Puntos Administrativos

- La lección 3 (Teoría de errores)
  - Terminada
  - Los informes (60%!) se pueden mejorar mucho
- La lección 4 (Método) está en su URL
- Queda la Lección 5 (Magnitudes Físicas)
  - Es lo más difícil de esta asignatura
  - Pero tenemos tiempo…

Técnicas Experimentales Básicas

Lección 5: Magnitudes Físicas

Esquema

- Magnitudes
- Unidades y Dimensiones
- Análisis Dimensional
  - Introducción
  - Dos postulados
  - Ejemplos (Pendulo; Deformación de materiales)
- La Teoría de Buckingham
  - Con los ejemplos
  - Otro ejemplo (similar a la Práctica 9)

Bella?

Más bella?

Aún más bella?

Belleza: Una Cantidad Cuantificable?

Magnitudes

- ¿Cuál es la magnitud de la belleza de Penélope Cruz?
- Para cuantificar (medir o estimar) las propiedades de algo, hace falta un *sistema de unidades*
  - La belleza no tiene unidades, por lo cual no es una cantidad que tenga magnitud
  - Un sistema de unidades siempre empieza con unas decisiones arbitrarios

Sistemas de Unidades

- El Sistema Internacional (MKS)
  - Unidades fundamentales
    - longitud (m ~ L)
    - masa (kg ~ M)
    - Tiempo (s ~ T)
  - Unidades derivadas (fuerza, aceleración, …)
- Un sistema del clase LMT (longitud, masa, tiempo)
- Existen otras posibilidades (infinitas)

Otra posibilidad

- Habríamos podido definir, en vez de masa, por ejemplo la fuerza (peso) como una unidad fundamental (e.g., un sistema del clase LFT)
- En este caso, masa sería una unidad derivada ($M \sim F\ T^2\ L^{-1}$)

- Si no se elige con cuidado, la definición del sistema puede llegar a unas constantes superfluas (a evitar)

El Convenio Arbitrario

- Aquí, nos quedamos con el Sistema Internacional (MKS)
- Está definido para evitar las constantes superfluas

Importancia de las dimensiones

- 23 de septiembre de 1999
- Mars Climate Orbiter se estrelló contra Marte
- Causa principal
  - Lockheed Martin Astronautics (Denver) dió los valores de unos parámetros de fuerza en **libras** (1 libra ~0.22 N)
  - la NASA interpretó el impulso en Newtons: una sobreestimación de 454%

- **Coste: *$125,000,000***

Los alumnos y las unidades

- ¿Un litro de plomo tiene una masa de 100,000kg?
- ¿ Aceleración de gravedad, $g = 840 \text{ m s}^{-2}$?
- ¿ La velocidad del carrito, $v = 643 \text{ m s}^{-1}$?

Conclusión preeliminaría

- Hay que prestar mucha atención en las unidades
- Además: las unidades son la primera etapa para un entendimiento del concepto de ***dimensión***
- La coherencia de las dimensiones
  - se aplica a toda la física
  - nos puede ayudar a
    - resolver problemas
    - facilitar el entendimiento de la física.

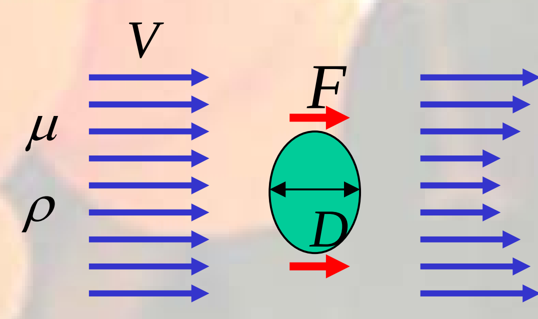
Análisis Dimensional: Introducción

- Herramienta poderosa para el análisis y entendimiento de la física
- Aplicaciones en:
  - Detección de errores de cálculo.
  - Resolución de problemas cuya solución directa conlleva dificultades matemáticas insalvables.
  - Creación y estudio de modelos reducidos.
  - Consideraciones sobre la influencia de posibles cambios en los modelos.

Ejemplo de un problema

Práctica 9

- Fuerza de arrastre en una esfera con velocidad relativa a una líquida (nota : la solución de Stokes es un caso especial …)
- Digamos que afrontamos esta situación por la primera vez
- Es intuitivo que la fuerza depende de $F = f\left(D, V, \rho, \mu\right)$
  - Diámetro (D) de la esfera
  - La velocidad (V) del movimiento (la caída)
  - La densidad (ρ) del líquido
  - La viscosidad (μ) del líquido



- ¿Pero que forma tiene?

$$F = f\left(D, V, \rho, \mu\right)$$

Determinación Experimental (Bruta)

- Se podría determinar con muchos experimentos, por ejemplo variando cada parámetro con 100 valores
- Necesitaríamos $100(D)\times100(V)\times100(\rho)\times100(\mu) = 10^8$ condiciones experimentales y mediciones de la fuerza (**y repeticiones**)
- En lugar de eso, el análisis dimensional nos permite ahorrar mucha esfuerza (a ver más tarde; volveremos a este ejemplo)

Análisis Dimensional: Teoría

- La teoría es bastante abstracta
- In mi opinión, parece más a la matemática que a la física, por lo cual:
  - Se presenta la teoría de forma breve
    - Un tratamiento más bien práctica
    - Hincapié en ejemplos
  - Se refiere a la bibliografía (por quien le interesa la teoría abstracta):
    - Palacios, J. , 1964, *Análisis Dimensional*. Espasa-Calpe, Madrid.
    - Los apuntes (PDF) del Dr. Juan Antonio Morente (capítulo V)
    - http://www.ugr.es/~andyk/Docencia/TEB.html

Análisis Dimensional: Esquema de Teoría

- El concepto de dimensión
- El 1º postulado: Proporcionalidad y Homogeneidad
- El 2º postulado : los constantes ineludibles
- Ejemplos sencillos del análisis dimensional
- Los grupos no-dimensionales (Π)
- La Teorema de Buckingham (Π)
- Ejemplos de aplicación de la Teorema Π

El concepto de dimensión (ejemplo en sistemas familiares)

- Medimos las cantidades en ciertas unidades
  - La longitud se mide en m
  - La masa se mide en kg
  - Para estas **cantidades fundamentales**, por definición hay **una dimensión**
- Siguiendo el convenio, podemos distinguir entre

los p_i – **Cantidades fundamentales** [masa M (kg), longitud L (m), tiempo T (s)]

los q_i – **Cantidades fundamentales** [masa M (g), longitud L (cm), tiempo T (ms)]

los f_i – **Cantidades derivadas** [velocidad V (m s^{-1}), fuerza F (N), energía (J)]

Candidad/relación		**dimensiones**			**N**
$V \sim L/T$					2
$E \sim MV^2$	$\sim$	ML^2/T^2			3
$F \sim MA$	$\sim$	MV/T	$\sim$	ML/T^2	3

J **N**

Teoría de la próxima diapositiva

Las dimensiones se ven claramente cuando está escrito en función de las cantidades fundamentales

Una Ley Fundamental

- ***La razón entre dos medidas de la misma cantidad (fundamental o derivada, independiente) no tiene dimensión***

Juan pesa **dos** veces más que Ana (**no** 2 N, **ni** 2 kg, ***no dimensión***)

El primer postulado

- Sean ($\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$) y ($\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_n}$) de la misma cantidad fundamental pero con dos unidades distintas, y ($\mathbf{f_1, f_2, \ldots, f_n}$) una cantidad derivada
- Entonces la razón $\mathbf{f(p_1, p_2, \ldots, p_n)/f(q_1, q_2, \ldots, q_n)}$ no tiene dimensión
- (hay que reconocer que una cantidad medida en g kg^{-1} tiene dimensión nula)

- Matemáticamente, esto es posible únicamente en el caso que la cantidad derivada es proporcional a un producto de exponentes de las cantidades fundamentales:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = C\, p_1^{a1}\, p_2^{a2} \ldots p_n^{an}$$

Proporcionalidad

- El primer postulado nos indica la proporcionalidad (no igualdad)

$$y \sim x_1^{\alpha_1} ....x_n^{\alpha_n}$$

- Por lo cual, la relación se queda dependiente de un constante (C)

$$y = C \cdot x_1^{\alpha_1} ....x_n^{\alpha_n}$$

Unas consecuencias importantes

- Las leyes físicas no dependen del sistema de unidades
- Las ecuaciones (leyes físicas) deben ser dimensionalmente homogéneas

Dos tipos de constantes ineludibles

- Factor de proporcionalidad, C, entre entidades

$$y = C \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots. x_n^{\alpha_n}$$

- ¿C depende de la naturaleza del cuerpo?
  - Sí : constante particular (ejm: Ley de Hooke, muelle)

$$F = \boxed{k} \cdot \Delta l$$

  - No: constante universal (ejm: constante de gravitación)

$$F = \boxed{G} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

El Segundo Postulado

- Las seis constantes universales conocidas:

G (Newton - gravedad)
k (Boltzmann - termodinámica)
ε_o (Coulomb – permisividad del vacío)
N_A (Avogadro - moles)
c (Maxwell - luz)
h (Planck - radiación)

- “Son ineludibles las constantes universales que relacionan dos magnitudes inseparables, y superfluas todas las demás”. (J. Palacios)

- **Un sistema coherente de unidades** elimina las constantes superfluas de las ecuaciones fundamentales, quedando solamente las particulares y las seis universales enunciadas anteriormente

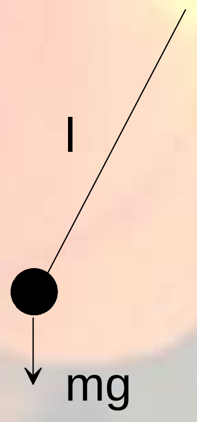
Consecuencias de los dos postulados

- Se puede entender muchísimo de un problema por un análisis de las dimensiones

Un ejemplo de utilidad de la análisis dimensional

- Se puede usar el análisis dimensional para deducir (o acordarse de) la forma de una ecuación

- ¿Qué determina el periodo de oscilación de un péndulo?
  - Variables potencialmente relevantes:
    - g --- aceleración de gravedad (L/T2)
    - m --- masa (M)
    - l --- longitud (L)
    - A --- amplitud de la oscilación (L)
  - La dimensión del periodo P es (T)



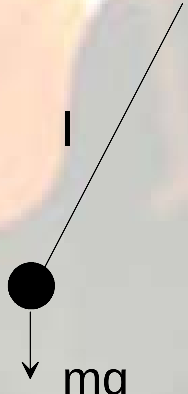
Periodo de Oscilación de un Péndulo

- Truco: (recordándose de un poco de física): para pequeños valores de A, P no depende de A
- Combinando las variables relevantes
  - g --- aceleración de gravedad (L/T^2)
  - m --- masa (M)
  - l --- longitud (L)
- La ***única*** posibilidad que es dimensionalmente correcta (T) es

$$P \sim \sqrt{(l/g)}$$

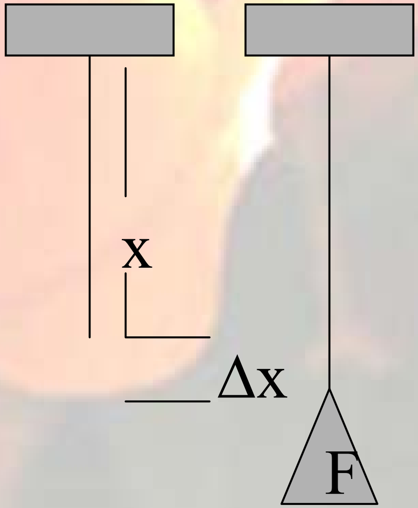
- Para amplitudes más grandes $P \sim (\sqrt{(l/g)})\, f(l/A)$

  (a ver más tarde)



Otro ejemplo

- El módulo de elasticidad (módulo de Young)
  - Un hilo metálico de longitud (x) y diámetro L está sometido a un esfuerzo de tracción sufre una deformación (Δx)
  - Se sabe que la ***deformación relativa*** $\varepsilon = \Delta x/x$ depende de la tensión ($\sigma \sim ML^{-1}T^{-2}$) y del módulo de elasticidad de la material ($E \sim M L^{-1} T^{-2}$)



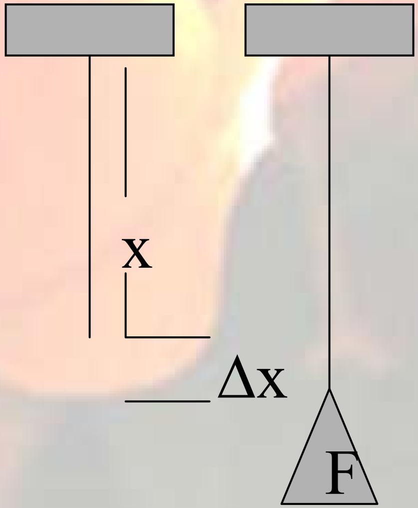
  - ¿Qué es la velocidad de la onda de (de)compresión (sonido) que se forma por la deformación?

Módulo de Elasticidad

- Pista física: una onda de compresión es un desequilibrio dinámico entre elasticidad y **inercia**

- Variables relevantes:
  - módulo de elasticidad, E ($ML^{-1}\,T^{-2}$)
  - densidad de material, ρ (ML^{-3})
- Dimensionalmente, la velocidad debe ser:

$$v \sim \sqrt{(E/\rho)}.$$



Grupos no-dimensionales

- En cada caso, se saca de la solución en función de un grupo no-dimensional :

$$\text{Pendulo: } \frac{P^2 g}{l} \qquad \text{Elastico: } \frac{v^2 \rho}{E}$$

- Volveremos a los ejemplos otra vez
- En general, es útil formar grupos de variables (grupos Π) con dimensión nula

Grupos Π no-dimensionales

- Hay que buscar n-m grupos de variables (grupos Π) con dimensión nula

n = parámetros físicos (variables relevantes)

m = dimensiones del problema

Teorema de Buckingham (pi)

- Aprovechamos de los dos postulados previos
- Para una situación física, combinamos los *n* variables en *n*-*m* grupos Π con dimensión nula

$$q_1 = f\left(q_2, q_3, \ldots, q_n\right) \quad \Rightarrow \quad g\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0$$

Los *n* parámetros dimensionales se agrupan en *n*-*m* parámetros independientes y no-dimensionales

$$G\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}\right) = 0$$

$$\Pi_1 = F\left(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}\right)$$

Teorema de Buckingham (pi)

- El teorema NO nos indica la forma funcional ni de G ni de F

$$G\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}\right) = 0$$

$$\Pi_1 = F\left(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}\right)$$

- Pero existe, y la forma funcional entre los parámetros Π se puede buscar experimentalmente.

- Los *n*-*m* parámetros no-dimensionales son independientes.

Teorema de Buckingham (pi)

- Ejemplos de grupos con dimensión nula
  - Péndulo: $P^2 g/l$
- **¿Cómo se buscan?**
  - Definimos un grupo Π como un producto de exponentes de las variables relevantes
  - Ejemplo del pendulo: variables son P, g, l

$$\Pi = P^{\alpha} g^{\beta} l^{\gamma} \quad \rightarrow \quad (T)^{\alpha} (L/T^2)^{\beta} (L)^{\gamma} = T^{\alpha-2\beta} L^{\beta+\gamma}$$

$$\text{(dimensiones)} \quad = T^0 L^0$$

  - Elegimos (α,β,γ) para que Π tenga dimensión nula

Ejemplo del Péndulo

- $\Pi = P^{\alpha} g^{\beta} l^{\gamma}$
- Para que Π tenga dimensión nula, hace falta

$$\alpha - 2\beta = 0$$
$$\beta + \gamma = 0$$

- Tenemos libertad (hay varias soluciones)
- Elegimos la más sencilla
  - Con $\beta=1$, $\Pi = \Pi_1 = P^2 g/l$
  - En general, en este caso $\Pi = (\Pi_1)^{\beta}$
- Aqui, todos los grupos se determinan por Π_1

un solo grupo Π

- $G(\Pi_1) = 0$
- $\Pi_1 = f(ø) =$ constante, por lo cual: $P \sim \sqrt{(l/g)}$

Seguimos con el péndulo

- Si incluimos la amplitud A
  - Buscamos grupos sin dimensión con la forma

$$\Pi = P^a g^b l^c A^d = (T)^a (L/T^2)^b (L)^c (L)^d = T^{a-2b} L^{b+c+d}$$

  - Por lo cual

$$a - 2b = 0$$
$$b + c + d = 0$$

  - Con 4 variables y 2 ecuaciones, hay una solución en dos dimensiones (nos quedamos con más libertad aún); necesitamos dos grupos Π
  - Elegimos dos vectores que forman el base de la solución

$b=1$, $d=0$ → $c = -1$, $a = 2$. El vector es $e_1 = (2, 1, -1, 0)$

$b=0$, $d=-1$ → $c = 1$, $a = 0$. El vector es $e_2 = (0,0,1,-1)$

- Todos vectores que satisfacen las ecuaciones son combinaciones lineales de estos dos vectores

Seguimos con el péndulo

- Ahora hay dos grupos independientes sin dimensión

  $e_1 = (2, 1, -1, 0) \rightarrow \Pi_1 = P^2 g/l$

  $e_2 = (0,0,1,-1) \rightarrow \Pi_2 = l/A$
- Todos los grupos sin dimensión se pueden escribir

  $$\Pi = \Pi_1^{\alpha} \Pi_2^{\beta}$$
- Si f(P,g,l,A) no varia con cambios de escala (o unidad), entonces se puede escribir usando Π_1 y Π_2: $G(\Pi_1,\Pi_2) = 0$

- En el caso del péndulo, esto significa $\Pi_1 = f(\Pi_2)$:

$$P^2 g/l = f(l/A)$$

$$P = (\sqrt{(l/g)})\, f(l/A)$$

Truco

- ¿ Si la amplitud se hubiera asignado como un ángulo (θ) en vez de un longitud (A)?
  - Un ángulo no tiene dimensión

$$\theta = \mathrm{sen}^{-1}(A/l) = f(\Pi_1)$$

- El resultado es lo mismo!

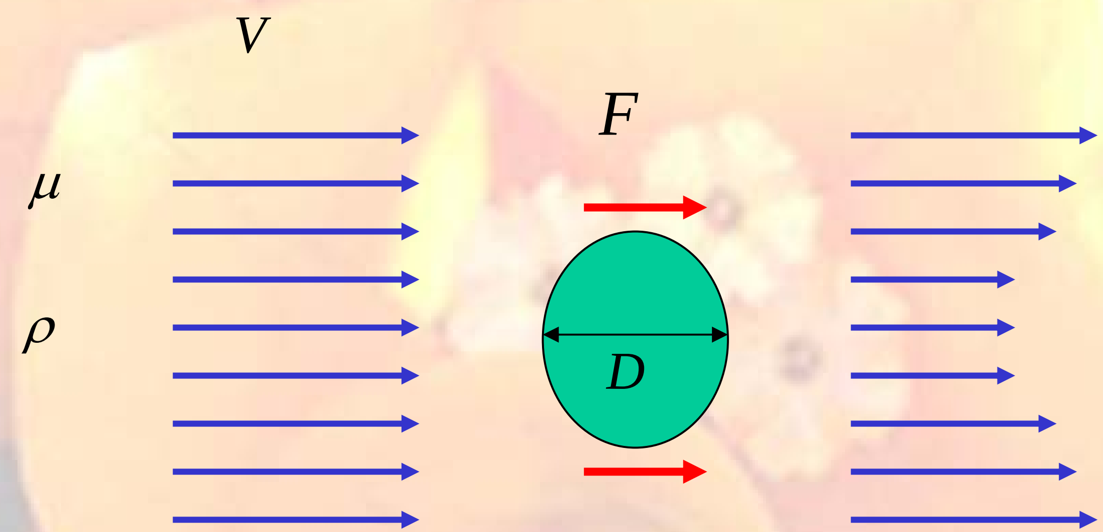
¿Qué ventaja tiene?

- Hemos deducido que la forma de la dependencia del periodo es

$$P = (\sqrt{(l/g)})\ f(l/A)$$

- Aunque aún no sabemos la forma exacta, pero hemos avanzado bastante
- Ahora, un otro ejemplo
  - paso por paso
  - un poco más complicado

La fuerza de arrastre



$$F = f\left(D, V, \rho, \mu\right)$$

Volviendo a la fuerza de arrastre en la esfera

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \Longrightarrow g(F, D, V, \rho, \mu) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} F, & D, & V, & \rho, & \mu \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{ML}{t^2} & L & \dfrac{L}{t} & \dfrac{M}{L^3} & \dfrac{M}{Lt} \end{array}$$

$n = 5$ parámetros

$m = 3$ dimensiones fundamentales (M, L, t)

Necesitamos $n - m = 2$ grupos de Π

En este caso, tenemos mucha libertad y empleamos un truco

Un pequeño truco

- Queremos determinar la fuerza (F) en función de, por ejemplo la viscosidad (μ)
- Como tenemos tanta libertad, elegimos que estos parámetros tengan una potencia de 1 y 0 (para simplicidad)

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F^1 \mu^0$$

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f F^0 \mu^1$$

- La verdad: están elegidos para llegar a la solución convencional

Las soluciones Π

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{array}{lll} M: & a+1=0 & a=-1 \\ L: & -3a+b+c+1=0 & c=-2 \\ t: & -b-2=0 & b=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} M: & d+1=0 & d=-1 \\ L: & -3d+e+f-1=0 & f=-1 \\ t: & -e-1=0 & e=-1 \end{array}$$

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho VD}$$

Verificación

- Comprobar: cada grupo P tiene dimensión nula

$$[\Pi_1]=\left[\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right] \qquad [\Pi_2]=\left[\frac{\mu}{\rho V D}\right]$$

$$=F\left(\frac{1}{\frac{Ft^2}{L^4}\cdot\frac{L^2}{t^2}\cdot L^2}\right)=1 \qquad =\frac{Ft/L^2}{\frac{Ft}{L^4}\cdot\frac{L}{t}\cdot L}=1$$

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2}=f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

¿Qué ventaja tiene?

Sin la teoría de Π: determinamos F con

$100(D)\times100(V)\times100(\rho)\times100(\mu) = 10^8$ experimentos

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \Longrightarrow g(F, D, V, \rho, \mu) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}, \frac{\rho V D}{\mu}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

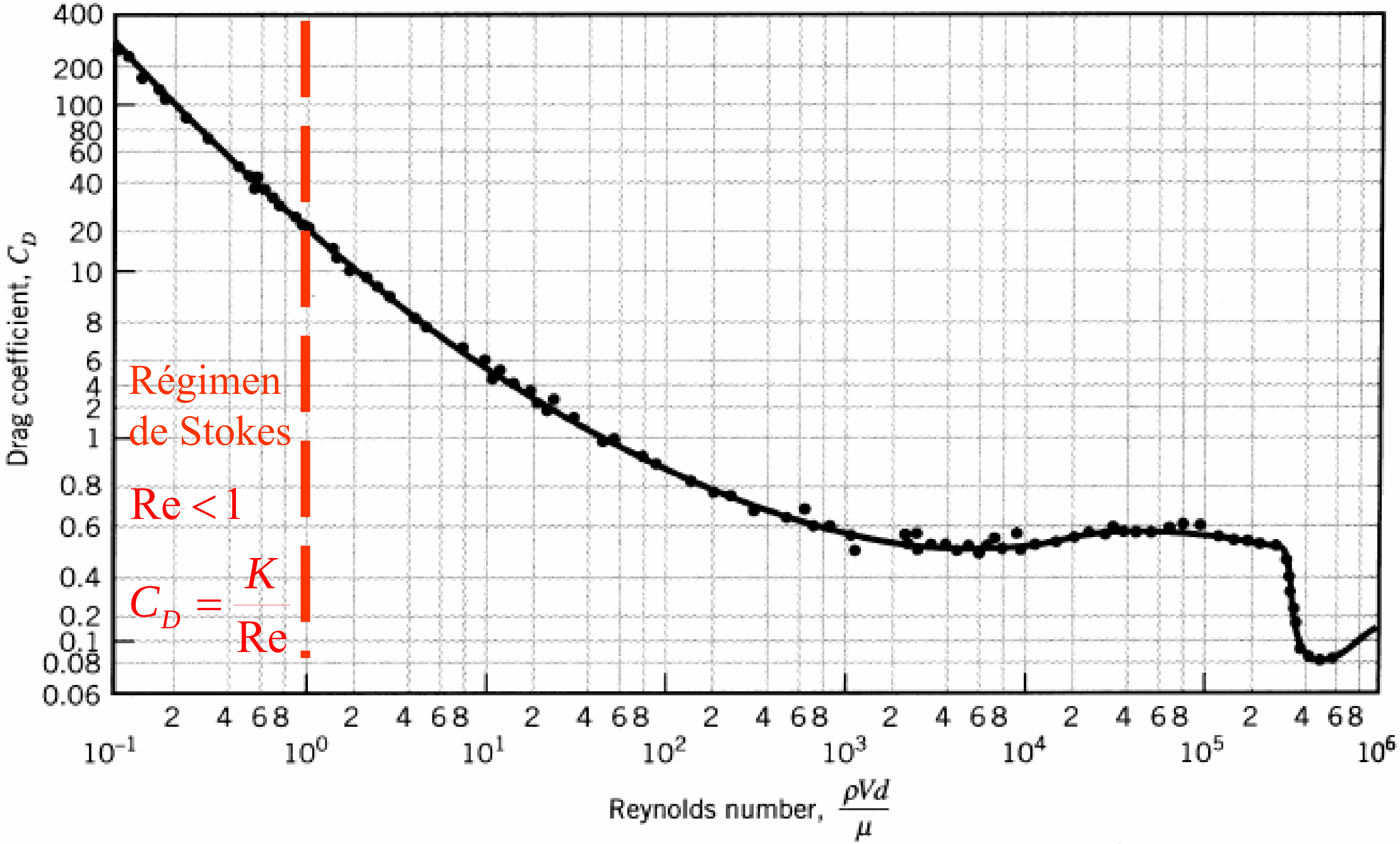
El coeficiente de arrastre $C_D \equiv$

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right) = f\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

El número de Reynolds

$$C_D = f\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \rightarrow$$ **100 experimentos**

C_D frente a Re



Soluciones con matemática más elegante

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \qquad \Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{aligned} M &: \quad a + 1 = 0 \\ L &: \quad -3a + b + c + 1 = 0 \\ t &: \quad -b - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &: \quad d + 1 = 0 \\ L &: \quad -3d + e + f - 1 = 0 \\ t &: \quad -e - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1a + 0b + 0c &= -1 \\ -3a + 1b + 1c &= -1 \\ 0a - 1b + 0c &= 2 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 1d + 0e + 0e &= -1 \\ -3d + 1e + 1f &= 1 \\ 0d - 1e + 0f &= 1 \end{aligned}$$

La Ley de Cramer:

Determinantes

$$1a + 0b + 0c = -1$$
$$-3a + 1b + 1c = -1$$
$$0a - 1b + 0c = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_a = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad D_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$a = D_a / D = -1$ $\qquad$ $b = D_b / D = -2$ $\qquad$ $c = D_c / D = -2$