

The background of the slide is a close-up photograph of water with many small, overlapping ripples, creating a textured, shimmering effect in shades of blue and white.

vi. Turbulent Kinetic Energy

Andrew S. Kowalski
Catedrático de Universidad
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Granada
andyk@ugr.es

Bibliografía micrometeorológica

- Stull; Capítulo 5. (TKE)

LA ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA (TKE)

- La ecuación pronóstica de TKE
- Los términos dominantes de la ecuación
- Conceptos de estabilidad
 - El número de Richardson
- Otros conceptos no-dimensionales
 - Monin y Obukhov

LA ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA (TKE)

- La ecuación pronóstica de TKE
- Los términos dominantes de la ecuación
- Conceptos de estabilidad
 - El número de Richardson
- Otros conceptos no-dimensionales
 - Mohnin y Obukhov

Ecuaciones para las estadísticas

- Igual como para los promedios, podemos derivar ecuaciones para varianzas y covarianzas (flujos)
- Aquí, nos interesa la conservación de los varianzas de velocidad (TKE)
 - Empezamos con la ecuación de perturbaciones de momento (ráfagas)
 - Lo multiplicamos por $0.5u_i'$
 - Promediar y aplicar las leyes de Reynolds
 - “Continuity” y “Flux form”
 - $\bar{e} = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}$ (TKE/m, TKE específico)

Conservación de TKE

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j}}_{\text{II}} = \underbrace{\delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v}}_{\text{III}} - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{IV}} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j}}_{\text{V}} - \underbrace{\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_i}}_{\text{VI}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{VII}}$$

- I cambio local (storage)
- II advección
- III buoyancy (empuje – gravedad)
- IV (generación por) cizalla
- V transporte turbulento
- VI correlación con presión
- VII Disipación viscosa

Conservación de TKE

- Unos trucos para simplificar
- Elegimos una orientación ($\bar{v} = \bar{w} = 0$)
- Suponemos homogeneidad horizontal

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w' \theta_v'} - \overline{w' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{w' e})}{\partial z} - \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{w' p'})}{\partial z} - \varepsilon$$

Conservación de TKE

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} = \frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta_v'} - \overline{w' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial (\overline{w' e})}{\partial z} - \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{w' p'})}{\partial z} - \varepsilon$$

I

II

III

IV

V

VI

VII

- I cambio local (storage)
- II advección
- III buoyancy (empuje – gravedad)
- IV (generación por) cizalla
- V transporte turbulento
- VI correlación con presión
- VII Disipación viscosa

LA ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA (TKE)

- La ecuación pronóstica de TKE
- Los términos dominantes de la ecuación
- Conceptos de estabilidad
 - El número de Richardson
- Otros conceptos no-dimensionales
 - Mohnin y Obukhov

Los términos dominantes

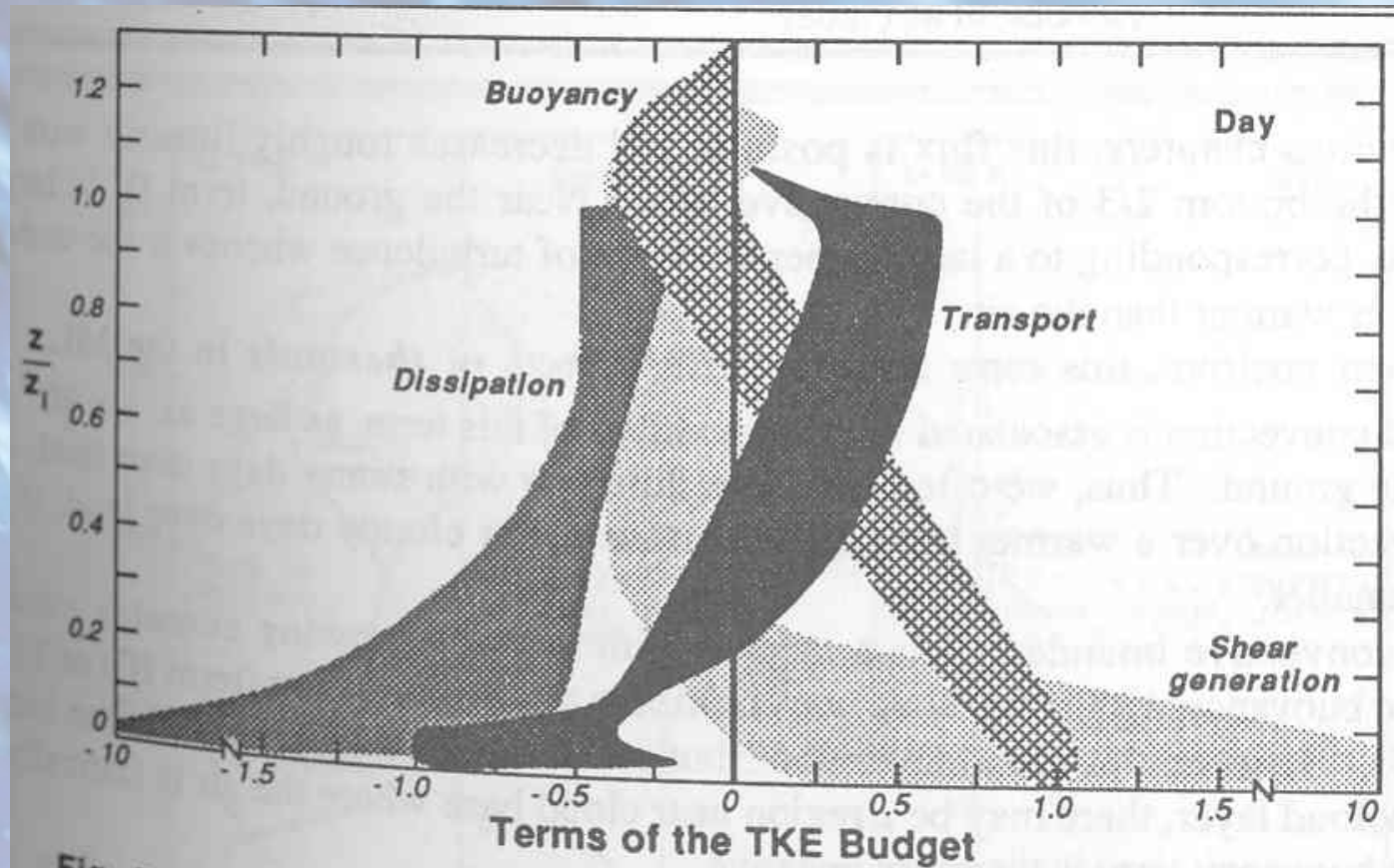


Fig. 5.4

Normalized terms in the turbulence kinetic energy equation. The shaded areas indicate ranges of values. All terms are divided by w^3/z_i , which is on the order of $6 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$. Based on data and models from Deardorff (1974), André et al. (1978), Therry and Lacarrere (1983), Lenschow (1974), Pennell and LeMone (1974), Zhou, et al. (1985) and Chou, et al. (1986).

Storage

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}$$

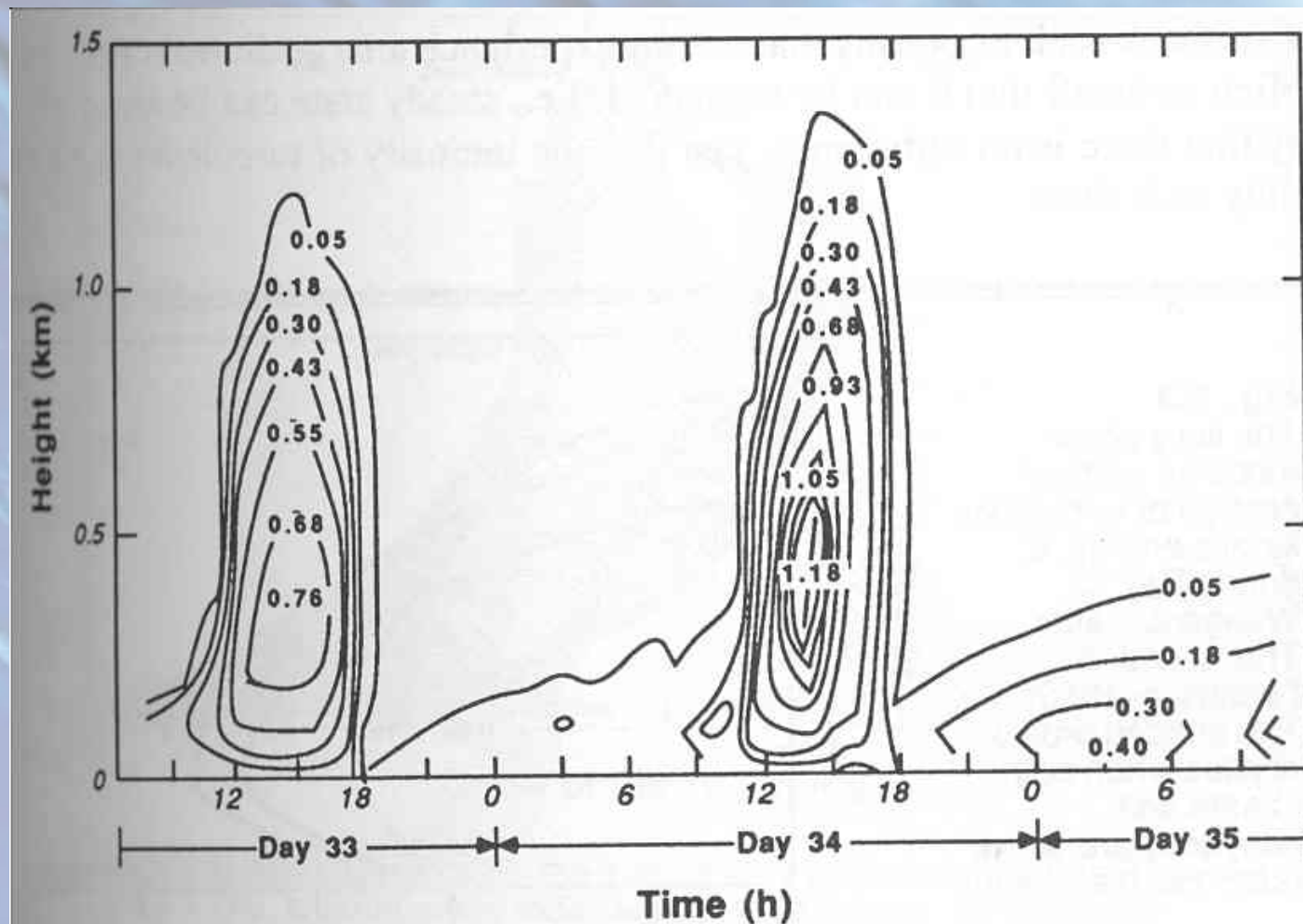


Fig. 5.1 Modeled time and space variation of $\bar{e}$ (turbulence kinetic energy, units m^2s^{-2}), for Wangara. From Yamada and Mellor (1975).

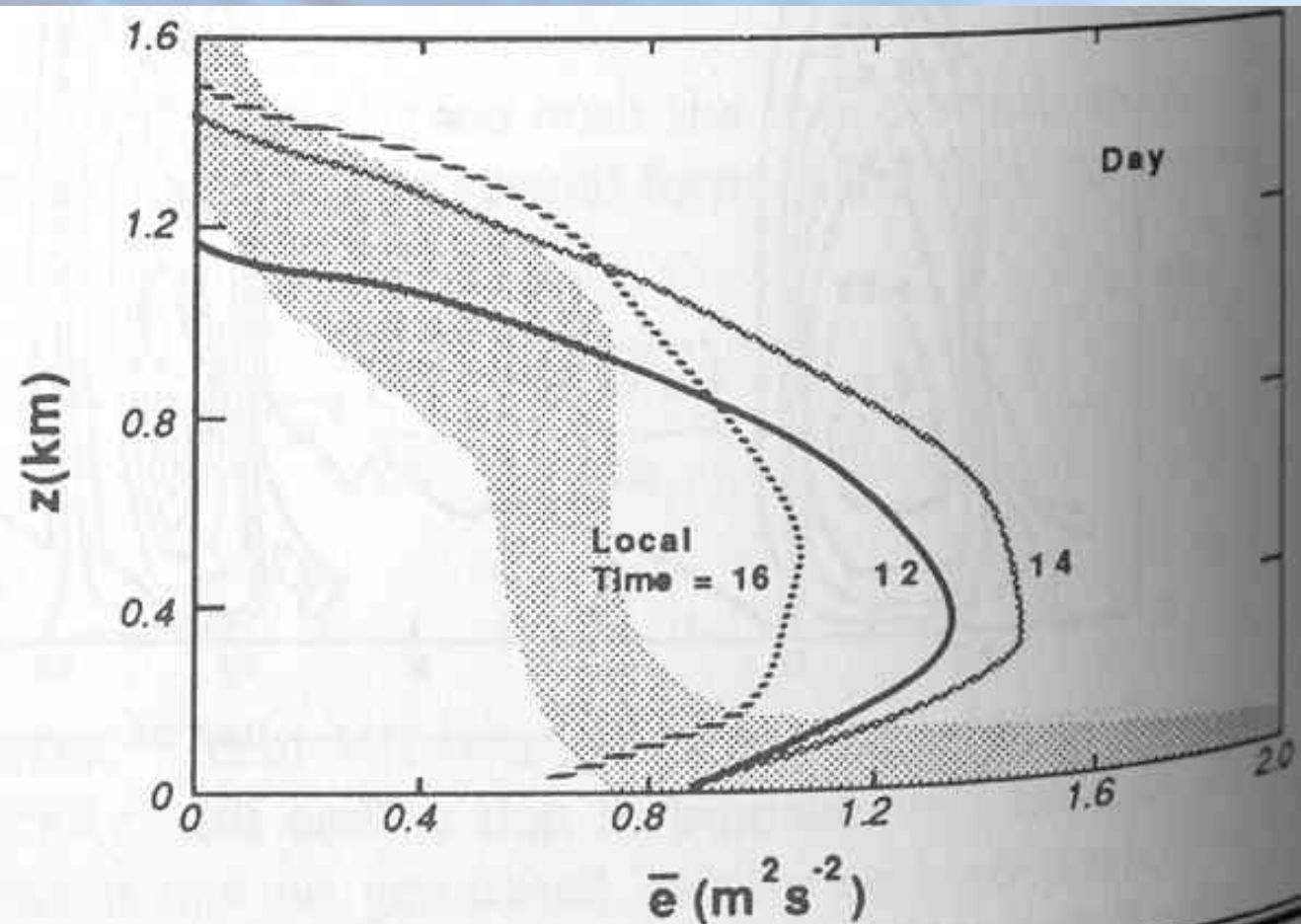
Storage

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}$$

- TKE cambia mucho al largo del día

Fig. 5.3

The lines show modeled vertical profiles of turbulence kinetic energy, $\bar{e}$, during Day 33, Wangara, (after Therry and Lacarrere, 1983). The shaded profile applies when both shears and buoyancy are active (after Hechtel, 1988).



Advección

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x}$$

- Importante cerca de algún cambio importante de las propiedades de la superficie.
- Despreciado con frecuencia

Buoyancy

$$\frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta_v'}$$

- Cerca de la superficie
 - Producción de TKE durante el día
 - Destrucción de TKE por la noche
- En la parte superior de la capa limite
 - (cerca de la inversión)
 - Destrucción de TKE

Shear (cizalla)

$$-\overline{w'u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

- Como los dos términos suelen tener signos opuestos, este término casi siempre contribuye a la generación de la turbulencia

Transporte turbulento

- Redistribución de TKE

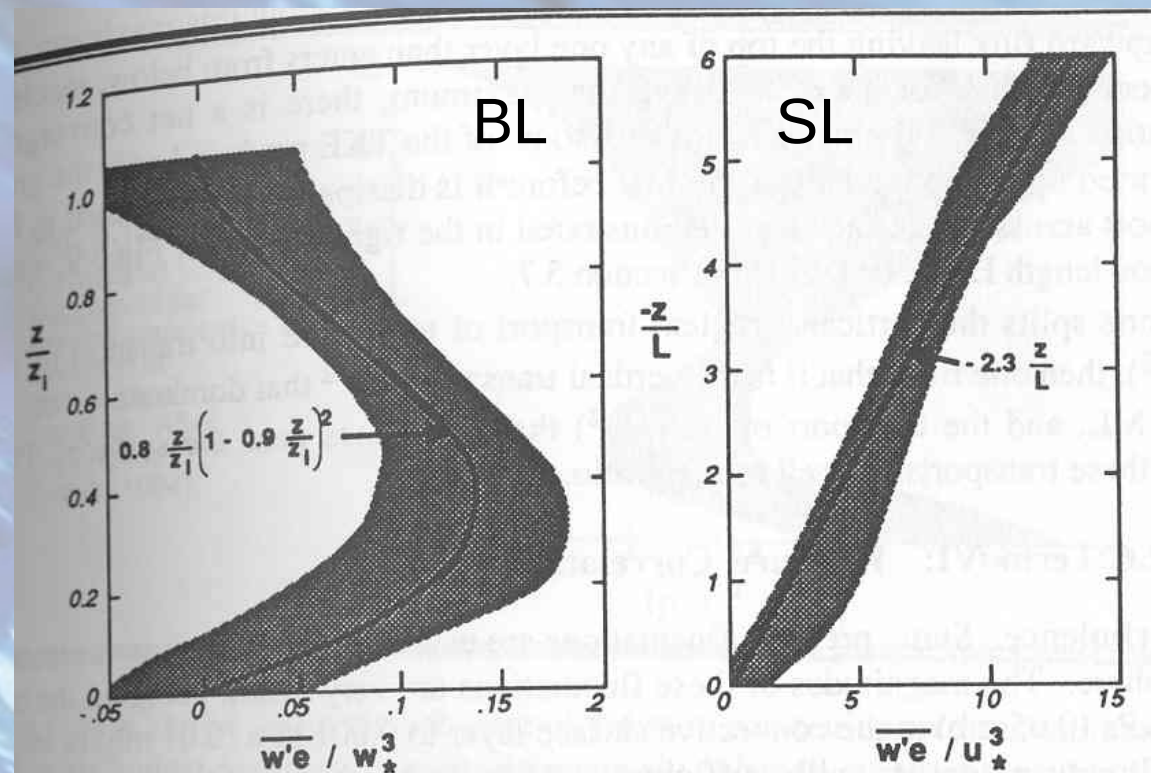


Fig. 5.9

Range of vertical profiles of the normalized vertical flux of turbulence kinetic energy using mixed layer scaling (left) and surface-layer scaling (right) where L is the Obukhov length. After Lenschow, et al. (1980), André, et al. (1978), Therry and Lacarrere (1983), and Pennell and LeMone (1974).

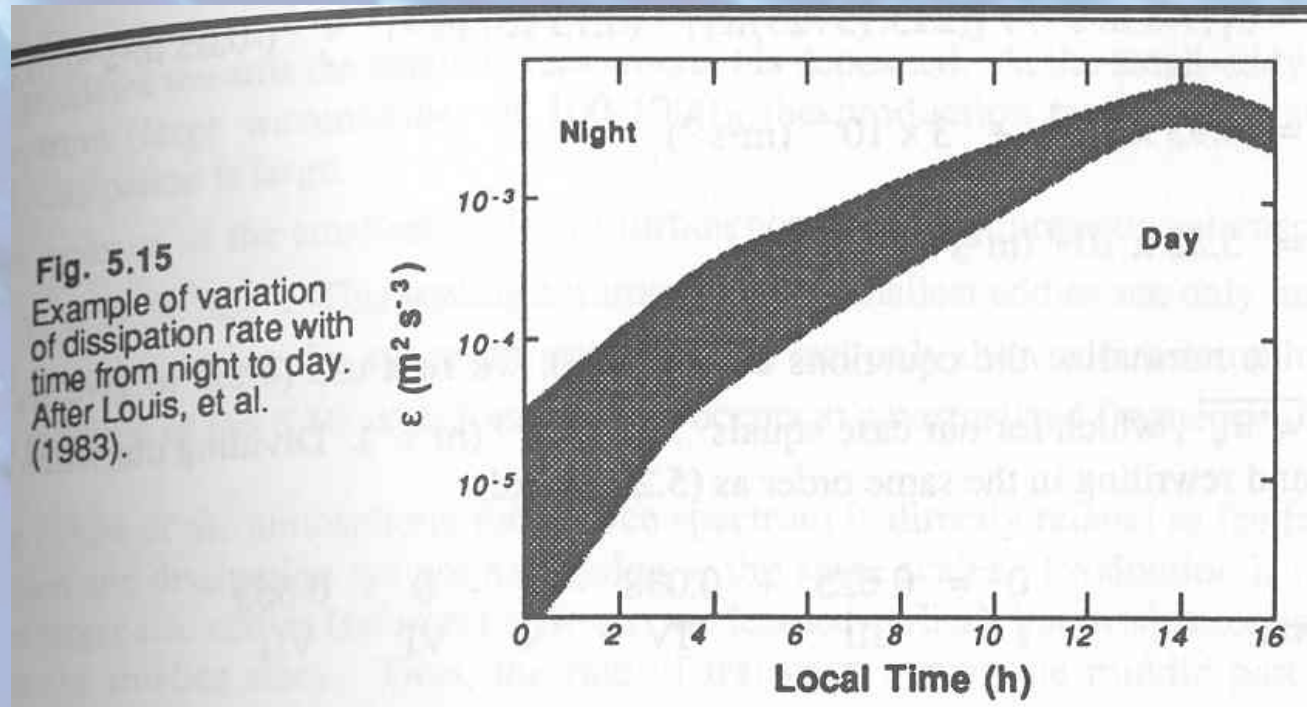
Correlación con presión

- Difícil a medir
- Se calcula aparte de los otros términos

$$\left(\frac{1}{\overline{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{w' p'})}{\partial z}$$

Disipación

- La destrucción de turbulencia por procesos viscosos
- Máximo por el día



LA ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA (TKE)

- La ecuación pronóstica de TKE
- Los términos dominantes de la ecuación
- Conceptos de estabilidad
 - El número de Richardson
- Otros conceptos no-dimensionales
 - Mohnin y Obukhov

Parametros de estabilidad

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}}_I + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{\delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v}}_{III} - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_i}}_{VI} - \underbrace{\varepsilon}_{VII}$$

- El TKE depende **mucho** de los terminos III y IV
- La razón (III / IV) se llama el “flux Richardson number” R_f

$$R_f = \frac{III}{IV} = \frac{\delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v}}{\left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)_{j=3}} = \frac{\frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta'_v}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

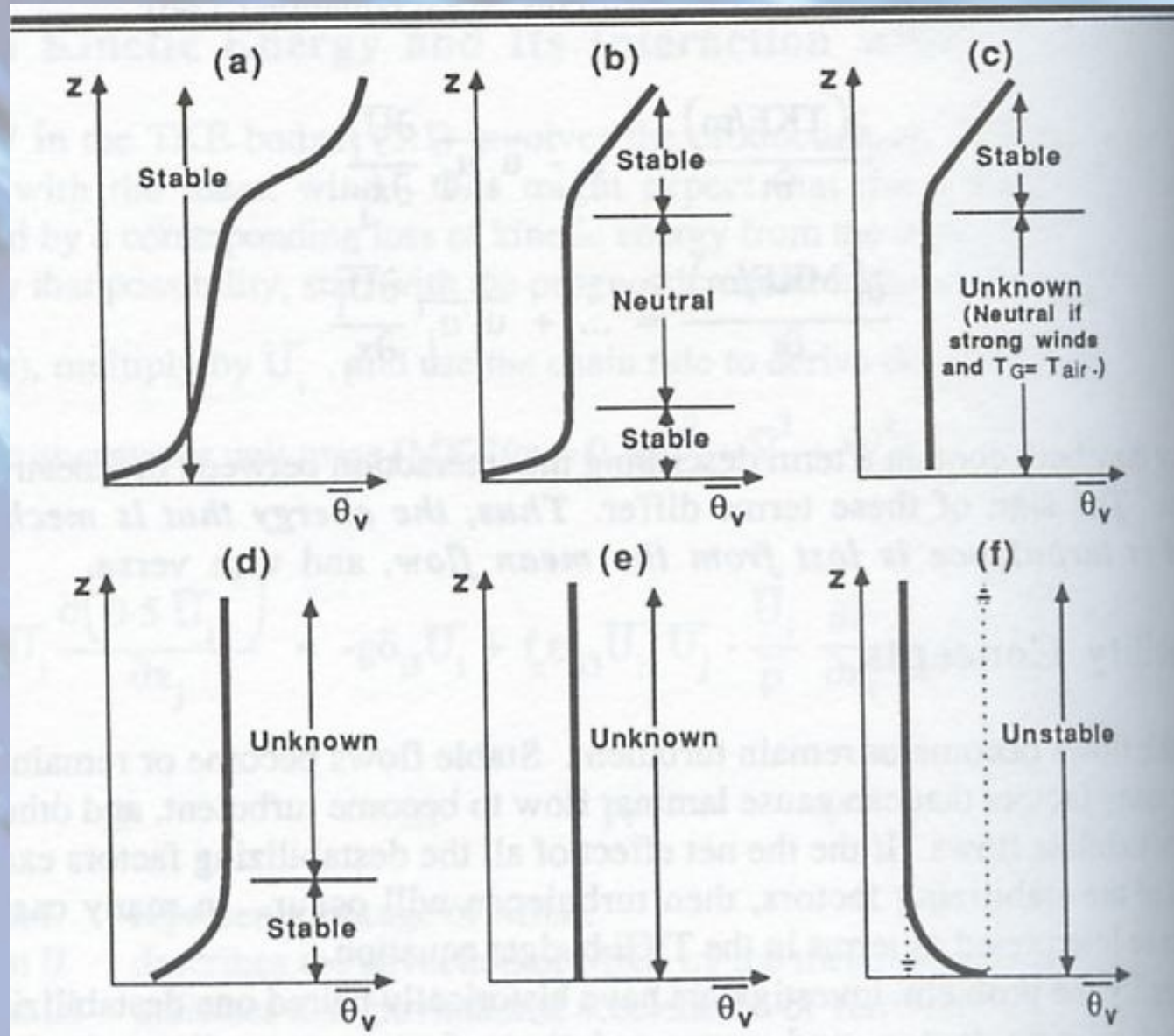
Estabilidad estática

- Depende del flujo de calor

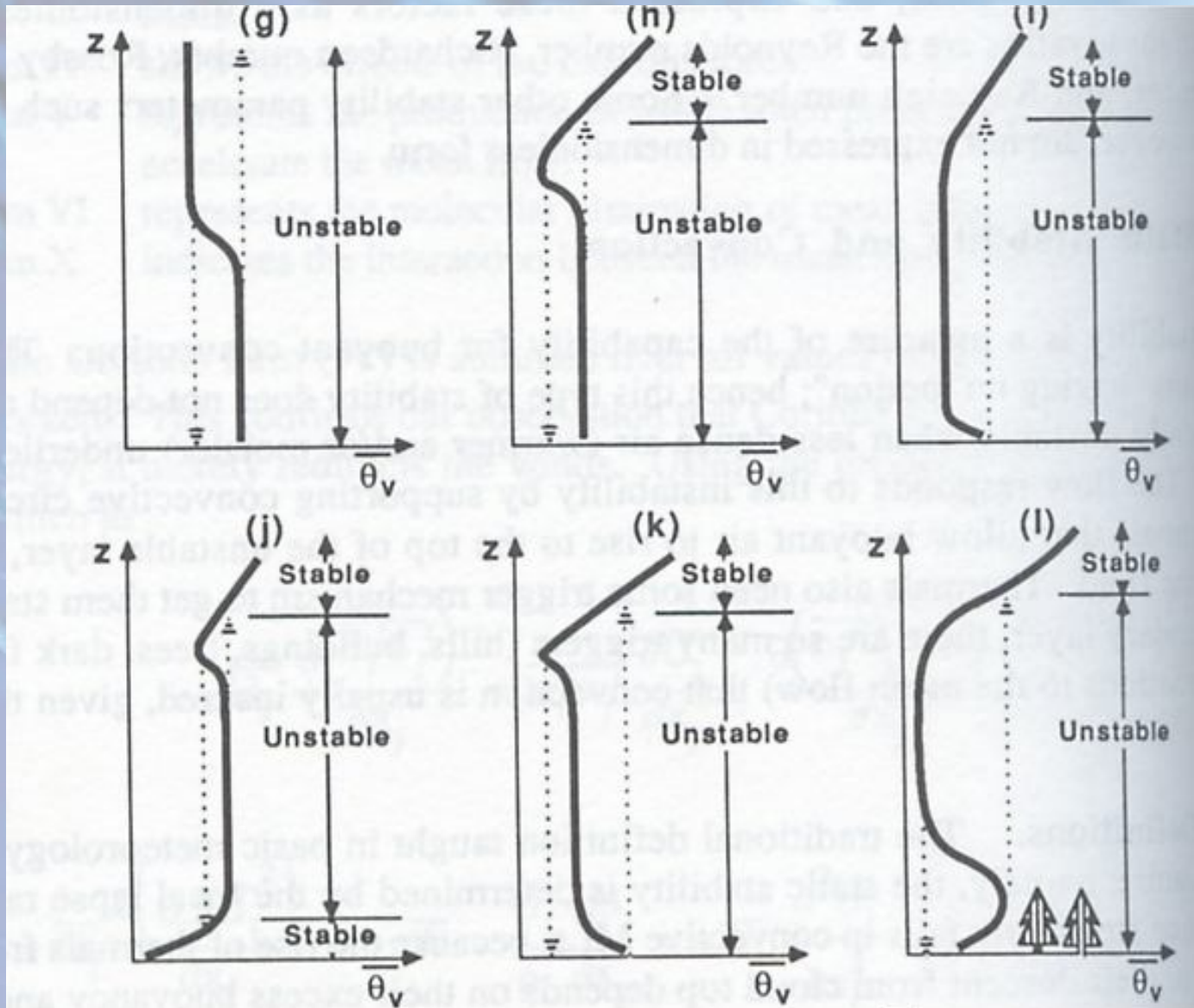
$$R_f = \frac{\frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta_v'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}}$$

- Inestable, $R_f < 0$
- Neutral, $R_f = 0$ (ningún flujo de calor)
- Estable, $R_f > 0$

Estabilidad estática



Estabilidad estática



Estabilidad dinámica

$$R_f = \frac{\frac{g}{\theta_v} \overline{w' \theta_v'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

- Richardson proponía un valor crítico $R_f = +1$
 - Producción mecánica = destrucción “buoyancy”
 - $0 < R_f < 1$, estabilidad estática demasiado débil para inhibir producción mecánica de turbulencia
- $R_f < 0$, el numerador contribuye a la generación de TKE
- $R_f < +1$: el movimiento es turbulento
- $R_f > +1$: el movimiento tiende a ser laminar

Gradient Richardson number

- Si no hay turbulencia ($\overline{w'\theta} = \overline{w'u'} = \overline{w'v'} = 0$), no se puede definir R_f para saber si el movimiento se pondrá turbulento
- Entonces, utilizamos la analogía molecular (Ley de Fick), o “K-theory”:

$$F_\xi = -K_\xi \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

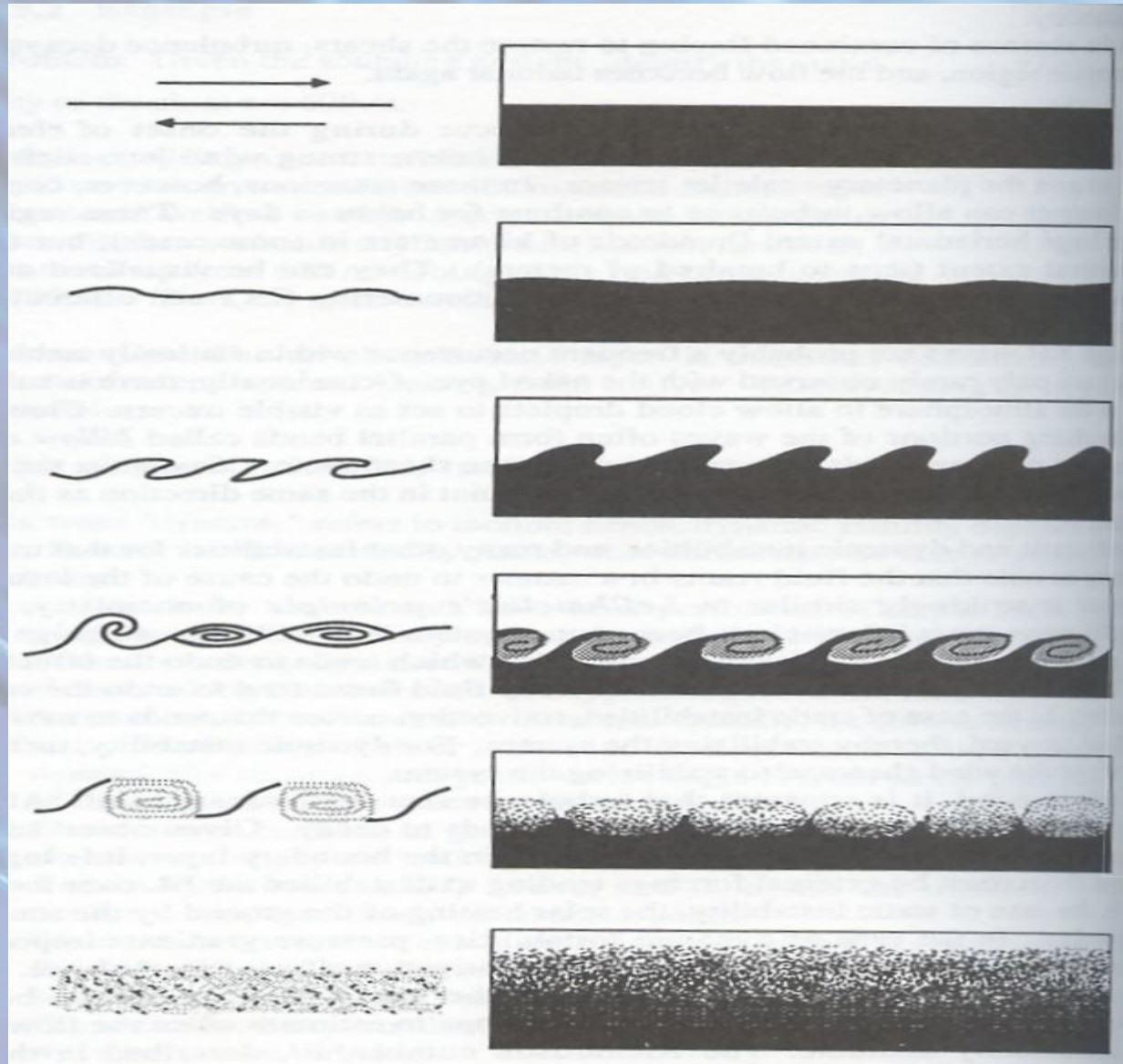
- K_x es la difusividad turbulenta (“eddy diffusivity”)
 - Depende en el flujo y no en el fluido
 - También puede depender de la variable x

Gradient Richardson Number, R_i

$$R_i = \frac{\frac{g}{\theta_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2} \quad R_f = \frac{K_H}{K_M} R_i$$

- Investigaciones teóricas y empíricas sugieren que
 - Un movimiento laminar se pone inestable (forma la turbulencia) cuando $R_i < R_c$ (critical Richardson number; $R_c = 0.21 - 0.25$)
 - Un movimiento turbulento se pone laminar cuando $R_i > R_T$ ($R_T = 1.0$).

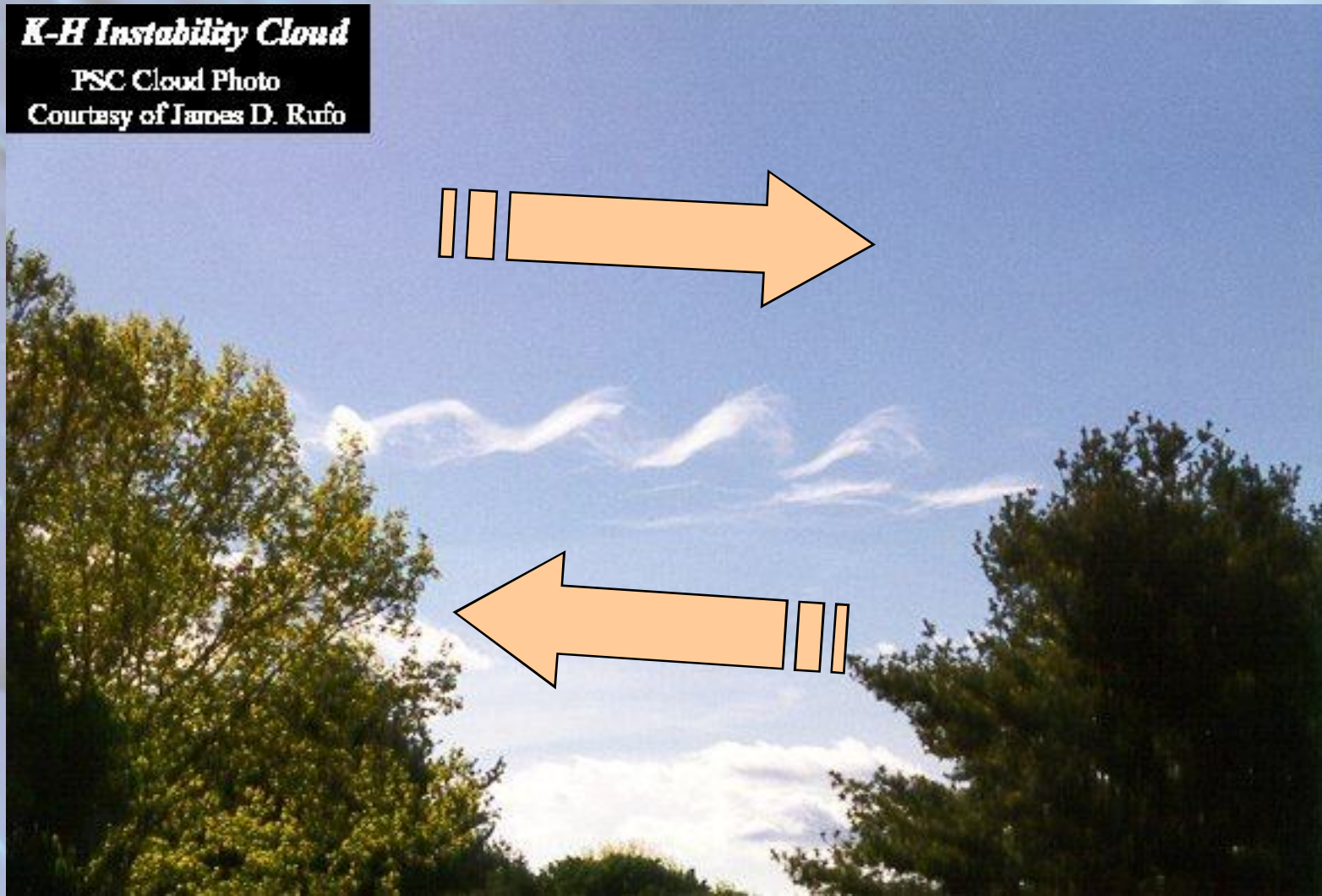
Kelvin-Helmholtz waves



Nubes Kelvin-Helmholtz

K-H Instability Cloud

PSC Cloud Photo
Courtesy of James D. Rufo



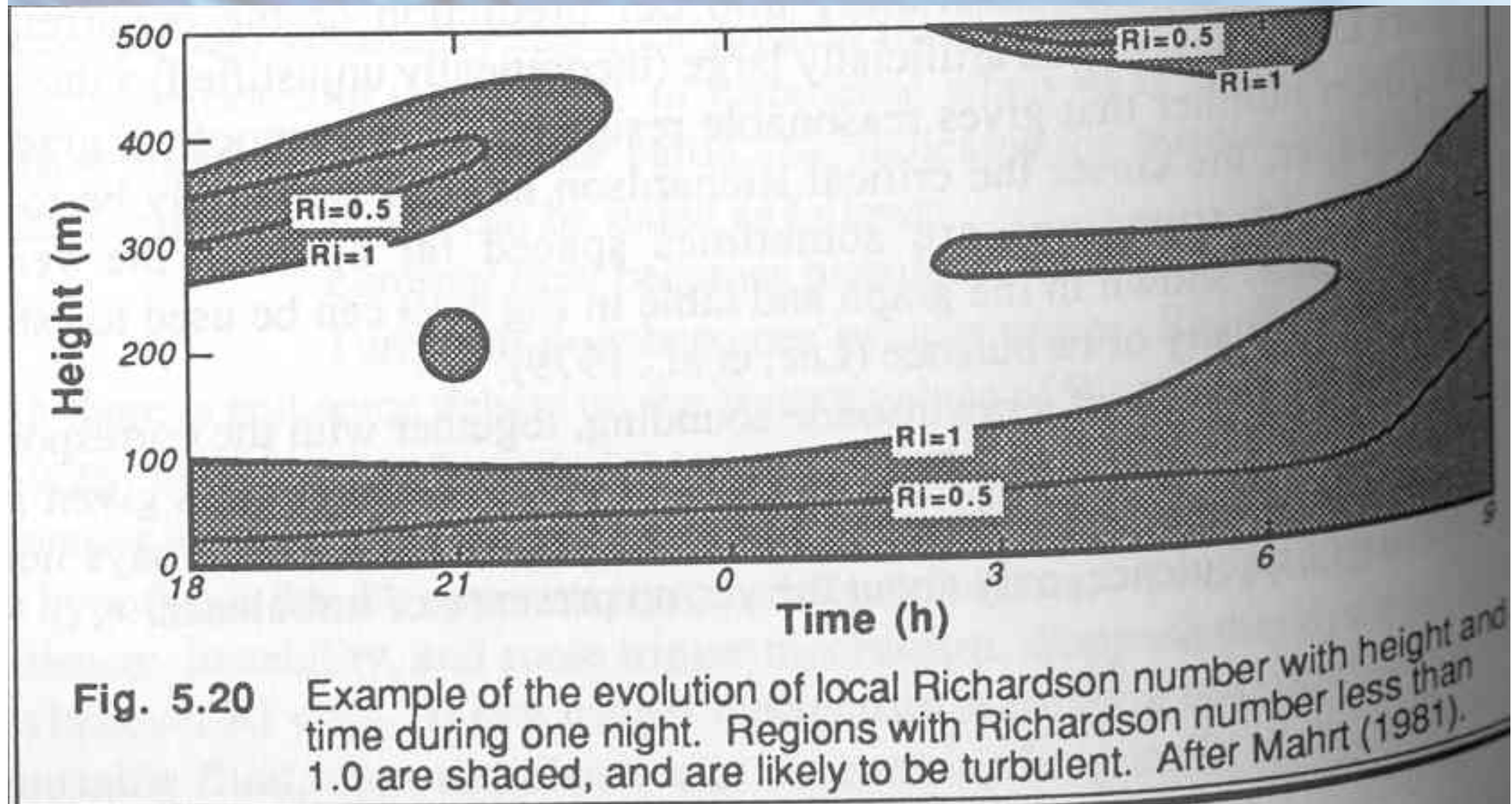
Bulk Richardson number

- Se aproximan los gradients reales ($\partial U/\partial z$, $\partial V/\partial z$, $\partial \theta_v/\partial z$) con diferencias que se miden ($\Delta U/\Delta z$, $\Delta V/\Delta z$, $\Delta \theta_v/\Delta z$)
- Así definimos el bulk Richardson number:

$$R_B = \frac{g \Delta \bar{\theta}_v \Delta z}{\bar{\theta}_v \left[\left(\Delta \bar{U} \right)^2 + \left(\Delta \bar{V} \right)^2 \right]}$$

- Desgraciadamente, el valor critico R_c se aplica a los gradientes locales, y no a las diferencias finitas entre capas espesas. Cuando más espesa la capa, más probable es tener pequeñas capas con gradientes más grandes
- Resulta que hay más incertidumbre en la predicción de la turbulencia, y se usa $R_c > 0.25$ en práctica

Variaciones nocturnas de R_i



LA ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA (TKE)

- La ecuación pronóstica de TKE
- Los términos dominantes de la ecuación
- Conceptos de estabilidad
 - El número de Richardson
- Otros conceptos no-dimensionales
 - Mohnin y Obukhov

La ecuación no dimensional de TKE

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} \overline{u'_i \theta'_v} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_i} - \varepsilon$$

- Multiplicar por $-kz/u_*^3$ (para quitar las dimensiones) y examinar los términos III, IV and VII:

$$\dots = - \underbrace{\frac{kzg(\overline{w' \theta'_v})_s}{\theta_v u_*^3}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{kz(\overline{u'_i u'_j})_s}{u_*^3}}_{\text{IV}} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \dots - \underbrace{\frac{kz(\varepsilon)_s}{u_*^3}}_{\text{VII}}$$

- La k es una constante tradicional: la constante de von Karman (k= 0.35-0.42)

The Obukhov length

- El término III (no dimensional) es:

$$\zeta = \frac{z}{L} = -\frac{kzg(\overline{w'\theta_v'})_s}{\overline{\theta_v}u_{*0}^3}$$

$$L = -\frac{u_*^3 \overline{\theta_v}}{kg(\overline{w'\theta_v'})_s} = -\frac{u_*^2 \overline{\theta_v}}{kg\theta_{v*}}$$

Escala de
temperatura

- y L se llama “the Obukhov length”:
 - $L < 0$; inestable
 - $L > 0$; estable
- En el cambio con altura de la ecuación de TKE, el “shear” se atenúa mas que el “buoyancy”
- Una interpretación física de L es: la altura donde empieza el “buoyancy” a ser más importante que el “shear”
- z - parámetro útil en la capa superficial (SL)

¿Estimación aproximada de L?

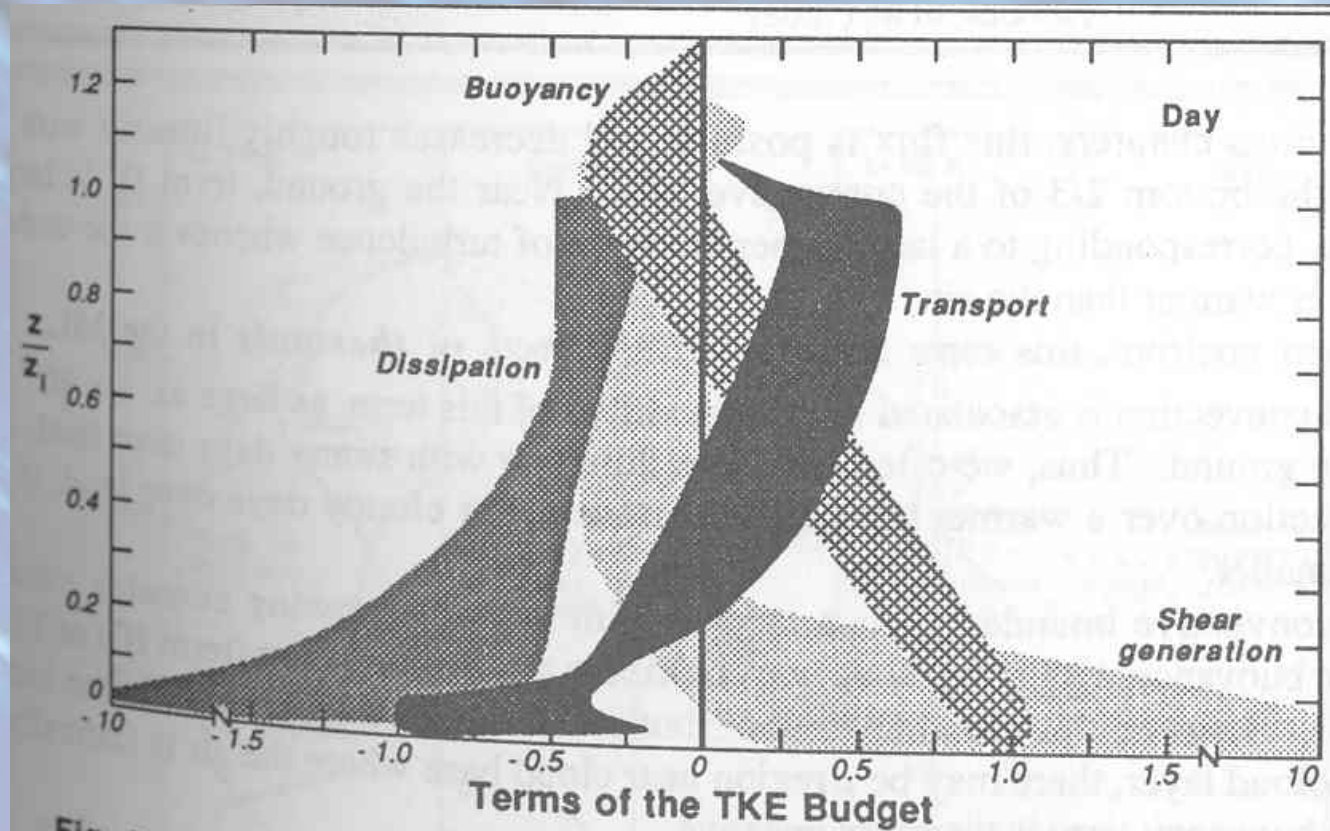
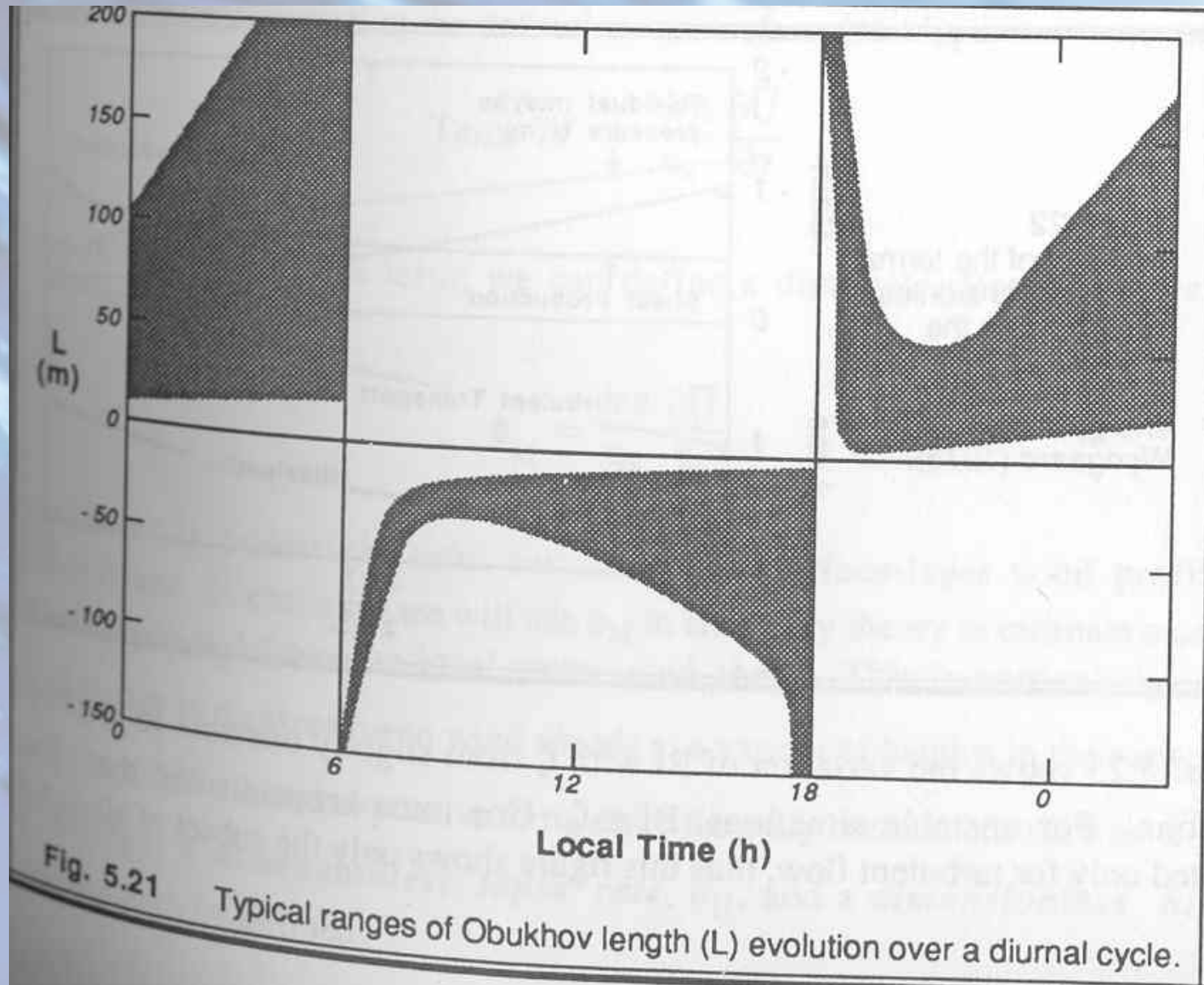


Fig. 5.4

Normalized terms in the turbulence kinetic energy equation. The shaded areas indicate ranges of values. All terms are divided by w_*^3/z_i , which is on the order of $6 \times 10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-3}$. Based on data and models from Deardorff (1974), André et al. (1978), Therry and Lacarrere (1983), Lenschow (1974), Pennell and LeMone (1974), Zhou, et al. (1985) and Chou, et al. (1986).

Variaciones Diurnas de L



Ri y L

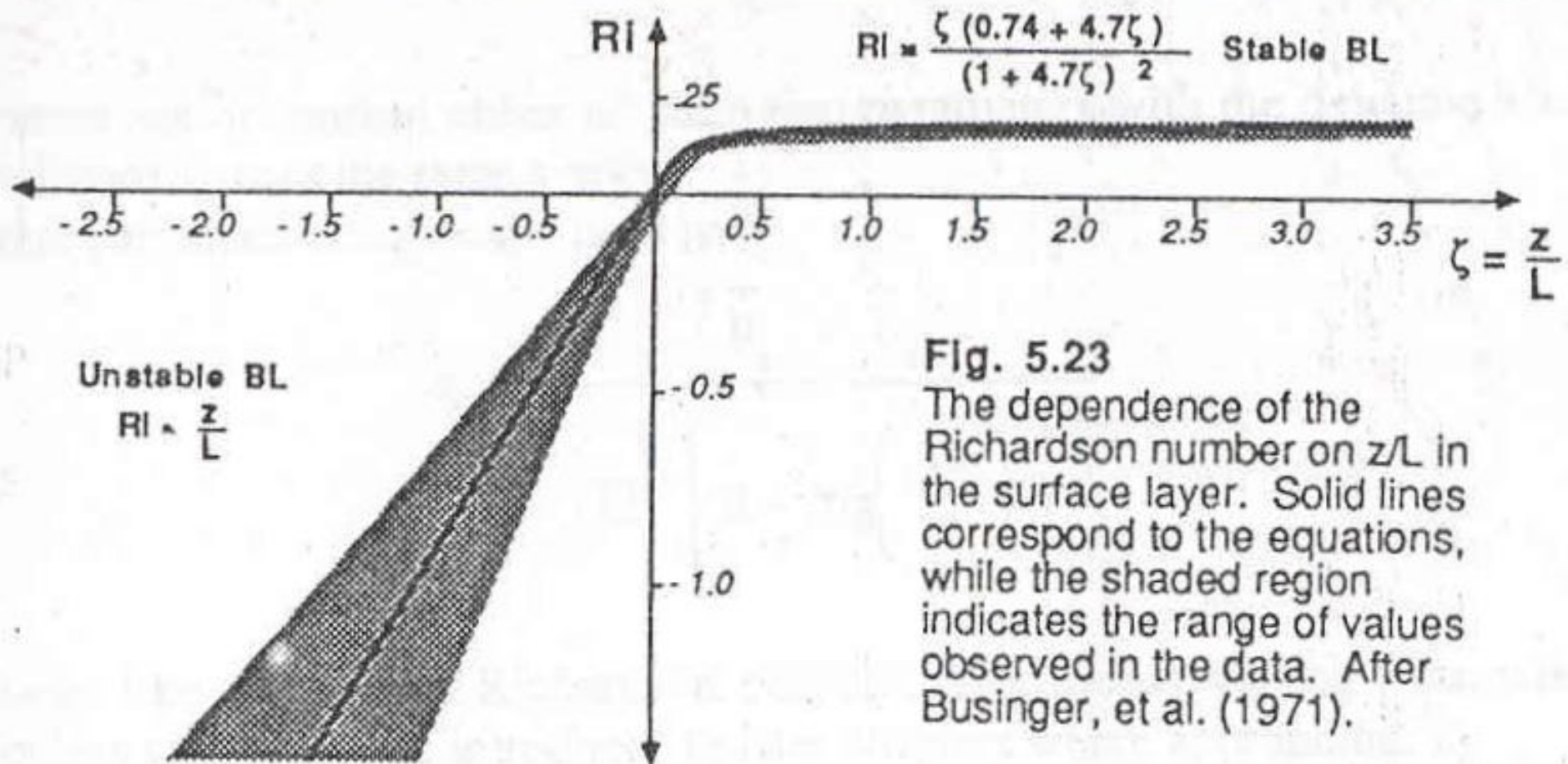


Fig. 5.23

The dependence of the Richardson number on z/L in the surface layer. Solid lines correspond to the equations, while the shaded region indicates the range of values observed in the data. After Businger, et al. (1971).

Monin-Obukhov similarity theory

- La hipótesis de Monin y Obukhov (1954): cualquier aspecto (no dimensional) de la turbulencia depende unicamente en $z=L$:

- u_{*0}
- $z, g/\theta_v$
- $(\overline{w'\theta_v'})_s$

$$\zeta = \frac{z}{L} = -\frac{kzg(\overline{w'\theta_v'})_s}{\overline{\theta_v}u_{*0}^3}$$

- Así, definimos gradientes no dimensionales

$$\frac{kz}{u_{*0}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \Phi_M(\zeta)$$

$$\frac{kz}{\theta_{v*0}} \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z} = \Phi_H(\zeta)$$

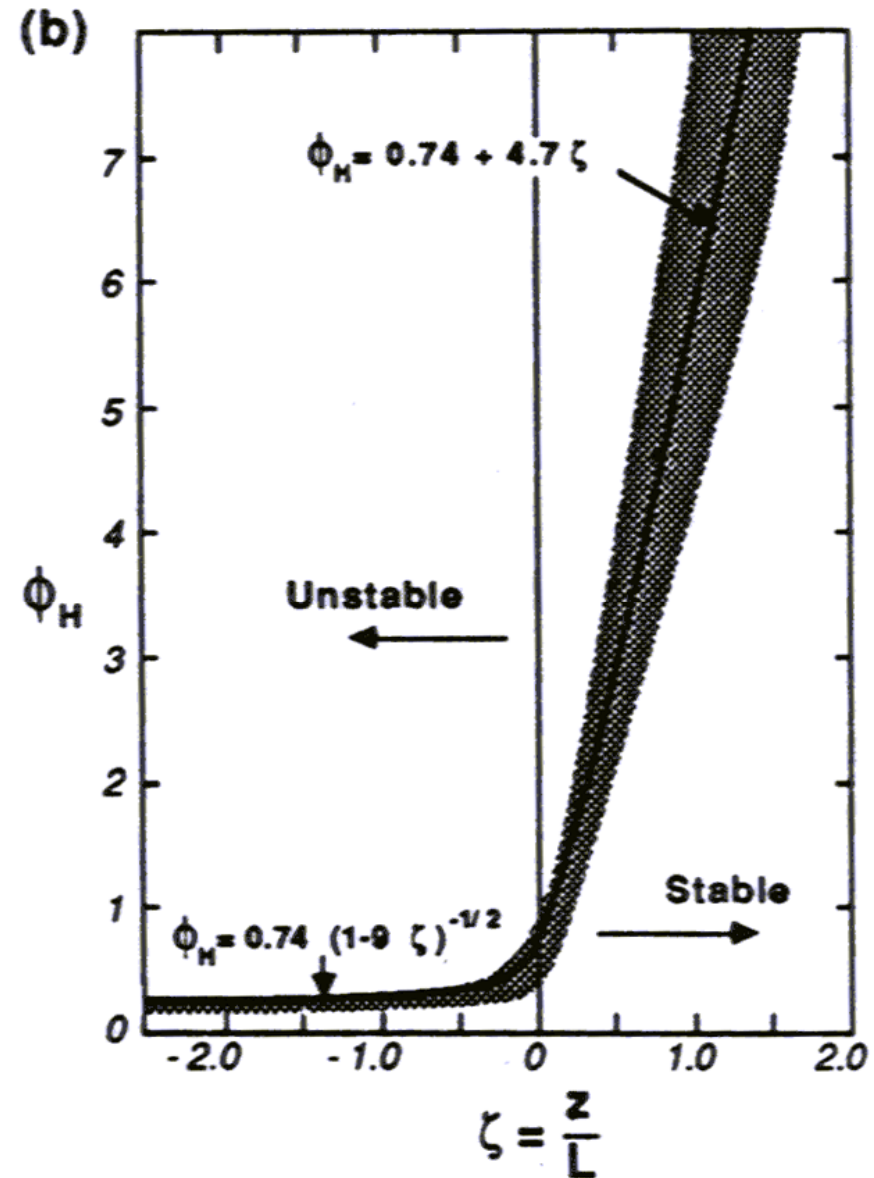
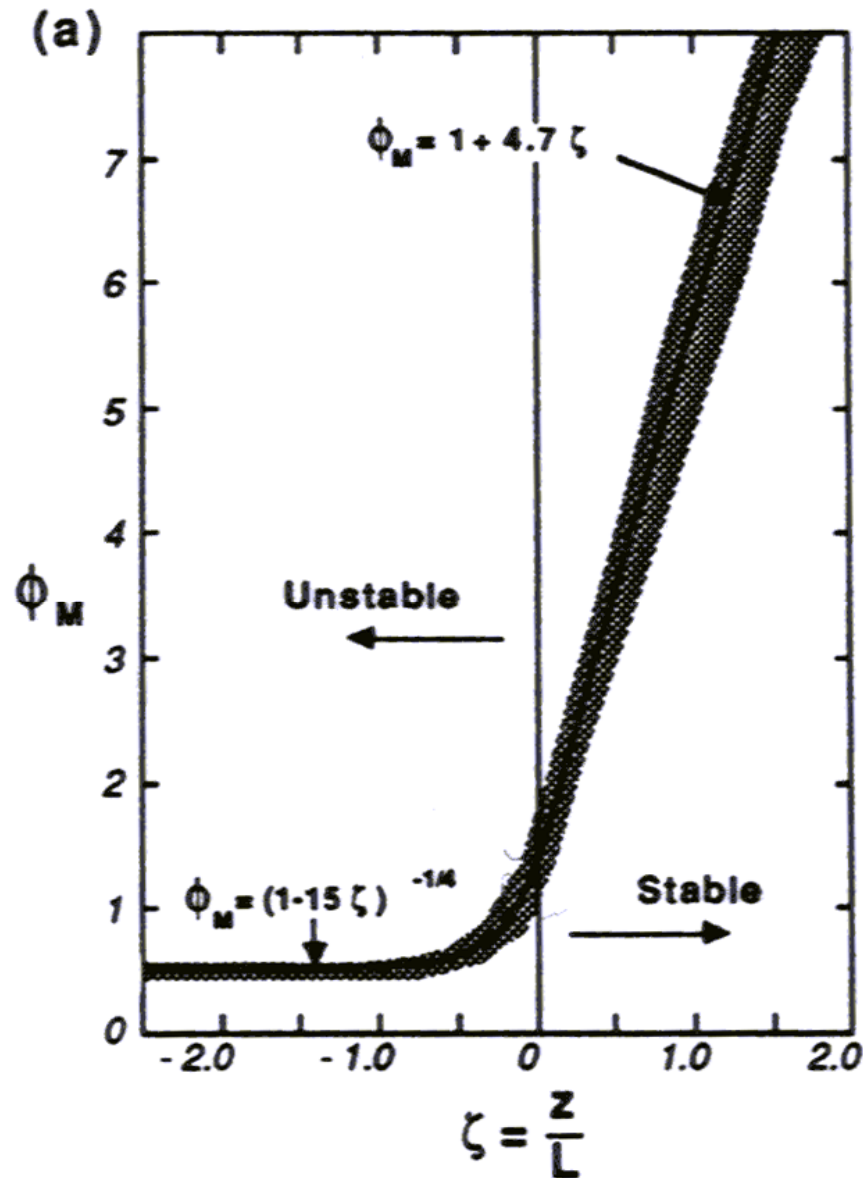
$$\frac{kz}{q_{*0}} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} = \Phi_w(\zeta)$$

Non-neutral SL “Similarity”

$$\begin{aligned}\phi_M &= 1 + \left(\frac{4.7 z}{L} \right) && \text{for } \frac{z}{L} > 0 \text{ (stable)} \\ \phi_M &= 1 && \text{for } \frac{z}{L} = 0 \text{ (neutral)} \\ \phi_M &= \left[1 - \left(\frac{15z}{L} \right) \right]^{-1/4} && \text{for } \frac{z}{L} < 0 \text{ (unstable)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_H &= \frac{K_m}{K_H} + \frac{4.7 z}{L} && \text{for } \frac{z}{L} > 0 \text{ (stable)} \\ \phi_H &= \frac{K_m}{K_H} && \text{for } \frac{z}{L} = 0 \text{ (neutral)} \\ \phi_H &= \frac{K_m}{K_H} \left[1 - \frac{9 z}{L} \right]^{-1/4} && \text{for } \frac{z}{L} < 0 \text{ (unstable)}\end{aligned}$$

Dimensionless Gradients



Desdecimiento (?)

- Es muy útil, y hay mucha investigación sobre teoría de “similarity”
- Hay muchas situaciones donde no se puede aplicar
- La Tierra es mas complicada que la teoría
 - No hay homogeneidad horizontal
 - Ni “stationarity” de la atmósfera