiones hay que recurrir a los instrumentos con tornillo micrométrico incorporado. El tornillo micrométrico es en esencia un tornillo de paso de rosca rigurosamente constante que avanza en una tuerca apropiada. Si se le da una vuelta completa al tornillo, éste avanza con respecto a la tuerca, una distancia  $h$  igual a su paso de rosca. Una escala solidaria a la tuerca permite apreciar el número de vueltas completas que experimenta el tornillo, en tanto que las fracciones de vuelta se pueden apreciar en un tambor circular o limbo graduado, fijo en la cabeza del tornillo (ver figura 4.5).

Si este se encuentra dividido en  $n$  partes iguales podremos apreciar  $n$ -ésimas partes de vuelta o, lo que es igual, del paso de rosca. La precisión del tornillo micrométrico será  $p = h/n$ . Un instrumento basado en el tornillo micrométrico es el palmer (ver figura 4.6) cuyo intervalo típico de aplicación va desde 0 a 25 mm ó 25 a 50 mm, etc., con el cual se pueden obtener precisiones de 0,005 mm. Los errores típicos a tener en cuenta con estos instrumentos se refieren al error de cero, mal uso, partículas de polvo entre las caras, efectos diferenciales de temperatura y errores de lectura.

Otro dispositivo basado en el tornillo micrométrico es el esferómetro (ver figura 4.7) que se utiliza para medir espesores pequeños y radios de esferas. Consta de un trípode en cuyo centro está la tuerca en la que se rosca el tornillo micrométrico. Mediante una escala adosada al trípode y una corona adosada al tornillo y dividida en 100, 200 ó 500 divisiones, se mide la distancia existente entre el plano definido por el trípode y la punta del tornillo micrométrico.

Para la calibración de estos instrumentos se suelen usar pequeños bloques de acero con dos superficies perfectamente pulidas y paralelas de modo que cuando se ponen en contacto permanecen unidas mediante atracción molecular. Estos bloques son de diferentes espesores de forma que, por ejemplo, con un conjunto de 87 bloques se puede obtener cualquier dimensión en

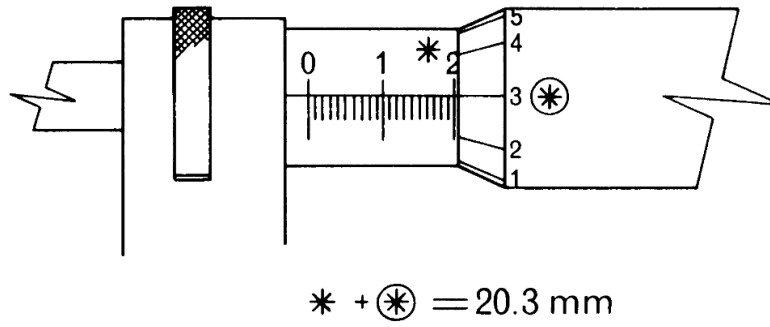


Figura 4.5: Tornillo micrométrico.

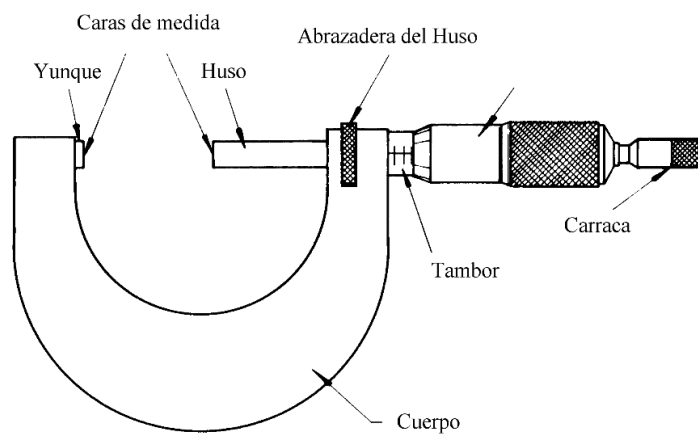


Figura 4.6: Palmer.

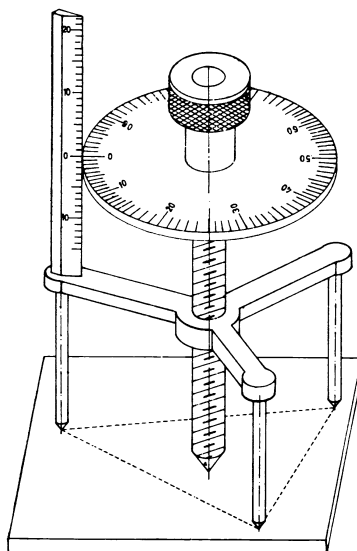


Figura 4.7: Esferómetro.

el intervalo de 0,500 mm a 100,000 mm con una precisión de 0,001 mm.

#### 4.4.2. Medidas de tiempo y velocidad

Las medidas de tiempos son necesarias cuando se requiere conocer la frecuencia o la velocidad (lineal o angular). La elección del equipo dependerá del experimento a realizar y de la precisión deseada.

##### Cronómetro

Para la mayoría de los experimentos de laboratorio de aprendizaje, la utilización de cronómetros manuales (intervalo típico: 0–60 min) proporciona suficiente precisión (0,2 s) aunque, debido al mecanismo de cremallera que conlleva pasos discretos de 1/5 s, se han de usar con cuidado para períodos cortos de tiempo (menos de 10 s). Debido al tratamiento brusco al que se ven sometidos es necesario verificarlos a menudo. Hoy en día existen relojes de pulsera con mayor precisión (0.01 s).

##### Osciloscopio

A menudo la variable de interés se controla por medio de alguna forma de transductor. Por ejemplo, un dispositivo mediante el cual se convierten en señales eléctricas parámetros tales como presión, desplazamiento, momento de una fuerza, temperatura, en cuyo caso, los tiempos incluidos en cualquier trayectoria particular pueden ser medidos de diferentes formas. El osciloscopio de rayos catódicos es uno de los instrumentos de uso general para la visualización de una variable. La pantalla suele ser de 10x8 cm<sup>2</sup> y la base de tiempos está normalmente entre 1 s/cm y 0,5  $\mu$ s/cm. El intervalo de frecuencias suele ir desde el continuo a 3 Mhz y su precisión es del orden del 5%.

##### Registrador gráfico

Para el registro permanente de la señal se puede usar un registrador gráfico. Para frecuencias inferiores a 100 Hz se pueden utilizar los registradores galvanométricos o de plumilla. Para

frecuencias superiores hay que utilizar los registradores 'ultravioleta'. Estos son, normalmente, instrumentos multicanales cuya salida se imprime en papel fotosensible de 15 a 30 cm de ancho. Las velocidades del papel varían típicamente entre 1 mm/s y 2 m/s. Mediante una adecuada elección del elemento galvanométrico se pueden registrar frecuencias hasta de 5 kHz con una precisión del 1 %.

La señal se puede registrar también mediante cámaras de trazas acopladas a las pantallas de los osciloscopios de rayos catódicos. La ventaja potencial de este sistema sobre los registradores gráficos es el mayor intervalo de frecuencias que se pueden registrar, y el hecho de que se puede examinar la señal antes de su registro. Los osciloscopios de almacenamiento tienen la facultad de retención semipermanente o permanente de la pantalla y en algunos casos tienen la posibilidad de partir la pantalla con lo que es posible comparar la señal con otra estándar.

En el campo de las vibraciones se emplean a menudo los captadores de frecuencia que son capaces de medir intervalos de tiempo entre  $1 \mu\text{s}$  y  $10^4$  s. Estos cuentan para su precisión con el apoyo de un conjunto de frecuencias, normalmente en la forma de osciladores internos super estables, y con la ayuda de adecuados transductores, que les permiten calibrar directamente frecuencias en el intervalo 10 Hz a 1,2 MHz.

### Tacómetro

Para la medida de la velocidad de rotación, el método más sencillo es contar las revoluciones durante un período de tiempo determinado con un cronómetro junto con un contador de revoluciones conectado directamente al componente en rotación. De forma alternativa se puede usar un tacómetro mecánico graduado para leer directamente revoluciones por minuto. También se dispone de tacómetros eléctricos que generan voltajes de salida proporcionales a la velocidad y que, mediante una adecuada elección de escala, pueden proporcionar directamente la lectura de revoluciones por minuto. El intervalo típico puede estar entre 0 y 5000 rpm.

### Estroboscópio

Ahora bien, a menudo se requiere la medida de la velocidad de oscilación o rotación sin la interferencia que suponen los transductores mecánicos. La técnica que normalmente se utiliza entonces es el estroboscopio. Este consiste básicamente en una lámpara de descarga de un gas inerte que se puede hacer que se encienda intermitentemente con una frecuencia variable continua. Cuando la frecuencia de la iluminación coincide con la frecuencia del movimiento, la parte móvil se verá estacionaria. El intervalo típico de medida va entre 0-100 Hz y 0-300 Hz y es conveniente para la determinación de la frecuencia real, y no un múltiplo o submúltiplo, fijarse sobre una línea de referencia solidaria a la parte móvil.

## 4.4.3. Medidas de desplazamiento

### Métodos mecánicos

La mayor parte de lo dicho en el apartado de medidas de longitud es aplicable igualmente a la medida de desplazamiento. Por ejemplo, el aumento de longitud de un alambre sometido a una tensión se podría medir de forma satisfactoria por medio de escalas con nonius. Igual pasa para la medida de la distancia entre los niveles superior e inferior del fluido en un manómetro de tubo en U con un catetómetro. No obstante, normalmente se utilizan calibres de escala circular (relojes comparadores, ver figura 4.7) cuyo intervalo de operación, en este caso, es de 0 – 10 mm (normalmente 0 a 5 mm y 0 a 50 mm). La escala principal, de 50 mm de diámetro, está graduada en 100 divisiones de 0,01 mm y la escala pequeña en 10 divisiones de 1 mm, cada una de las cuales corresponde a una revolución completa de la escala principal. Es posible rotar manualmente esta escala para facilitar el ajuste del cero. La calibración se puede hacer mediante un montaje micrométrico o mediante los bloques de acero.

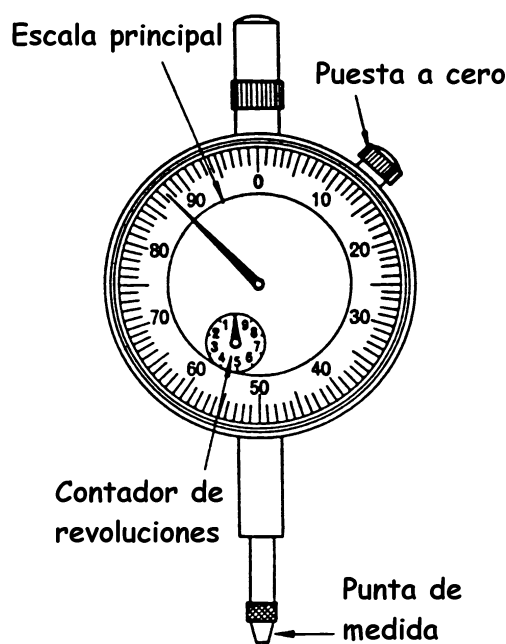


Figura 4.8: Reloj Comparador.

### Métodos ópticos

El desplazamiento rotacional se puede medir mediante los métodos ópticos. Las ventajas de usar la luz como medio de medida son:

- a) Se desplaza en línea recta y puede actuar como un gran brazo de palanca que nos amplificará la rotación.
- b) Se puede tomar como valor de la masa de la luz cero con lo que no existirá interferencia con la parte móvil.

En la figura 4.9 se muestra un montaje típico usando un teodolito (o telescopio equipado con un retículo), un pequeño espejo sobre la estructura y una escala graduada.

Se coloca el teodolito a una distancia  $l$  de la estructura y orientado hacia el espejo de forma que la escala quede dentro del campo de visión. Si la lectura sobre la retícula cambia  $\Delta s$ , entonces el ángulo de rotación de la estructura vendrá dado por  $\Delta s/2l$  (rad).

Este principio básico puede ser adaptado a una gran variedad de situaciones. Por ejemplo, con un poco de ingenio y un simple mecanismo, podemos convertir desplazamiento lineales en rotaciones, y usar este potente método óptico.

Para medidas más precisas se usa el principio del autocomilador que se muestra en la figura 4.10. Consistente en un microscopio micrométrico  $A$ , una cruz iluminada  $B$ , una lente colimadora  $C$  situada de forma tal que  $B$  se encuentre en su plano focal, y una superficie altamente reflectante. Como se muestra en la figura, un movimiento angular  $\theta$  de la superficie  $D$  resulta en un movimiento de la imagen en una distancia  $d$ , que se puede medir mediante el microscopio. La rotación viene dada por  $\theta = d/2f$ .





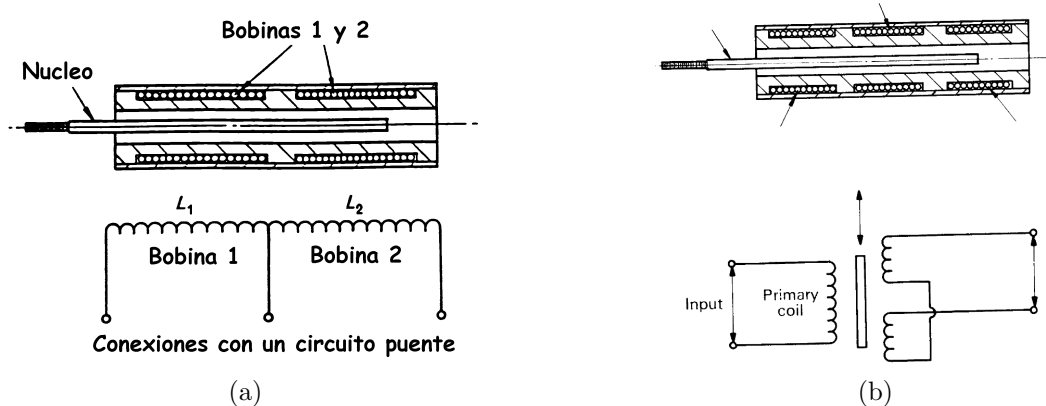


Figura 4.11: (a) Transductor de desplazamiento de inductancia variable. (b) Transductor de desplazamiento diferencial por cambio de capacidad.



Figura 4.12: Galga extensiométrica.

### Métodos eléctricos

Existen en la actualidad una gran cantidad de métodos eléctricos en los que se basan los transductores de desplazamiento. Estos tienen la ventaja sobre los métodos mecánicos de que se pueden utilizar para medidas dinámicas. Un tipo muy común emplea inductancias variables como señal de salida. Estas se producen mediante el movimiento de un núcleo permeable, con forma de cilindro de unos 3 mm de diámetro, a lo largo de un conjunto de doble bobina como el de la figura 4.11a, dispuesto de forma tal, que la relación impedancia-movimiento del núcleo sea lineal.

Otro tipo de transductores de desplazamiento es el basado en el cambio de capacidad (ver figura 4.11b), entre dos o más placas móviles, estos pueden llegar a ser extremadamente sensibles pero necesitan de una instrumentación adicional muy costosa.

Probablemente, el más común y ciertamente la herramienta mejor adaptable a la medida de pequeños desplazamientos es el medidor de resistencia eléctrica bajo deformación (galga extensiométrica). En principio, cuando un alambre de longitud  $l$  se somete a tensión,  $l$  aumenta y la sección transversal,  $A$ , disminuye, aumentando la resistencia del alambre, según la ecuación:  $\rho^{1/A}$  donde  $\rho$  es la resistividad.

Esencialmente consisten en un alambre formando una especie de rejilla y pegado sobre un sustrato muy delgado y no conductor. Cuando la galga se pega a la pieza de prueba, se somete a las mismas deformaciones que aquella, es decir, tracción o compresión.

Las dimensiones típicas de estos transductores son de unos 3 mm de ancho por 5 mm de largo. Tomando las precauciones necesarias en el pegado de la galga, se pueden obtener medidas

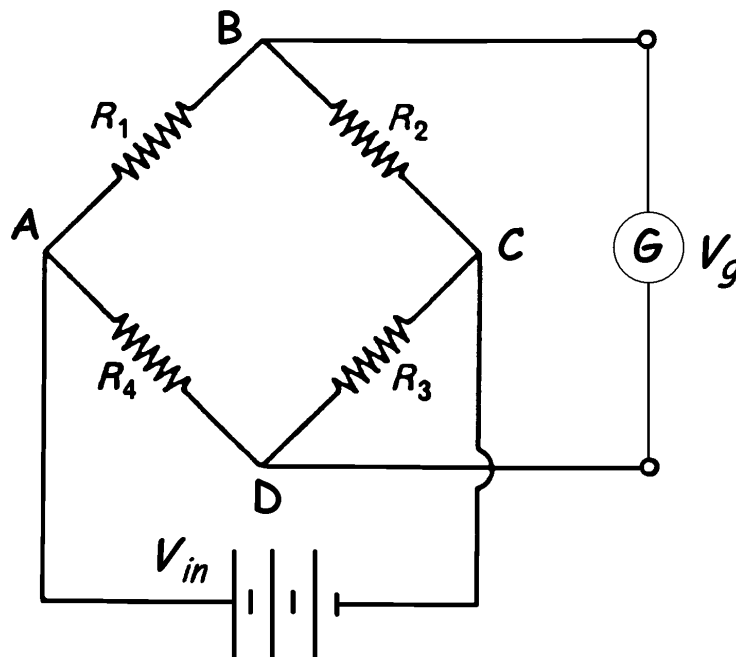


Figura 4.13: Puente de Wheatstone básico.

de deformaciones del orden de  $10^{-6}$  m.

Los cambios en la resistencias se determinan normalmente mediante el puente de Wheatstone (ver figura 4.13), en donde si las 4 resistencias son variables, tenemos que  $\Delta V = V/4[\Delta R_1/R_1 - \Delta R_2/R_2 + \Delta R_3/R_3 - \Delta R_4/R_4]$ .

Finalmente, el transductor más versátil es el acelerómetro; siendo el más común el piezoeléctrico por compresión. Este se basa en el principio de que cuando se comprime un retículo cristalino asimétrico, se produce una carga eléctrica proporcional a la fuerza aplicada. Los elementos piezoeléctricos están hechos normalmente de circonato de plomo.

La figura 4.14 muestra esquemáticamente el acelerómetro. Los elementos piezoeléctricos se encuentran comprimidos por una masa m, sujeta al otro lado por un muelle y todo el conjunto dentro de una caja metálica. Cuando el conjunto es sometido a vibración, el disco piezoeléctrico se ve sometido a una fuerza variable, proporcional a la aceleración de la masa m. Debido al efecto piezoeléctrico se desarrolla un potencial variable que será proporcional a la aceleración.

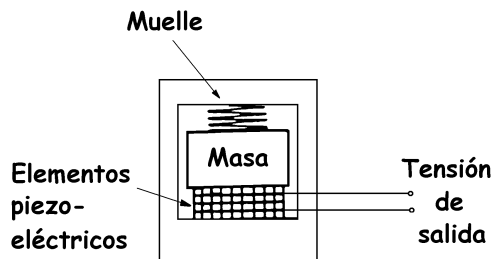


Figura 4.14: Acelerómetro piezométrico.

Dicho potencial variable se puede registrar sobre un osciloscopio o sobre uno de los registradores descrito en el apartado anterior. Este dispositivo junto con los circuitos eléctricos asociados se puede usar para la medida de velocidad y desplazamiento además de la determinación de formas de onda y frecuencia. Una de las ventajas principales de este tipo de transductor es que se puede hacer tan pequeño que su influencia sea despreciable sobre el dispositivo vibrador. El intervalo de frecuencia típica es de 2 Hz a 10 KHz.

#### 4.4.4. Medida de masas, fuerza y momento

##### Balanzas

La masa de un cuerpo dado es un invariante mientras que su peso depende del valor local de la aceleración de la gravedad. De aquí que la masa de un cuerpo se obtenga compensando su peso con el de otro cuerpo de masa conocida. Esto se consigue mediante el método de equilibrio. Claramente la precisión obtenida depende directamente del estado de la masas usada como estándar. Esta se debe chequear frecuentemente para determinar:

- a) Una excesiva corrosión atmosférica o de otro tipo.
- b) Desgaste excesivo debido al contacto con otros cuerpos.

La mayoría de las balanzas más precisas poseen las pesas de equilibrio encerradas permanentemente en una unidad sellada, para minimizar la corrosión, con controles exteriores para su uso.

Los intervalos de medida y la precisión de las mismas se resumen en la siguiente tabla:

Intervalo de valoración	Precisión
0 a 20 g	$\pm 0,001$ mg
0 a 200 g	$\pm 1$ mg
0 a 5 kg	$\pm 4$ mg

Para precisiones elevadas existen ultramicrobalanzas con precisión  $\pm 0,1 \mu\text{g}$ .

##### Dinamómetro

En la medida de fuerzas normalmente se utilizan materiales elásticos lineales en el instrumento de medida. La fuerza se determinada mediante la aplicación de un elemento elástico, previamente calibrado y midiendo el desplazamiento resultante. Probablemente el ejemplo por todos conocido es el del dinamómetro, consistente en un simple muelle elástico que se sujeta por uno de sus extremos mientras que se aplica una fuerza en el otro extremo. El alargamiento del muelle es, dentro de unos márgenes, proporcional a la fuerza aplicada. El muelle o dispositivo elástico puede tener forma de espiral, de arco circular o cualquier otra. La figura 4.15 muestra el esquema de una pareja de dinamómetros.

##### Anillo calibrador

El anillo calibrador es básicamente un anillo circular de acero de elevada constante elástica, al que se le colocan las cargas diametralmente dispuestas. Éste está diseñado de forma que se puedan aplicar cargas para tensarlo o comprimirlo. El cambio en el diámetro del anillo da un medida de la magnitud de la carga aplicada, pudiéndose medir mediante un calibre de escala circular, un tornillo micrométrico o alguna forma de transductor de desplazamiento.

El intervalo de aplicación va desde 0 a 0,2 kN hasta 0 a 70 kN con una precisión del 0,1 % dependiendo de la técnica utilizada para la medida de la flexión del aro.

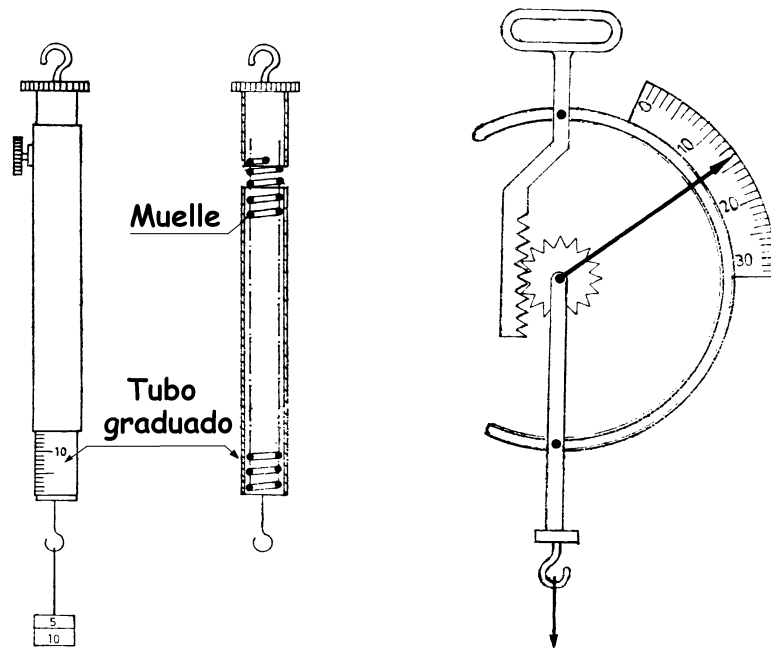


Figura 4.15: Dinamómetros.

### Prensa hidráulica

Un dispositivo conveniente para la aplicación y medida simultánea de carga es el pistón hidráulico (o neumático). En este caso, la carga aplicada viene dada por el producto de la presión del pistón y el área de la sección transversal efectiva. Las áreas de las secciones transversales de los pistones vienen indicadas por el fabricante, por lo que la precisión de la técnica de medida depende del método de medida de la presión.

El fundamento de la prensa hidráulica es el Principio de Pascal: "La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a cada punto del fluido y de las paredes del recipiente".

Un pistón de sección pequeña,  $a$ , se utiliza para ejercer directamente una pequeña fuerza  $f$  sobre un líquido, tal como aceite. La presión se transmite, a lo largo del tubo, a un cilindro mayor previsto de un pistón más ancho, de área  $A$  (ver figura 4.16). Puesto que, por el Principio de Pascal, la presión es la misma en ambos cilindros

$$p = \frac{f}{a} = \frac{F}{A} \rightarrow F = \frac{A}{a}f.$$

Se deduce de lo anterior que la prensa hidráulica es un dispositivo para multiplicar la fuerza por un factor igual a la razón de las áreas de los pistones. Los sillones de los barberos, los gatos hidráulicos para levantar coches y los frenos hidráulicos son dispositivos basados en el mismo principio de la prensa hidráulica.

### Dinamómetro piezoeléctrico

Ya se ha mencionado previamente el acelerómetro piezoeléctrico. El mismo principio está incluido en el transductor de fuerza piezoeléctrico, el potencial variable se origina en este caso por aplicación de la fuerza. El intervalo de aplicación va desde 0 a 8 kN hasta 0 a 5 MN con una precisión, en el primer caso de 20 mN.

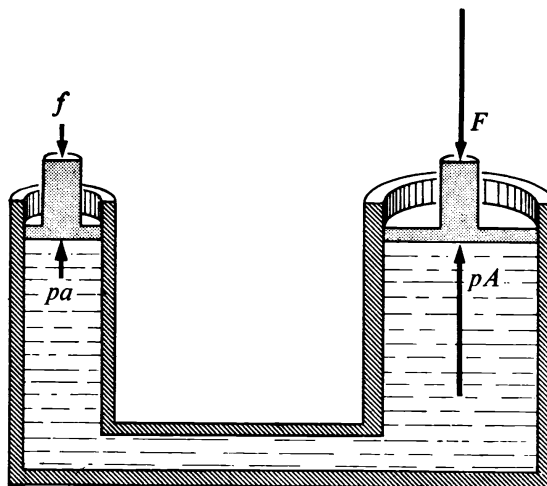


Figura 4.16: Prensa hidráulica.

El efecto piezoeléctrico fue descubierto por Pierre Curie en 1880. El fenómeno es reversible y la aplicación de una diferencia de potencial alterna hace que el cristal oscile. Hoy se emplean masivamente para obtener chispas en mecheros y en encendedores de gas.

#### Anillo de prony

Un dispositivo típico para la medida de la potencia transmitida por un eje en rotación es el llamado freno de prony (figura 4.17). La fuerza entre el bloque de madera y el eje se puede variar, midiendo la fuerza y el brazo de palanca podemos determinar el par y con este la potencia suministrada.

#### 4.4.5. Medida de Presión

La presión es la fuerza ejercida normalmente sobre la unidad de área del sistema. La presión absoluta se refiere a la fuerza absoluta que actúa según la normal sobre una parte del sistema fluido. Es interesante resaltar que mientras que la presión absoluta es siempre positiva para un gas, a veces encontramos presiones absolutas negativas para los líquidos. La presión medida representa la diferencia entre la presión absoluta y la barométrica local. Con frecuencia la lectura obtenida de los medidores de presión se refiere a la presión barométrica. Es importante comprender claramente la distinción entre ambas, dado que de no hacerlo así, se podrían cometer errores graves. 'Vacío' es la cantidad medida para la cual la presión barométrica excede a la absoluta, es decir, es pues una medida negativa de la presión.

#### Manómetro de tubo en U

A causa de su gran simplicidad y fiabilidad, el manómetro de líquido es un instrumento popular para medir la presión de fluidos en reposo. Existen muchas versiones, por lo que sólo veremos algunas.

El manómetro de tubo en U (ver figura 4.18), es la versión más sencilla, consiste en un tubo de cristal de diámetro constante y en forma de U, parcialmente lleno de líquido apropiado tal como agua, alcohol o mercurio. Para medir la presión de un fluido que es menos denso e inmisible con el fluido manométrico; se hace una conexión con una de las ramas del tubo en U, mientras a la otra se le aplica una presión de referencia. El desplazamiento vertical,  $z$ , del

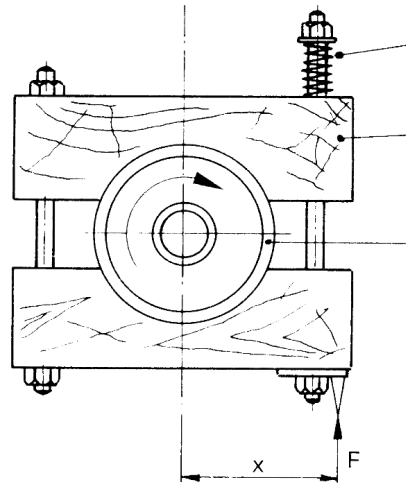


Figura 4.17: Freno de prony.

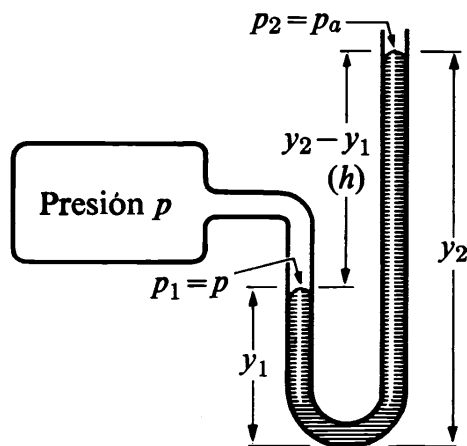


Figura 4.18: Manómetro de tubo en U.

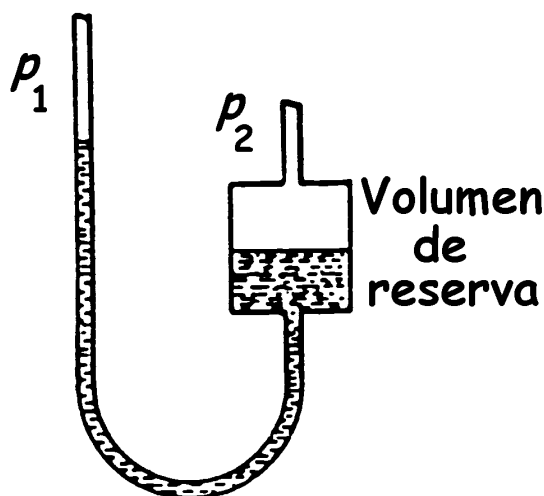


Figura 4.19: Adaptación del tubo en U con un depósito en una de sus ramas.

fluido manométrico nos da una indicación de la diferencia de presión aplicada  $\Delta p$ . Si  $\rho_m$  es la densidad del fluido manométrico,  $\rho_f$  la del fluido cuya presión se va a medir y  $g$  la aceleración de la gravedad entonces:

$$\Delta p = (\rho_m - \rho_f)gz.$$

Se pueden originar inexactitudes por los efectos de tensión superficial sobre el nivel del líquido. Se pueden incrementar los errores si está manchada la superficie interna del tubo o no es uniforme el diámetro de éste. Los efectos de la tensión superficial son mayores cuanto menor sea el diámetro del tubo, usándose normalmente alcohol, en vez de agua, como líquido manométrico para la medida de la presión de los gases, ya que la tensión superficial del alcohol es 1/3 de la del agua. Un importante inconveniente en la utilización de alcohol como líquido manométrico es su cambio de densidad específica (valor original de 0,79) debido a la absorción de agua. Por ello hay que verificar frecuentemente su valor. Por otra parte la tensión superficial del agua se puede reducir sin más que añadir pequeñas cantidades de agente tensioactivo.

Las presiones menores de, aproximadamente, 30 mm de agua son difíciles de medir en un manómetro de tubo en U con una precisión mayor de 0,5 mm. La sensibilidad del aparato se puede aumentar en un factor de 10 mediante la inclinación del tubo de la vertical. Sin embargo no se recomiendan ángulos próximos a 5 grados de la horizontal a menos que el tubo sea muy recto. El diámetro debería ser de alrededor de 3 mm para bajos ángulos de inclinación y usando un líquido de baja tensión superficial para mantener una forma satisfactoria del menisco.

La figura 4.19 ilustra una adaptación del tubo en U con un gran recipiente en una de las ramas. Con esto se consigue que sólo sea necesario medir las distancias en la rama estrecha ya que el nivel del líquido del recipiente permanecerá prácticamente constante. En este caso es necesario hacer una corrección de la tensión superficial debido a los diámetros tan diferentes de ambas ramas.

### Micromanómetro

Comparando con el manómetro de tubo en U, el micromanómetro (ver figura 4.20), puede aumentar la precisión de la medida en un factor 10 con el inconveniente de que se ha sofisticado mucho el instrumento y la técnica de medida. La altura del recipiente se puede ajustar con un



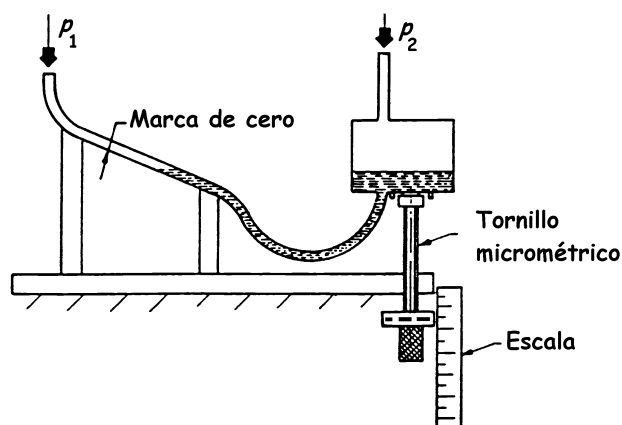


Figura 4.20: Micromanómetro. La medida de presión se realiza levantando el recipiente hasta que el líquido manométrico alcanza el nivel de referencia.

tornillo micrométrico, que cambia el nivel del líquido en el tubo indicado y que posee una marca en un punto determinado, como nivel de referencia. Cuando se aplica una diferencia de presión,  $p_1 - p_2$ , se ajusta la altura del recipiente hasta que vuelve el nivel de líquido en la rama inclinada a la marca de referencia.

El cambio de altura se determina con el tornillo micrométrico. La mejora en la precisión de este instrumento es debida a que la posición del menisco permanece en el mismo sitio en la lectura de la diferencia de presión. Con esto quedan reducidos los efectos de tensión superficial debidos a la no-uniformidad y a la suciedad. La precisión puede llegar a ser de 0,002 mm.

El intervalo típico de la aplicación del manómetro de tubo en U va desde 20 mm a 5 m, mientras que el del micromanómetro va desde 0 a 0,2 mm de líquido manométrico. Para la medida de presiones fuera de esos intervalos se utiliza el tubo de Bourdon, debido a su versatilidad y simplicidad.

Actualmente muchos de los dispositivos para medir la presión llevan asociados transductores de presión que convierten los niveles de presión en señales eléctricas que se llevan a un contador o pantalla digital, pudiéndose leer directamente en ella la presión. Esto puede hacerse utilizando transductores de desplazamiento o mediante un circuito eléctrico asociado al dispositivo como el que se muestra en la figura 4.21. Para automatizar la medida de la presión en un tubo en U lleno de mercurio, se ha fabricado un puente de Wheatstone conectando dos resistencias externas de valor  $R_0$  a dos hilos de elevada resistencia que están introducidos dentro del manómetro, tal como se muestra en la figura. La resistencia que presentan los hilos es proporcional a la longitud del hilo fuera del mercurio debido a que la porción sumergida en el mercurio no transporta corriente ya que la corriente será transportada en esta parte del circuito por el mercurio que es un metal de elevada conductividad. Como resultado de todo esto, la diferencia en la resistencia de los dos hilos,  $\Delta R$ , será proporcional a la diferencia de presión,  $\Delta p$ , entre los dos tubos.

### Tubo de Bourdon

Como vemos en la figura 4.22, el tubo de Bourdon consiste en un tubo de sección oval doblado formando un arco circular. Un extremo está sellado y libre para moverse y el otro está fijado rígidamente y abierto para la transmisión de la presión, aplicada al tubo. Según la presión interna la sección del tubo se hace más o menos redondeada, lo que ocasiona un enderezamiento del tubo. Es este movimiento, amplificado mecánicamente, el que se indica mediante el puntero.

El intervalo de aplicación va desde 0 a 0,1 MN/m<sup>2</sup> hasta 0 a 500 MN/m<sup>2</sup> con una precisión de 1%.

**Es fundamental una verificación periódica de la calibración para minimizar los**

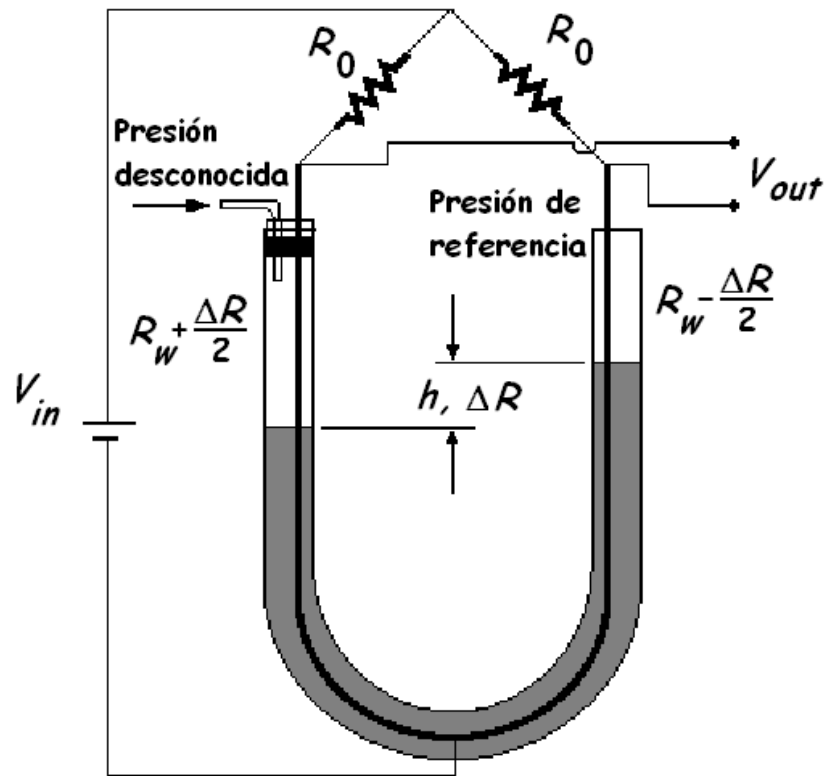


Figura 4.21: Manómetro en U con sensor eléctrico.

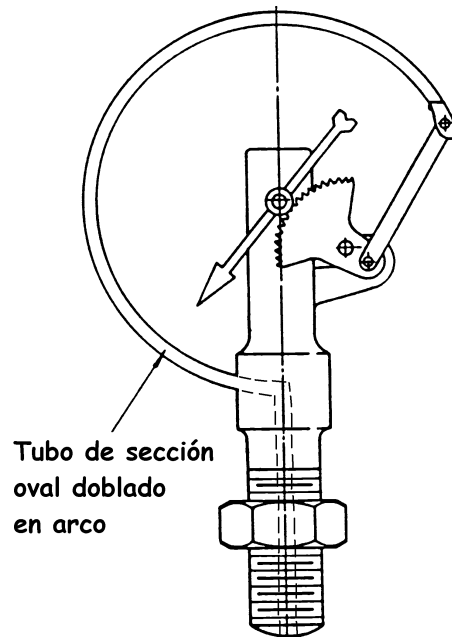


Figura 4.22: Tubo de Bourdon.

**efectos del envejecimiento de los componentes elásticos.** La calibración se suele hacer con el comprobador de peso muerto o medidor hidráulico. El 'peso muerto' se encuentra equilibrado por la presión hidráulica que actúa sobre el área  $A$ . Los efectos de fricción se pueden eliminar en gran medida, usando un aceite de baja viscosidad como fluido hidráulico y rotando manualmente el pistón, libremente alrededor de su eje mientras se hace la lectura. El dispositivo está sujeto a errores en el mecanismo de diámetro en el pistón por alteración de la temperatura.

Los transductores de presión que convierten los niveles de presión en señales eléctricas encuentran aplicaciones frecuentes y pueden tomar diversas formas. Se aplica la presión a un elemento elástico tal como un tubo de Bourdon o un diafragma o un fuelle y se mide el movimiento resultante mediante alguno de los transductores de desplazamiento mencionados en la sección anterior. Por otro lado el transductor permite la medida de las variaciones de presión.

Entre las diferentes técnicas en uso, están:

- a) Cambios de resistencia de medidores de deformación unidos a un diafragma.
- b) Movimiento del diafragma, medido por un transductor de tipo inductivo.
- c) Cambio de capacidad, producida por el movimiento de un diafragma que constituye una de las placas de un condensador. (Este modo se utiliza para la medida de fluctuaciones rápidas de presión que ocurren en los motores de combustión interna).
- d) Cambio de resistencia mediante la acción de contacto deslizante de un potenciómetro.

El intervalo de aplicación va desde 0,002 mm de agua a 500 MN/m<sup>2</sup> con una precisión del 1%. La sensibilidad para medidas de presiones bajas queda limitada por la fricción o por la expansión térmica.

#### 4.4.6. Medidas en flujo de fluidos

##### Medida de Velocidad

##### Tubo de Pitot

La velocidad,  $v$ , en un punto de corriente fluida de densidad constante se puede obtener a partir de la medida de la presión total  $p_o$  (definida en la sección anterior) y la presión estática,  $p$ , en dicho punto. Conocida la densidad del fluido,  $\rho$ , la velocidad se puede determinar a partir de la ecuación de Bernoulli:

$$p_o - p = 1/2\rho v^2$$

Esta ecuación es válida siempre que la velocidad del fluido sea inferior a 0,3 Mach (velocidad del sonido en el fluido). Para velocidades superiores no se puede considerar el fluido como incomprensible y la ecuación a usar es:

$$p_o/p = (1 + (\gamma - 1)/2m^2)^{\gamma/\gamma-1}$$

siendo  $m$  el número de Mach y  $\gamma$  el coeficiente adiabático del fluido.

Sobre la superficie de cualquier cuerpo sólido sumergible en una corriente, hay un punto, normalmente el más adelantado, en el que la velocidad del fluido es nula. En este punto, la presión es la presión total, denominada presión de pitot o estancamiento.

Para bajas velocidades del fluido ( $m < 1$ ), esta presión es relativamente fácil de medir. La figura 4.23 muestra el tubo de Pitot que se coloca en el fluido de forma que un pequeño agujero en su extremo está lo más cerca posible del punto de estancamiento. En la figura 4.24 se muestra una versión de él llamada tubo de Prandtl.

El instrumento podrá medir la presión total sin errores apreciables aún cuando no esté alineado perfectamente en la dirección del flujo. Para la mayoría de los casos es suficiente orientarlo 5 grados en la dirección de dicho flujo; empleando un dispositivo tan simple como un hilo de algodón que, mediante capilaridad se orientará en la dirección del flujo. Como guía sirva que el instrumento se deberá orientar de forma que la lectura sea máxima. Además, cubriendo el tubo

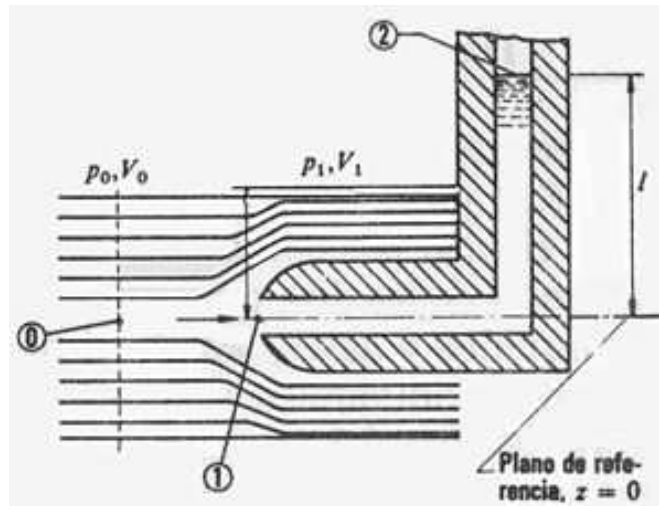


Figura 4.23: Tubo de Pitot.

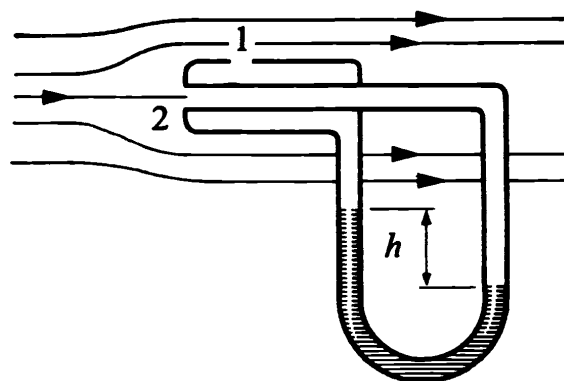


Figura 4.24: Tubo de Pitot en su variante tubo de Prandtl.

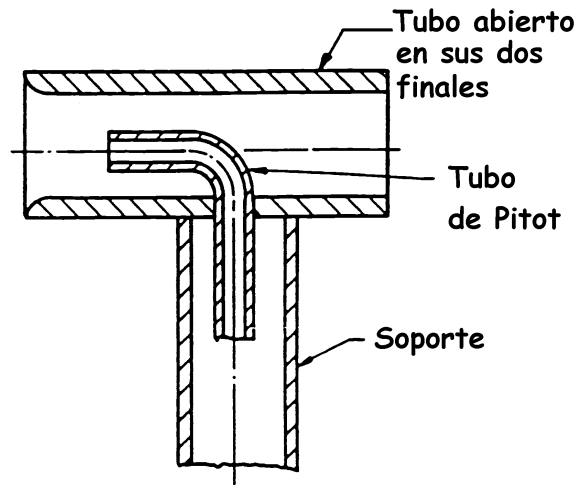


Figura 4.25: Tubo de pitot cubierto para evitar la dependencia de la medida con su orientación en la dirección del flujo.

de Pitot con otro tubo abierto (ver figura 4.25) se reduce la dependencia de la medida con la dirección de orientación del tubo de pitot.

En flujo supersónico el tubo de pitot no registrará correctamente la presión total. Esto es debido a la formación de una onda de choque delante del cuerpo como en la corriente supersónica que ocasiona cierta pérdida de presión. La presión total registrada por el tubo de Pitot es la del flujo subsónico después de la onda de choque. Empleando relaciones o tablas de ondas de choque, se puede determinar el número de Mach para la corriente supersónica.

Aunque la presión estática pueda medirse mediante cualquier forma de sonda de presión, si ésta se mueve con el fluido, esto será raramente posible y, normalmente, se utiliza una forma especial de sonda estacionaria. La medida precisa de la presión estática es, en sí misma, difícil; ya que la introducción de la sonda estacionaria en el flujo, altera el campo de presiones en los alrededores de ésta. La presión alrededor de una sonda, varía de un punto a otro en una forma tal, que depende grandemente de su forma y orientación respecto de la dirección del flujo. Los orificios sensores de presión de una sonda, se localizan donde la presión superficial es igual o está relacionada de alguna forma conocida con la presión estática del fluido sin perturbar.

Un tipo simple de sonda de presión estática, consiste en un cuerpo de revolución con sus ejes orientados en la dirección del flujo, soportada por un vástago lateral en la parte posterior del cuerpo. Este instrumento particular también incluye un agujero en su parte delantera para la medida de la presión total. Dado que el flujo es inducido a permanecer en reposo en el morro, la presión aquí es mayor que la del flujo sin perturbar. Conforme el flujo se acelera a lo largo del codo, la presión cae rápidamente por debajo de la corriente libre antes de crecer de nuevo hacia el valor de la corriente libre. Posteriormente a lo largo de la sonda, el vástago ocasiona una posterior desaceleración del flujo y la presión aumenta por encima del nivel de la corriente libre.

Las curvas de la figura 4.26 muestran un ejemplo de la variación en el error de la presión a lo largo de la longitud de la sonda debido a los efectos esperados de la ojiva y del vástago. Los agujeros se colocan en el punto en el que los dos errores son iguales y opuestos. Las medidas de la velocidad sólo se pueden hacer con el tubo de Pitot estático cuando el flujo es estacionario o muy cercano a éste. El tiempo de respuesta de tales instrumentos es grande debido a la gran resistencia al flujo del agujero de diámetro pequeño. El intervalo de aplicación típico del tubo de Pitot estático va desde 6 a 60 m/s con una precisión del 1% de la presión dinámica. Es posible

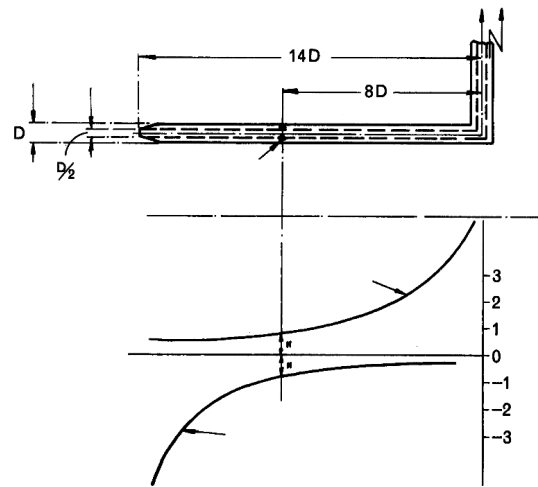


Figura 4.26: Curvas de variación de presión a lo largo de una sonda característica de medida de presión.

bajar el intervalo hasta 1 ó 2 m/s y se puede usar hasta 5 Mach.

#### Anemómetro de hilo caliente

Para flujos fluctuantes se suele utilizar cualquier forma de anemómetro de hilo caliente (ver figura 4.27). Este instrumento se basa en el hecho de que la temperatura alcanzada por un alambre calentado eléctricamente y que se encuentra inmerso en una corriente fluida depende de la velocidad de flujo a través del alambre y de la orientación de éste respecto al flujo. Para un hilo caliente colocado normal al flujo es posible calibrarlo de forma que indique velocidad según la temperatura del hilo. El hilo suele ser de tungsteno dorado o platinizado. El puente suministra corriente al hilo calentándolo hasta una temperatura constante entre 200 y 300 °C. La constancia de la temperatura se puede conseguir dentro de pequeños límites mediante una realimentación (feed-back) eléctrica desde el amplificador. Así, cuando se produce un cambio en la velocidad del fluido, varía la corriente del hilo para mantener balanceado el puente y constante la temperatura del hilo (o resistencia de éste). El límite superior de frecuencia práctica de un anemómetro de hilo caliente está normalmente entre 5 y 15 KHz dependiendo de la velocidad del fluido, tamaño del hilo y características del anemómetro.

Excepto a muy bajas velocidades del viento ( $< 5\text{ m/s}$ ) el método del hilo caliente para determinar la velocidad media es menos preciso que el método del tubo de Pitot estático, principalmente a causa de su sensibilidad a la temperatura del fluido. También tiene los inconvenientes de ser frágil y la necesidad de calibraciones individuales y frecuentes. No obstante para el estudio del flujo turbulento o no estacionario el anemómetro de hilo caliente es muy superior a cualquier otro sistema excepto, quizás, los anemómetros de láser.

#### Anemómetro de láser

El anemómetro de láser (ver figura 4.28), utiliza un rayo láser (un rayo de luz coherente) para la medida de la velocidad. Cuando el rayo pasa a través del fluido en movimiento, la luz es difundida por las partículas del fluido. La luz difundida presenta un corrimiento Doppler. La frecuencia Doppler es directamente proporcional a la velocidad de la partícula. Para la medida de esa frecuencia Doppler se utiliza un fotomultiplicador. Esta técnica de medida requiere que el flujo del fluido sea translúcido y que contenga partículas que difundan la luz. El intervalo de aplicación está entre 3 mm/s a 3000 m/s con una precisión del 1 %, siendo el límite superior de la frecuencia en 120 kHz y la fluctuación máxima de la velocidad del 70 % del valor medio.

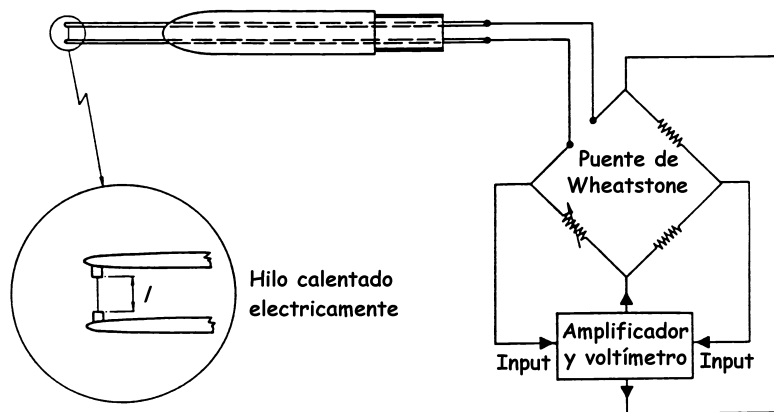


Figura 4.27: Anemómetro de hilo caliente y circuito con el puente de Wheatstone para la realimentación.

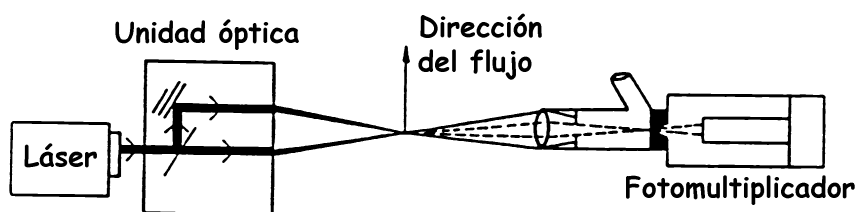


Figura 4.28: Anemómetro de laser.

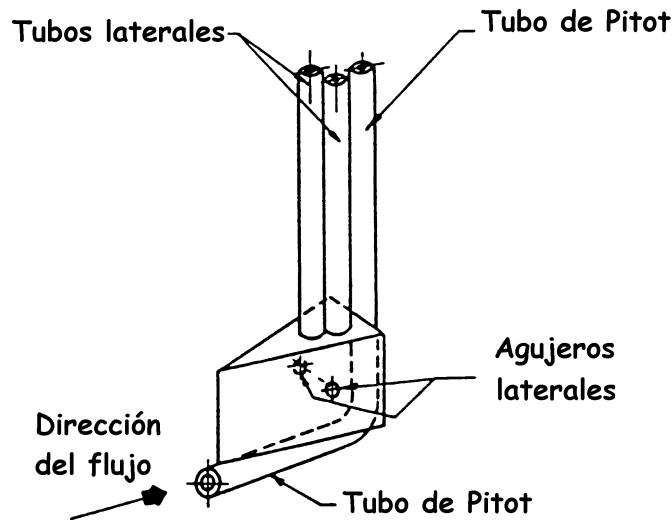


Figura 4.29: Tubo de pitot con cuña para la determinación de la dirección del flujo.

### Dirección del flujo

Si los agujeros de presión se dirigieran simétricamente a cada lado de la sonda, indicarán diferentes presiones cuando el cuerpo se desvíe en la corriente fluida. Este es el principio medidor de desviaciones que se utiliza para la medida de la dirección del fluido. Una sencilla y efectiva cuña medidora de desviaciones es la de la figura 4.29. En donde la cuña tiene un ángulo de  $25^\circ$ . El instrumento incluye un tubo de Pitot debajo de la cuña para realizar las medidas combinadas de dirección y velocidad de flujo. Otras versiones incluyen también un termopar para medir la temperatura.

La cuña se orienta hasta que la lectura de las dos caras sea igual, midiéndose el ángulo desviado sobre un transportador unido al vástago. Las lecturas de las caras de la cuña son iguales a la suma de la presión estática y una fracción constante de la presión dinámica,  $1/2\rho v^2$ . A fin de encontrar la presión estática en un fluido mediante este dispositivo es necesario calibrar los indicadores de presión dinámica con las de otro instrumento.

### Flujo másico

Aunque la cuña medidora de desviaciones es apropiada para una detallada exploración del flujo y puede, en principio, ser usada para la medición de flujo másico total a través del conducto moviéndolo a lo largo de él, esto es tedioso y bastante impracticable. El método más simple para la medida del flujo a lo largo de un conducto es pasar todo el flujo a través de cierta clase de estrechamiento y medir la caída de presión a través de él. La figura 4.30 muestra dos medidores de flujo basados en este principio.

El medidor de flujo de placa perforada es relativamente tosco pero poco costoso de instalar. Se utiliza principalmente cuando no es importante la recuperación de la caída de presión ocasionada por la placa. El tubo de Venturi ocasiona menos pérdidas debido a la suave desaceleración del flujo después de la contracción; no obstante, es mucho más caro.

Cuando se hacen de las proporciones normalizadas, la diferencia de presión medida,  $p_1 - p_2$ , puede ser muy grande y se puede medir con una precisión mayor del 99% sin la necesidad de usar un manómetro de alta sensibilidad.

La velocidad promedio se puede determinar a partir de la medida de la velocidad de la línea de corriente central y el conocimiento del perfil de velocidades a través del conducto. Este no es un método particularmente bueno y no es recomendable, ya que es sensible a asimetrías y per-



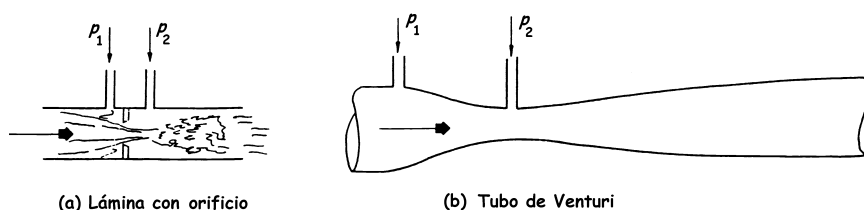


Figura 4.30: Medida de flujo utilizando una lámina con orificio y tubo de Venturi.

turbaciones del flujo. No obstante una modificación de esa sencilla técnica que es recomendable (y razonablemente precisa) es el medidor de  $3/4$  de radio. Este consiste sencillamente en cuatro tubos de Pitot a intervalos de  $90^\circ$ , alrededor de un círculo coaxial con el eje del conducto y de radio  $3/4$  del factor del propio conducto. Cuatro orificios espaciados uniformemente suelen ser usados. El conducto de radio  $3/4$  se elige debido a que ésta es la presión a la que la velocidad es una fracción constante de la velocidad promedio sobre un amplio intervalo de números de Reynolds. Una dificultad práctica es que el medidor de flujo requiere de una longitud de corriente de al menos 10 veces el diámetro del conducto.

#### 4.4.7. Medida de la temperatura

La temperatura de un objeto es una medida de la energía cinética media de las moléculas o átomos que constituyen el objeto. Todos los dispositivos de medida de temperatura registran alguna manifestación física de este movimiento térmico como pueden ser por ejemplo los cambios en:

- Estado físico
- Estado químico
- Dimensiones
- Propiedades eléctricas
- Propiedades de radiación

El dispositivo de medida más conocido es el termómetro de líquido en vidrio. Este se basa en la expansión relativa entre las dos sustancias; por ejemplo, el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es alrededor de ocho veces mayor que el del vidrio.

No es frecuente darse cuenta de que un termómetro de mercurio, que aparentemente está en buenas condiciones, pueda indicar un gran error debido al envejecimiento. Cuando el vidrio se calienta a una alta temperatura no se contrae inmediatamente a su volumen original. Así pues, a temperaturas bajas, la lectura del termómetro será demasiado baja; normalmente vuelve a su valor original después de un cierto período de tiempo. La duración puede ser del orden de minutos y depende de la naturaleza del vidrio del cual está hecho el bulbo del termómetro. Es necesario, pues, calibrarlo frecuentemente, por ejemplo, utilizando como referencia el punto de fusión del hielo.

Para la medida de altas temperaturas (el punto de ebullición normal del mercurio a presión atmosférica es de  $357^\circ\text{C}$ ), la parte superior del tubo capilar está agrandada en un bulbo, con una capacidad de alrededor 20 veces la del tubo capilar, que está llenado con hidrógeno o con dióxido de carbono a 20 atm. Así se extiende el intervalo hasta  $500^\circ\text{C}$ .

La mayoría de los termómetros de líquido en vidrio están calibrados en un baño de forma que el líquido del tubo capilar se encuentra totalmente sumergido. Para el usuario es totalmente

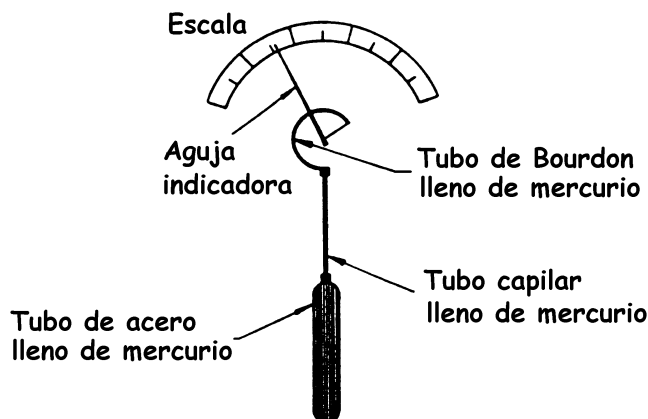


Figura 4.31: Termómetro de mercurio en acero. El tubo de Bourdon está también relleno de mercurio.

conveniente tener una cierta longitud de la columna de líquido expuesta a la vista de forma que se puedan tomar las lecturas sin esfuerzo. No obstante, esta práctica puede exponer al líquido emergente a una diferencia de temperatura apreciable y proporcionar una lectura demasiado baja o demasiado alta dependiendo de si la temperatura ambiente es menor o mayor que la del sistema a medir. Se puede aplicar la siguiente ecuación para hacer una corrección sencilla a este hecho  $\Delta T = KN(T_1 - T_2)$  donde  $\Delta T$  es la corrección del vástago en grados,  $K$  el coeficiente de expansión diferencial entre el líquido y el vidrio,  $N$  es la longitud en grados del fluido termométrico expuesto al ambiente,  $T_1$  es la temperatura que marca el termómetro y  $T_2$  es la temperatura media del líquido termométrico emergente.

En la tabla siguiente se resumen los tipos fundamentales de termómetros de líquido en vidrio, su intervalo de aplicación y la precisión de las medidas realizadas.

Líquido en el vidrio	Intervalo de Aplicación	Precisión
mercurio	-35 a 530 °C	$\pm 1/2$ °C
alcohol	-80 a 100 °C	$\pm 1/2$ °C
pentano	-200 a 30 °C	$\pm 1/2$ °C

#### Termómetro de mercurio en acero

El uso de los termómetro de líquido en vidrio está limitado a menudo por la fragilidad del vidrio y la dificultad de leer la escala correspondiente. Estas limitaciones se palian con el termómetro de mercurio en acero (ver figura 4.31).

Las lecturas se obtienen a través de la presión transmitida a la base del tubo capilar (de acero) hasta un medidor de presión de Bourdon. Como el tubo capilar puede ser largo el termómetro se puede leer a cierta distancia lejos del bulbo. Hay que tener en cuenta la diferencia de altura entre el bulbo y el manómetro. El intervalo de aplicación va desde -35 a 650 °C con una precisión del 2%.

#### Biláminas metálicas

También se puede usar la diferencia en los coeficientes de expansión de dos metales para indicar los cambios de temperatura. Ambos metales, en forma de láminas, están unidos o soldados a lo largo de su superficie. Metales típicamente usados son el invar y el bronce. Al calentarse, el bronce expande más rápidamente que el invar, ocasionando una flexión de la bilámina, siendo el desplazamiento transversal del extremo de la lámina mucho mayor que el aumento de la longitud de cada metal.

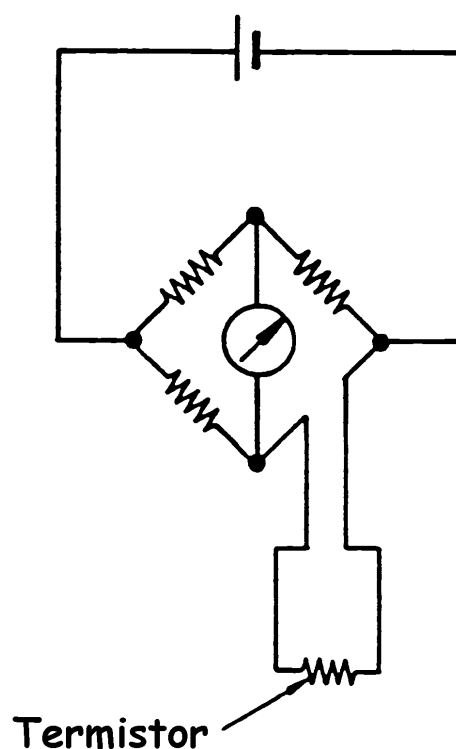


Figura 4.32: Termómetros de resistencias formado parte de un puente de Wheatstone.

Cuando se usa como termostato, uno de los extremos de la lámina queda fijo y el movimiento del otro extremo hace que se abra o cierre un circuito eléctrico de control. El termómetro corriente de estufa consiste en una lámina bimetálica enrollada en espiral. Con las variaciones de temperatura la espiral se enrolla o se desenrolla y este movimiento se trasmite a una aguja móvil sobre una escala graduada. A causa de las pérdidas por rozamientos y por los mecanismos de transmisión, tales instrumentos no son termómetros precisos. El intervalo típico de aplicación suele ser desde  $-180$  a  $450$  °C con una precisión del 1 % siendo la respuesta lenta al cambio de temperatura.

#### Termómetro de resistencia eléctrica (termistor)

Los termómetros de resistencia constan de un sensor cuya resistencia eléctrica varía con la temperatura, un instrumento para la medida de dicha resistencia y una relación entre resistencia y temperatura. Típicamente, el sensor de resistencia consiste en un hilo fino de platino enrollado sobre una montura de mica y encerrado en un tubo de protección. La medida de la resistencia se hace con algún tipo de circuito en puente con lo que se pueden medir con gran precisión los cambios de resistencia con la temperatura. Los rasgos que caracterizan los termómetros de resistencia son la estabilidad de los sensores, la sensibilidad de las medidas y la simplicidad de los circuitos. La figura 4.32 muestra un circuito con el termómetro de resistencia incluido en un puente de Wheatstone.

El puente de Wheatstone no es muy satisfactorio para altas precisiones ya que:

- La resistencia de contacto de hilo y cursor son dependientes de las condiciones de la corredera.

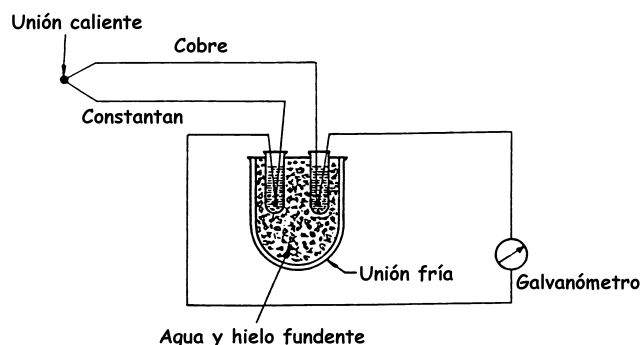


Figura 4.33: Termopar.

- Los gradientes de temperatura a lo largo de los hilos que unen al sensor ocasionan una resistencia variable de estos.
- La corriente suministrada origina un calentamiento  $I^2R$  variable debido a los cambios de resistencia del sensor.

El intervalo típico de aplicación de estos termómetros va desde  $-240$  a  $1060$  °C con una precisión menor de un grado centígrado dependiendo del intervalo de medida:  $\pm 0,6$  a  $300$  °C.

### Termopar

En 1821 Thomas Seebeck descubrió que al soldar dos metales semiconductores en forma de circuito se producía en este una f.e.m. y por tanto una corriente eléctrica continua alrededor del circuito si la soldadura se mantenía a temperaturas diferentes. Este fenómeno se conoce como efecto Seebeck y comprende la conversión de energía térmica en energía eléctrica. Este es el fenómeno en el que se basan los termopares.

La figura 4.33 muestra un sencillo circuito eléctrico para un termopar en el cual se mantiene una de las soldaduras a una temperatura constante de referencia a  $0$  °C mediante un baño de hielo fundido.

La f.e.m., en voltios, se mide normalmente mediante un voltímetro. Se puede calibrar el termopar para medir la f.e.m. a distintas temperaturas conocidas con la soldadura de referencia mantenida a  $0$  °C. Para la mayoría de los propósitos prácticos los resultados de tales medidas se pueden representar, para la mayor parte de los termopares, con la suficiente precisión mediante la ecuación cuadrática

$$V = A + BT + CT^2,$$

donde las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  dependen del termopar usado y  $T$  es la Temperatura (ver figura 4.34).

Existen un gran número de posibles combinaciones para la formación de termopares pero sólo se utilizan unos pocos que se escogen por la estabilidad y reproducibilidad de las respuestas y por el potencial termoelectrónico generado. Estas posibilidades se muestran en la tabla 4.1.

### Pirómetro óptico

Los detectores de radiación se utilizan para medir tanto la energía radiante como la temperatura. Se pueden dividir en dos claros grupos dependiendo de si se mide la radiación sobre un ancho de banda pequeño o grande: pirometría óptica o de radiación.

En los termómetros basados en la micrometría de radiación se mide la radiación total emitida por una superficie haciéndola incidir sobre un detector conveniente, como un termopar, usando la señal eléctrica resultante para indicar temperaturas altas, alrededor de los  $3000$  °C. Se basan en la ecuación de Planck, para la radiación del cuerpo negro, según la cual la densidad de energía emitida depende de la temperatura en la forma  $u = \sigma T^4$ . Los termómetros de radiación selectiva, conocidos usualmente como pirómetros ópticos, se basan en la ley de Wien que dice que cuando

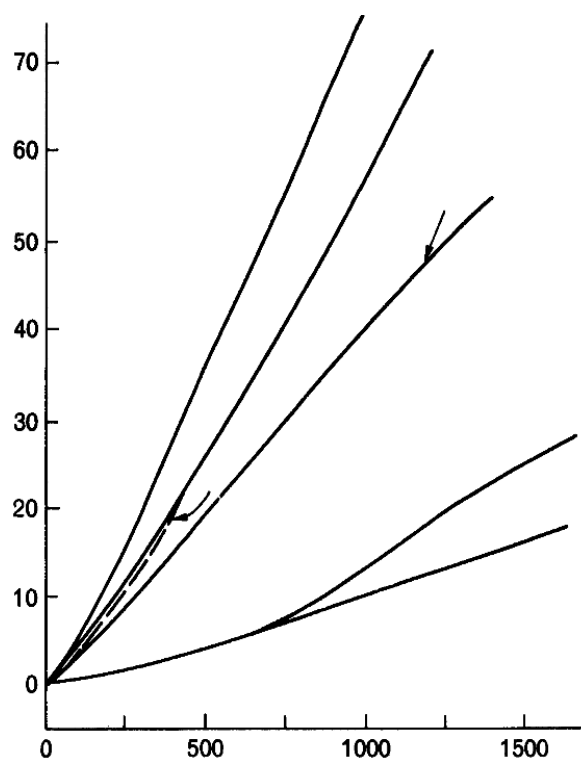


Figura 4.34: Voltaje de salida para distintos termopares como función de la temperatura.

Termopares	Intervalo de aplicación	Precisión
cromel/constantan	-180 a 1000 °C	(1)
cobre / constantan	-180 a 1000 °C	5 °C (1)
hierro / constantan	-180 a 850 °C	10 °C (1)
cromel / alumel	0 a 1100 °C	10 °C (1)
tugsteno / renio	0 a 2800 °C	3 °C (2)
platino / rodio	0 a 1450 °C	3 °C (2)

(1) Son sencillos y baratos. Son usados en atmósferas no oxidantes  
 (2) No están sujetos a corrosión. Son muy seguros y caros.

Cromel: Aleación del 90 % de níquel y 10 % de cromo.  
 Constantan: Aleación del 55 % de cobre, 44 % de níquel y 1 % de manganeso.  
 La resistencia eléctrica del constantan es casi independiente de la temperatura.  
 Alumen: Aleación del 95% de níquel y el 5 % de aluminio.  
 Cromen, constantan y alumen son patentes de la empresa Hokins Co.  
 Tungsteno (piedra pesada) es la denominación inglesa del volframio (W).  
 Renio (Re), rodio (Rh) y platino (Pt) son metales.

Tabla 4.1: Termopares característicos.

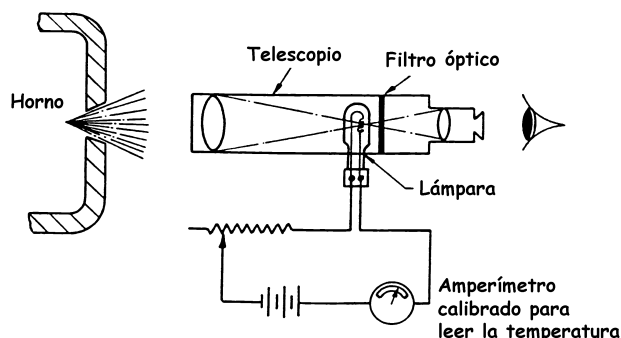


Figura 4.35: Pirómetro óptico.

dos sustancias tienen el mismo brillo tienen la misma temperatura  $\lambda_{max}T = cte$ , donde  $\lambda_{max}$  es la longitud de onda correspondiente al máximo de la energía radiante emitida.

La figura 4.35 muestra un pirómetro óptico. Éste consiste esencialmente en un telescopio que contiene un filtro de gran ancho de banda (normalmente vidrio rojo) y una lámpara eléctrica de filamento de tungsteno. Cuando se aumenta gradualmente la corriente suministrada a la lámpara, la figura del filamento tiende a desaparecer cuando está enfocada sobre el cuerpo radiante. Un aumento posterior de la corriente ocasiona que el filamento brille más que el fondo. Luego, conocida la relación entre la temperatura del filamento y la corriente que pasa por éste se podrá determinar la temperatura de la superficie radiante.

El pirómetro óptico se puede usar para medir la temperatura de cuerpos radiantes superiores a  $750^{\circ}\text{C}$  hasta un límite superior de  $1350^{\circ}\text{C}$  dependiendo del filamento de la lámpara. Cuando se necesita observar temperaturas superiores a  $1350^{\circ}\text{C}$  hay que interponer filtros entre la fuente radiante para que absorba parte de la radiación. Con esto se pueden medir temperaturas del orden de los  $4000^{\circ}\text{C}$ .

#### 4.4.8. Medidas eléctricas

##### Galvanómetro

Un galvanómetro es un instrumento de medida para detectar y conocer el valor de la corriente eléctrica. Es un instrumento de importancia histórica; pues, aunque actualmente tiende a ser sustituido en gran parte de sus campos de aplicación, sigue constituyendo el núcleo de muchos aparatos de medida. El galvanómetro está basado en la acción de un campo magnético sobre un circuito por el cual circula una determinada corriente.

El tipo más general es el galvanómetro de cuadro móvil, que consta esencialmente de los siguientes elementos:

- El cuadro móvil: Está constituido por un núcleo magnético sobre el cual va arrollado un carrete formado por  $n$  espiras de hilo conductor de área  $S$ . Los extremos libres del carrete van conectados al circuito exterior.
- Un dispositivo creador de campo magnético: Generalmente consiste en un imán permanente en forma de herradura que crea en el entrehierro (donde se sitúa el carrete de espiras) un campo uniforme.
- Sistema de suspensión: Sitúa al cuadro móvil en el campo magnético, permitiéndole girar alrededor de un eje y proporcionándole un par recuperador a través de un muelle en espiral. La suspensión y el muelle mecánico de recuperación han de ajustarse de modo que el plano del carrete sea paralelo a las líneas de campo magnético, cuando no pase corriente.

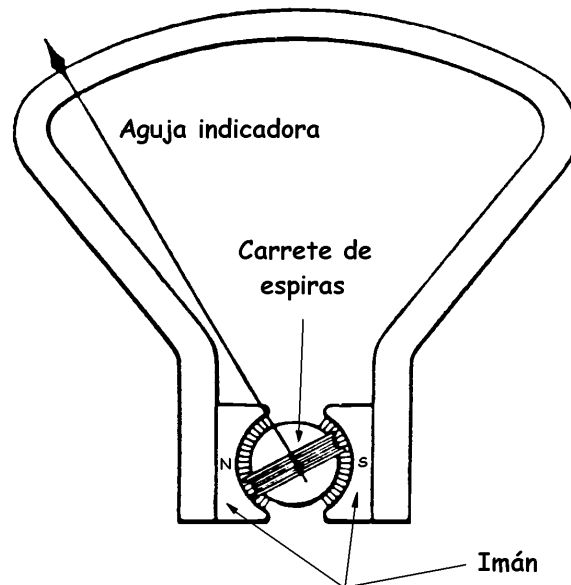


Figura 4.36: Esquema de un galvanómetro de cuadro móvil.

Si en el entrehierro existe un campo magnético  $\vec{B}$ , al circular corriente por las espiras del carrete de cuadro móvil, éste se verá sometido a un par de fuerzas dado por

$$\vec{T}_{\text{electrico}} = \vec{m} \times \vec{B}$$

donde  $\vec{m} = nI\vec{S}$  es el momento magnético del carrete de  $n$  espiras. Este par de fuerzas tiende a colocar las espiras de manera que la superficie descrita por las espiras sea atravesada por el mayor flujo magnético posible. Una espira de hilo conductor por la que pasa una corriente no es más que un pequeño momento magnético que tiende a orientarse en el campo magnético externo como una brújula gira y se orienta en el campo magnético externo que crea la Tierra. El giro del carrete se verá limitado por el muelle en espiral que tiende a llevar el carrete de espiras a su posición original. El par de fuerzas mecánico suministrado por el muelle viene dado por

$$\vec{T}_{\text{mecanico}} = k\vec{\theta},$$

donde  $\theta$  es el ángulo girado. Las espiras del carrete girarán hasta que se anulen ambos pares de fuerza; en el equilibrio:

$$k\theta = nISB\sin(\pi/2 - \theta).$$

Para pequeñas deflexiones,  $\theta$  pequeño, podemos aproximar la ecuación anterior por

$$\theta = \frac{nSB}{k}I,$$

es decir, la desviación del cuadro es proporcional a la intensidad que pasa por él.

Atendiendo al sistema de suspensión y al de lectura, los galvanómetros de cuadro móvil se pueden clasificar en cuatro tipos diferentes.

**Galvanómetro de aguja:** El cuadro móvil tiene dos pivotes que apoyan en sendos cojinetes. El par recuperador lo proporciona una lámina en espiral elástica. La desviación se lee en una escala sobre la cual se mueve el extremo libre de una aguja solidaria al cuadro móvil.

Se trata de un galvanómetro muy robusto, que puede adoptar cualquier posición, fácil de llevar y es, precisamente por todas estas ventajas, el usado habitualmente en la mayor parte de

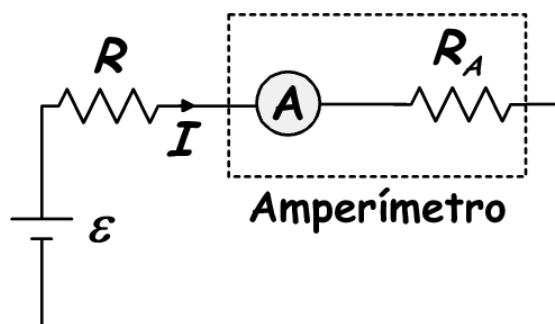


Figura 4.37: Esquema eléctrico de utilización del galvanómetro como amperímetro.

polímetros. El límite de sensibilidad de un galvanómetro de este tipo es de aproximadamente  $10^{-6}$  amperios/división.

**Galvanómetro de espejo o balístico:** El cuadro se suspende en el entrehierro del imán mediante una fibra muy fina y resistente de bronce fosforoso. El par recuperador lo constituye el propio par de torsión de la fibra, resultando una constante de recuperación muy pequeña que se traduce en una gran sensibilidad. La lectura se efectúa sobre una escala observando los desplazamientos de un rayo luminoso lanzado sobre un espejo colocado en la fibra. Con este sistema, la sensibilidad del aparato puede aumentar hasta  $10^{-11}$  amperios/división.

**Galvanómetro electrodinámico:** El campo magnético lo crea una segunda bobina fija, por la que circula, en casi todos los modelos, la misma intensidad que deseamos medir. Si la corriente cambia de sentido, se invierte el campo magnético creado por la bobina fija y también el sentido de la corriente en el cuadro móvil de modo que el sentido del par de fuerzas que experimenta el cuadro móvil no cambia: los galvanómetros electrodinámicos pueden usarse en corriente alterna.

**Galvanómetro de hierro móvil:** También llamado electromagnético, consiste en una bobina recorrida por la corriente que se desea medir. Dentro de ella, en el caso más sencillo, hay una pieza de hierro dulce que lleva solidaria una aguja, cuyo extremo libre se mueve sobre una escala. Al pasar la corriente por la bobina, se crea un campo magnético que imana la pieza de hierro dulce, provocando la desviación de la pieza imanada y de la aguja que lleva solidaria. Si la corriente cambia de sentido, se invierte la imantación de la pieza de hierro dulce, de modo que el sentido de la desviación sigue siendo el mismo. Por tanto, los galvanómetros electromagnéticos pueden emplearse en corriente alterna. Este tipo de galvanómetro suele utilizarse para vigilar la tensión de una red y, en estos casos, están conectados permanentemente.

Al galvanómetro descrito previamente podemos añadirle, actuando adecuadamente en los cursores externos del aparato, las resistencias eléctricas y circuitos adecuados para poder utilizarlo como amperímetro, voltímetro u ohmetro.

**Utilización del galvanómetro como amperímetro:** Se seleccionan los cursores para medir amperios, bien de corriente continua (D.C.) o de corriente alterna (A.C.), teniendo siempre cuidado de no elegir una posición que indique un fondo de escala inferior a la medida que se va a realizar. Si no se conoce la medida a realizar se coloca el amperímetro con el mayor fondo de escala disponible, pero siempre se debe procurar no sobrecargar el amperímetro con una corriente mayor de la que pueda medir, porque esta sobrecarga pondrá en peligro la vida del carrete del cuadro móvil por el que va a pasar la corriente a medir. Para medir la corriente que pasa por un dispositivo eléctrico, se coloca el amperímetro en serie con el dispositivo, tal como indica la figura 4.37, en la que se muestra el esquema eléctrico para medir la corriente que fluye por una resistencia  $R$ , alimentada por una fuente de fuerza electromotriz  $\varepsilon$ . En esta figura  $R_A$  es la resistencia interna del galvanómetro utilizado como amperímetro. Para que el amperímetro no perturbe fuertemente la medida a realizar se debe cumplir que  $R_A \ll R$ .

**Utilización del galvanómetro como voltímetro:** Se seleccionan los cursores para medir voltios, bien de corriente continua (D.C.) o de corriente alterna (A.C.), y se coloca el galvanómetro,



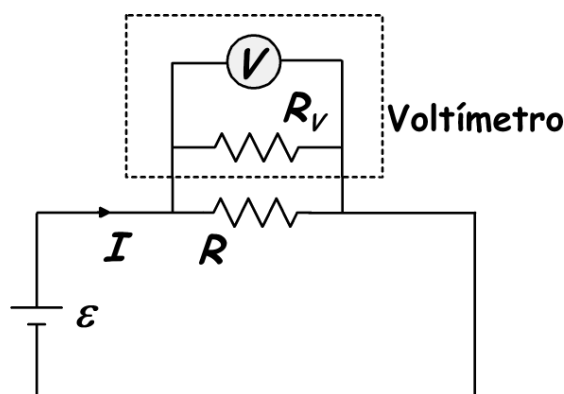


Figura 4.38: Esquema eléctrico de utilización del galvanómetro como voltímetro.

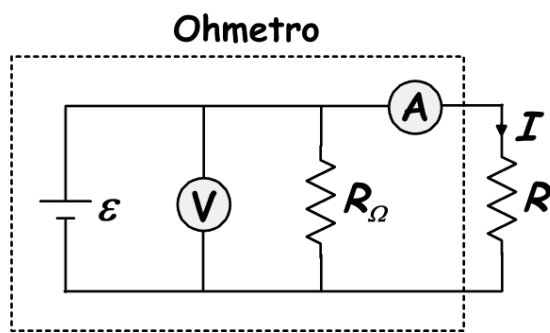


Figura 4.39: Esquema eléctrico de utilización del galvanómetro como óhmetro

utilizado como voltímetro, en paralelo con el dispositivo eléctrico del que se quiere conocer la tensión a la que está sometido. La figura 4.38 muestra el esquema eléctrico de medida de la tensión existente en la resistencia  $R$ . Ahora, para que el aparato de medida no perturbe fuertemente la tensión que antes de su colocación existía en  $R$ , debe de cumplirse que  $R_V \gg R$ , donde  $R_V$  es la resistencia interna del voltímetro. Utilizado como voltímetro, el galvanómetro está más protegido que como amperímetro porque su resistencia interna es mayor y sólo una pequeña parte de la corriente a medir se desvía hacia las espiras del cuadro móvil.

**Utilización del galvanómetro como óhmetro:** En su utilización como óhmetro, el galvanómetro hace uso de una pila o batería interna. Esta batería hace pasar una corriente por la resistencia incógnita  $R$ , la medida de la tensión en los extremos de la resistencia, la corriente que fluye por ella y la ley de Ohm,  $V = RI$ , proporcionan directamente el valor de la resistencia.

### Medidas digitales

Los aparatos de medida descritos con anterioridad presentan los datos en forma continua, o analógica, sobre una escala graduada. Las versiones digitales de estos aparatos sustituyen el procedimiento analógico de medida por uno de tipo digital en el que los datos son presentados de forma numérica con un cierto número de dígitos significativos. Existen muchas soluciones prácticas para este problema; aquí sólo trataremos el **método de integración de doble rampa** que es uno de los más sencillos y utilizados.

En este método, la medida de tensión se lleva a cabo a través de una medida de tiempo, operación que puede realizarse electrónicamente con mucha precisión. En la figura 4.40 se representa una tensión  $V(t)$  que comienza en rampa creciente, partiendo de cero voltios en  $t = 0$  y

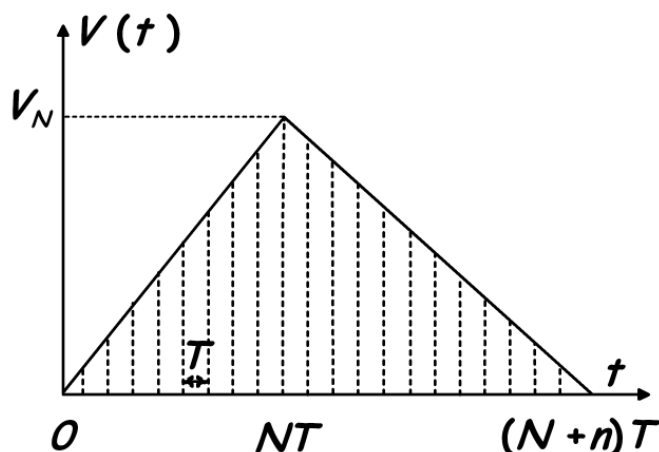


Figura 4.40: Rampas de pendientes proporcionales a  $V_e$  y  $V_R$  utilizadas en el método de integración de doble rampa.

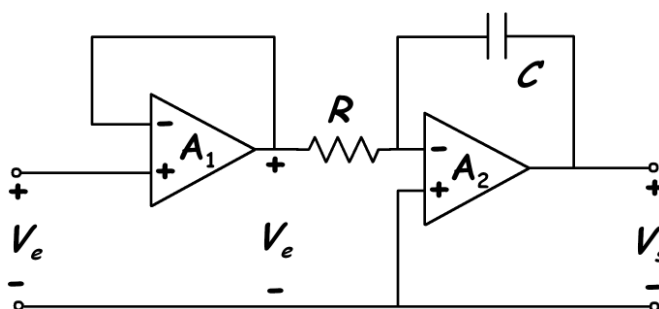


Figura 4.41: Circuito integrador formado por dos amplificadores operacionales.

alcanzando una tensión  $V_N$  en  $t = NT$ , y continuando con una rampa decreciente que parte del último valor mencionado y termina en cero voltios para el tiempo  $t = (N + n)T$ .

Mediante un circuito integrador (ver figura 4.40), vamos a hacer la pendiente de la primera rampa proporcional a la tensión  $V_e$  que se quiere medir, y la pendiente de la segunda rampa, proporcional a una tensión de referencia conocida  $V_R$ . En todo nuestro razonamiento,  $T$  es el periodo de un oscilador o reloj y  $N$  un número entero prefijado y conocido que puede ser, por ejemplo,  $10^4$  para un aparato de cuatro dígitos significativos.

De esta forma, la evolución temporal de la tensión  $V(t)$  puede describirse por la ecuaciones:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{k}{NT} V_e t & 0 \leq t \leq NT \\ kV_e = V_N & t = NT \\ V_N - \frac{k}{NT} V_R (t - NT) & NT \leq t \leq (N + n)T \\ 0 & t = (N + n)T \end{cases}$$

De la última ecuación, para que  $V((N + n)T) = 0$ , se debe cumplir que

$$V_e = \frac{V_R}{N} n$$

Es decir, medir  $V_e$  no es más que contar los  $n$  intervalos necesarios para que la señal  $V(t)$  vuelva a cero.

Uno de los fundamentos del método reside en la generación de rampas con pendiente proporcional a una tensión dada. Esto se consigue integrando una señal constante, lo que electrónicamente se lleva a cabo con el circuito de la figura 4.41, en la que aparecen dos amplificadores operacionales.

La primera parte del circuito, asociada al amplificador operacional  $A_1$ , es un adaptador de impedancias que presenta a su entrada una impedancia muy grande y a su salida muy pequeña. Con esta primera etapa se consigue no alterar la señal de entrada  $V_e$  en el proceso de integración. La segunda etapa del circuito, asociada al amplificador operacional  $A_2$ , constituye propiamente el integrador. La señal de salida viene dada por

$$V_s(t) = V_{OS} - \frac{1}{RC} \int_0^t V_e dt = V_{OS} - \frac{1}{RC} V_e t$$

donde  $V_{OS}$  es el valor de la tensión de salida para  $t = 0$ . Como acabamos de ver, para el caso en que  $V_e$  sea una tensión constante, la tensión de salida del circuito integrador de la figura es una tensión rampa como la que necesita el método de integración de doble rampa.

## Osciloscopio

El osciloscopio u oscilógrafo es un instrumento de medida que visualiza las formas de onda que se producen en un circuito. Normalmente es el aparato de medida de mayor precisión de los que se encuentran en un laboratorio de Electricidad o Electrónica. Su principio de funcionamiento es común a todas las pantallas electrónicas (televisión, monitor de ordenador, radar, etc.): El choque ordenado de un grupo de electrones contra una pantalla recubierta de un material fosforescente, produciéndose en el choque una radiación visible.

### Principio del funcionamiento del osciloscopio

El tubo de rayos catódicos, abreviadamente TRC, también llamado tubo de Braun (K. F. Braun, 1850-1918), es el componente principal del osciloscopio. El TRC es una ampolla de cristal en la cual se ha realizado el vacío y cuyos componentes principales se muestran en la figura 4.42. A la izquierda del esquema mostrado en esta figura, aparece el filamento que no es más que una resistencia eléctrica que se pone incandescente haciendo pasar por ella una corriente eléctrica. Este filamento, que debe presentar gran facilidad para emitir electrones, se construye a partir de óxidos metálicos con niveles bajos de extracción de electrones, es decir, que proporcionan electrones libres con facilidad. El calor suministrado por la corriente eléctrica al filamento (efecto Joule) hace que éste emita electrones (emisión termoeléctrica) o que no sea costoso, energéticamente hablando, sacar electrones. Además, el filamento incandescente que constituye el cátodo está puesto a una tensión negativa respecto del ánodo, que en el esquema de la figura aparece a la derecha del cátodo. La diferencia de potencial o tensión entre cátodo y ánodo suele estar en torno a los 15,000 a 20,000 voltios. Esta disposición hace que los electrones emitidos por el filamento o cátodo sean atraídos por el ánodo y, debido a la elevada diferencia de potencial existente entre ambos, que los electrones alcancen una considerable velocidad. Entre cátodo y ánodo se intercala la rejilla de control o Whenelt (A. Whenelt, 1871-1944). Este dispositivo tiene forma cilíndrica (quedando en su interior el bloque filamento-cátodo), y una abertura pequeña entre el ánodo y el cátodo que deja pasar solamente un delgado haz de electrones que viaja paralelo al eje de simetría del TRC. Se ha generado así un fino haz de electrones llamado pincel electrónico que viaja hacia el centro de la pantalla, situada en la parte derecha del esquema representado en la figura 4.42.

Este haz deberá variar su trayectoria en función de la señal a observar con ayuda de las placas de deflexión, que en un TRC son de dos tipos: Un par de placas de deflexión vertical (situadas horizontalmente). Un par de placas de deflexión horizontal (situadas verticalmente).

En su descripción más simple, cada pareja de placas forma un condensador eléctrico y el campo eléctrico entre ellas puede ser gobernado cambiando externamente la diferencia de potencial entre las placas. Los electrones del haz, al pasar por la región ocupada por los campos eléctricos, van a sentir sus efectos y serán separados de su trayectoria inicial.

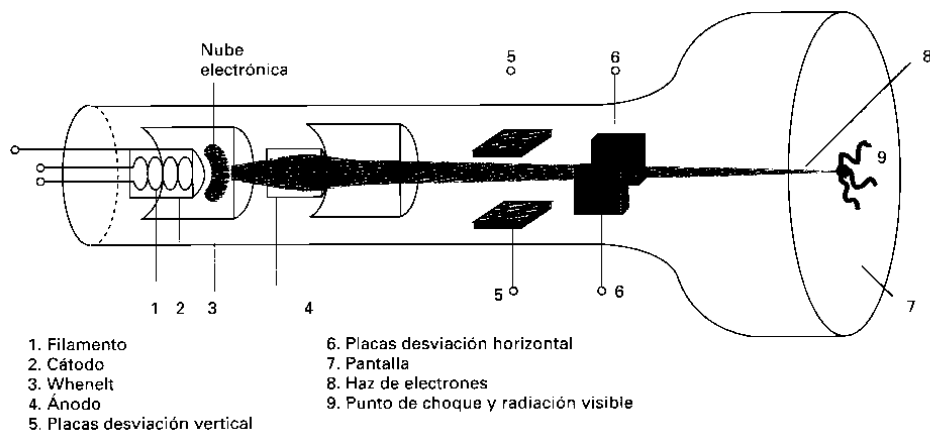


Figura 4.42: Esquema de un tubo de rayos catódicos.

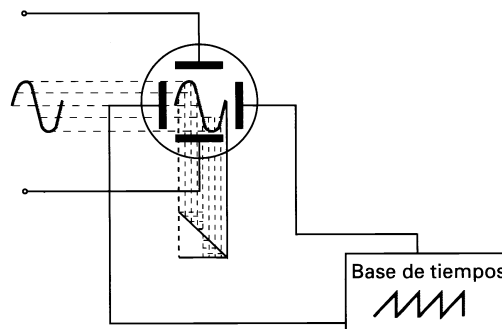


Figura 4.43: Señales aplicadas a las placas de deflexión vertical y horizontal de un TRC para ver una señal en la pantalla.

La señal a observar se aplica a las placas de deflexión vertical y a las placas de desviación horizontal se aplica una señal en forma de diente de sierra, que será la encargada de mover el pincel electrónico de la parte izquierda de la pantalla a la parte derecha, en cada uno de los periodos de la señal en diente de sierra (ver figura 4.43). Durante cada una de las bajadas del diente de sierra, se desplazarían los electrones de la parte derecha de la pantalla a la parte izquierda, pero durante este periodo de tiempo se corta el pincel electrónico para que no aparezca el retroceso en la pantalla.

Finalmente los electrones llegan a la parte interna de la pantalla donde ésta tiene un revestimiento de fósforo. Cuando los electrones golpean la pantalla, parte de su energía cinética se convierte en calor y el resto de transfiere a los electrones de los átomos de fósforo que pasan a niveles más energéticos. Los átomos de fósforo tienden a recuperar su estado fundamental tras un pequeño tiempo, devolviendo la energía adquirida y emitiéndola en forma de luz.

#### Mandos del osciloscopio

En la figura 4.44 se muestra el frontal de un osciloscopio de dos canales (permite visualizar al mismo tiempo dos señales de entrada).

Los mandos fundamentales de un osciloscopio son:

1. Pulsador de encendido/apagado.
2. Base de tiempos o sensibilidad horizontal. Mediante este mando, se controla la veloci-

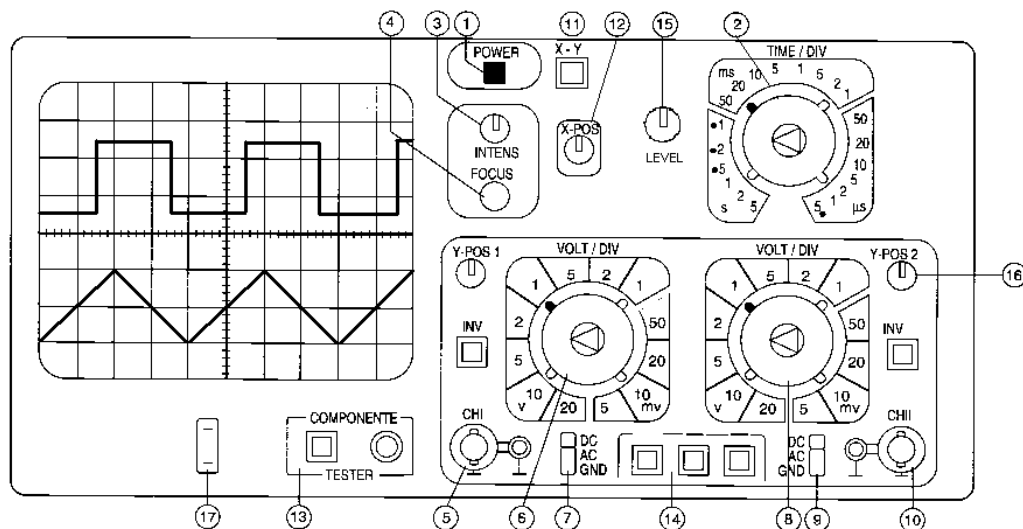


Figura 4.44: Mandos de un osciloscopio.

dad con que el pincel electrónico barre horizontalmente la pantalla. Sus divisiones son TIME/DIV, y está calibrado de manera que permite calcular el período de la señal. El mando de dimensiones más pequeñas, concéntrico con el mando principal de la base de tiempos, debe estar en la posición calibrado para efectuar una lectura correcta. Supongamos que en un caso concreto el mando principal de la base de tiempo se encuentra en la posición 5 ms/div y que la forma de la señal visualizada tiene un periodo de  $6,4 \pm 0,2$  divisiones. El periodo de la señal medida será  $(6,4 \pm 0,2 \text{ div}) \times (5 \text{ ms/div}) = 32 \pm 1 \text{ ms}$ .

3. INTENSITY. Mediante el mando INTENSITY se ajusta el brillo del haz, acelerando más o menos a los electrones y provocando un choque de mayor o menor violencia contra la pantalla. No conviene situarlo cerca del máximo, ya que la pantalla puede deteriorarse.
4. FOCUS. Mediante FOCUS se ajusta el haz para que el impacto sea nítido y la línea que muestra la señal sea estrecha.
5. Entrada del canal I (CHI). En este punto se conecta la sonda de entrada, que es un casquillo para un conector BNC.
6. Sensibilidad vertical del canal I, calibrado en VOLT/DIV. Con él controlamos la ganancia (o atenuación) del amplificador vertical. Permite obtener la amplitud o el valor pico a pico de la señal que se observa. Por ejemplo, si estamos visualizando una señal que de pico a pico tiene una altura de  $4,8 \pm 0,2$  divisiones y el mando de sensibilidad vertical está en la posición 2 mV/div, obtenemos una tensión pico a pico de  $9,6 \pm 0,4 \text{ mV}$  que se corresponde con una amplitud de  $4,8 \pm 0,2 \text{ mV}$ .
7. Conmutador selector de acoplamiento de la señal de entrada para el canal I. GND. Se conecta la entrada a tierra (0 V), utilizándose como ajuste de la línea 0 V. AC. Acoplamiento de la entrada a través de un condensador, eliminándose la componente continua de la señal. DC. Acoplamiento de la entrada de manera directa, permitiéndose el paso a la componente continua y a la alterna.
8. Sensibilidad vertical del canal II, calibrado en VOLT/DIV.
9. Conmutador selector de acoplamiento de la señal de entrada para el canal II.

10. Entrada del canal II (CHII) a través de un casquillo BNC.
11. Pulsador de modo de trabajo X-Y. Al estar pulsado se anula el diente de sierra que genera el osciloscopio para el barrido horizontal, y se realiza la composición de las dos señales que se están aplicando a los canales I y II. Si se introducen por ambos canales señales armónicas, con la conveniente relación entre sus frecuencias, se obtienen en la pantalla las figuras de Lissajous.
12. Desplazamiento horizontal. Con este mando se varía el potencial aplicado a las placas de desviación horizontal, desplazando en ese sentido la señal en pantalla.
13. Test de componente. Al pulsar esta opción, y conectar un componente a esta entrada, se obtiene la curva característica del componente en la pantalla del osciloscopio.
14. Conmutadores para seleccionar la señal a visualizar (canal I, canal II o ambas), y el sincronismo (con el canal I o con el canal II).
15. LEVEL. Selecciona la pendiente y el nivel a partir del cual se produce el disparo (puesta de la señal en pantalla). Si el nivel elegido es superior al máximo de la señal de entrada, no aparecerá nada en pantalla o se visualizará la señal de entrada de forma oscilante.
16. Posición vertical. Este mando desplaza verticalmente las señales.
17. Señales cuadradas para calibración.

## Capítulo 5

# Introducción al Análisis Dimensional

---

5.1. Introducción . . . . .	71
5.2. Magnitud y medida . . . . .	72
5.3. Magnitudes fundamentales y derivadas . . . . .	75
5.4. Constantes dimensionadas . . . . .	76
5.5. Homogeneidad dimensional . . . . .	78
5.6. Postulados básicos del análisis dimensional . . . . .	80
5.7. Constantes dimensionadas ineludibles . . . . .	82
5.8. Variables superfluas . . . . .	82
5.9. Productos adimensionales . . . . .	83
5.10. El teorema $\Pi$ . . . . .	85
5.11. Problemas . . . . .	87

---

La planificación experimental es fundamental en la investigación científica. A la misma puede ayudar el conocimiento del Análisis Dimensional. Esta herramienta sencilla se basa en los conceptos de medida de una magnitud física y de las dimensiones asociadas con ella una vez fijada una base de magnitudes fundamentales para una determinada teoría Física.

### 5.1. Introducción

La teoría matemática en que se basa el "Análisis Dimensional" es de carácter puramente algebraico y trata de las denominadas "funciones dimensionalmente homogéneas". Con el teorema  $\Pi$ , o de Vaschy-Buckingham, que constituye la médula del Análisis Dimensional, se logra en la investigación experimental:

- a) Reducir el número de variables a considerar en el problema en cuestión.
- b) Se puede determinar el efecto de una variable mediante la determinación experimental de otra de mejor acceso.
- c) Permite extender el intervalo de aplicabilidad de una variable más allá de su intervalo experimental. En el caso extremo, dicho intervalo de aplicabilidad se puede conseguir mediante la medida de un único valor para cada variable.
- d) Frecuentemente permite mostrar que una magnitud dada no tiene efecto sobre el fenómeno y por lo tanto se podrá excluir como variable experimental.

- e) Puede revelar la omisión de una variable independiente en la planificación del experimento.
- f) Permite reducir el coste de un experimento e incluso puede hacer factible una experimentación mediante el diseño de experimentos sobre modelos a escala reducida del sistema real. Alternativamente, permite que la experimentación sobre ciertos sistemas sea posible mediante el diseño de pruebas sobre modelos a escala ampliada.

## 5.2. Magnitud y medida

A cada rama de la Física le corresponde una imagen lógica más o menos representativa de un cierto grupo de hechos (por ejemplo la Mecánica, la Termodinámica, el Electromagnetismo). Dicha imagen postula un cierto número de ideas primitivas, algunas de las cuales son las llamadas magnitudes observables. Hasta que no interviene la medición puede hablarse de fenómeno, pero no de magnitud. A diversas manifestaciones físicas que aparecen en gradación comparable de unos casos a otros se les atribuye la calidad de pertenecer a una misma especie de magnitud.

**Definición 5.1.** *Medir es hacer corresponder a cada uno de los grados o estados en que aparece una misma especie de magnitud según determinados criterios de igualdad y de orden, un número o sistema de números (escalares, vectores, tensores), de tal forma que ese número o sistema de números pueda concebirse como variable, es decir, conservando la igualdad y el orden, como correspondiente a cada uno de los estados (llamados cantidades) de la magnitud en cuestión.*

**Definición 5.2.** *Llamaremos procedimiento de medición a la atribución de valores numéricos a magnitudes medibles mediante un sistema de prescripciones constituido tanto por determinadas operaciones físicas reproducibles como por operaciones matemáticas.*

El procedimiento de medición se supone, por hipótesis, invariable con el tiempo y demás circunstancias que se postula no intervienen en la medición. Según nuestras costumbres mentales, atribuimos la absoluta invariabilidad a las operaciones lógicas y matemáticas. Por lo tanto, se tiende a extender el dominio del cálculo matemático en la determinación de medidas.

**Definición 5.3.** *La magnitud se llama escalar si el sistema de números que la determina se reduce a uno sólo; dicha magnitud se supone siempre independiente del sistema de referencia.*

A este caso nos referiremos en lo sucesivo, pues la definición de magnitudes vectoriales y tensoriales, como velocidades, aceleraciones, fuerzas, deformaciones elásticas, constante dieléctrica de los cristales, etc., deriva generalmente de la aplicación de cálculos matemáticos a los resultados de mediciones escalares.

La correspondencia biunívoca entre cantidad escalar y su medida no puede ser cualquiera: a mayor cantidad debe corresponder mayor medida. Pero no sólo se ha de cumplir esto sino que también la medida ha de ser regular.

**Definición 5.4.** *Postular físicamente que el procedimiento de medición adoptado da una medida regular, querrá decir que supondremos por definición físicamente igual la diferencia de dos cantidades con respecto a la de otras dos, cuando lo mismo ocurra para sus medidas.*

Esto lleva a la elección de la unidad de medida y con ella a la de sus múltiplos y submúltiplos. Si según un determinado procedimiento de medición la variable  $x$  de un intervalo real  $I$  da una medida regular, otro procedimiento cualquiera de medición de la misma magnitud que conserve el orden determinará una medida relacionada con la anterior mediante una función unívoca y monótona  $f(x)$ ; para que este valor funcional sea también una medida regular es necesario y suficiente que para  $d$  cualquiera y fija, sea constante la diferencia

$$f(x + d) - f(x) = K(d).$$

Este tipo de ecuación funcional tiene como solución clásica

$$f(x) = \lambda x + h, \tag{5.1}$$



con  $\lambda = f(1) - f(0) = K(1)$  y  $h = f(0)$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} K(d+z) &= f(x+d+z) - f(x) = \\ &= f(x+d+z) - f(x+d) + f(x+d) - f(x) = K(z) + K(d). \end{aligned}$$

Expresión que integrada entre 0 y  $d+z$  nos da:

$$\int_0^{d+z} K(t)dt = \int_0^d K(t)dt + \int_d^{d+z} K(t)dt,$$

y haciendo el cambio en el segundo miembro  $t' = d + t$  obtenemos:

$$\int_0^{d+z} K(t)dt = \int_0^d K(t)dt + \int_0^z K(d+t)dt,$$

donde se ha puesto para la segunda integral la variable  $t$  en vez de  $t'$  pues esto es indiferente. Haciendo uso de la primera expresión:

$$K(d+t) = K(t) + K(d)$$

tendremos:

$$\int_0^{d+z} K(t)dt = \int_0^d K(t)dt + zK(d) + \int_0^z K(t)dt,$$

y permutando entre sí  $z$  y  $d$ , se deduce de lo anterior que  $zK(d) = dK(z)$ . Así para  $z = 1$  y  $K(1) = \lambda$  queda  $f(d) - f(0) = K(d) = \lambda d$ .

**Definición 5.5.** La función  $f(x)$  define lo que llamaremos una transformación por semejanza de la medida  $x$  en  $f(x)$ , ordinariamente llamada cambio de origen y de unidad de medida. El término  $h$  fija el origen de las medidas, el factor de multiplicación o razón de semejanza la cantidad que se toma como patrón unitario de comparación en el nuevo sistema de medidas.

Suponer que el procedimiento de medición admita sólo esta clase de cambios de medida implica que, para  $x_2$  y  $x_1$  cualesquiera y  $x_0$  fijo, el cociente

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, \tag{5.2}$$

independiente de  $\lambda$  y  $h$ , sea el mismo para cualquier sistema de unidades adoptado; recíprocamente, la expresión anterior toma la forma de  $f(x)$  para  $x_2$  variable y  $x_0$  y  $x_1$  fijos.

**Definición 5.6.** Dado por postulado físico un procedimiento de medición regular definiremos como cantidad de una magnitud escalar de unidad  $U$  al símbolo  $xU$ , donde  $x$  es un número real cualquiera llamado medida de dicha cantidad respecto de la unidad  $U$ .

Según la aplicación concreta a que se refiera la definición anterior, la unidad  $U$  recibe distintos nombres, por ejemplo, centímetro, grado, litro, etc.

Para  $\lambda$  número real positivo y fijo respecto del conjunto  $x$  si en  $xU$  se pone:

$$U = \lambda U' \quad (\lambda > 0) \tag{5.3}$$

resultará que  $xU = x\lambda U' = x'U'$  para  $x' = \lambda x$ , admitiendo que es válida la ley asociativa para el símbolo  $xU$ .

**Definición 5.7.** La transformación homotética (o por semejanza con conservación de los orígenes) dada por  $x' = \lambda x$  determina una nueva medida  $x'$  de la misma cantidad referida a la nueva unidad  $U'$  que se supone relacionada con la antigua mediante  $U = \lambda U'$ , ordinariamente llamada cambio de unidad de medida.

En la práctica es importante no confundir la relación que liga las medidas con la que liga las unidades. Así, las medidas transformadas se obtienen de las primitivas multiplicando éstas por un mismo factor que es la razón de semejanza si la nueva unidad de medida es igual a la antigua dividida por dicho factor. Las distintas escalas de medición de una misma especie de magnitud física quedan determinadas por la posición del punto de cero y del punto unidad en dicha escala.

Sin embargo, postular que los números de medidas deben cambiar inversamente a las magnitudes de las unidades no es necesario para ser posible la medición de la misma.

La teoría física establece entre las magnitudes a que se refiere y con el concurso de la observación experimental, relaciones matemáticas que se expresan mediante ecuaciones, llamadas leyes físicas, donde eventualmente intervienen coeficientes numéricos resultantes de la teoría misma o de elementos experimentales.

El desarrollo de la teoría física en cuestión podrá hacer preferible no complicar la expresión matemática con ciertas leyes físicas que adquirirán entonces categoría de principios, cuando éstas dejasen de cumplirse rigurosamente respecto de las medidas de magnitudes dadas por las operaciones físicas que las introducen en la teoría. Esto nos lleva también a modificar (perfeccionar) el procedimiento de medición de dichas magnitudes mediante adecuadas correcciones, las que adquieren sentido físico bajo el postulado de que nuestro sistema de medida continúe siendo regular.

En la evolución del procedimiento de medición que va precisando la definición de una determinada magnitud, a partir de simples nociones cualitativas de nuestros sentidos, se pasa a nociones cuantitativas dadas por la evaluación de un instrumento-escopio que posee una escala graduada en forma arbitraria.

En principio, este instrumento-escopio podrá no dar una medida regular y el perfeccionamiento de nuestro procedimiento de medición, que iremos logrando no tan sólo por la mejora técnica de los aparatos y dispositivos que entren en el procedimiento sino también por el desarrollo de nuestra teoría que adoptará para ésta como principios determinadas formas de ciertas leyes físicas tomadas como fundamentales, consistirá en convertir dicho instrumento-escopio en un instrumento-metro tal que nos dé la medida regular que, por definición convencional, corresponda a la magnitud en cuestión. Entonces, la simple suma de índices dada por el instrumento-metro proporciona la ley de composición de la magnitud, si tomamos como origen de medidas las de la magnitud nula en la ley que se considere.

En ciertos casos (longitudes, áreas, masas, fuerzas, etc.) la ley de composición que se considera como suma de cantidades de una misma especie de magnitud entra declaradamente en la definición del concepto correspondiente y entonces dicha ley de composición, determina en las medidas  $x$  de nuestro instrumento-escopio una función  $x_s = S(x_1, x_2)$  tal que la cantidad correspondiente a la medida  $x_s$  sea suma de las cantidades correspondientes a las medidas  $x_1$  y  $x_2$ .

Nuestro instrumento-escopio se convertirá en instrumento-metro que dé una medida regular, en cuanto sepamos transformar la escala  $x$  en una escala  $y$  de medida regular mediante una función

$$y = y(x)$$

que cumpla

$$y(x_s) = y(x_1) + y(x_2)$$

o más brevemente  $y_s = y_1 + y_2$ , supuesto que en ambos instrumentos se haya tomado como origen de la escala la medida de la cantidad nula en la ley de composición considerada.

En la mayoría de las aplicaciones, la cantidad nula suele ser de índole paramétrica. Por ejemplo, en la definición de velocidad, tanto el origen de los tiempos como el de los espacios es convencional, pero es esencial tenerlo en cuenta en el cambio de unidades; por esto se define en función de incrementos.

### 5.3. Magnitudes fundamentales y derivadas

Generalmente el procedimiento de medición de una magnitud es indirecto, es decir, se observa una acción o propiedad originada por la magnitud a medir; entonces el valor de aquella acción debe ser una función unívoca de la cantidad de la magnitud que se mide. Por regla general, el resultado de la medida se lee sobre una escala lineal (recta o circular) al hacer corresponder un segmento o arco a cada cantidad o estado de la magnitud en cuestión.

La circunstancia de que una magnitud física se mida por una acción secundaria que ella origina da lugar a una relación entre la unidad de medida adoptada para la magnitud y la unidad o unidades que intervengan en el procedimiento de medición constituido por dicha acción; la relación mencionada se expresará por una ley física. Por otra parte, la magnitud en cuestión puede ser introducida en la teoría física que consideremos mediante una definición lógico-teórica que la presenta como magnitud derivada de otras magnitudes fundamentales de dicha teoría. Esta definición tendrá significado físico si se refiere a un cierto fenómeno observable.

La velocidad, tal como se la define ordinariamente, es una magnitud derivada, con significación física en el fenómeno del movimiento. La medimos dividiendo el número que mide una longitud por el número que mide el tiempo necesario para recorrerla, abreviadamente: dividiendo la longitud por el tiempo. Pero en este estudio no es ineludible tomar la longitud y el tiempo como magnitudes fundamentales. Si tomamos como procedimiento de medición del tiempo (aunque sólo sea idealmente prescindir de las dificultades de una realización práctica) la propagación de la luz en el vacío, fenómeno al que atribuimos la característica de un movimiento rectilíneo de velocidad  $c$ , el tiempo a su vez podrá considerarse como magnitud derivada de la longitud y ésta podrá tomarse como única magnitud fundamental.

**Definición 5.8.** *En un determinado conjunto de fenómenos físicos queda establecido un sistema de magnitudes fundamentales si en ellos son independientes entre sí los factibles cambios de unidad de medida regular.*

**Definición 5.9.** *Alguna ecuación o sistema de ecuaciones que expresan leyes físicas, al ser resueltas respecto de determinadas magnitudes, permiten su definición lógico-teórica, convirtiéndolas en magnitudes derivadas de las magnitudes fundamentales establecidas.*

Cada magnitud derivada es la expresión de una ley física cuya ecuación es la que sirve de definición a dicha magnitud: su concepto físico vendrá determinado por el fenómeno a que se refiere la ley física con que se la define en sentido lógico.

Hay que observar especialmente que el límite entre magnitudes fundamentales y derivadas no está trazado de modo fijo e invariable por condiciones naturales, sino que es bastante arbitrario y depende de las reglas especiales que estimamos aptas para la definición de nuestros sistemas de medida. La estimación de las magnitudes que podamos tomar como fundamentales en el caso que se investigue, es decir, de las magnitudes a las que podamos atribuir unidades de medida independientes entre sí dentro del fenómeno investigado, es importantísima para la aplicación eficaz del Análisis Dimensional; esta estimación está ligada íntimamente con la consideración de las variables dimensionadas (incluyendo en ellas las constantes físicas) que deban intervenir en el caso estudiado.

**Teorema 5.10.** *Restringidas las medidas variables de las magnitudes a tomar valores positivos, sea:*

$$x = f(q_1, \dots, q_m)$$

*la función continua de las medidas positivas  $q_i$  de las magnitudes fundamentales que define la medida positiva  $x$  de una magnitud derivada. Dadas transformaciones homotéticas cualesquiera de razones positivas*

$$q'_i = \lambda_i q_i \text{ con } \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$$

*de las medidas de las magnitudes fundamentales y definida la nueva medida  $x'$  de la magnitud derivada por la misma ecuación respecto de las nuevas medidas  $q'_i$  de las magnitudes fundamentales*

$$x' = f(q'_1, \dots, q'_m)$$

donde  $f$  es el mismo operador que antes, tendremos que dicho operador tiene la forma monomial:

$$x = Cq_1^{a_1}q_2^{a_2}\dots q_m^{a_m} \text{ con } C > 0 \text{ constante adimensional}$$

cuando y sólo cuando la medida de la magnitud derivada se transforme homotéticamente con razón positiva

$$x' = \lambda x, (\lambda > 0)$$

es decir, cuando y sólo cuando se defina la magnitud derivada mediante una medida positiva regular con origen determinado.

La relación monomial

$$x = Cq_1^{a_1}q_2^{a_2}\dots q_m^{a_m}$$

obtenida entre medidas, se convierte en la relación entre unidades (que están en razón inversa de las medidas respectivas):

$$CU = U_1^{a_1}U_2^{a_2}\dots U_m^{a_m}$$

donde se ha designado por  $U_i$  cada una de las unidades de las magnitudes fundamentales y por  $U$  la de la magnitud derivada en cuestión.

Así pues, una ley física puede servir para dar una definición lógica monomial explícita de una magnitud derivada referida a otras tomadas como fundamentales, entonces el concepto físico de la magnitud derivada vendrá determinado por el fenómeno a que se refiere la ley física con que se la define lógicamente.

Esta definición depende matemáticamente del coeficiente  $C$  y de los exponentes  $a_i$ , de las potencias de la expresión monomial que dicha definición debe tener para que en la nueva magnitud introducida se cumpla que el cambio de unidades se efectúa también por una transformación homotética. En las definiciones de magnitudes derivadas que se utilizan en la física se suele tomar  $C = 1$ .

**Definición 5.11.** *En las fórmulas entre medidas y entre unidades anteriores que introducen una magnitud derivada, el exponente de la potencia de cualquier magnitud fundamental se llama exponente de dimensión o simplemente dimensión de la magnitud derivada con respecto a la magnitud fundamental correspondiente y la fórmula dimensional de una magnitud derivada es el conjunto de exponentes de las varias magnitudes fundamentales que se presentan en la prescripción de medida para la magnitud derivada; se atribuyen símbolos a las magnitudes tomadas como fundamentales y para la magnitud derivada se escriben estos símbolos con el exponente correspondiente. Una magnitud fundamental tiene dimensiones 1 respecto de sí misma y 0 respecto de las demás fundamentales. Así, tanto ésta como las derivadas se llamarán magnitudes dimensionadas. El factor de multiplicación  $\lambda$  de la magnitud derivada se obtendrá aplicando la fórmula dimensional a los factores  $\lambda_i$  de las magnitudes fundamentales.*

**Definición 5.12.** *Si una magnitud derivada referida al sistema de unidades fundamentales tiene nulos todos sus exponentes de dimensión se dice que es adimensional.*

Por tanto, el cambio de unidades fundamentales no modifica el valor de la medida de una magnitud adimensional. Un número puro debe considerarse como una magnitud adimensional, Una magnitud puede ser adimensionada respecto de un sistema de medidas fundamentales y no serlo respecto de otro sistema distinto.

## 5.4. Constantes dimensionadas

La medida de una magnitud debe escribirse siempre en forma concreta referida al concepto de cantidad, es decir, especificando la unidad a que se refiere. Además la medida de una magnitud nunca es un número exacto; debe sobrentenderse siempre sin equívoco cuál es el error probable de la determinación; en general, se sobrentiende que el valor escrito tiene sus cifras exactas.

Si se escribe la fórmula que da la resistencia  $F$  a la rotura por tracción de un hilo de acero de diámetro  $d$  en la forma

$$F = 65d^2$$

ésta sólo es válida cuando  $F$  se mide en Kilogramo-Fuerza (Kgr) y  $d$  en milímetros (mm), Por tanto, lo correcto es escribir

$$FKgr = 65(dmm)^2.$$

Evidentemente, si expresamos  $F$  y  $d$  en otras unidades, la fórmula anterior con el mismo coeficiente 65 no será ya válida. Sin embargo, dicha fórmula expresa algo importante que debe ser independiente de la unidad de medida, la ley física por la cual la resistencia a la rotura por tracción es proporcional al cuadrado del diámetro del hilo y esto deberá poder formularse en las unidades de medida que deseemos. Al ser  $1Kgr = 9,8N$  y  $1mm = 10^{-3}m$  podremos poner  $FKgr = (9,8F)N = F'N$  y  $dmm = (10^{-3}d)mm = d'm$  y por lo tanto en la relación entre  $F$  y  $d$  si ponemos las medidas  $F'$  y  $d'$  en lugar de  $F$  y  $d$  tendremos que estas nuevas medidas verifican la ecuación  $F' = (65 \times 9,8/10^{-6})d'^2$ . Esto equivale a haber considerado que el coeficiente 65 tenía la dimensión  $Kgr/mm^2$ , es decir  $65Kgr/mm^2 = 65 \times 9,8/10^{-6}N/m^2$  y se tiene

$$F'N = 65 \times 9,8/10^{-6}(d'm)^2.$$

**Definición 5.13.** *Un coeficiente de una ecuación de una ley física que para la conservación de la validez de dicha ecuación, deba transformarse según la misma regla que expresa la dimensión física de una magnitud derivada en un cambio de unidades aplicado a las medidas de magnitudes dimensionadas, se llama constante dimensionada.*

Con las constantes dimensionadas, las ecuaciones de las leyes físicas entre magnitudes dimensionadas conservan su validez en cualquier cambio de unidades.

A veces sucede que la forma de la ecuación permite refundir dos o varios factores en uno sólo, por ejemplo, para la ecuación que venimos analizando se ha introducido una constante para la ecuación global en lugar de haber introducido una para  $F$  y otra para  $d$ .

**Definición 5.14.** *En las fórmulas monomiales los distintos factores se refunden en uno, dando lugar a las llamadas constantes físicas, cuyo valor y dimensión dependen de las unidades tomadas como fundamentales en la teoría física que se considere.*

Si la fórmula explícita monomial se toma como definición de una nueva magnitud derivada, al atribuir a ésta la dimensión física de su segundo miembro, la constante se reduce a un número puro, tomado generalmente, aunque no siempre, igual a la unidad. Pero dicha magnitud derivada se puede considerar siempre como fundamental sin más que atribuir a la constante dimensionada, la dimensión que haga compatible ambos miembros de la ecuación referente a la ley física que ligue las magnitudes en cuestión, el valor de dicha constante y su dimensión física dependerán del sistema de unidades fundamentales elegidas según respectivos procedimientos de medición.

Introducida la fuerza por la ley de Newton de la Dinámica

$$F = ma$$

con dimensión  $MLT^{-2}$  en el sistema  $MLT$ ; en este mismo sistema, de la ley de gravitación universal del mismo Newton

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

se deduce sencillamente que la fórmula dimensional de la constante  $G$  debe ser  $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ .

En un sistema astronómico de medidas será oportuno introducir la fuerza como magnitud derivada mediante la ley de gravitación, haciendo en ella  $G = 1$ , es decir

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

y entonces  $[F] = M^2L^{-2}$ . Para adecuar dicha dimensión con la ley de Newton de la dinámica, habrá que introducir en ésta una constante dimensionada  $k$ , de modo que de  $F = kma$  queda para  $k$  la dimensión  $[k] = ML^{-3}T^2$ .

El ejemplo anterior muestra que no tiene sentido hablar de las "dimensiones" de una magnitud antes de establecer el sistema de medidas en el cual se deben de determinar las dimensiones. No hay "dimensiones verdaderas" de una magnitud y un fórmula dimensional no tiene nada de absoluto ni esotérico; eso sí, indica algo importante y ello es la trabazón con que unas magnitudes tomadas como "derivadas" se ligan a otras tomadas como "fundamentales" en la teoría física que se estudie. Si la ley física que implica dicha trabazón interviene en el aspecto del fenómeno que se estudia, será esencial considerar en éste la fórmula dimensional que indique la dependencia implícita que liga las magnitudes que entran en el fenómeno. Para la aplicación del Análisis Dimensional al estudio de un determinado fenómeno conviene considerar el número de variables dimensionadas (incluyendo en ellas las constantes dimensionadas) lo más pequeño posible, referidas a magnitudes fundamentales (de medición independiente) en el mayor número posible, pues aquellas originan incógnitas de un sistema lineal de ecuaciones proporcionadas por éstas, sistema que resulta tanto más determinado cuantas más ecuaciones con menos incógnitas haya. Pero en dicho fenómeno se podrán tomar como de medida independiente, sin introducir nuevas constantes dimensionadas, sólo a las magnitudes que no están ligadas por definiciones o ecuaciones que implícitamente representen leyes físicas que gobiernen el fenómeno en el aspecto que de éste se estudie. El criterio para saber esto último habrá de derivar de la experiencia.

## 5.5. Homogeneidad dimensional

Fourier sentó el principio de que todas las relaciones o ecuaciones matemáticas que se refieren a leyes físicas deben tener sus términos con la misma dimensión física. Este principio de Fourier no es necesariamente cierto. Así, si se consideran las relaciones que en la caída de un grave incluyen la distancia  $s$  de caída, la velocidad  $v$  y el tiempo  $t$ , será

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ y } v = gt$$

y que sumadas dan

$$s + v = gt + \frac{1}{2}gt^2$$

donde no todos los términos tienen la misma dimensión en el sistema  $MLT$ . Sería deficiente definir como homogénea la ecuación que tuviese todos sus "términos" de la misma dimensión, porque matemáticamente lo apropiado es referirse en general a funciones en donde el concepto "término" no intervenga, por ejemplo en las aplicaciones dadas por gráficas.

Sea  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función de  $n$  variables, donde  $f$  representa un operador que aplicado a las variables independientes  $x_i$  da el valor de la variable dependiente  $y$ . Supongamos que las variables  $(x_j, y)$  son medidas de magnitudes dimensionadas incluyendo en ellas las constantes dimensionadas que intervengan en  $f$ , referidas a un sistema de magnitudes fundamentales de unidades  $U_i$ , y que efectuamos en éstas un cambio de unidades dado por transformaciones homotéticas; entonces las magnitudes dimensionadas tomarán nuevos valores  $x'_i, y'$  ( $q' = \lambda q$ ).

**Definición 5.15.** *La función*

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*se llama dimensionalmente homogénea cuando y sólo cuando para cualquier transformación homotética de las unidades fundamentales*

$$U_i = \lambda_i U'_i$$

*se tiene que las nuevas medidas se relacionan por*

$$y' = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

donde  $f$  es el mismo operador que antes; es decir, la ecuación de definición de  $y$  es invariable respecto del grupo de transformaciones homotéticas de las unidades fundamentales a que se refieren las variables  $y, x_i$ .

De acuerdo con esta definición, una función definida por una gráfica es dimensionalmente homogénea cuando y sólo cuando la gráfica no varía al cambiar de cualquier modo las unidades fundamentales de referencia. Por ejemplo, en el sistema L sea el área S de un cuadrado de lado  $l$ , representada por una gráfica parabólica de ordenada S y abscisa  $l$ ; siempre que la medida de la ordenada se transforme regularmente según  $L^2$ , la gráfica será válida respecto de cualquier transformación homotética de la unidad de longitud.

Ya hemos visto anteriormente que podemos transformar una ecuación cualquiera en dimensionalmente homogénea mediante la introducción de constantes dimensionadas que deben considerarse en la función estudiada como magnitudes dimensionadas.

Algunos autores llaman adecuar una ecuación a la introducción de las constantes dimensionadas que la convierten en dimensionalmente homogénea. Respecto de dicha homogeneidad dimensional y los teoremas del Análisis Dimensional que a ella se refieren hemos de considerar las constantes dimensionadas como argumentos variables en las transformaciones.

**Definición 5.16.** *Llamaremos dimensionada respecto de un sistema de unidades fundamentales  $U_i \ i = 1, \dots, n$  a una expresión que por un cambio de unidades de medida para dichas magnitudes fundamentales del tipo homotético, teniendo en cuenta la consecuenta transformación de las constantes dimensionadas que figuran en ella, se reproduce multiplicada por un monomio de la forma  $\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m}$  donde  $a_1, \dots, a_m$  son las dimensiones de dicha expresión.*

Si la expresión es la función  $f$  y los  $a_i$  son las dimensiones de  $y$ , resultan sinónimas las locuciones "función dimensionada" o "función dimensionalmente homogénea".

**Definición 5.17.** *Una función dimensionada (o dimensionalmente homogénea) de dimensiones nulas, es decir, que queda invariante para todo cambio de unidades fundamentales, se llama adimensionada.*

Supongamos que respecto del sistema de unidades fundamentales  $U_1, U_2, \dots, U_m$  la magnitud dimensionada  $y$  tiene la dimensión  $[y] = U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m}$  y las  $x_j$  las dimensiones  $[x_j] = U_1^{a_{j1}} U_2^{a_{j2}} \dots U_m^{a_{jm}}$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  que podemos resumir en la siguiente matriz dimensional:

$$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \\ \hline U_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & a_i \end{array}$$

Si escribimos la medida de cada magnitud dimensionada en forma concreta tal que, por ejemplo,

$$y(U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m}),$$

y mediante transformaciones homotéticas pasamos a un nuevo sistema de unidades de las mismas magnitudes fundamentales anteriores, la nueva medida se obtendrá por mera sustitución de las antiguas unidades en las nuevas, es decir:

$$y(\lambda_1^{a_1} U_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} U_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} U_m^{a_m}) = y \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} (U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m}).$$

Y, las medidas nuevas de las variables en función de las antiguas serán

$$y' = y \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m}, \quad x'_j = x_j \lambda_1^{a_{j1}} \lambda_1^{a_{j2}} \dots \lambda_m^{a_{jm}}$$

para ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Y en función de  $f$  se tendrá:

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 \lambda_1^{a_{11}} \lambda_1^{a_{12}} \dots \lambda_m^{a_{1m}}, \dots, x_n \lambda_1^{a_{n1}} \lambda_1^{a_{n2}} \dots \lambda_m^{a_{nm}}).$$

**Teorema 5.18.** *La función  $f$  es dimensionalmente homogénea (o dimensionada de dimensiones  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ) cuando y sólo cuando la ecuación anterior es una identidad para las variables  $x_i, \lambda_j$  con  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ .*

Caso particular del anterior teorema es el siguiente:

**Teorema 5.19.** *Una suma de varios términos es dimensionalmente homogénea cuando y sólo cuando todos los términos tienen entre sí y con la suma la misma dimensión.*

Si  $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  la identidad anterior la convertirá en:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= \\ &= \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{12}} \dots \lambda_m^{a_{1m}} x_1 + \dots + \lambda_1^{a_{n1}} \lambda_2^{a_{n2}} \dots \lambda_m^{a_{nm}} x_n \end{aligned}$$

y debido a la identidad de las variables  $x_i$  se ha de cumplir:

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} = \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{12}} \dots \lambda_m^{a_{1m}} = \dots = \lambda_1^{a_{n1}} \lambda_2^{a_{n2}} \dots \lambda_m^{a_{nm}}$$

idénticamente en las  $\lambda_i$ , y por lo tanto

$$a_i = a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

como queríamos demostrar. La condición hallada así necesaria, se comprueba inmediatamente, invirtiendo el razonamiento, que es también suficiente.

Obsérvese que la ecuación  $s + v = 1/2gt^2 + gt$ , aunque sea verdadera para cualquier sistema de unidades fundamentales LT, no es dimensionalmente homogénea. Por ejemplo, suponiéndola dada en [cm,s] si pasamos a [m,h] con:

$$\begin{array}{llll} s' & \text{cm} & = & s \quad 10^{-2} \quad \text{m}; \\ v' & \text{cm/s} & = & v \quad 36 \quad \text{m/h}; \\ g' & \text{cm/s}^2 & = & g \quad 360^2 \quad \text{m/h}^2; \\ t' & \text{s} & = & t \quad 3600^{-1} \quad \text{h} \end{array}$$

obtendremos:

$$s'10^2 + v' \frac{1}{36} = g't' \frac{1}{36} + \frac{1}{2}g't'^2 10^2$$

ecuación distinta a la anterior aunque, no como resultado de la transformación sino por las igualdades separadas  $s = 1/2gt^2$  y  $v = gt$ , sea también verdadera la antigua ecuación en las nuevas medidas:

$$s' + v' = g't' + 1/2g't'^2.$$

## 5.6. Postulados básicos del análisis dimensional

La aplicación del Análisis Dimensional a los problemas prácticos se basa en la hipótesis de que la solución del problema se expresa mediante una ecuación dimensional homogénea en términos de sus "argumentos" (variables del fenómeno en cuestión y constantes dimensionadas) que entran en el problema. Esto será siempre posible aunque en todo caso la hipótesis se justifica por el postulado físico inicial de haber supuesto regular el sistema de medidas para las magnitudes fundamentales adoptadas, por el hecho de que las ecuaciones básicas de la Física que van introduciendo nuevas unidades derivadas son dimensionalmente homogéneas y por postular, aún en el caso no trivial de que haya menos constantes dimensionadas que variables físicas, que en toda investigación física se conservan también dimensionalmente homogéneas las relaciones deducibles algebraicamente de dichas ecuaciones que sirvan para expresar matemáticamente la teoría correspondiente, sin que aparezcan ecuaciones artificiales como la de  $s + v$ .

En resumen, a parte los postulados que justifiquen atribuir a diversas manifestaciones físicas la propiedad de ser cantidades de una especie de magnitud, el Análisis Dimensional de un determinado conjunto de fenómenos físicos puede basarse en los siguientes postulados:



1. Existe un sistema de magnitudes de medidas  $q_1, q_2, \dots, q_m$  no negativas cuyas respectivas unidades  $U_1, U_2, \dots, U_m$  pueden fijarse independientemente unas de otras, tales que para números positivos cualesquiera  $\lambda_i > 0$  independientes entre sí, admiten transformaciones homotéticas:

$$q'_i = \lambda_i q_i, \quad U_i = \lambda_i U'_i. \quad (\lambda_i > 0), (i = 1, 2, \dots, m)$$

Por ejemplo, en las teorías o cuestiones mecánicas, suele tomarse  $m = 3$ , con la longitud  $L$ , el tiempo  $T$  y la masa  $M$  como magnitudes fundamentales. En cuestiones en que interviene además la temperatura se toma  $m = 4$ , las tres anteriores más la temperatura  $\Theta$ . Finalmente, en cuestiones en que intervienen además efectos electromagnéticos se toma  $m = 5$ , las cuatro anteriores, más el amperio  $A$  (o la carga eléctrica  $Q$ ).

2. Existen magnitudes derivadas cuyas medidas no negativas  $x$  que vienen dadas por una función, continua de las medidas no negativas  $q_i$  de las magnitudes fundamentales,

$$x = f(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (x \geq 0; q_i \geq 0)$$

que es independiente de las unidades elegidas. Esto querrá decir que si se efectúan en las magnitudes fundamentales transformaciones homotéticas cualesquiera  $y$ , respecto de las nuevas medidas  $q'_i$ , se considera una nueva medida  $x'$  de la magnitud derivada, ésta viene dada por:

$$x' = f(q'_1, q'_2, \dots, q'_m),$$

con el mismo operador  $f$  que en el caso anterior, de modo que el cambio en la medida de  $x$  resulta también en una transformación homotética de parámetro  $\lambda$

$$x' = \lambda x \quad (\lambda > 0),$$

función de los que caracterizan las transformaciones de las variables fundamentales.

3. Es posible decidir por un proceso teórico-experimental que una variable dimensionada  $y$ , de una magnitud, queda determinada por otras ciertas variables dimensionadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , en el sentido de que existe una función dimensionalmente homogénea que las relaciona

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Por el teorema 1, el postulado 2 equivale a decir que existen magnitudes derivadas, cuyas medidas positivas vienen dadas por una expresión monomial  $x = C q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_m^{a_m}$  con  $C > 0$ , una constante adimensional independiente de las unidades, en el sentido que bajo las transformaciones homotéticas, la  $x$  se transforma también homotéticamente  $x' = \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} x$ .

El postulado 3 equivale a decir que una variable dimensionada  $y$  queda determinada por otras ciertas variables dimensionadas  $x_i$  mediante una función dimensionada, no necesariamente monomial, cuyas dimensiones son las de la variable  $y$ .

Si un determinado fenómeno físico (por ejemplo, la propagación de la luz) relaciona por una ley física varias magnitudes fundamentales (tales como  $L$  y  $T$ ), dicha ley podría servir para establecer una ecuación, y expresar la ley que relaciona las magnitudes fundamentales mediante la introducción de nuevas magnitudes derivadas (por ejemplo, la constante  $c$  de dimensión  $LT^{-1}$  en la propagación de la luz). Es lo que también se ha hecho al introducir la constante  $G$  de gravitación universal para hacer compatible esta ley con la medida independiente de la masa  $M$ , la longitud  $L$  y el tiempo  $T$ . Podemos prescindir de ella al precio de considerar  $M$  como magnitud derivada de  $L$  y  $T$ .

Así, pues, para establecer el sistema de magnitudes fundamentales del postulado 1, mediante el uso de adecuadas constantes dimensionadas podemos tomar como tales, es decir, de medida independiente, las que nosotros queramos, aunque existan fenómenos físicos que las relacionen para condicionarlas entre sí dentro de la teoría construida. Pero si estos fenómenos físicos que las condicionan entre sí, no influyen en el problema estudiado, será desventajoso en el análisis

dimensional que se realice, desdeñar esta circunstancia. Y así, no hemos de olvidar que hacer derivada una magnitud que en el problema estudiado pudiese tomarse como independiente o fundamental, es equivalente a haberla tomado como fundamental y al mismo tiempo hacer intervenir "sin necesidad" en el problema la constante dimensionada que en este caso hay que incluir en la ley del fenómeno no influyente que servía para introducir dicha magnitud como derivada.

## 5.7. Constantes dimensionadas ineludibles

Las constantes dimensionadas que se consideran ineludibles, es decir necesarias, son:

- Velocidad de la luz en el vacío:  $c = 2,9979245 \times 10^8$  m/s.
- Número de Avogadro:  $N = 6,02204 \times 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>.
- Constante de Boltzmann:  $K = 1,38066 \times 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup>.
- Constante de Planck:  $h = 6,62618 \times 10^{-34}$  J s.
- Constante gravitacional:  $G = 6,672 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> Kg<sup>-2</sup>.
- Permitividad del vacío:  $\epsilon_0 = 8,854185 \times 10^{-12}$  J<sup>-1</sup> C<sup>2</sup> m<sup>-1</sup>.

## 5.8. Variables superfluas

En todo experimento se ha de tener mucho cuidado en la distinción entre variables dependientes e independientes. Un ejemplo de esto lo podemos ver en el caso del diseño de un experimento para determinar la potencia necesaria con la que mover un ventilador que va a inyectar aire a lo largo de un conducto. Es de esperar que la potencia  $P$  sea una función del diámetro del ventilador  $d$ , la densidad del aire  $\rho$ , de la velocidad del aire  $v$ , y de la velocidad de rotación del ventilador  $n$ , es decir

$$P = f_1(d, \rho, v, n).$$

Se podría pensar que la potencia depende también del aumento de la presión a través del ventilador,  $\Delta p$ , de forma que en vez de la anterior ecuación se tendría

$$P = f_2(d, \rho, v, n, \Delta p).$$

Sin embargo, eso es incorrecto. La variable  $p$  es superflua ya que se puede considerar como variable dependiente en la forma

$$\Delta p = f_3(d, \rho, v, n),$$

lo que está confirmado experimentalmente.

Algunas veces la exclusión de tales variables superfluas es más evidente. Por ejemplo, no se debe incluir en el análisis anterior el empuje producido por el ventilador,  $T$ , ya que existe la relación analítica

$$P \propto ndT$$

y por tanto, especificados los valores de  $d$ ,  $\rho$ ,  $v$  y  $n$ , la ecuación para  $f_1$  nos proporcionará el valor de  $P$  y posteriormente podremos calcular  $T$ .

## 5.9. Productos adimensionales

Las expresiones monomias dadas por productos entre medidas de variables de magnitudes dadas en la forma

$$y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

intervienen de modo fundamental en el Análisis Dimensional.

Si las dimensiones de las magnitudes correspondientes a las variables  $(x_i, y)$   $i = 1, \dots, n$  respecto de un sistema de unidades fundamentales  $U_j$   $j = 1, \dots, m$  están dadas por la matriz:

$$\frac{\quad}{U_i} \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ni} & a_i \end{array} \right|$$

entonces los exponentes del producto  $y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  satisfacen el teorema:

**Teorema 5.20.** *El producto  $y$  es dimensionado, es decir, la ecuación anterior es dimensionalmente homogénea, cuando y sólo cuando los exponentes  $k_i$  son solución del sistema de ecuaciones lineales*

$$a_{1i}k_i + a_{2i}k_2 + \dots + a_{ni}k_n = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

En efecto, la condición es necesaria, pues si el producto satisface la ecuación para cualquier cambio de unidades, aquí habrá de ser idénticamente en las  $\lambda$  y las  $x$ :

$$\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_m^{a_m} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = \lambda_1^{k_1 a_{11}} \dots \lambda_m^{k_1 a_{1m}} x_1^{k_1} \dots \lambda_1^{k_n a_{n1}} \dots \lambda_m^{k_n a_{nm}} x_n^{k_n}$$

y por tanto idénticamente en las  $\lambda$ :

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} = \lambda_1^{k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \dots + k_n a_{n1}} \dots \lambda_m^{k_1 a_{1m} + k_2 a_{2m} + \dots + k_n a_{nm}}$$

de donde se deduce el teorema. Invirtiendo el razonamiento, es inmediato ver que la condición es también suficiente.

El teorema de Rouché-Frobenius sobre sistemas lineales da:

**Teorema 5.21.** *Dadas las variables dimensionadas  $(x_i, y)$  existe un producto de la forma  $y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  cuando y sólo cuando la matriz de las  $n$  primeras columnas tiene la misma característica que dicha matriz.*

Especial importancia tienen los productos adimensionales definidos por:

**Definición 5.22.** *Un producto de la forma  $y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  referente a las variables  $(x_i, y)$  se llama adimensional si  $a_i = 0 \quad \forall i$ .*

Entonces, según esto se tiene:

**Teorema 5.23.** *La condición necesaria y suficiente para que  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  sea un producto adimensional es que los exponentes  $k_i$  satisfagan el sistema lineal de ecuaciones homogéneas*

$$a_{1i}k_i + a_{2i}k_2 + \dots + a_{ni}k_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

cuyos coeficientes son los números  $a_{ji}$  dados en la matriz dimensional.

Así, los productos adimensionales que se pueden formar con las magnitudes de medidas  $x_i$  vendrán determinados por los exponentes  $k_j$  solución del sistema homogéneo anterior.

Alterando convenientemente el orden de las ecuaciones e incógnitas podemos suponer que el menor principal de la matriz del sistema corresponde a las  $r$  primeras filas y  $r$  primeras columnas, con lo que a todo sistema de valores cualesquiera  $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_n$  tomados como parámetros indeterminados, corresponderán valores  $k_1, \dots, k_r$  ya unívocamente determinados mediante

$$a_{1i}k_i + a_{2i}k_2 + \dots + a_{ri}k_r = -(a_{r+1i}k_{r+1} + \dots + a_{ni}k_n) \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

cuyas soluciones se hallarán por la regla de Cramer.

Estudiemos ahora la multiplicidad de productos adimensionales que pueden formarse con las magnitudes de medidas  $x_i$   $i = 1, \dots, n$ .

Sean los siguientes productos adimensionales:

$$\Pi_i = x_1^{k_{i1}} x_2^{k_{i2}} \dots x_n^{k_{in}} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

con exponentes dados por la matriz

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \Pi_i & k_{1i} & k_{2i} & \dots & k_{ni} \end{array}$$

**Definición 5.24.** Estos productos adimensionales se llaman independientes si ninguno de ellos es igual al producto de potencias de los demás; es decir, si no existen números constantes  $h_i$   $i = 1, \dots, p$  distintos de todos simultáneamente nulos tales que se cumpla

$$\Pi_1^{h_1} \Pi_2^{h_2} \dots \Pi_p^{h_p} = 1$$

idénticamente en las medidas variables  $x_1, \dots, x_n$ .

Entonces se cumple:

**Teorema 5.25.** Los productos adimensionales  $\Pi_i$   $i = 1, \dots, p$  son independientes cuando y sólo cuando las filas de la matriz de sus exponentes son linealmente independientes.

**Definición 5.26.** Un conjunto de productos adimensionales de las variables dimensionadas  $x_1, \dots, x_n$  se llama completo si cada producto en el conjunto es independiente de los demás y cualquier otro producto adimensional de dichas variables se puede expresar como producto de potencias de los productos adimensionales del conjunto dado.

Entonces, se puede demostrar, teniendo en cuenta los teoremas sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales que:

**Teorema 5.27.** Cualquier sistema fundamental de soluciones del sistema lineal de ecuaciones proporciona los exponentes de un sistema completo de productos adimensionales de las variables dimensionadas  $x_1, \dots, x_n$ . Recíprocamente, los exponentes de un conjunto completo de productos adimensionales de las variables  $x_1, \dots, x_n$  forman un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal de ecuaciones homogéneas de sus exponentes dimensionales.

**Teorema 5.28.** El número de productos de un conjunto completo de productos adimensionales de las variables dimensionadas  $x_1, \dots, x_n$  es  $n-r$  si  $r$  es la característica de la matriz dimensional  $(a_{ij})$  de dichas variables.

**Ejemplo.-** La fuerza  $F$  de arrastre de un líquido incompresible, de velocidad  $v$ , densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\eta$ , sobre una esfera lisa de diámetro  $d$ , vendrá dada por una función de la forma  $F = \Phi(v, d, \rho, \eta)$  que tiene por matriz dimensional en el sistema LTM

$$\begin{array}{c|ccccc} & \eta & \rho & d & v & F \\ \hline \text{L} & -1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ \text{T} & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ \text{M} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Los productos adimensionales a formar vendrán dados por los exponentes  $k_i$  tales que sea idénticamente en las variables dimensionadas

$$\eta^{k_1} \rho^{k_2} d^{k_3} v^{k_4} F^{k_5} = 1$$

es decir

$$[ML^{-1}T^{-1}]^{k_1} [ML^{-3}]^{k_2} [L]^{k_3} [LT^{-1}]^{k_4} [MLT^{-2}]^{k_5} = 1$$

Para ello han de ser nulos los exponentes en M, L, T

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_5 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + k_3 + k_4 + k_5 &= 0 \\ -k_1 - k_4 - 2k_5 &= 0. \end{aligned}$$

Pueden tomarse como incógnitas principales  $k_1, k_2$  y  $k_3$  por ser el determinante de sus coeficientes  $-1$  no nulo. Se forma, entonces, el sistema

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= -k_5 \\ -k_1 + 3k_2 + k_3 &= -k_4 - k_5 \\ -k_1 &= k_4 + 2k_5 \end{aligned}$$

del que se saca  $k_2 = k_4 + k_5$  y  $k_3 = k_4$ .

Cada solución fundamental se obtiene haciendo igual a la unidad una incógnita paramétrica y nulas las demás. En el caso  $k_4 = 1$  y  $k_5 = 0$  tenemos  $k_1 = -1, k_2 = 1$  y  $k_3 = 1$ , y para el caso  $k_4 = 0, k_5 = 1$  tenemos  $k_1 = -2, k_2 = 1$  y  $k_3 = 0$ .

Luego el conjunto completo de productos adimensionales puede ser ( $n - r = 5 - 3 = 2$ )

	$\eta$	$\rho$	$d$	$v$	$F$
$\Pi_1$	-1	1	1	1	0
$\Pi_2$	-2	1	0	0	1

es decir,

$$\Pi_1 = \frac{vd\rho}{\eta} \text{ y } \Pi_2 = \frac{F\rho}{\eta^2}.$$

Si en el segundo producto no queremos que figure  $\eta$ , bastará considerar el conjunto también completo de productos adimensionales dado por  $\Pi_1 = R$  (número de Reynolds) y  $\Pi_1^{-2}\Pi_2 = F/v^2d^2 = P$  (coeficiente de presión), pues el determinante de los exponentes de los  $\Pi_i$  es 1 (no nulo).

## 5.10. El teorema $\Pi$

Evidentemente, cualquier ecuación entre productos adimensionales es dimensionalmente homogénea, es decir, la forma de las ecuaciones entre productos adimensionales es invariante respecto de un cambio de unidades fundamentales. Así, una condición suficiente para que una ecuación sea dimensionalmente homogénea, es que sea reducible a una ecuación entre productos adimensionales. Esto lo obtuvo A. Vaschy (1892-1895). Pero fue E. Buckingham en 1914 quien sentó el principio fundamental de que aquella condición es también necesaria.

Esto constituye el teorema  $\Pi$ , llamado también teorema de Vaschy-Buckingham.

**Teorema 5.29.** *Una ecuación dimensionalmente homogénea puede siempre reducirse a una relación entre un sistema completo de productos adimensionados, supuestas restringidas las variables originales a tomar sólo valores positivos.*

Esto conduce a que si la ecuación

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

es dimensionalmente homogénea y la matriz de sus coeficientes  $(a_{ij})$  es de rango  $r$  entonces, dicha ecuación se puede expresar como

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}).$$

Como corolario del anterior teorema se tiene:

**Teorema 5.30.** *En la expresión del teorema  $\Pi$  dada por la fórmula  $\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$ , donde  $r$  es la característica de la matriz de coeficientes  $a_{ij}$ , si  $r = n$ , la función  $F$  se reduce a una constante y la función  $f$  es necesariamente un monomio; además habrá de ser  $n \leq m$ .*

En el ejemplo de la fuerza de arrastre,  $F$ , sobre una esfera lisa de diámetro  $d$  hemos encontrado que un sistema completo de productos adimensionales lo forman el número de Reynolds y el coeficiente de presión. Por tanto, la relación buscada puede ponerse en la forma  $f(R, P) = 0$ . O lo que es equivalente  $P = F(R)$ . Esta relación incógnita, no proporcionada por el Análisis Dimensional, ha de hallarse experimentalmente.

## 5.11. Problemas

1. Sea un sistema S de unidades en el que la unidad de energía es la de un gramo de masa, la unidad de masa el gramo y la de tiempo el segundo. Si la ley  $F = ma$  se conserva ¿cuáles son las dimensiones de una longitud, de una fuerza y de la velocidad en el sistema S?
2. ¿Sería válida una base para la Mecánica constituida por V (velocidad), P (momento lineal) y E (energía)? ¿Por qué?
3. Deducir mediante el análisis dimensional la forma de la expresión de la velocidad de caída libre de un cuerpo desde la altura  $h$ .
4. Indique cuál de las dos expresiones siguientes es correcta:  $M = I/\alpha$ ,  $I = \alpha/M$ . De no serlo ninguna de ellas de una expresión alternativa con ayuda del análisis dimensional (M es el momento de la fuerza, I el momento de inercia y  $\alpha$  la aceleración angular que adquiere en su rotación).
5. Se lanza un proyectil de masa  $m$  en dirección horizontal con una velocidad inicial  $v_o$ , desde una altura  $h$ . Hallar el alcance  $x$  utilizando el análisis dimensional. Hacer lo mismo si la velocidad inicial forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.
6. La velocidad de salida del gas contenido en un recipiente através de un orificio practicado en las paredes del mismo depende de la presión interior, de la masa específica del gas y de la presión exterior. Para unas condiciones determinadas la velocidad de escape del aire es de 100 m/s. ¿Cuál será la velocidad correspondiente para el  $H_2$  en las mismas condiciones? (La relación entre las masas específicas del aire y del hidrógeno es de 14.4)
7. Un cilindro que puede girar en torno a su eje está sometido a un par de fuerzas de tipo elástico proporcional al ángulo que lo separa de su posición de equilibrio, de modo que realiza un movimiento oscilatorio. Determine mediante el análisis dimensional el período de dichas oscilaciones.
8. Mediante el análisis dimensional deducir la expresión que relaciona la longitud de onda asociada a una partícula con su masa y su velocidad sabiendo que también depende de la constante de Planck.
9. Estudie mediante el análisis dimensional el péndulo simple.
10. Determinar mediante el teorema de  $\Pi$ , el período de revolución de un cuerpo de masa  $m_2$  que gira en el campo gravitatorio de otro de masa  $m_1$ , considerando que la trayectoria es circular. Haga lo mismo si la trayectoria es elíptica.
11. Calcule la fuerza que hay que aplicar a un cuerpo de masa  $m$  para que describa una trayectoria circular de radio  $r$  con velocidad angular  $\omega$ .
12. La potencia requerida para mover una hélice depende de las siguientes variables:  $D$  diámetro de la hélice,  $\rho$  densidad del fluido,  $c$  velocidad del sonido en el fluido,  $\omega$  velocidad angular de la hélice y  $\mu$  viscosidad del fluido. Analice cuántos grupos adimensionales caracterizan este problema y calcule una expresión para los mismos.
13. La caída de presión  $\Delta P$  en un flujo unidimensional compresible dentro de un conducto circular es función de: la densidad  $\rho$  del fluido, la velocidad del sonido  $c$ , la viscosidad  $\mu$ , la velocidad del flujo  $V$ , el diámetro del conducto  $D$  y la longitud  $L$  del mismo. Utilizando el análisis dimensional obtenga una expresión que ayude al estudio de este fenómeno.
14. Se desea conocer el arrastre sobre una placa rectangular que forma un ángulo  $\alpha$  con respecto a la velocidad del viento  $V$ . Sabiendo que el arrastre depende de las dimensiones  $a$  y  $b$  de la placa, de  $V$  y de  $\alpha$ ,  $\mu$ , y  $\rho$  (con el significado habitual) ¿Cuáles son los grupos adimensionales que caracterizan el proceso?

15. La elevación  $h$  en un tubo debida a la acción de la capilaridad es función del diámetro del tubo  $D$ , del ángulo de contacto  $\theta$ , de la tensión superficial del líquido  $\sigma$ , de su densidad  $\rho$  y de la gravedad  $g$ . Analice los grupos adimensionales necesarios en el estudio de este fenómeno. Asegúrese de tener  $\sigma$ ,  $g$  y  $\rho$  en el mismo monomio.
16. Para medir capilaridad se puede utilizar un tubo capilar. Sabiendo que para éste la viscosidad  $\mu$  es función del diámetro del tubo  $D$ , la densidad del fluido  $\rho$ , la gravedad  $g$ , la longitud del tubo  $L$ , la altura de capilaridad  $h$  y el caudal del fluido  $q$ . Analice esta dependencia mediante el análisis dimensional.
17. Un tubo de Venturi es un aparato utilizado para medir caudales en tuberías. Suponga que se tiene un modelo a escala 1:10 con respecto al prototipo. Si el diámetro del modelo es de 60 mm y la velocidad de aproximación del fluido es de 5 m/s ¿Cuál es el caudal en litros por segundo en el prototipo para obtener similitud dinámica? Sepa que la viscosidad cinemática del fluido del modelo es 0.9 veces la viscosidad cinemática del fluido utilizado con el prototipo.
18. En un experimento de descarga de un condensador se anotaron los valores de la intensidad de corriente  $I$  en función del tiempo. El experimento se repitió para dos situaciones distintas. Los valores de  $I$  se dan al final en una tabla. Analice los resultados mediante el análisis dimensional y discuta la necesidad o no de añadir nuevas variables en el estudio realizado.
19. Los resultados de una serie de experimentos en los que se estudiaba la variación de la presión de un gas con el volumen para distintas temperaturas se dan al final. Analice y discuta los resultados con ayuda del análisis dimensional.
20. La potencia necesaria para que un avión levante el vuelo viene dada por la expresión

$$P = \frac{1}{2} \rho C_v A_x \left( \frac{mg}{\frac{1}{2} \rho A_y C_s} \right)^{3/2}$$

Si una maqueta necesita una potencia  $P_m$  para despegar ¿qué potencia necesitará el prototipo a tamaño real cien veces mayor?



# Capítulo 6

## Presentación de los resultados

---

<b>6.1. Análisis e interpretación de los resultados</b>	<b>89</b>
6.1.1. Requerimientos.	89
6.1.2. La virtud del escepticismo.	90
6.1.3. Trabajo preliminar	90
6.1.4. La Ley de los promedios.	93
6.1.5. Tablas de posibilidades.	94
6.1.6. Fallos en las medidas	94
6.1.7. Análisis de las lecturas	96
6.1.8. Análisis de gráficos	98
6.1.9. Integración	102
6.1.10. Interpolación y extrapolación	105
6.1.11. La inspiración.	108
<b>6.2. Comunicación de los resultados</b>	<b>108</b>
6.2.1. La necesidad de una comunicación efectiva de los resultados.	108
6.2.2. Preparando un informe escrito.	109
6.2.3. Guía sobre la distribución de los informes escritos.	109
6.2.4. Construcción del informe.	112
6.2.5. Estilo de escritura.	112
6.2.6. Ilustraciones.	113
6.2.7. Gráficos.	113
6.2.8. Comunicaciones cortas.	116
6.2.9. Charlas (Comunicaciones Orales).	116
6.2.10. Referencias.	117
<b>6.3. Problemas.</b>	<b>118</b>

---

Para que la investigación experimental sea lo más fructífera posible se hace necesario que los datos experimentales sean analizados e interpretados correctamente. Además, finalmente dichos resultados deben de ser presentados correctamente.

### 6.1. Análisis e interpretación de los resultados

#### 6.1.1. Requerimientos.

Hacer el mejor uso de los datos experimentales requiere los mismos ingredientes que la inventiva: un 99% de trabajo y un 1% de inspiración. La mayor parte del esfuerzo tiene que ponerse en la manipulación, más o menos rutinaria, de los datos para presentarlos de una forma útil. Entonces, una combinación de lógica y una mente inquisitiva puede descubrir patrones de conducta y llegar a la comprensión de los mismos.

### 6.1.2. La virtud del escepticismo.

No se puede confiar en la lectura experimental hasta que no está completamente investigada en su fondo. Un instrumento no debe usarse si es inadecuado para una situación en particular, o si está dañado de alguna manera. Además, su presencia interferirá con el proceso y nos hará tomar lecturas incorrectas. Alguna de estas factores pueden aparecer, o quizás todos a la vez. Es por esto que un buen experimentador debe hacer del dudar una virtud, esto es, cuestionar la aptitud de cada lectura.

Sin embargo, el experimentador no rehusa de todas las evidencias experimentales. En la práctica sabemos que los aviones vuelan y que las estaciones de energía producen electricidad mejor o peor que como se preveía en su diseño, y éste se basa en los resultados de diferentes experimentos.

Cuando un experimento falla en su papel de proveer de información para un diseño, es más usual que el experimento sea equivocado para nuestros fines que el que las lecturas sean inexactas. Por ejemplo, en los primeros intentos de proveer a los cazas de un tren de aterrizaje completamente retractable, los experimentos fueron diseñados para determinar la distorsión en la estructura causada por la aerodinámica. Desafortunadamente el prototipo se atascó debido a que las fuerzas centrípetas debidas al rápido giro del neumático habían sido obviadas por completo.

El no tener cuidado en las pruebas realizadas puede dar lugar a que determinados factores se compensen y no sean detectados en el experimento.

### 6.1.3. Trabajo preliminar

Antes de que el experimento comience, debemos pensar cuál es la mejor manera de tratar las medidas realizadas. La magnitud de cada medida debe ser determinada y, si resulta apropiado, debemos preparar una tabla para recoger los datos de manera ordenada.

#### Dibujando las lecturas durante el experimento.

Las lecturas instrumentales normalmente deberían representarse conforme son tomadas. Cualquier región de interés puede entonces escrutarse a conveniencia. Para sacar más partido de los resultados experimentales, la forma esperada del gráfico debería dibujarse previamente. Entonces, cualquier error serio en el experimento será detectado antes de que sea demasiado tarde.

Si el gráfico lo realizamos correspondiendo a la actual lectura de los instrumentos, sin la aplicación de errores de cero o factores de escala, no habrá necesidad de efectuar cálculos aritméticos en ese preciso instante (mentalmente o no) inmersos en el ruido normal de un laboratorio. La necesidad de hacer correcciones posteriormente debe ser anotada en el diario de la práctica para que no sean olvidadas o se hagan dos veces (errores determinantes ambos).

La aproximación gráfica que hemos descrito fue usada durante un simple experimento ejecutado para realizar las curvas características de voltaje e intensidad de corriente de una bombilla doméstica de 100W. La bombilla estaba conectada a un voltímetro, a un amperímetro y a una fuente de voltaje variable. Todo ello se encuentra descrito en la figura 6.1.

El voltímetro leía directamente el valor, pero el amperímetro fue usado con un factor ' $\times 2$ ' durante toda la operación de medida.

Antes de comenzar, realizamos unos cálculos que mostraban que para un voltaje de 240V correspondía una intensidad de 0.417 A, lo que debería aparecer como 0.208 A en el amperímetro una vez aplicado el factor de escala. Los ejes del gráfico fueron trazados acorde con este valor tal y como se muestra en la figura, donde el punto R representa la medida esperada. Puede verse al llegar al punto C que la curva no nos conduce al valor esperado, R.

Se comenzó con el experimento y a la luz de las tres primera medidas se puede ver que la curva que nos determinan A, B y C no nos conducía hasta el punto R. Fue desconectada la corriente y se intentó determinar cuál era la causa de error. Se pudo comprobar entonces que

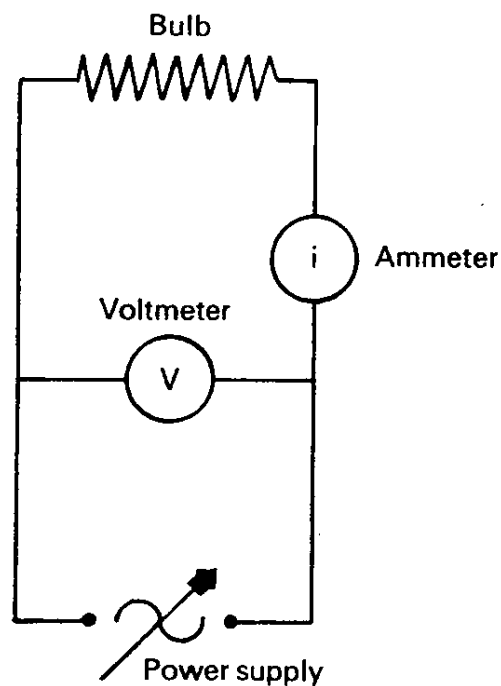


Figura 6.1: El circuito usado para la medida de las magnitudes características de una bombilla eléctrica.

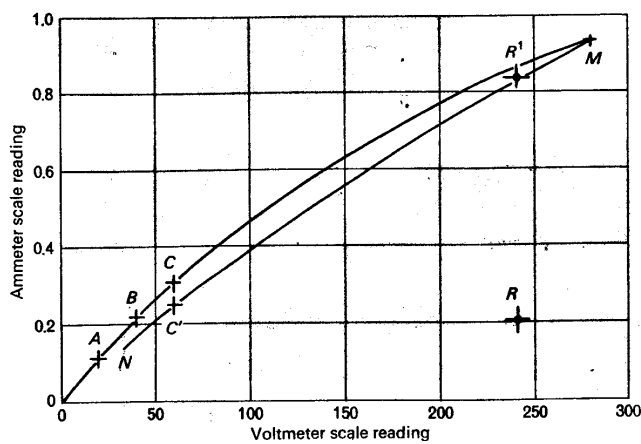


Figura 6.2: Representación gráfica de la lectura de intensidad frente a la lectura del voltaje aplicado a la bombilla.

		A	B	C	C'
Lec. del voltímetro	0	20	40	60	60
Lec. del amperímetro	0	0,115	0,219	0,311	0,248

Tabla 6.1: Medidas realizadas durante el experimento de la bombilla.

el factor  $\times 2$  del amperímetro no dividía el valor real por dos sino que el resultado era una intensidad doble de la real. Con estas modificaciones, el valor que debíamos esperar es de 0.833 A (punto R' en la gráfica), que se ajusta a la curva que describen A, B y C. La precaución es por tanto materia imprescindible cuando se usan controles ambiguamente rotulados.

¿Qué hubiera pasado si las lecturas hubieran sido tomadas sin más y dibujadas posteriormente? La corriente correspondiente a cada voltaje se habría tomado como la mitad de la real, en vez del doble, con lo que se tendría un factor de cuatro multiplicando o dividiendo entre ambos casos. Sin embargo, y aunque en este caso particular resultó fácil detectar el error, nos encontraremos con situaciones más complicadas, donde las lecturas formarán parte de una gran cantidad de cálculos donde encontrar el error puede ser difícil, amén de haber realizado un trabajo innecesario.

El gráfico de la figura anterior fue realizado en el diario de la práctica, pero no fue el que apareció en el informe final, puesto que en él no se habían realizado correcciones debidas a la calibración del aparato y no se había contado con el efecto del paso de corriente por el amperímetro.

¿Qué pasa cuando un punto erróneo no puede detectarse tan fácilmente? Lo primero que debe hacerse es comprobar todos los interruptores relacionados con el intervalo de la medida, que suelen estar rotulados ambiguamente. Esto se puede hacer fácilmente observando la medida mientras que operamos con los distintos interruptores. Segundo, una medida debe destinarse a obtener una estimación de los límites superior e inferior que creamos razonables, uno por cada magnitud a medir. Por ejemplo, si estudiamos la ebullición de un líquido. En este caso, bastante pero no toda la potencia disponible debe ser suministrada al vapor (aproximadamente entre un 50-90%). Este tipo de precaución es suficiente para detectar grandes errores y puede ser acompañado con una idea de lo que se podría obtener cuando medimos sobre nuestro intervalo. Una pequeña proporción del calor puede ser perdido por el diseño de las distintas condiciones o en bajos índices de producción del vapor.

### El valor de los experimentos piloto.

Un experimento debe estar precedido por una prueba preliminar de los distintos aparatos. El motivo principal de esta prueba inicial es chequear el equipo para comprobar si trabaja correctamente y además dar al experimentador cierta práctica en el ajuste de los controles y en la lectura de los instrumentos. Al mismo tiempo podemos tomar una serie de medidas y realizar los cálculos que posteriormente habrán de realizarse, comprobando así que las medidas que podemos realizar nos dan suficiente información y esta información es lo suficientemente precisa para nuestros propósitos (no es lo mismo calcular el diámetro de un cuerpo con un metro que aprecia hasta los milímetros que un tornillo micrométrico, que normalmente aprecia 1/50 de dicha cantidad). Supuesto que estas pruebas nos llevan a conclusiones satisfactorias, estas lecturas piloto pueden ser usadas posteriormente para comprobar las lecturas tomadas y dibujadas durante la realización del experimento.

Para ahorrar tiempo y salvaguardar los aparatos del daño que se les pueda producir en estos experimentos, éstos suelen ser realizados por los profesores o supervisores. Los estudiantes son entonces avisados acerca de los intervalos de validez de los aparatos así como su manejo y cualquier fenómeno particular a tener en cuenta, además del orden adecuado de las lecturas. Normalmente así se gana experiencia rápidamente en el manejo de los aparatos y la toma de medidas. Sin embargo, deberíamos pensar acerca de la realización de los experimentos piloto y

Posibilidad	Consecuencia
(a) La curva corriente/voltaje sufre un ciclo de histéresis.	Elevar de nuevo el voltaje puede causar que los valores de corriente caigan en la línea OC. El circuito debe tener propiedades eléctricas únicas.
(b) La bombilla y el conductor estaban más calientes en el punto C' que en el punto C.	Repetir el experimento de nuevo pero pasando rápidamente sobre la región CMC' puede reducir la diferencia.
(c) La bombilla estaba dañada por una sobrecarga.	Las lecturas de un nuevo experimento pueden caer a lo largo de la línea ONC'M. Mantener el máximo voltaje puede causar un cambio mayor.
(d) Un error de ha desarrollado en uno de los instrumentos.	El test no puede volver a repetirse.
(e) ?????	?????

Tabla 6.2: Posibles explicaciones de la inconsistencia de los resultados.

consultar al profesor. De esta manera se obtendrán valores del experimento y se realizarán tomas que normalmente se relegan a técnicos.

#### 6.1.4. La Ley de los promedios.

Frecuentemente, cuando las lecturas son inconsistentes, se calcula un valor medio de cierto número de medidas. Sin embargo, esta operación no siempre es recomendable; primero debemos pensar si este procedimiento será o no adecuado.

Volviendo al experimento de la bombilla, seguimos tomando medidas y representándolas en la gráfica. Vemos que, efectivamente, pasan cerca del punto R' y llegan al punto M, valor correspondiente al máximo voltaje suministrado al circuito. Las lecturas fueron repetidas pero ahora reduciendo el voltaje hasta cero, obteniendo la curva MC'N. ¿Cuál es el procedimiento óptimo para obtener la curva característica? Podríamos haber pensado en lo fácil que sería promediar los pares de valores tales como C' y C, pero esto ocultaría la diferencia y llevaría al experimentador a alejarse de algunas características importantes de la conducta de la bombilla. En su lugar fue dibujada una tabla de posibilidades (ver tabla 6.2).

Todas las posibilidades desde (a) hasta (d), deben poder visualizarse juntas con sus consecuencias para que una serie de futuros experimentos más precisos puedan encontrar la causa de la discrepancia entre las dos curvas. Esto resultó en una combinación de (b) y (c). El aparato se calentó y la bombilla está permanentemente dañada. Ningún pensamiento original o inspiración fue necesaria, simplemente la lógica.

Otra situación donde los promedios no son significantes se ilustra en el ejemplo siguiente. Para determinar la frecuencia de vibración de una estructura se mide el tiempo que la misma tarda en completar 50 oscilaciones completas. Los tiempos obtenidos en los primero seis intentos fueron: 59, 60, 59, 62, 60 y 60 segundos.

¿Cuál fue el tiempo medio? La respuesta obvia es que la media es el total de los 360 segundos divididos por 6, lo que arroja un valor de 60 segundos. Pero el cuarto valor (62 s) fue sólo obtenido una vez y esto debería ser objeto de estudio, puesto que su obtención pudo ser errónea y no casual. Las posibilidades que nos sugiere son:

- (a) Error humano como contar mal el número de ciclos o retrasarse al operar el reloj.
- (b) Un error aislado en el reloj.
- (c) Una frecuencia distinta. El modo de vibración ha cambiado o se aplicó una amplitud significativamente distinta.

El mejor camino a seguir en un caso como éste es tomar unas cuantas lecturas más y seguir el aforismo de James Bond 'Once is happenstance, twice is coincidence, three times is enemy action' (una vez es una casualidad, dos es una coincidencia, tres es una conspiración). Lo peor que podemos hacer es promediar todos los resultados. *Un valor medio no es significativo si las cantidades a promediar representan diferentes situaciones.* Un ejemplo extremo de la violación de esta regla podría ser decir que el animal medio de un zoológico tiene una ala y tres patas.

Cuando es imposible tomar más lecturas podemos aplicar otros métodos para justificar una medida dudosa. En el presente caso los valores relevantes son:

- Desviación estándar  $S_x = 1,095$  s.
- Desviación con un 50% de probabilidad  $\epsilon_{\text{máx}} = 1,9$  s.

De ahí sigue que la cuarta lectura debe ser rechazada porque su desviación es mayor que 1,88 s.

Calcular un promedio sin pensarlo es particularmente fácil cuando tenemos un equipo que recoge automáticamente un gran número de resultados. El experimentador debe entonces aportar la imaginación de la que carece el equipo de recolección automático.

### 6.1.5. Tablas de posibilidades.

El experimentador prudente que investiga la bombilla realizará una tabla de posibilidades con las posibles explicaciones del comportamiento observado. Normalmente es una tabla, realizada en el diario de la práctica, que realiza una investigación lógica. Sin ella, incluso en un simple experimento, la confusión se eleva. Con su ayuda, cualquier posibilidad puede ser investigada y tachada cuando se haya eliminado.

Siempre es fácil reprobar a los instrumentos por cualquier causa, por esto se puso el error instrumental, (d), como último punto en la tabla. Se dio entonces mayor importancia a los otros puntos. Inevitablemente, los instrumentos tienen pequeños errores de calibración, ocasionalmente éstos son grandes, pero sólo raramente tenemos el tipo de errores ocasionales que expliquen exactamente la extraña lectura experimental.

Cuando realizamos test posteriores para elegir de la tabla de posibilidades la explicación del comportamiento del experimento original, todos los elementos deben ser chequeados en orden. Las comprobaciones no deben parar mientras que nos quede una línea de acción. Frecuentemente dos o más causas se conjugan o actúan opuestamente. Aunque pueda parecer lo contrario, una línea muy importante es la (e): un espacio en blanco que espera recoger nuevas ideas. A lo mejor no es utilizada pero puede ser esencial si los otros elementos nos fallan.

### 6.1.6. Fallos en las medidas

Antes de dar significado a las lecturas experimentales es necesario decidir:

- (a) ¿Cuánto interfieren los instrumentos con el fenómeno a investigar?
- (b) Si el montaje experimental modela la situación real o no.
- (c) El error instrumental.

### Errores causados por la presencia del instrumento

Es aceptada como una verdad filosófica y termodinámica que siempre que una variable es medida, su valor es alterado. Idealmente la alteración es pasable por alto, pero en la práctica esta alteración puede ser muy grande. Un ejemplo extremo de esta interferencia puede ser cuando una gran avión se destruye a consecuencia del sobrecalentamiento del suministro de aceite. Se encontró eventualmente que el sobrecalentamiento se produjo como consecuencia de un bloqueo parcial del sistema de refrigeración (usando sondeos de medida de temperatura). En un nivel

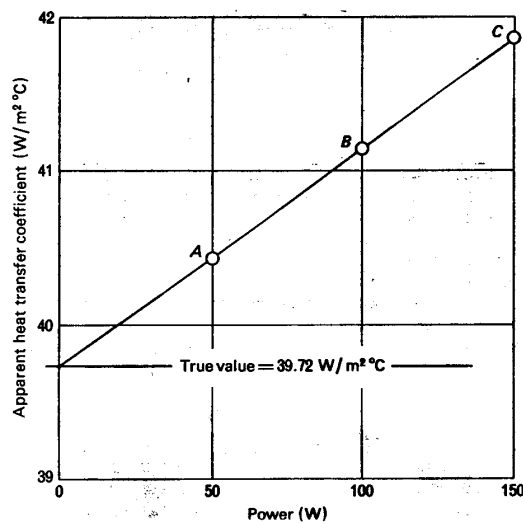


Figura 6.3: Extrapolación al caso de pérdida nula.

menos desastroso, las dificultades siempre aumentan considerablemente cuando tenemos, por ejemplo, que medir las rápidas variaciones de presión en el interior de un cilindro del motor de un vehículo. Los dispositivos de medida inevitablemente incrementan el volumen del cilindro y los esfuerzos para reducir el volumen al normal nos dejan al cilindro con una forma distinta.

Desde el momento en que la magnitud del efecto no puede ser calculada prontamente ésta debe ser determinada experimentalmente. Una técnica es repetir los tests después de incrementar deliberadamente los errores, por ejemplo, montando un segundo o más grande medidor al cilindro. Los cambios en el comportamiento de la medida pueden entonces ser usados para estimar el efecto de la prueba original.

A menudo esta técnica puede aplicarse para eliminar los efectos de daños tales como pérdidas de calor, fricción o resistencia eléctrica de un experimento. Por ejemplo, el coeficiente de conductividad térmica  $h$  entre un sólido y un fluido se encuentra calentando eléctricamente el exterior de un conducto y midiendo las temperaturas de las paredes y del fluido que colocamos en el interior. Si toda la energía eléctrica pasa al fluido, entonces  $h$ , que es la diferencia del flujo energético por unidad de área y por unidad de temperatura, puede ser encontrado con facilidad. Sin embargo, algo de la energía eléctrica suministrada se pierde en el exterior del tubo por mucho que aislemos el aparato. Esta pérdida de calor depende de la energía suministrada.

Los valores aparentes de  $h$  que se muestran en la tabla pueden ser dibujados frente a la energía suministrada.

Valor experimental	A	B	C
Energía (W)	50	100	150
Valor aparente de $h$ ( $W/m^2°C$ )	40.43	41.14	41.85

Cuando los errores debidos a pérdidas no son inevitables, una serie de medidas bajo diferentes condiciones pueden ser extrapoladas al caso ideal de pérdida nula (ver figura 6.3).

### Fallos en el montaje del experimento

Muchos experimentos son bastante diferentes de la situación que pretendíamos simular. Si las diferencias son notadas y comprendidas debemos tenerlas en cuenta. Ocasionalmente son ignoradas completamente o su posible existencia no es considerada hasta que las lecturas son analizadas o incluso hasta que los resultados se han aplicado a otro trabajo. Por ejemplo, el montaje mostrado en la figuras 6.4 fue usado para comprobar la resistencia de una unión tubular a

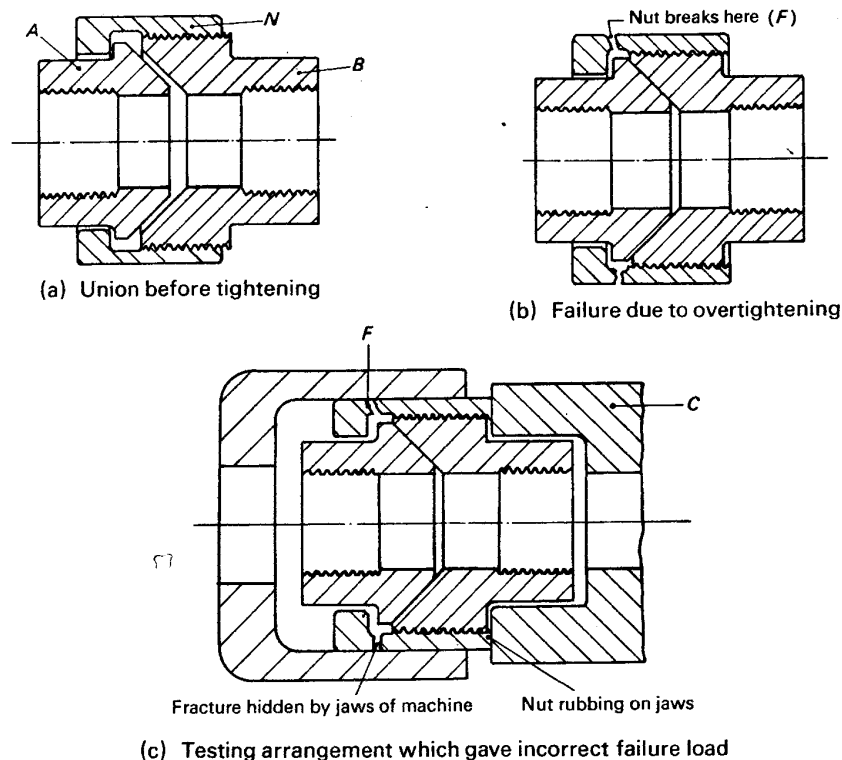


FIG. 6. 4(a), (b), (c) Testing of a pipe union

Figura 6.4: Fallo en el montaje experimental.

ser sobrestirada. Para ello usamos el nodo de unión N, con forma de tornillo, que está dispuesto de manera que cuando aplicamos la fuerza las dos mitades de la unión, A y B se separan cuando N gire. Si aplicamos un momento rotatorio excesivo el nodo se fractura en el punto F. En el experimento, el extremo A fue mantenido estático junto al dispositivo utilizado para medir el momento mientras que el nodo era rotado. El valor medido para el momento en que el nodo se rompió fue bastante mayor que el aplicado en condiciones normales, porque durante el experimento, el movimiento axial del nodo fue restringido por los dientes de C. Este tipo de error puede ser evitado observando detenidamente que ocurre en el equipo experimental y buscar defectos en la construcción.

### 6.1.7. Análisis de las lecturas

Cuando un experimento nos da una gran cantidad de resultados, el planteamiento a seguir debe ir encaminado a reducir la labor del cálculo. Frecuentemente estos cálculos son repetitivos y es por esto conveniente hacerlos en forma de tabla. La forma tabular es especialmente aconsejable cuando cada conjunto de lecturas requiere un determinado número de operaciones. La comparación de los pasos intermedios de lecturas adyacentes es fácil y nos puede ayudar a detectar errores rápidamente.

Por ejemplo, mostramos en la figura los resultados de la salida de energía y del combustible consumido en un pequeño motor de petróleo. En la última columna podríamos colocar las fórmulas que relacionan las lecturas. Las primeras cuatro líneas son las medidas tomadas y el resto son cálculos derivados.

Los pasos intermedios, como por ejemplo la línea ocho (consumo de combustible por hora),



son mostrados aunque no sean requeridos. Esta necesidad no disminuye la precisión. El número puede todavía ser retenido en la memoria de la calculadora (si la estamos usando) para calcular la siguiente línea, con lo que no perderemos precisión.

Dando un vistazo a lo largo de cada fila podemos detectar errores cuando las cifras cambien considerablemente de unas a otras. Podemos ver inmediatamente que en la fila sexta, correspondiente al momento de rotación, tenemos un valor incorrecto, el de la quinta columna. Esto nos deja la posibilidad de que todos los cálculos estén equivocados. Para evitar este error es aconsejable que cada conjunto de valores sea tratado independientemente, si es posible, por otra persona que no tenga conocimiento previo de los resultados.

	1	2	3	4	5	6	7
Velocidad (r.p.m.)	800	900	1000	1100	1200	1300	1.400
Observaciones experimentales							
Carga del freno (kg)	75	75	75	75	75	65	65
Balance del freno (kg)	5.8	4.7	5.6	7.1	10.2	3.8	7.9
Tiempo en quemar 50g de combustible (s)	126	118	109	104	96	91	86
Carga neta del freno (kg)	69.2	70.3	69.4	67.9	68.4	61.2	57.1
Torque (N.m)	339.4	344.8	340.4	333	335.5	300.2	280.1
Consumo de combustible (g/h)	4.739	5.416	5.941	6.393	7.027	6.811	6.844
Energía (kW)	1428	1525	1651	1731	1856	1978	2093
Consumo específico de combustible (g/kWh)	301	282	278	273	264	290	306

### Exactitud en los cálculos

Existen muchos tipos de ayudas disponibles para el proceso de datos, desde tablas logarítmicas o integrales hasta calculadoras y ordenadores. Una regla de cálculo es bastante precisa en muchos casos y es especialmente útil para multiplicar una serie de números por una constante.

Podemos obtener muchas cifras significativas usando una calculadora u ordenador en vez de la regla de cálculo, pero las cifras extra no tienen mucho significado a menos que el aparato de medida tenga la suficiente precisión como para justificarlas. No hacemos ningún daño usando toda la capacidad de la máquina en todos los pasos del cálculo aunque después, en el informe final las cifras superfluas sean redondeadas. Desafortunadamente, mucha gente, una vez que se han procesado los datos con unas doce cifras significativas, piensan que la precisión es sinónima de cifras y escriben sus resultados con al menos seis cifras significativas. De hecho la precisión de los cálculos viene determinada por la precisión del aparato de medida.

Supongamos por ejemplo el experimento de medida de las oscilaciones de una estructura comentado anteriormente. Ignorando el resultado erróneo de 62 segundos, los segundos medidos en cincuenta oscilaciones son:

50, 60, 59, 60 y 60 segundos.

El tiempo medio en las oscilaciones fue de 59,6 segundos. La frecuencia entonces era de  $50/59,6=0,83892617\dots$  Hz. ¿Cómo deberíamos redondear esto? ¿Es la frecuencia 0,8389 Hz ó 0,839 Hz? La escala del reloj está calibrada en intervalos de un segundo, y para evitar la discriminación de cifras significativas vamos a suponer que pasaría si tomáramos una medida más. El resultado, a la vista de los anteriores, podría haber sido 59 ó 60 segundos. Dependiendo de esto el resultado que se tendría sería:

Nuevo t.=	59 s	60 s
Tiempo medio (s)	59.6s	59.5s
Frecuencia (Hz)	0.84033613...	0.8379888.
Frecuencia Anterior (Hz)	0.83892617...	

Podemos ver que la tercera cifra después del punto decimal varía considerablemente. La frecuencia correcta entonces no será más precisa que 0,84 Hz. Incluso no podemos reclamar a esta

cifra más precisión, puesto que no hemos tenido en cuenta la precisión del reloj. No es necesario construir una tabla cada vez que tomamos una lectura; esto fue incluido aquí meramente para enfatizar el punto.

Muchos sistemas de medida modernos están provistos de una salida digital, directa o a través de un recolector de datos. Debemos tener cuidado en este punto para diferenciar la precisión en la medida del número de cifras que da el sistema. La información debe rebuscarse desde la observación de la constancia y repetitividad de las medidas hasta conocer el tipo de transductor usado.

### **Pasos intermedios en los cálculos**

Para clarificar el ejemplo anterior calculamos el tiempo medio en cada uno de los tres casos considerados. Normalmente una mejor aproximación consiste en realizar una multiplicación y división intermedia con su consecuente error de redondeo:

$$\text{Tiempo total para } 6 \times 50 \text{ oscilaciones} = 59 + 69 + 59 + 60 + 60 + 59 = 357 \text{ s}$$

$$\text{Frecuencia media} = 6 \times 50 / 537 = 0,84033613 \text{ Hz} = 0,84 \text{ Hz}$$

En este ejemplo en particular, el tiempo podía haber sido medido para 300 oscilaciones pero entonces no podíamos haber realizado estas comprobaciones sobre la consistencia de las medidas. Además, se habría necesitado una gran concentración para contar 300 oscilaciones sin ningún fallo.

Debe notarse además que las unidades de cada cantidad son incluidas en los pasos. De este modo las unidades derivadas pueden ser chequeadas para evitar el riesgo accidental de equivocarlas al calcular.

### **Salvaguarda de los cálculos**

Todos los cálculos y deducciones deberían escribirse en el diario de laboratorio o en otro lugar especial para cálculos. No necesitan ser reproducidos en su totalidad en el informe final pero deben de estar disponibles para posibles respuestas o experimentos posteriores o para usarse de modelo en trabajos similares. En lugar de relegarlos a la memoria, todas las suposiciones, símbolos, unidades y otra relevante información debe ser claramente explicada junto con los cálculos.

#### **6.1.8. Análisis de gráficos**

Normalmente los resultados de un experimento pueden analizarse gráficamente y así ser comparados con el análisis numérico. Una ventaja del análisis gráfico es que te permite tener una visión clara de la tendencia, comportamiento y dispersión de los resultados. Además sirve como comprobación de los datos que nos ofrece un ordenador que ha estado recogiendo y clasificándolos según un modelo diferente al que nos interesaba.

Los datos se pueden representar de la manera más precisa que los aparatos nos ofrezcan y si dibujamos una línea como aproximación esta puede no tener en cuenta algunos puntos dispersos que serán estudiados aparte o ignorados.

La seguridad de estos procedimientos puede ser destruida por dos errores muy comunes: el llamado Error de Origen Magnético y Error de Punto Crítico.

#### **Error de Origen Magnético**

Este error se comete al obligar a que la curva pase por el origen cuando no tiene que ser así, por ejemplo, cuando medimos la deformación de un resorte al aplicar una determinada fuerza, al cero de fuerza debe corresponder el alargamiento cero pero un desplazamiento del origen de medidas nos movería toda la curva, lo cual no nos impediría calcular la constante elástica como tangente de la recta, pero si obligamos a esta a pasar por el origen cambiamos la pendiente cometiendo así un error (ver figura). Este error es más difícil de observar en las gráficas que no

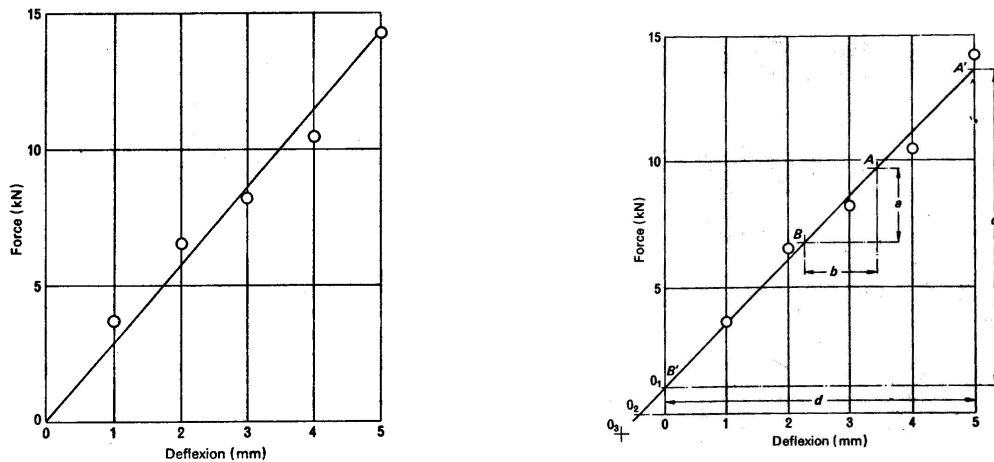


Figura 6.5: Error de Origen Magnético

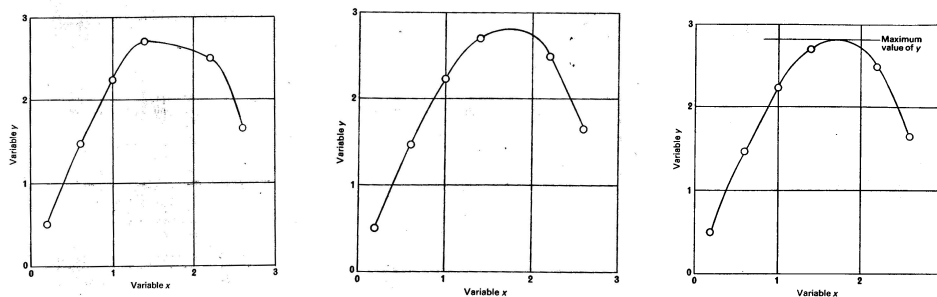


Figura 6.6: Determinación de máximos.

son rectas, para que no distorsione la representación el origen no debe ser tomado en cuenta al unir los puntos (al menos no con tanto interés).

**Error de Punto crítico**

A veces los puntos obtenidos en un experimento nos indican que el fenómeno observado tiene un punto crítico (máximo o mínimo) el cual sin querer hacemos coincidir con el punto más cercano, mientras que en realidad no tiene porqué estar ahí, sino entre éste y el punto siguiente. Este error se comete por la inclinación que se tiene a que el final de la curva esté en uno de los puntos obtenidos en el experimento; intentaremos solucionarlo haciendo que la curva no presente escalones (aproximando a una parábola).

**Medida de Pendientes**

Para hacer que el error de la pendiente de la recta, obtenida a partir de los resultados de una experiencia, sea lo más pequeño posible se puede intentar que los puntos escogidos estén lo más separados posible.

Cuando se toman medidas a partir de los gráficos hay que tener en cuenta que el proceso de impresión puede dar lugar a cambios de escalas. Por esto es mejor utilizar la escala que se observe en la gráfica que una regla para tal determinación.

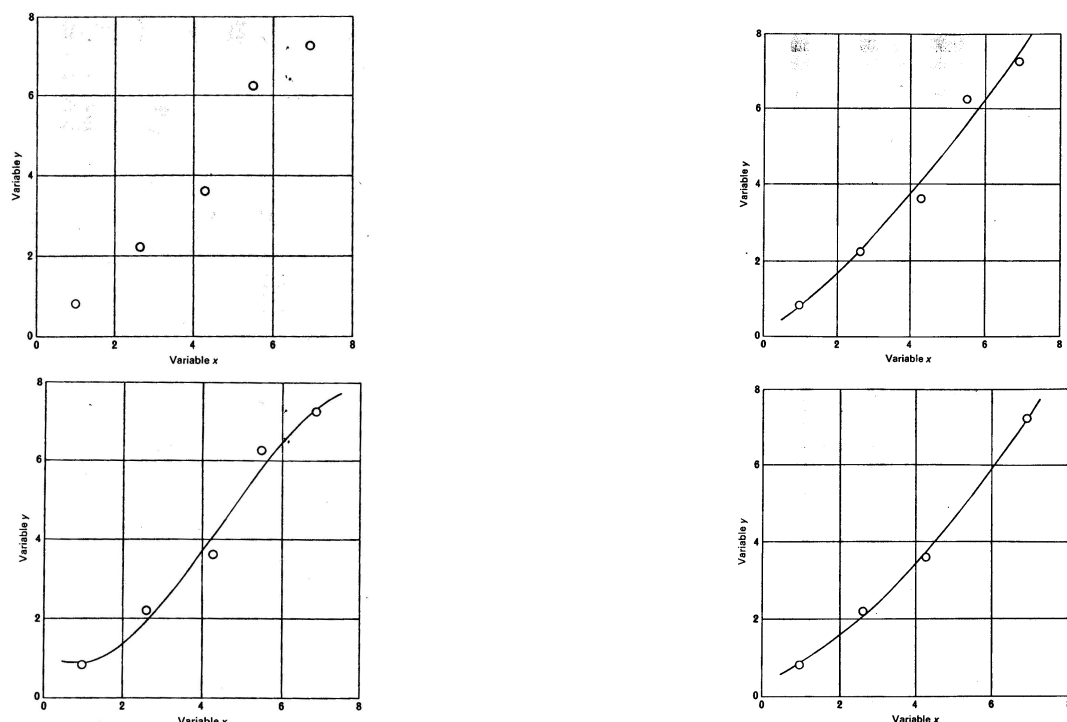


Figura 6.7: Distintos ajustes a los mismos datos.

### Ajuste de curvas para datos experimentales

No es fácil encontrar la curva que más se aproxime a todos los puntos obtenidos. A esto hay que añadir la dificultad de no conocer la relación matemática teórica que relaciona las variables representadas, así como los posibles intervalos de error significativos que nos pueden dar varias posibilidades a elegir.

Empezaremos buscando una relación matemática sencilla (recta o parábola generalmente) que será válida si los puntos que no coinciden con la curva tienen al menos un intervalo de error que corta a la misma.

Si los errores de los puntos no nos permiten dibujar una curva sencilla, entonces tendremos que intentar una más complicada (cúbica o logarítmica) pero debemos tener los suficientes puntos y un intervalo de valores suficiente para justificar el empleo de una gráfica de este tipo, si todavía no fuese suficiente una función así intentaremos desestimar un punto o dos que se salgan de lo normal. Esto será posible si tenemos suficiente seguridad de que el punto eliminado podía ser debido a un error y si la gráfica así obtenida es sencilla.

El siguiente paso es tener en cuenta posibles errores más graves producidos durante la realización del experimento tales como cambio de origen, de escala, errores al calibrar los aparatos..., por ejemplo en la gráfica siguiente se ve que si suponemos posible que al pasar del punto 3 al 4 hemos cambiado el origen de medidas, entonces la gráfica sería una recta discontinua (deberíamos volver a comprobar los instrumentos para ver si es posible que éste fuera el error).

Si aún así no nos fuera posible encontrar la gráfica, entonces tendremos que recurrir a polinomios de grado mayor o hacer una aproximación de Fourier.

Recomendamos usar la más sencilla de las curvas que se aproximen a los datos, siempre que el intervalo de error lo permita. Además la dificultad de elegir la curva disminuye con el número de puntos de que dispongamos (aunque a veces esto puede resultar caro, difícil o largo de realizar).

No debemos olvidar la posibilidad de que la variable Y no dependa de la variable X o sus potencias, sino de  $1/X$  o una potencia suya (para determinar la potencia exacta nos ayudare-

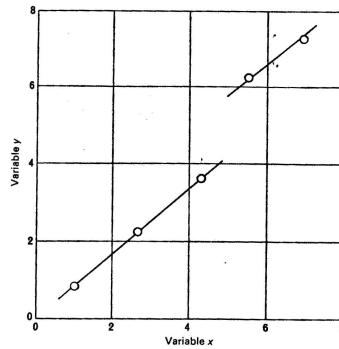


Figura 6.8: Aproximación por dos rectas.

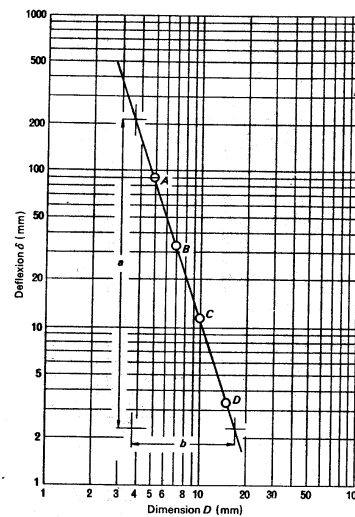


Figura 6.9: Representación bilogarithmica.

mos del análisis dimensional) con lo cual la gráfica se podría hacer mucho más sencilla si se representase  $Y$  frente a  $1/X$ .

En caso de que  $Y$  dependa de una potencia entera de  $X$  podemos usar las representaciones logarítmicas consistentes en tomar logaritmos a ambos lados de la ecuación que relaciona las variables obteniendo una dependencia lineal entre  $\log Y$  y  $\log X$ : al ser representados en una escala logarítmica en la cual el espaciado entre los valores decrece según el logaritmo. el problema de este tipo de papel es el hecho de que el intervalo entre dos valores decrece rápidamente, así mientras en el principio es fácil ver donde se sitúa  $X=2.3$  es muy difícil ver el punto  $30.2$  debido a que la separación disminuye demasiado.

**Ajuste de la recta de regresión por el método de los mínimos cuadrados**

Con frecuencia, se plantea el problema de encontrar una expresión matemática  $y = f(x)$  de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno, a partir de una serie de  $N$  medidas,  $(x_i, y_i)$ , de las magnitudes  $x$  e  $y$  que lo caracterizan.

Cuando la representación gráfica del fenómeno estudiado proporciona una distribución de los puntos experimentales que parecen tener la forma de una curva plana determinada es conveniente obtener la ecuación de esta curva que probablemente será la expresión de la ley física que rige

el fenómeno estudiado. El método más potente (y, sobre todo, el más simple) conocido es el de regresión por los mínimos cuadrados. Estos métodos son aplicables a diversas curvas de distintos grados, pero nosotros, en este primer curso de introducción, nos vamos a limitar a estudiar el caso más simple posible de una ley física lineal, es decir de *una recta de regresión*.

Dicha recta debe de cumplir la condición de que los puntos experimentales queden distribuidos simétricamente a ambos lados y lo más próximos posible de la misma. Esta condición se cumple si se obliga a la recta, de ecuación  $y = ax + b$ , cumpla con que la expresión

$$C(x, y) = \sum_i (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (6.1)$$

tenga un valor mínimo. Derivando respecto a  $a$  y a  $b$ , y haciendo ambas derivadas iguales a cero, tras una serie de operaciones, se obtiene:

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.3)$$

Si la recta hubiera de pasar por el origen de coordenadas, el problema se simplifica notablemente, puesto que, al ser  $b = 0$ , resulta

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (6.4)$$

que proporciona directamente el valor de la pendiente de la recta.

Además de los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen, es interesante obtener el denominado *coeficiente de correlación lineal*,  $r$ , que nos da una medida del grado de correlación (de aproximación) entre los valores de las variables  $x$  e  $y$ , es decir, hasta que punto  $x$  e  $y$  están relacionados mediante una función lineal. La expresión de  $r$  es

$$r = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}} \quad (6.5)$$

y que varía entre cero (correlación inexistente) y  $\pm 1$  (correlación completa).

Las expresiones correspondientes al cálculo de error de la pendiente y de la ordenada en el origen son

$$\Delta a = \left[ \frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(N - 2) \sum (x_i - \bar{x})^2} \right]^{1/2} \quad (6.6)$$

$$\Delta b = \left[ \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \left( \frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{N - 2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.7)$$

### 6.1.9. Integración

La integración que surge cuando se analizan datos de pruebas puede realizarse gráficamente, numéricamente u, ocasionalmente, analíticamente. Por ejemplo para encontrar el volumen de aceite fluyendo de un tubo circular, se presenta un sondeo con la medida de la velocidad. Como la resistencia superficial causa que la velocidad del fluido varíe desde cero en la superficie hasta un máximo en el centro, se hicieron medidas de velocidad,  $V$ , para diferentes posiciones  $r$ . Las lecturas se muestran en la figura 6.10.

Considerando el volumen fluyendo en un elemento anular de radio  $r$  y espesor  $dr$ , el volumen total que ha fluido viene dado por

$$Q = \int_0^{r_o} 2\pi r V(r) dr$$

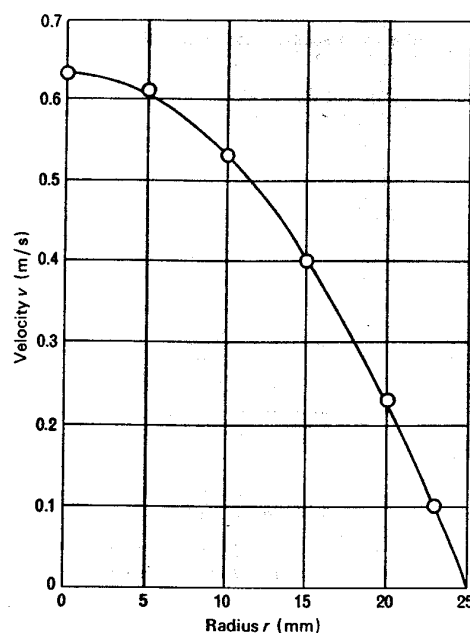


Figura 6.10: Perfil del flujo en una tubería.

donde  $r_o$  es el radio del tubo, que es de 25 mm en el caso considerado. El valor de  $V(r)$  ha sido calculado y representado como muestra la figura.

El volumen que pasa por segundo (el flujo), que es igual a  $2\pi$  multiplicado por el área bajo esta segunda gráfica, puede obtenerse de diferentes formas.

### Contando cuadros

Este método elemental no debe ser desechado por infantil. La técnica es contar el número de cuadros, de la rejilla de referencia, dispuestos bajo la curva. La mayoría pueden ser agrupados en bloques de 100 o de 10.000, dejando aquellos que estén cerca de la curva para ser contados individualmente. El número de cuadros partidos por la línea es redondeado arriba o abajo de acuerdo si se juzga que más o menos de la mitad del cuadro cae bajo la curva. Un perfeccionamiento para reducir el efecto del error humano en estas consideraciones y reducir el efecto del espesor de la línea, es contar grupos de cuadros alternativamente sobre y debajo de la línea.

Este método ha sido aplicado al ejemplo visto antes y da un volumen fluido de  $0,615 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ .

### Con planímetro

Si está disponible, un planímetro puede medir rápidamente áreas irregulares. El instrumento se sitúa en la gráfica, que debe descansar en una superficie horizontal suave, y un punto se mueve por el límite del área que medimos. La lectura del instrumento se multiplica por un escalar constante. La constante debe ser determinada a través de la medida de un área rectangular conocida, en papel gráfico, así se compensará automáticamente para la escala reducida. Cuando se usó un planímetro en la gráfica de la figura se obtuvo un valor de  $0,621 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$  para el fluido considerado. Lo que realmente nos da el planímetro es el área que encierra una cierta curva, por la que lo pasamos para medirla.

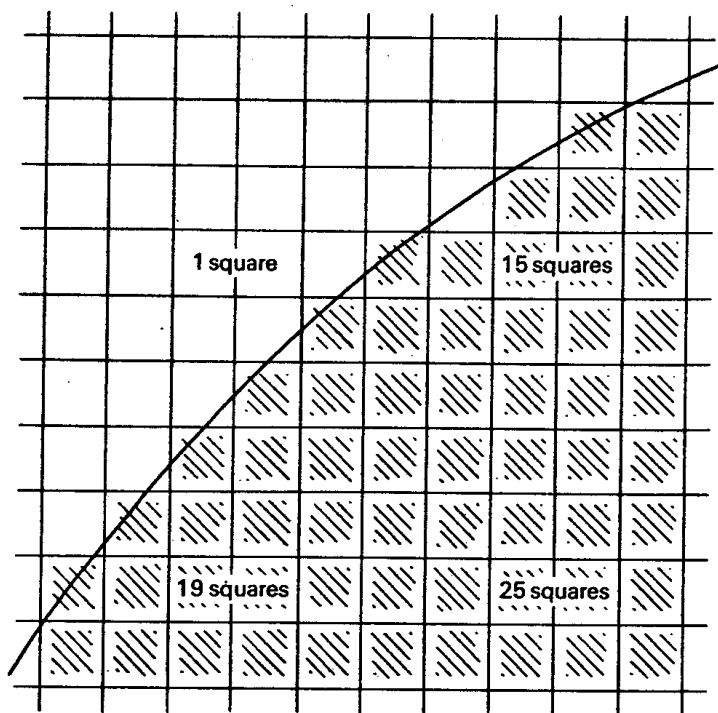


Figura 6.11: Integración mediante cuenta de cuadros.

### Por cálculo numérico

Se conocen varias fórmulas, tales como la regla de trapecio y varias formas de las reglas de Simpson. Normalmente no deben aplicarse directamente a la medida de un dato, porque así no podemos disipar el error ocasional en la lectura de un instrumento. Cuando aplicamos al problema del flujo en el tubo la regla de Simpson da un flujo de  $0,624 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ .

En un intento de mejorar la exactitud se repitió el cálculo usando puntos adicionales interpolados de la gráfica. Se obtuvo un nuevo valor de  $0,615 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ .

La fórmula del rectángulo es:  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$

La fórmula del trapecio es:  $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$

La fórmula de Simpson es:  $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

### Por ajuste de la curva

En una expresión algebraica pueden tenerse que ajustar datos experimentales; normalmente se tendrá una expresión algebraica para la integral. Hacer esto, no sólo da un valor rápido de la integral, sino que la solución está disponible para ser aplicada para integrar de forma parecida otros conjuntos de datos.

En el caso particular tratado, aparece que el perfil de la velocidad era parabólico. En consecuencia, la gráfica mostrada en la figura se representa con la velocidad frente al radio al cuadrado. Obteniéndose una recta cuya ecuación calculamos, para después integrar analíticamente la expresión obtenida.

Para mantener la solución general, ambas variables fueron expresadas adimensionalmente, dividiéndolas por sus valores máximos respectivos. La línea recta mostrada se ajustó por la



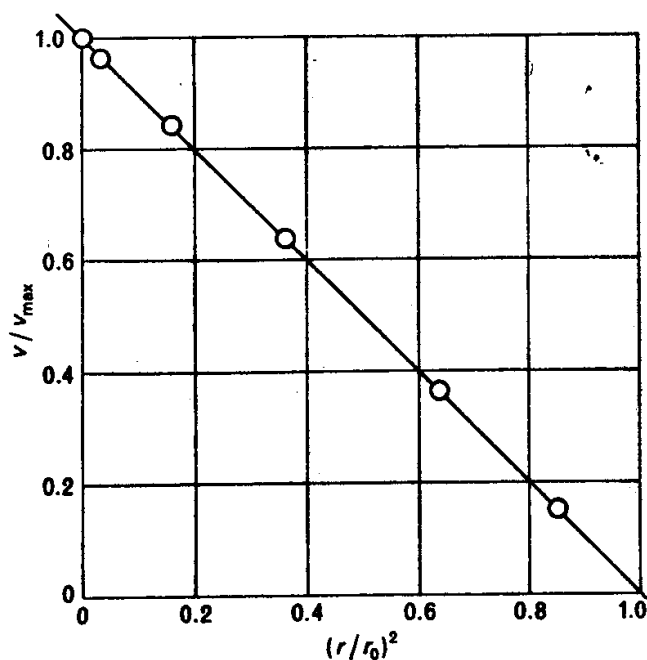


Figura 6.12: Normalización del perfil del flujo en una tubería para realizar un ajuste de la dependencia de  $v$  con la posición  $r$ .

ecuación:

$$\frac{v}{v_{m\acute{a}x}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

De esta expresión se calculó el volumen vertido siendo igual a  $\pi v_{m\acute{a}x} r_0^2 / 2$  que equivale a  $0,618 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ , en el caso considerado.

### 6.1.10. Interpolación y extrapolación

A menudo encontramos que las medidas no pueden hacerse con los aparatos operando en las condiciones exactas para los resultados deseados. Esto es porque la variable que tiene que tomar un valor determinado tiene que ser considerada como variable dependiente del resultado del experimento. Por ejemplo, encontrar la posición de una parte de una máquina en un tiempo dado podría resultar difícil, mientras debe ser fácil medir el tiempo en el cual alcanza una serie de posiciones fijas.

La segunda posibilidad es que la variable independiente no tiene por qué ser ajustable infinitesimalmente.

Una tercera posibilidad es que en el experimento el intervalo de valores disponibles para una variable sea demasiado pequeño. Por ejemplo, decisiones que incluyan la solidez a largo plazo o la resistencia a la corrosión de un material, han de basarse en una prueba relativamente corta (temporalmente hablando).

En todos estos casos las condiciones en el punto requerido pueden obtenerse de una gráfica a partir de los datos disponibles. Cuando el punto necesitado cae dentro del intervalo de los valores representados, el proceso se conoce como interpolación, de lo contrario es extrapolación. Naturalmente no hay necesidad de dibujar una gráfica en cada caso, pueden usarse métodos matemáticos, como el ajuste de curvas.

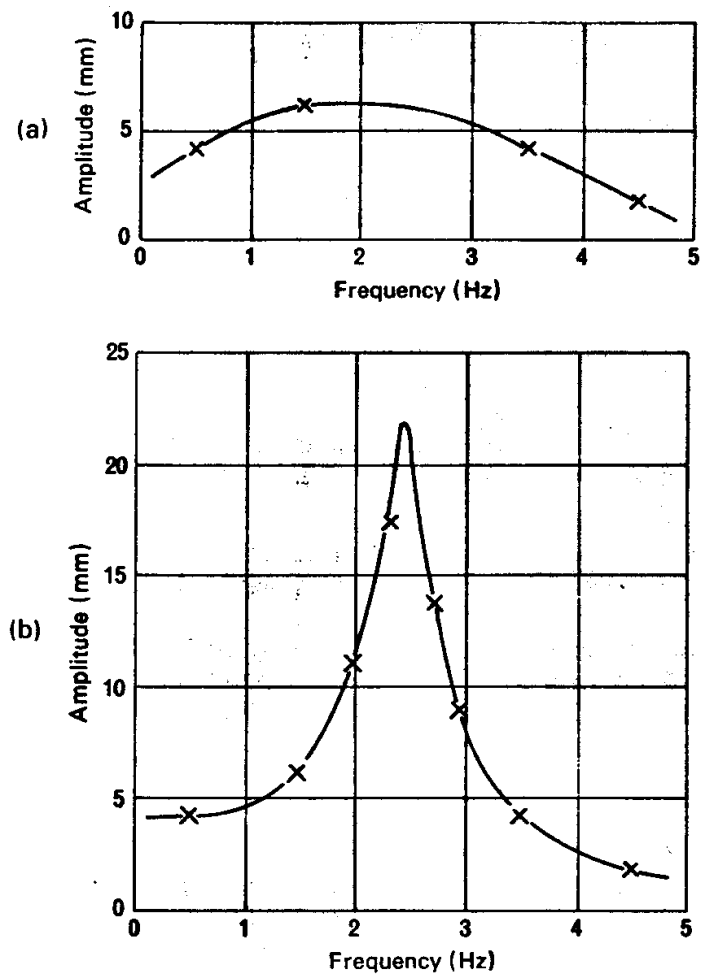


Figura 6.13: Resonancia en amplitud de un motor.

### Interpolación

Probablemente el método más sencillo es dibujar una gráfica. Las escalas deben elegirse para dar una curva plana clara, o mejor aún, una recta. Un origen fuera del cero puede mejorar la exactitud. Como siempre, deben evitarse los errores comunes al dibujar gráficas, que fueron discutidos anteriormente.

Es posible que entre los puntos representados pueda ocurrir un cambio desafortunado en el carácter de la curva. En la figura 6.13 está representada la amplitud de vibración de un motor de un coche (en ordenadas), medida en cuatro frecuencias determinadas.

Desde la curva dibujada a partir de los datos experimentales la amplitud correspondiente a una frecuencia de 2,5 Hz. parece ser 6 mm. El valor real a esta frecuencia es aproximadamente cuatro veces mayor (21 mm) como podemos ver en la figura, donde los mismos datos se han representado con valores adicionales a otras frecuencias. Este fenómeno (resonancia) es bien conocido en vibraciones tanto mecánicas como eléctricas, y el experimentador debería estar normalmente al cuidado de ello. En casos menos conocidos pueden detectarse comportamientos similares con una observación cuidadosa de los instrumentos y aparatos, mientras se cambian las variables. Donde sea posible los valores medidos deben ser tomados cercanos a los puntos interpolados.

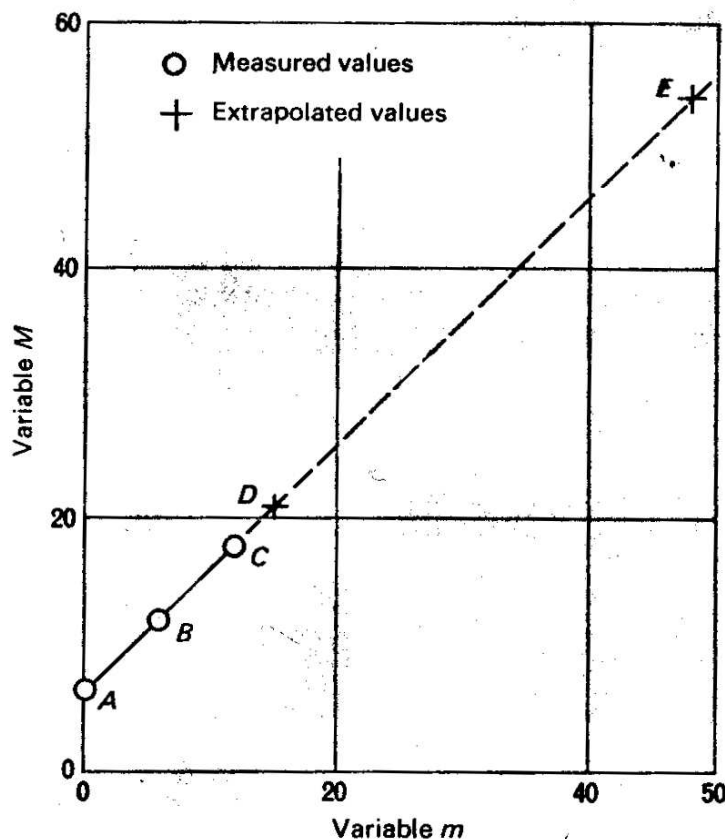


Figura 6.14: Peligro de la extrapolación.

Las fórmulas de interpolación usadas a veces, tratan de ajustar por algún tipo de línea los puntos obtenidos. Veamos como ejemplo el caso de datos tomados de una tabla. Queremos interpolar un valor intermedio de  $z$ , que es función de  $x$ , conociendo los valores de  $x$  para  $z$  mayor y menor:

$$\begin{aligned} x_1 < x < x_2 \\ z_1 < z < z_2 \end{aligned}$$

En este caso la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(x_1, z_1)$  y  $(x_2, z_2)$  nos dará el valor  $z$  para  $x$

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= m(x_2 - x_1) \\ z &= z_1 + m(x - x_1) \end{aligned}$$

Admitiendo dependencia lineal de las variables.

### Extrapolación

La extrapolación es siempre menos segura. Es inevitable tener que especular en regiones no estudiadas, así que es necesario extremar el cuidado. Consideremos, por ejemplo, las medidas ilustradas en figura 6.14.

Tres pares de valores de la variables  $M$  y  $m$  caen en la recta  $ABC$ . Parece razonable extra-  
 polar esta línea un tramo pequeño hasta el punto  $D$ . La pregunta es, ¿cuál es el límite de tal  
 extrapolación?, ¿es razonable extrapolarse al punto  $E$  y más allá? De nuevo es necesario considerar  
 la situación física. En este caso  $M$  es la masa de un niño en  $kg$  y  $m$  es su edad en meses. La

experiencia muestra que en una situación similar la masa no crece linealmente con el tiempo por mucho tiempo. Es anormal que el chico pudiera pesar 27 kg a la edad de cuatro años como representa el punto E, es impensable que después de 20 años ( $m=240$ ) pueda "pesar" 123 kg. Afortunadamente no es necesario tener experiencia de casos similares para evitar errores de extrapolación. Hay una regla de oro de la extrapolación que dice: "La extrapolación de una curva es no ser confiado cuando resulta ser la interpolación entre un punto determinado y el punto infinito-infinito". En un sistema físico real el modo de comportamiento cambiará, en un punto desconocido, a lo largo de la curva. La extrapolación, con una recta, hacia el punto donde una variable (como  $x$ ) es infinita es correcto, pero es difícil de dibujar. Es mejor cambiar la variable a  $1/x$  y extrapolar hacia el cero.

### 6.1.11. La inspiración.

Hasta ahora sólo se ha considerado el análisis rutinario. Esto es suficiente para casi todos los experimentos y la técnica puede probarse y perfeccionarse practicando. Para una pequeña proporción de experimentos, hace falta algo más. Esto es mucho menos palpable y más difícil, algunos dirían imposible, de enseñar.

Cada experimentador debe estar preparado para la ocasión cuando los resultados fallan en una nueva prueba. Parece ser que las no concordancias experimentales puedan ser el efecto de una variable ignorada previamente o quizás puede descubrirse una simple relación entre dos variables.

Aunque poco se conoce sobre la razón por la que algunas veces se te ocurren cosas, es conocido que esperar pacientemente que ocurra no es suficiente. Esperar, un día o más, puede ayudar, pero solamente después de que un problema ha sido estudiado y se ha mirado cada detalle, suficiente tiempo, el subconsciente se apodera de él. Luego estímulos de otros problemas o vivencias de cada día pueden ser suficientes para dar una nueva intuición o un punto de vista diferente. Por ejemplo se considera que los altímetros precisos (para aviones) se inspiran en un par de focos en el teatro. La inspiración sólo vino porque el inventor ya había gastado mucho esfuerzo buscando una forma de medir la altitud, antes de relajarse.

El subconsciente puede ser ayudado en su tarea si se hace un esfuerzo consciente para solucionar un problema de formas diferentes. Si cambiamos el punto de vista, una situación puede describirse exactamente pero de forma diferente. La botella de vino medio vacía del pesimista, le parecerá medio llena al optimista. Un juicio cuidadoso de una persona le parecerá una conjetura a otra persona. A veces esto es útil para buscar una posición desde el punto de vista contrario a uno obvio. Durante la búsqueda de un material adecuado para el cilindro de luz-sensible en las fotocopias Xerox, el Selenio fue probado y rechazado por su insuficiente sensibilidad. Luego se descubrió que era demasiado sensible para el experimento realizado -la luz indirecta había velado la imagen-. Un obstáculo que estropea una lectura (como éste) puede considerarse como una demostración fortuita de un efecto particular en lugar de una maldita molestia. Una mancha de moho que estropea un cultivo de bacterias permitió a Fleming descubrir la Penicilina. Otros muchos casos similares son popularmente conocidos.

## 6.2. Comunicación de los resultados

### 6.2.1. La necesidad de una comunicación efectiva de los resultados.

Cuando un experimento, los cálculos y las demás tareas se han completado y se ha conocido la significación de los resultados es difícil mantener el entusiasmo inicial. Pero debería recordarse que este trabajo será desechado en gran parte hasta que se completen los dos pasos finales. Primero, la información y experiencia obtenidas debe ser unida en un informe de cualquier tipo y, segundo, los usuarios potenciales de la información deben leer u oír y conocer dicho informe.

Estos dos pasos finales merecen la misma atención cuidadosa que los otros pasos del trabajo.

En otras ocasiones será necesario explicar las nuevas ideas o persuadir a alguien para que esté de acuerdo con unas particulares propuestas.

Aunque sólo unos pocos tienen una habilidad natural para la comunicación, cualquiera puede alcanzar un alto grado de competencia con la práctica y siempre pensando con antelación en el efecto que cada afirmación, párrafo e ilustración tendrá sobre sus lectores o audiencia.

Para que sea exitosa una comunicación tiene que fijar la atención del lector o del oyente frente a un gran número de distracciones inevitables. Debe mantenerse tan corta e interesante como sea posible, siempre que la información deseada se exponga con claridad y completitud.

### 6.2.2. Preparando un informe escrito.

Los informes escritos requieren técnicas diferentes que los orales, pero el trabajo preliminar es el mismo en ambos casos. Preparar un informe no debe ser visto como un fin por sí solo: cada informe debería tener un propósito definido que debe ser definido antes de empezar el trabajo. Este propósito debe guiar la forma que el informe toma. Algunos informes malos se han hecho por un intento para adaptarlos a una forma estándar de una determinada escuela o firma. La calidad de un informe debería ser medida por cómo de bien hace su trabajo de transmisión de la información y no por cuán bien se ajusta a una fórmula arbitraria tal como: un esquema, dos tablas, tres gráficas y 750 palabras.

#### El receptor

Cuando se prepara un informe escrito o una comunicación oral, es vital visualizar la actitud y competencia de la gente a la que va dirigido. Informes de un mismo tema que aparezcan en "EL INGENIERO" o "EL IDEAL" deberían ser bastante diferentes incluso si son escritos por la misma persona. Gente distinta tiene diferentes intereses y experiencias previas y esto debería estar presente en la mente del escritor o del orador.

Algunas veces un sólo informe debe servir para más de un grupo de gente y aquí es necesario tener especial cuidado o nadie encontrará el informe satisfactorio. Normalmente se debe dar prioridad a los intereses de un grupo pero los otros no deben ser completamente desechados.

Los informes de laboratorio de los estudiantes son un caso especial. Aunque leídos y corregidos por alguien con una experiencia extensa del tema, estos deberían ser escritos como si fueran dirigidos a un lector con el mismo nivel de entrenamiento en las técnicas que el estudiante. Otra peculiaridad de tales informes es que frecuentemente son sólo un trabajo preliminar que se somete a una evaluación, sin producirse nunca el informe final.

Es a veces difícil, después de trabajar en un problema, apreciar cuáles son los puntos que pueden aparecer como difíciles a alguien que lea o escuche la descripción del mismo desde el primer momento. Casi todos los estudiantes tienen experiencia de una lección que les pareció completamente oscura debido a que el orador no se había dado cuenta de explicar un detalle obvio o por no haber proporcionado alguna información de base bien conocida.

### 6.2.3. Guía sobre la distribución de los informes escritos.

Deben ser observadas ciertas convenciones pero éstas dejan sitio para variaciones individuales en el estilo de la presentación. El tema debería ser ordenado en el orden que se muestra a bajo. Este orden familiar y lógico permite a un lector encontrar e inspeccionar un punto particular sin tener que trabajar todo el informe. La lista completa mostrada está indicada para informar sobre trabajos que duran varios meses. Para proyectos menos ambiciosos, incluyendo los experimentos de laboratorio de los estudiantes, algunas simplificaciones son necesarias.

Aunque algunos ejemplos de esta distribución pueden encontrarse en las actas de las sociedades educativas, sería necesario darse cuenta de que el estándar de escritura no es muy uniforme.

### La distribución normal de un informe

**1. Título del trabajo y nombre de los autores.** El título debe ser corto y dar una idea clara del tema. Por ejemplo, Medida de la potencia de salida en la serie de mecanismos de petróleo BLMC en lugar de solamente Mecanismos de petróleo.

**2. Sumario, resumen.** Esta sección marca brevemente el propósito y extensión del trabajo sobre el que se informa y da las principales conclusiones a las que se ha llegado. El propósito debería ser introducido como un hecho sobre el trabajo realizado en lugar de como una simple afirmación de un objetivo. Por ejemplo, es mejor decir 'se realizaron medidas de la conductividad térmica del PVC' que 'Objetivo: medir la conductividad térmica del PVC'. Esto es así por que, en el instante en que el informe es escrito, la intención del experimento ha sido realizada ya. El resumen está diseñado para permitir al lector decidir rápidamente si el informe contiene alguna cosa útil en el campo de sus intereses. Debería ser hecho para ayudarlo, no para atraparle en un gasto de tiempo sobre un informe que no le es útil. No es necesario darle a este párrafo el título 'summary' ('Resumen'). Su posición entre el título y el cuerpo principal del informe es suficiente para identificar su propósito.

**3. Contenidos.** Una lista de los contenidos, dando el número de página de cada subsección y de cada ilustración, se requiere en informes largos. Uno debería de incluirlo sólo cuando se espera que constituya una ayuda real al lector y no para dar al informe un aspecto más formal.

**4. Notación.** Lo siguiente es una lista breve definiendo el significado, unidades cuando sean necesarias, de cada símbolo que aparece en el informe. Los símbolos se ordenan alfabéticamente, primero las letras y luego los símbolos griegos. Algunos autores definen también cada símbolo cuando aparece por primera vez en el cuerpo del informe pero es normalmente suficiente con sólo hacer esto para los símbolos poco usuales.

**5. Introducción.** La introducción debería poner el trabajo sobre el que se informa en la perspectiva del campo en el que tiene un interés relevante. Debería comenzar con una revisión breve de los trabajos previos sobre el mismo tema dando referencias a las publicaciones existentes y continuar entonces con las justificaciones para hacer ese trabajo. Finalmente el contenido del trabajo debe de ser señalado.

**6. Teoría.** La teoría relevante, si existe, debería ser dada, pero sólo unas líneas básicas. Cada ecuación básica debería ser introducida con una explicación, si es apropiada, del significado físico. Con una breve descripción del método de manipulación (cálculo) pero sin dar detalladamente los pasos intermedios, cualquier ecuación derivada o soluciones deberían entonces escribirse. Algunas veces, incluso en la forma resumida, la teoría será excesivamente larga. En este caso, o cuando una serie de detalles sean requeridos para explicar un método no usual, es sensato dar sólo las conclusiones teóricas en este punto y poner la teoría completa en un apéndice al final del informe. Una vez más el autor debe tener en mente la capacidad y experiencia típicas de sus lectores. También debe de ayudar a un recién llegado al tema en concreto dando referencias a trabajos sobre teorías previamente publicadas sobre las que su propio trabajo se ha construido.

**7. Experimentación.** Los aparatos y el procedimiento experimental deberían ser descritos, cualquier descripción detallada de los equipos nuevos o complicados se puede pasar a un apéndice posterior. Dibujos cuidadosamente preparados, y ocasionalmente fotografía, deberían ser incluidas donde puedan ayudar al lector para conocer el procedimiento experimental. Un informe no debería normalmente contener una lista de cada instrumento utilizado o de los números de identificación de los equipos de medida utilizados. Esta información, la cual se recoge en un grueso libro de laboratorio, no es de interés para el lector normal.

**8. Resultados.** Los resultados obtenidos de las teorías y el experimento se deben dar a continuación. Frecuentemente una representación gráfica es más sencilla de entender y permite que se vean más rápidamente las diferencias entre teoría y experimento. Normalmente no es necesario dar los resultados tanto en forma gráfica como numérica. Pero en donde ha sido realizado un experimento costoso o complicado para obtener propiedades físicas básicas, las lecturas obtenidas deberían ser incluidas en el informe. Las medidas experimentales serán de cualquier modo guardadas indefinidamente en el libro de laboratorio.

Las unidades se deben dar para todas las magnitudes físicas. Las unidades usadas deberían ser las normalmente aceptadas y por lo tanto familiares al lector. Ellas deben ser consistentes a lo largo de todo el informe. Por ejemplo, si la temperatura se da en grados Fahrenheit entonces la entalpía debería darse en el sistema de unidades térmicas británico. Lo mejor es usar el sistema internacional (SI) de unidades. Cuando un informe se escribe para lectores que usan tanto el sistema Imperial como el SI de unidades, se debe escoger uno como principal pero los valores en el otro sistema deben darse entre paréntesis, por ejemplo, '... una masa de 0.97 kg (2.14 lbm)'. Al igual que las medidas de magnitudes físicas, esta sección debería contener resultados descriptivos, con fotografías o dibujos por ejemplo de casos como el comportamiento del flujo o la fractura de la superficie.

**9. Discusión de los resultados y sugerencias para un trabajo posterior.** Aquí aparecen los propios comentarios del autor sobre su trabajo. Podría querer señalar los puntos fuertes o débiles de su dispositivo experimental o de su método de cálculo. Podría comparar sus resultados con los de otros autores. Ya que toda investigación experimental y teórica es parte de un continuo despliegue de nuevos conocimientos, cada informe debería iluminar un poco más el camino. Los siguientes pasos del desarrollo deberían sugerirse aquí o podría, ocasionalmente, afirmarse que una línea particular de investigación no es de valor para seguirla. Además trabajos que el autor ha comenzado ya, deberían ser mencionados para reducir en lo posible las posibles duplicaciones innecesarias.

**10. Conclusiones.** En esta sección los resultados principales se resumen y su significación se explica brevemente. Por ejemplo, podría ser bueno el acuerdo entre el experimento y una teoría dada. Una posibilidad importante a considerar es que un conjunto de experimentos podrían dar resultados no concluyentes para confirmar o rechazar una teoría particular. Fuera de la escuela y las universidades, pocos informes están relacionados con la confirmación de teorías. Las conclusiones más probables son sobre la aplicabilidad de un diseño para un propósito particular o de un nuevo material para una cierta tarea. Esta sección debería ser lo suficientemente corta para que las principales conclusiones se pudieran encontrar rápidamente por un lector ocasional.

**11. Agradecimientos.** Como cortesía, se deberían expresar las gracias a cada ayuda recibida. Esta costumbre tiene la ventaja de hacer conocidos a departamentos y gente que han desarrollado una particular destreza en el campo de los servicios técnicos así como para crédito allí donde existiese duda.

**12. Apéndices.** Como se ha mencionado ya, las teorías detalladas y las descripciones de aparatos deberían ser puestas en apéndices al final del informe. La mayoría de los lectores no desearán estudiar estos detalles, por lo menos durante su primera lectura del informe. El uso de apéndices es especialmente útil cuando hay dos clases de lectores. El cuerpo principal puede estar dirigido al lector general quien principalmente está interesado en las conclusiones cualitativas, mientras que los apéndices pueden satisfacer a alguien que este haciendo un trabajo similar y que tenga un interés más profundo sobre el método utilizado.

**13. Referencias.** Cualquier trabajo publicado al cual se ha hecho referencia debería ser listado aquí en el orden en que aparecieron en el informe. La forma habitual de cada referencia es: Nombre del autor e iniciales, título del trabajo, título de la revista o libro, editorial, número del volumen, número de página, año de publicación. La lista de las referencias normalmente forma el apéndice final.

La longitud de cada sección puede variar desde cero hasta algunas páginas dependiendo de cuanto trabajo se esté informando. El ánimo debería ser incluir sólo la información que el lector requerirá.

Los estudiantes deben de ser especialmente cuidadosos para preveer la reacciones de sus lectores. Frecuentemente la descripción de los aparatos o del método de operación no se requiere. Estos informes incompletos permiten al profesor chequear rápidamente si un experimento estándar ha sido completado satisfactoriamente, ya que él está ya familiarizado con los instrumentos.

#### 6.2.4. Construcción del informe.

La primera versión de un informe no puede ser escrita en una única operación. Es útil construirla gradualmente en los siguientes pasos:

- (a) Anote las razones para hacer dicho trabajo y para escribir el informe.
- (b) Esquematice en una lista los temas a incluir en cada capítulo o sección. El resumen, la introducción y las conclusiones se pueden dejar para después.
- (c) Colocar estos temas en un orden lógico, transfiriendo algunos a otras secciones diferentes si es necesario.
- (d) Asegúrese de que toda la información está disponible. Las necesidades de más cálculos o experimentos deben ser vistas en este punto.
- (e) Chequee que el informe como se ha distribuido presentará los objetivos originales.
- (f) Desarrolle cada uno de los puntos de la lista en secciones, manteniendo un balance entre las diferentes partes.
- (g) Pinte las gráficas y otras ilustraciones en la forma en que van a aparecer en el informe final. Numérelas y elija los títulos.
- (h) Escriba el resumen, introducción y las conclusiones. Una primera versión o borrador del informe estará lista para un examen crítico.

#### 6.2.5. Estilo de escritura.

Es normal escribir los informes en pasiva refleja, es decir 'se midió' mejor que decir 'medí el diámetro'. Esta práctica produce informes modestos, impersonales y evita dificultades cuando se informa de las operaciones combinadas de un grupo.

El uso de palabras simples en sentencias simples hará un informe agradable de leer. El tema, no el estilo de escritura, debería fijar la atención del lector. Superlativos como 'el más grande', 'el mejor' y 'más' deberían normalmente reservarse para los máximos en el sentido matemático.

Es con frecuencia conveniente abreviar las frases a las que se recurre frecuentemente. Salvo que la abreviación sea muy bien conocida, por ejemplo DLCA para Agregación de Cluster Limitada por Difusión, la frase debe escribirse completa la primera vez que aparezca y la abreviación debe darse entre paréntesis. Por ejemplo, al principio de un informe se podría escribir 'En el proceso de Agregación de Cluster Limitada por la energía de Reacción (RLCA)'. Entonces para el resto del informe se puede usar la abreviación RLCA sin ninguna explicación adicional.

Las palabras solas no se abrevian normalmente, aunque hay excepciones comunes como 'Fig.', 'Ec.' y 'Ref.' por 'Figura', 'Ecuación' y 'Referencia' respectivamente.

Las abreviaciones coloquiales no son aceptables. Los números hasta diez se suelen escribir con la palabra correspondiente y el resto con el número aunque no es conveniente mezclar como en 'de siete a 30'.



Para enumerar todo tipo de ilustraciones se suele usar una misma serie de números, aunque algunos autores toman diferentes series para los distintos tipos de ilustraciones como son fotografías, dibujos y gráficos, pero este método no tiene ventajas reales y hace el informe discontinuo y menos atractivo.

Es improbable que el primer borrador de un informe sea satisfactorio. Será necesario examinarlo cuidadosamente varias veces para asegurarse, primero, de un buen balance entre la longitud de los diferentes puntos y, segundo, que cada sentencia proporcionará el significado deseado a la persona para la que se ha escrito. Algunas palabras como 'calor' y 'esfuerzo' tienen diferente significado para los físicos que para otros. Cada palabra debe ser seleccionada cuidadosamente para realizar su tarea particular. No siempre dos palabras o frases tienen el mismo significado, mitad no es lo mismo que 0.5.

Algunos grupos de palabras tienen un significado particular que puede no ser el deseado. Es necesario que cualquier frase dudosa o ambigua se reescriba.

Una lectura posterior del informe puede revelar la excesiva repetición de una palabra o frase. Si es posible se debe evitar esta repetición pero siempre que no sea a costa de la claridad. Una última necesidad es comprobar la redacción. Debe tenerse en cuenta que una redacción pobre producirá la impresión de dejadez, ingenuidad y podrá reducir la confianza en el informe. Cuando el informe se mecanografía, no es tarea del mecanógrafo corregir la gramática y la redacción, la responsabilidad total recae sobre el autor.

### 6.2.6. Ilustraciones.

Un buen dibujo puede mostrar información muy económicamente. Antes de producir un dibujo para un informe el autor debe decidir que información debería ser mostrada y que habilidad poseerá el lector para interpretar el dibujo. Dibujos de detalle y montaje como los usados para manufactura no son recomendados para informes técnicos. Por ejemplo, al leer sobre algunas pruebas de la distribución de la temperatura en un pistón, el lector no debería ser distraído por las dimensiones y tolerancias de cada parte del pistón. Se le debería dar una impresión de la forma y tamaño y detalles sobre el punto en el que se mide la temperatura.

En un esfuerzo para ayudar al lector se usan frecuentemente vistas en perspectiva. Estas son difíciles de hacer y no son muy eficientes excepto para mostrar las posiciones relativas de las partes de los aparatos, información que frecuentemente es irrelevante.

Más útiles son los esquemas, los diagramas de circuitos son los ejemplos más conocidos pero técnicas similares trabajan bien en otros campos. Por ejemplo, los diagramas de flujo pueden ilustrar procesos químicos o programas de ordenador.

Sea el que sea el tipo de dibujo elegido, debería ser hecho en tinta.

Supóngase que se ha hecho una prueba de las características de una caldera pequeña. Un intento para ilustrar el equipo podría resultar en algo como la figura 6.15. Aquí se ha realizado un intento inexperto para dar una vista isométrica dando una idea de la apariencia general de la planta. Debería haber sido usada una pluma más ancha y las partes deberían haberse nombrado en letras de imprenta. No se puede confiar en los tamaños relativos y posiciones de las partes ya que éstas bien podrían haber sido distorsionadas para ajustar cada cosa en el diagrama.

La figura 6.16 representa el mismo sistema de caldera. Este diagrama se hizo mucho más fácilmente. El principio de operación es ahora obvio y las magnitudes medidas pueden ser vistas fácilmente. La atención se ha puesto en el grosor de las líneas y los rótulos. Finalmente ha sido usado un título con sentido.

### 6.2.7. Gráficos.

Un lector deseará obtener más bien una información cualitativa que cuantitativa a partir de las gráficas así, al imprimir los informes, solamente se incluirán las líneas de referencia suficientes para establecer la escala. Las curvas deberían ser pintadas en líneas gruesas para permitirles destacar sobre el fondo. La forma general de las curvas puede entonces ser vista de un vistazo. Cuando el gráfico es usado para permitir comparar los valores calculados y medidos, es normal

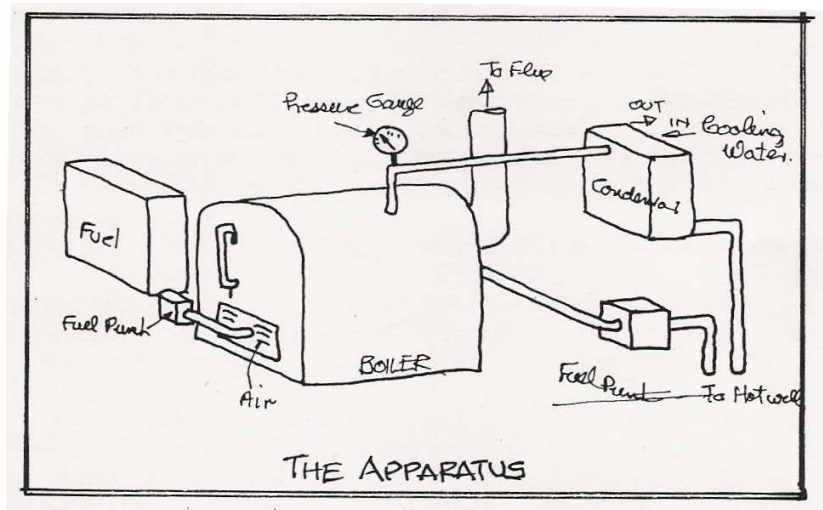


Figura 6.15: Ilustración de una caldera.

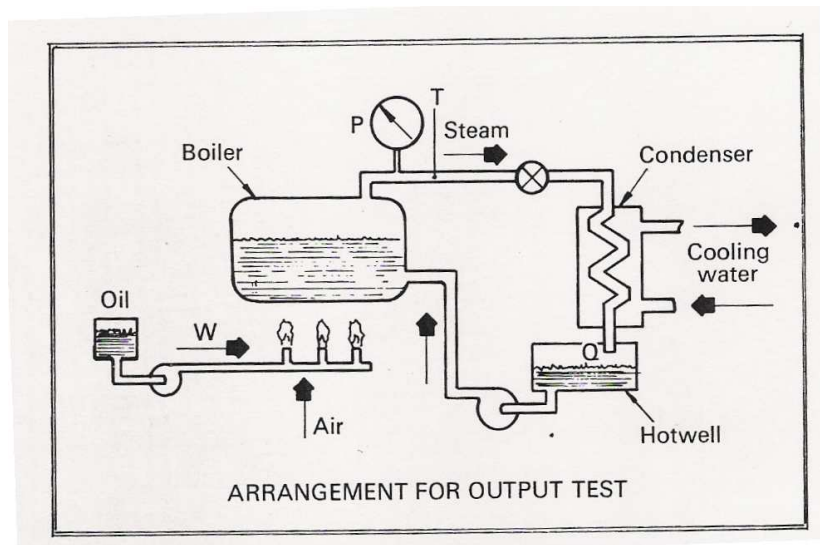


Figura 6.16: Esquema de la distribución de elementos para la prueba de la caldera.

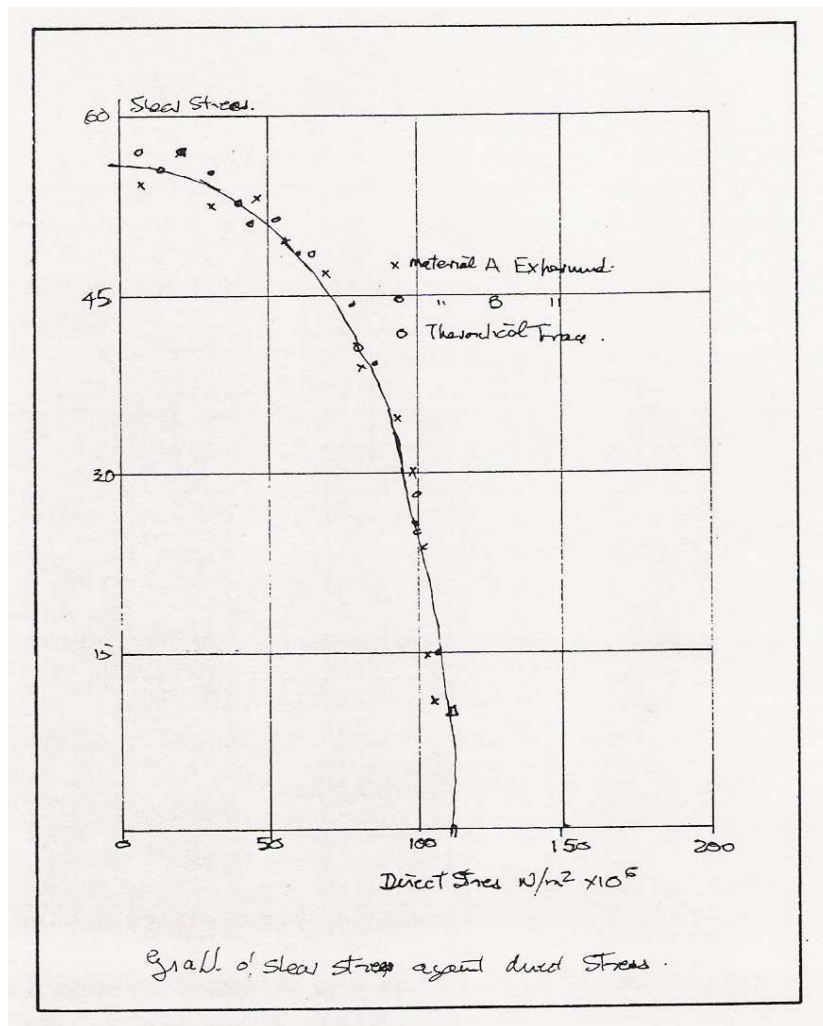


Figura 6.17: Representación inadecuada de los resultados de un experimento de elasticidad.

trazar la curva que representa los valores calculados y mostrar las medidas experimentales como puntos individuales. Una multitud de símbolos, cruces, cuadros, triángulos, etc., pueden ser usados para distinguir los conjuntos diferentes de resultados.

Donde se incluyen un número de gráficos para presentar resultados similares, debería ser usada la misma escala para simplificar las comparaciones. Las escalas deberían, en cualquier caso, ser elegidas para hacer cada división de la rejilla de referencia igual a uno, dos, cinco o diez unidades en lugar de los menos inteligibles tres, cuatro, siete, etc. unidades. Si un gráfico se pinta con un 'origen falso' debería darse una nota para evitar el riesgo de malentendidos por parte del lector.

La figura 6.17 es una mala gráfica que intenta mostrar los resultados de un experimento particular sobre elasticidad bajo esfuerzos compuestos comparado con las predicciones teóricas.

Las escalas se han escogido mal, el espacio es desperdiciado en el eje x y las divisiones están mal. Es difícil distinguir los valores teóricos de los experimentales. Ambos, la curva y los puntos dibujados demasiado débilmente para poderlos distinguir claramente sobre la rejilla de referencia. Lo peor de todo es que la curva se ha dibujado a mano alzada en lugar de con la ayuda de una regla de curvas. Las unidades del eje horizontal son ambiguas, debería leerse (stress  $\times 10^6$ )  $N/m^2$  o stress ( $10^6 \times N/m^2$ ) en lugar de stress  $N/m^2 \times 10^6$ .

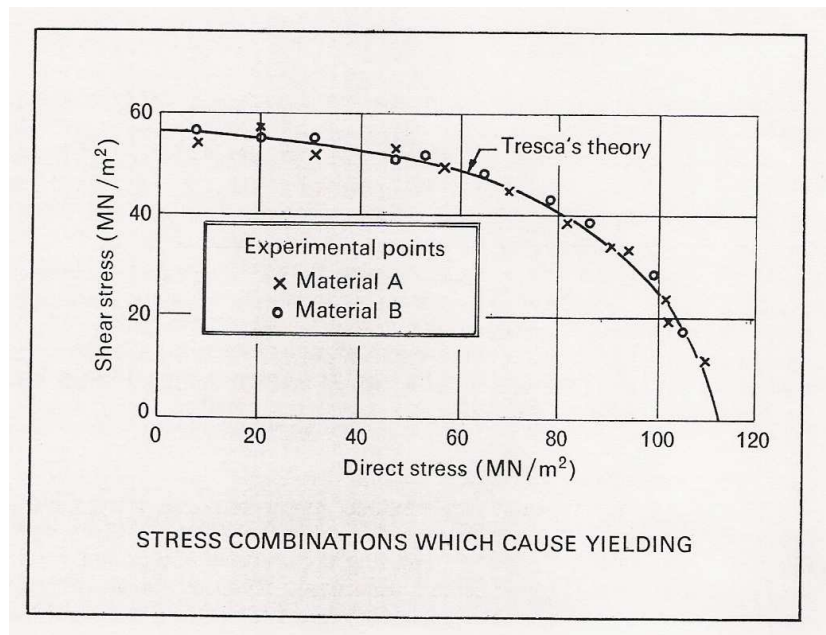


Figura 6.18: Representación de los resultados de elasticidad adecuada para su mejor entendimiento.

Un mejor intento de dibujar los mismos datos se muestra en la figura 6.18. Además de evitar los fallos señalados anteriormente, se ha añadido un título más útil y se ha prestado mayor atención a los rótulos. Cuando se manda un gráfico en papel de dibujo, se tiene que tener un especial cuidado para que se vean resaltadas las curvas y puntos. Debería ser dibujada una rejilla en negro para contrastar con el papel. El efecto final parecerá similar a la figura 4 pero con la rejilla pintada formando un fondo coloreado.

### 6.2.8. Comunicaciones cortas.

Algunas situaciones no necesitan un informe completo como el señalado anteriormente. Detalles del trabajo deberían sólo ser incluidos cuando es cierto que ayudarán al lector. Frecuentemente es conocido que el lector sólo necesitará, por ejemplo, detalles de un conjunto particular de instrumentos o posiblemente de resultados de una cierta serie de medidas. En tales casos el autor debería distribuir el material requerido en un orden lógico y distribuirlo como si fuera una parte de un informe entero. Debe ser cuidadoso en incluir suficientes detalles relacionados para permitir a su lector hacer un uso inteligente de la información principal. Por ejemplo, cuando se dan figuras de características de un motor de coche debería ser indicado si están o no ajustados el silenciador, la dinamo, el ventilador, etc.

La forma más habitual de escribir comunicaciones carta es la carta (letter). El tiempo no permite normalmente hacer una distribución y borrador. La información relevante tiene que ser reunida y montada mentalmente antes de empezar a escribir. Es necesaria mucha experiencia para dominar la técnica. En primer lugar cada carta debería ser releída para pensar en las mejoras que podrían ser hechas si tuviera que ser reescrita. La próxima carta incorporará dichas mejoras.

### 6.2.9. Charlas (Comunicaciones Orales).

La claridad hablando es necesaria diariamente y no sólo ocasionalmente para lecturas formales, pero la mayoría de la gente es reacia a aceptar críticas de su efectividad hablando, incluso

de ellos mismos. Esto es lastimoso, ya que el rendimiento se puede mejorar considerablemente cuando se es dado un poco de conocimiento sobre las técnicas. Poder exponer un punto de vista o explicar clara y resumidamente una idea es una considerable ventaja en todas las profesiones.

### **Charlas informales**

En discusiones, directas o por teléfono, la técnica es similar a la de escribir una carta. La información relevante se ha de unir mentalmente antes de hablar y no se puede hacer un borrador. Afortunadamente, el locutor puede fácilmente preguntar para clarificar algún punto particular. Es importante pensar antes de empezar a hablar. 'Es mejor estar en silencio y permitir a alguien pensar que eres tonto que hablar y permitirle que se de cuenta de que así es.'

### **Charlas formales**

Incluso el orador más experimentado tiene que trabajar duro para prepara una lección útil. El trabajo preliminar es el mismo que para un informe escrito. Se ha encontrado que el efecto de leer un informe cuidadosamente compuesto, palabra por palabra, es habitualmente desastroso e innatural. Incluso es peor el efecto de recitar una charla memorizada. Por eso, en lugar de terminar un informe, debería ser hecha una lista detallada de cabeceras y tópicos. Este esquema puede entonces ser rellenado espontáneamente durante la lectura.

Una presentación verbal tiene la considerable ventaja de permitir al orador ver inmediatamente el efecto que está teniendo en sus oyentes. Esto le permite cambiar su aproximación (o en un caso extremo, su profesión).

Una comunicación verbal es más pequeña que una escrita y por lo tanto es necesario tener cuidado y evitar intentar incluir demasiada información. Por ejemplo, un periódico de calidad que ocupa a la mayoría de los lectores durante un par de horas debería requerir sobre 40 horas para transmitirse por televisión. De esto se sigue que la mayoría de los detalles dados en un informe escrito tienen que ser omitidos en una lectura. Una razón de 100 palabras por minuto hablado debería considerarse cuando se planea una charla de un cierto tiempo.

Es necesario repetir los tópicos principales por que la audiencia no puede parar y retroceder a un punto previo.

Afortunadamente como la audiencia sólo escucha una charla los ligeros errores de estilo que podrían ser irritantes al lector son pasados fácilmente.

#### **La forma de hablar.**

El tema objeto debe ser conocido completamente antes de dar una charla para proporcionar confianza. Sin embargo, no es necesario memorizar detalles del orden en que cada tópico debe ser expuesto; un conjunto de notas deberían ser usadas abiertamente. Un estudiante practicará una charla formal mucho antes en su carrera cuando se encuentre con una audiencia tolerante y simpática. Para ayudar las Instituciones Profesionales celebran secciones de jóvenes. Un ingeniero ambicioso debería grabar las charlas y escucharlas varias veces. Si recupera su autoconfianza podrá entonces forzarse para evitar la repetición excesiva de su frase favorita y hablar más lentamente y claro en el siguiente intento. Incluso si su propio estilo no mejoran podrá ser más considerado con otros oradores.

Si este capítulo ha hecho aparecer el trabajo de hacer comunicaciones exitosas como duro, ha causado la impresión correcta.

### **6.2.10. Referencias.**

1. BS 1991: PART1: 1967, Letter Symbols, Signs and Abbreviations, 1967.
2. G.H. Vallins, Good English, Pan Books, 1968.
3. Sir Ernest Gowers, Plain Words, HMSO, 1973.
4. An A.S.M.E. Paper, American Society of Mechanical Engineers, Manual MS-4. April 1964.

### 6.3. Problemas.

1. Las medidas de la intensidad frente al voltaje para un determinado material se muestran en la tabla siguiente

V(v)	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
I(mA)	1.02	1.99	3.05	4.10	4.89	6.10	7.05	7.95	9.00

Represente gráficamente los resultados de dicho experimento. Determine, utilizando el método de los mínimos cuadrados el valor de la resistencia de dicho material.

2. Las medidas del desplazamiento frente al tiempo para un móvil se reflejan en la tabla siguiente

e(m)	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25
t(s)	0.52	1.49	2.55	3.60	4.39	5.60	6.55	7.45	8.50

Represente gráficamente los resultados de dicho experimento. Discuta que tipo de movimiento presenta el móvil. Y, determine, utilizando el método de los mínimos cuadrados el valor de la velocidad del mismo.

3. Utilice los datos del problema anterior para determinar por interpolación el valor del espacio recorrido cuando el móvil llevaba 3.00 segundos en su movimiento. Compare el resultado con el que se obtendría utilizando la línea de regresión que ha determinado por mínimos cuadrados.
4. Extrapole el valor de la intensidad para  $V=0$  V para el caso del problema primero.