

v. The Governing Equations in the
 Boundary Layer

Andrew S. Kowalski
Catedrático de Universidad
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Granada
andyk@ugr.es

Bibliografía micrometeorológica

- Stull; Capítulo 3. (Governing equations)
- Stull; Capítulo 4. (Prognostic equations)

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (R_e)

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

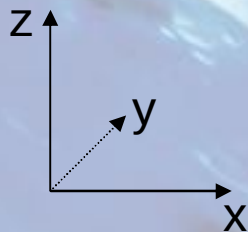
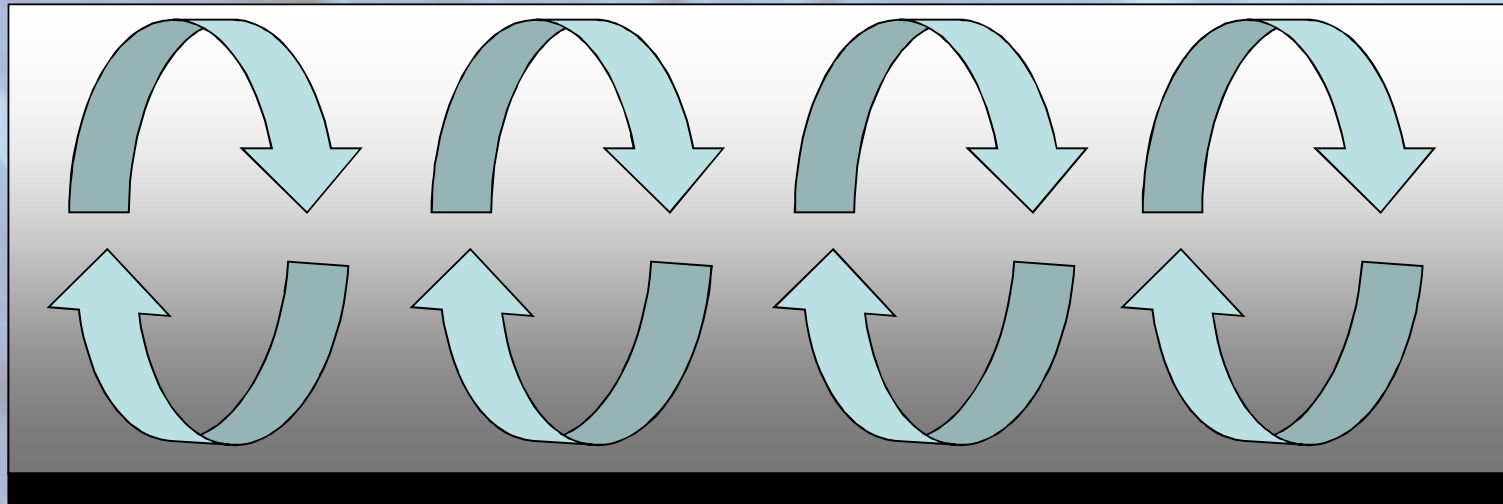
La dirección vertical nos interesa

- Horizontal: domina el viento promedio
 - Calor, humedad, contaminación
 - Importancia del transporte vertical en el tiempo
- La vertical es la dirección fuerte en
 - Gradientes
 - Flujos
- (Cerca de la superficie)

Simplificación: Flujos Verticales

$$\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} > < 0$$

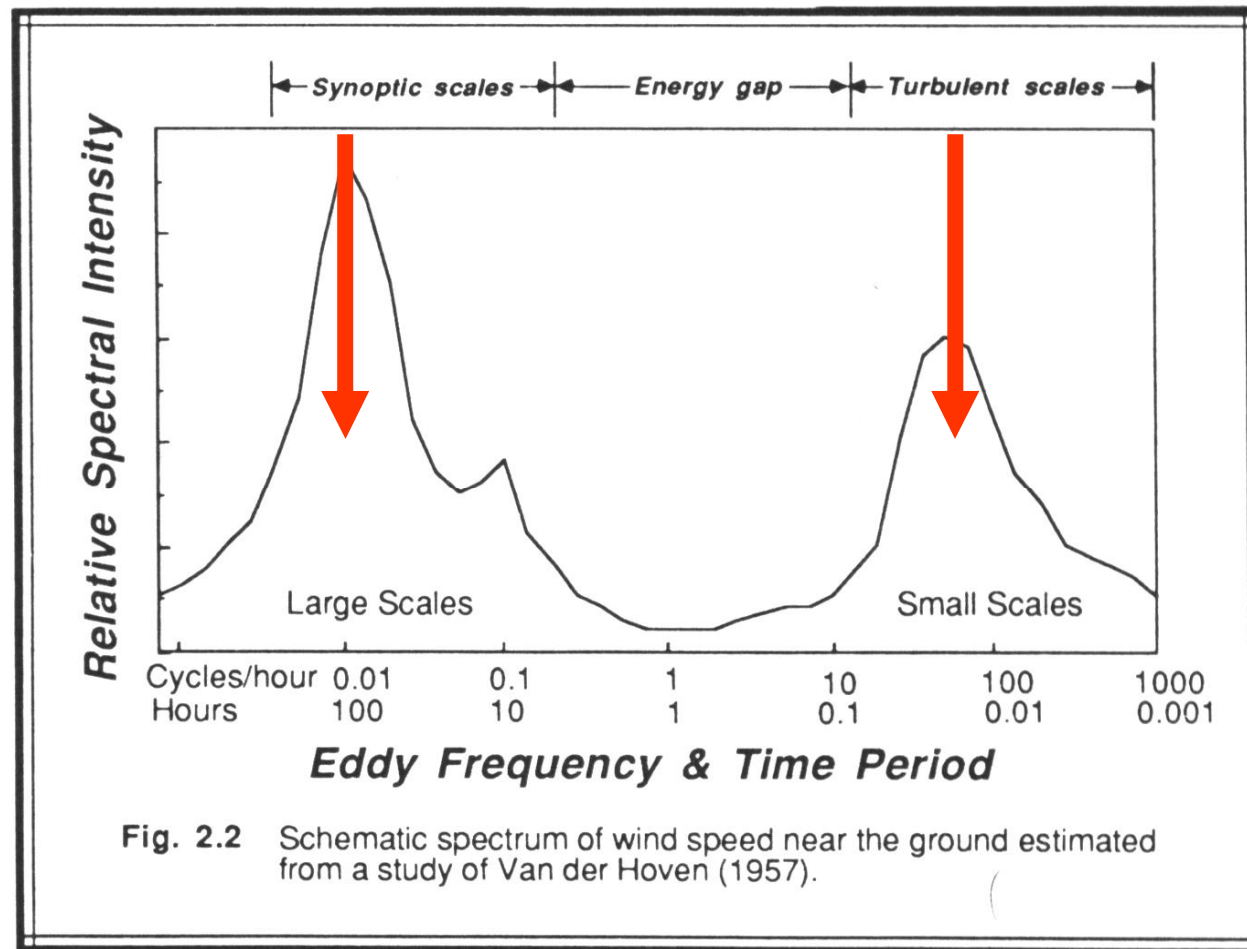


$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Dirección de los flujos

- Sinópticos: gradientes a escala continental
- Turbulentos: gradientes (**verticales**) locales

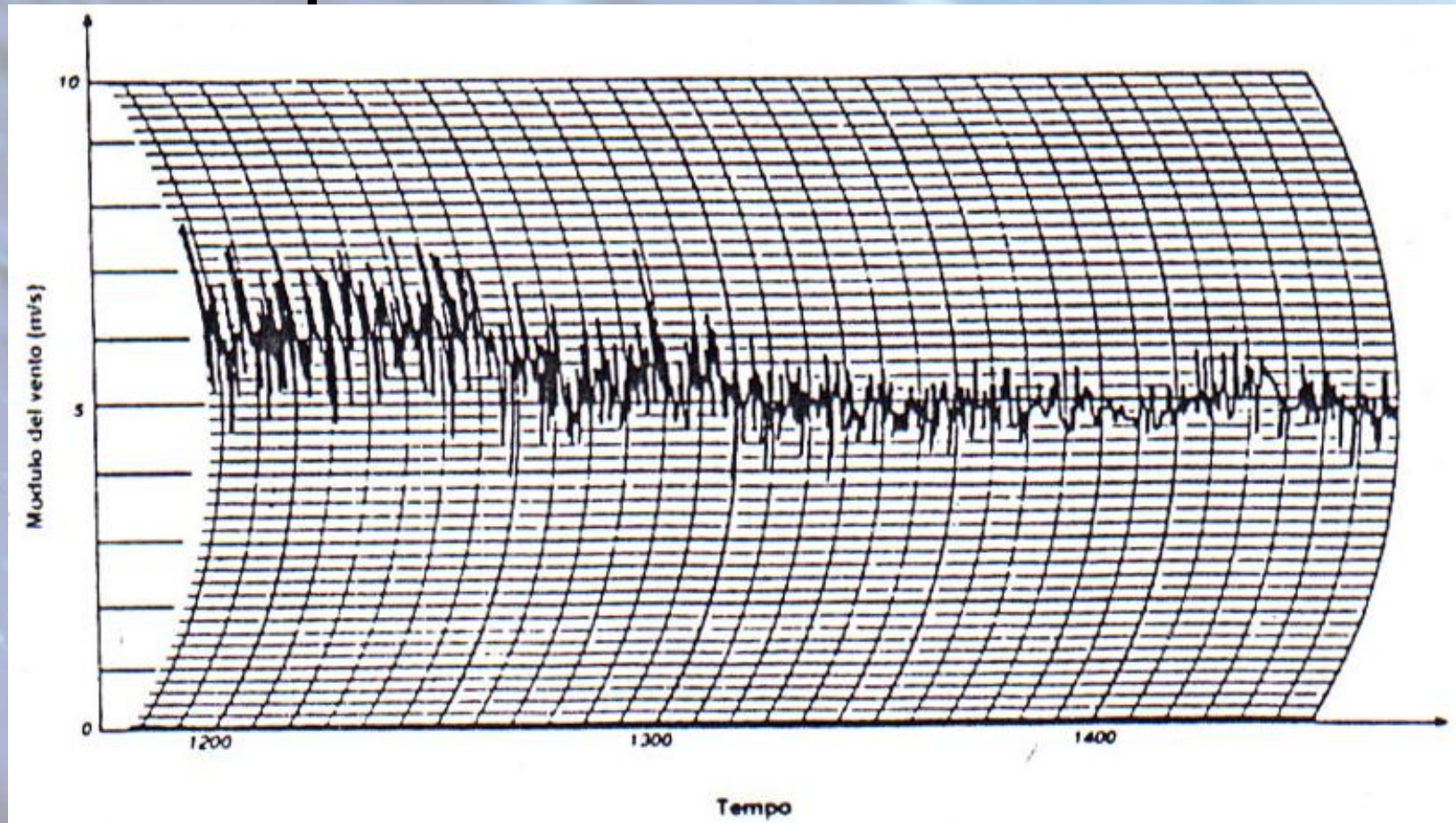


ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

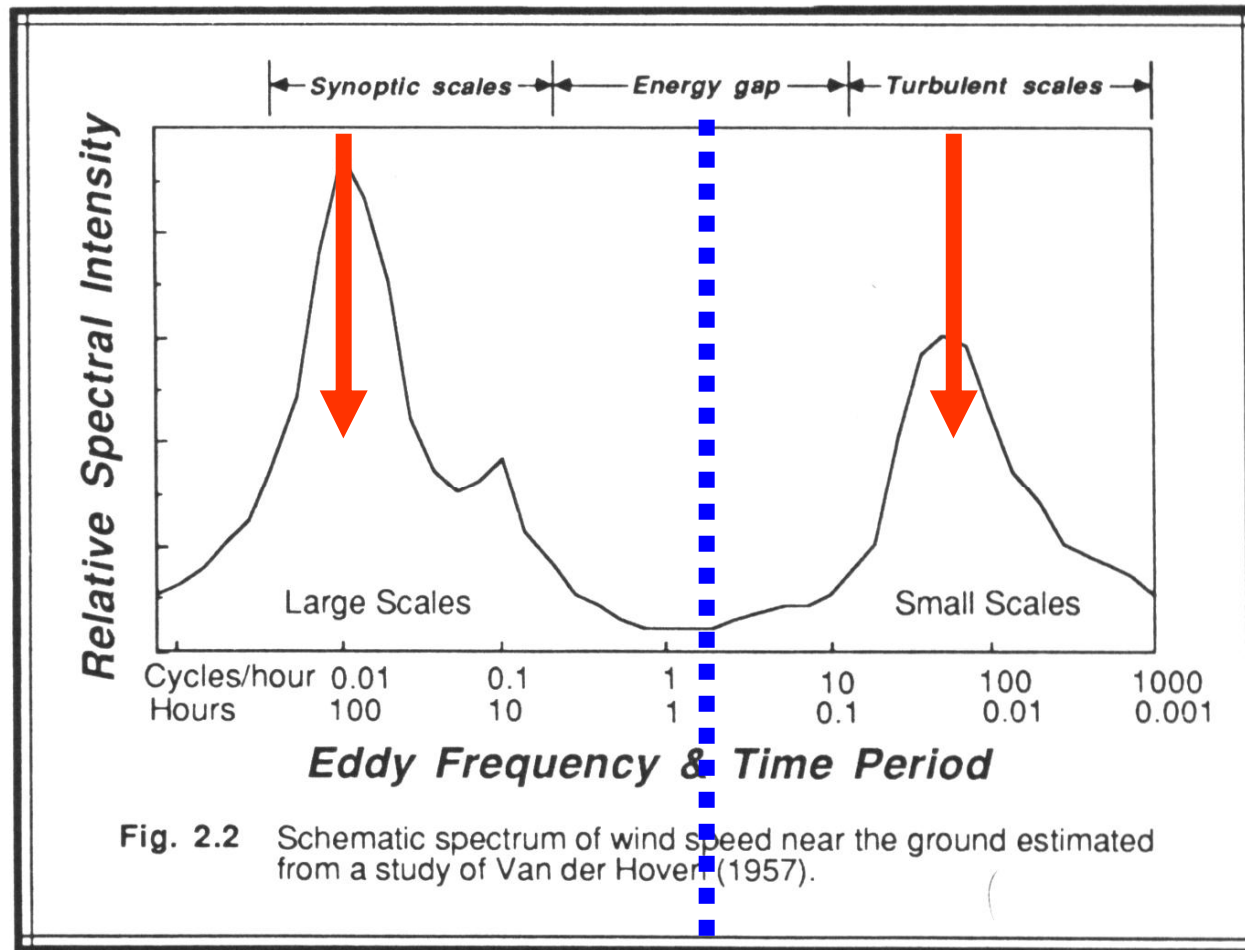
- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

Comportamiento del viento



- La velocidad del viento varía de manera irregular
- “Casi-aleatorio”: normalmente se puede ver un promedio
- La intensidad de la turbulencia varía, y se puede cuantificar (luego)

Vamos a interponer una partición



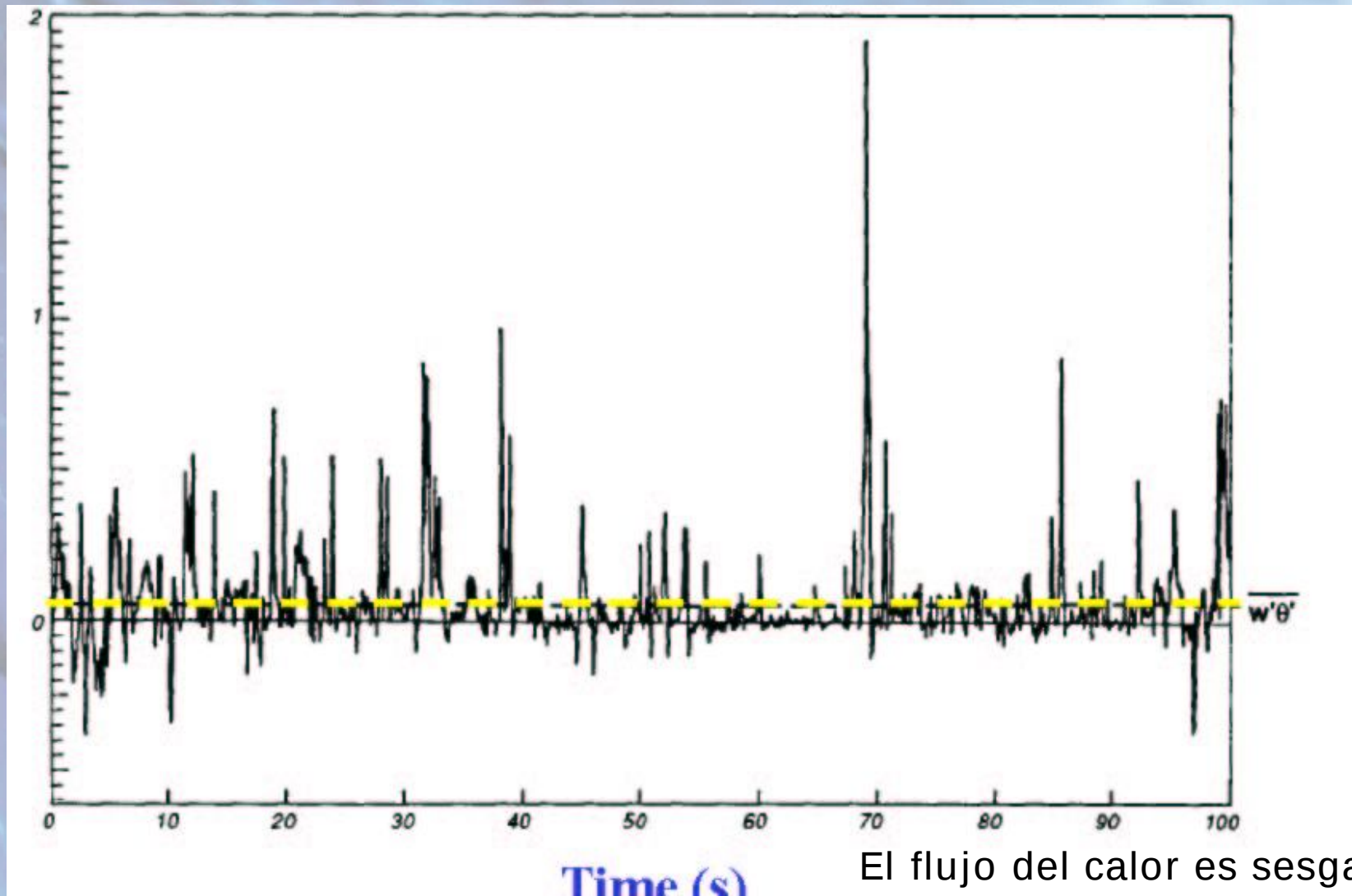
No Turbulencia

Turbulencia

Turbulencia

- Estocástica / Casi-aleatorio
- Técnicas estocásticas
 - Estadísticas
 - Promedio
 - Varianza
 - Co-varianza (luego: flujo)
 - Interval de promedio ~ media hora
 - Captura todo lo que es “turbulento”
 - Elimina movimientos a escalas “no-interesantes”

Motivación para trabajar con promedios



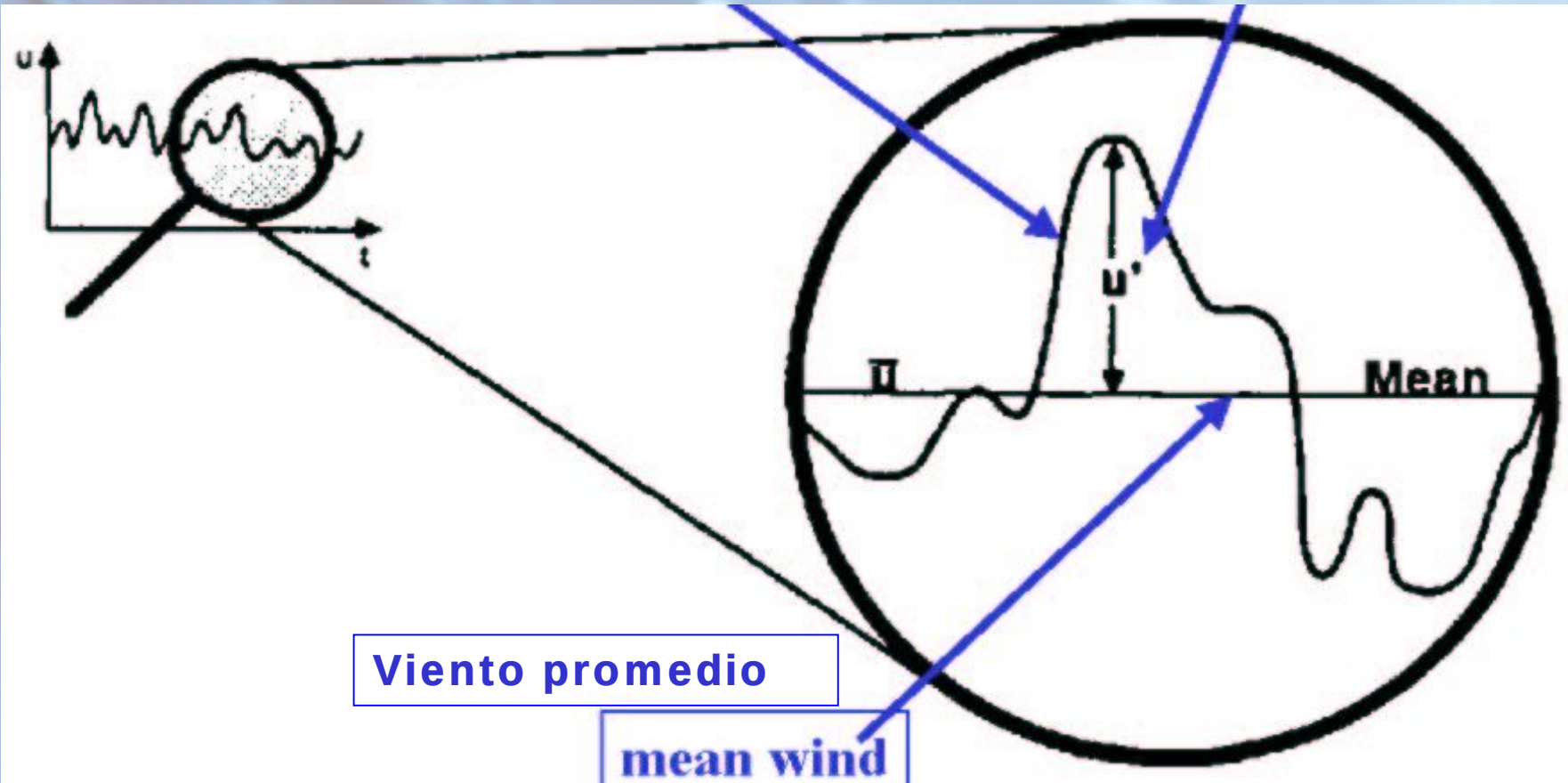
El flujo del calor es sesgado

Descomposición temporal notación: barras y primas

$$u = \bar{u} + u'$$

Viento total

Componente turbulento



ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (R_e)

Descomposición de Reynolds

- Leyes de promedios

$$\overline{(A')} = 0$$

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

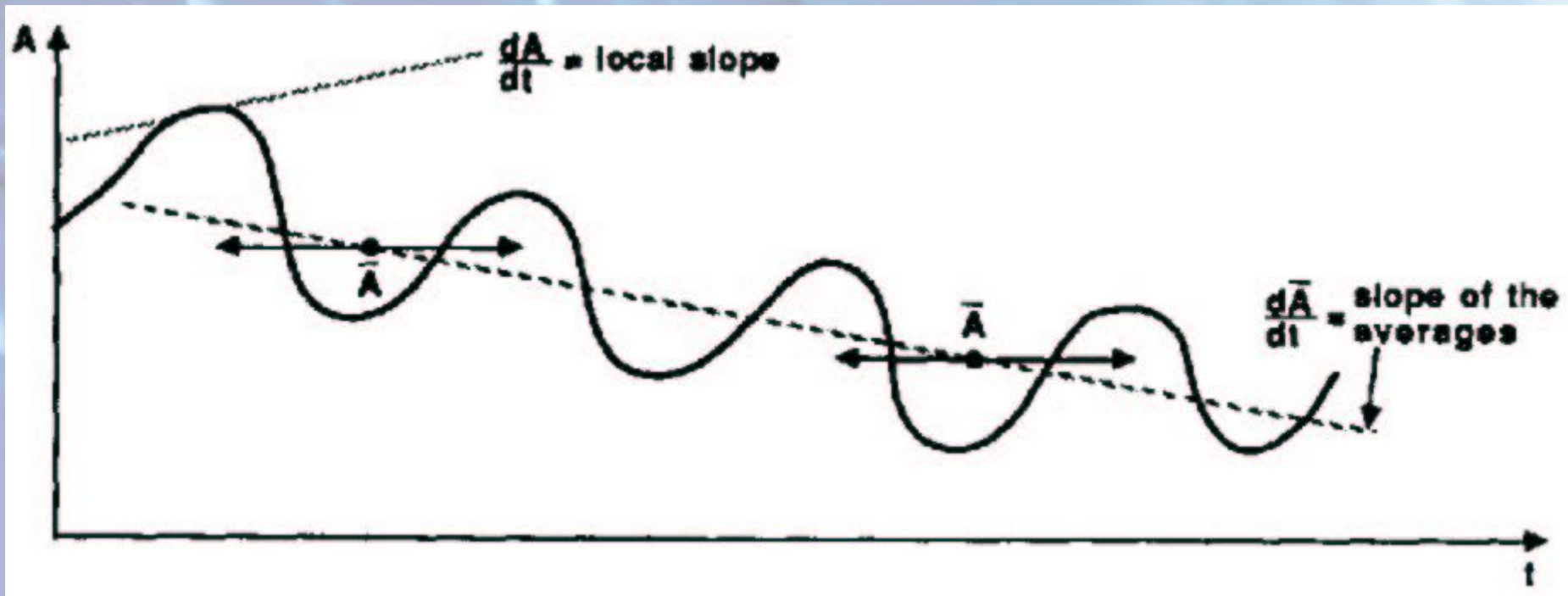
$$\overline{kA} = k\overline{A}$$

$$\overline{(AB)} = \overline{A}\overline{B}$$

Otras leyes de promedios

- La ley de Leibnitz

$$\overline{\frac{dA}{dt}} = \frac{d\bar{A}}{dt}$$



Promedios de Reynolds

- Notando el promedio con una barra, descomponemos las variables

$$w = \bar{w} + w'$$

$$c = \bar{c} + c'$$

- Y el flujo promedio (cinemático, vertical) se escribe así

$$\overline{wc} = \overline{(w + w')(c + c')}$$

$$= \overline{(\bar{w}\bar{c} + w'c + c'\bar{w} + w'c')}$$

$$= \bar{w}\bar{c} + \overline{w'c} + \overline{c'\bar{w}} + \overline{w'c'}$$

$$= \bar{w}\bar{c} + \overline{w'c'}$$

¿Qué es esto?

Se trata de una covarianza

$$\overline{w'c'} = \frac{1}{N} \sum_N w'c'$$

$$= \frac{1}{N} \sum_N (w - \bar{w})(c - \bar{c})$$

$$w = \bar{w} + w'$$

$$c = \bar{c} + c'$$

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (R_e)

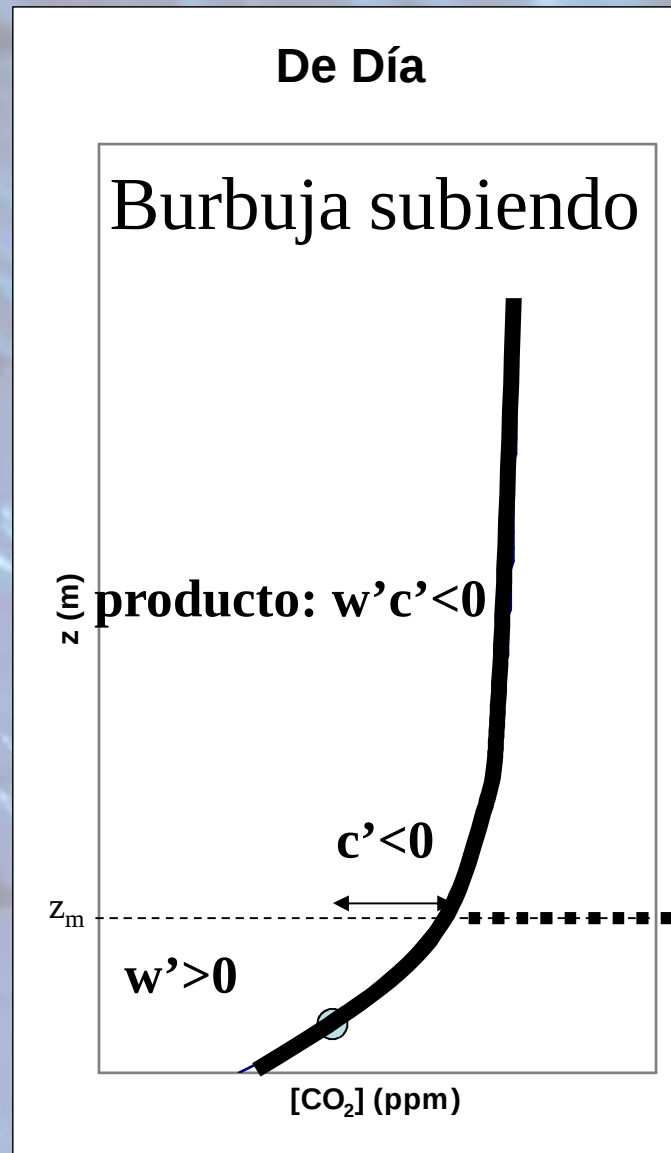
El Flujo Turbulento

- El flujo promedio se puede descomponer en dos partes

$$\overline{wC} = \overline{wC} + \overline{w'C'}$$

- La parte turbulenta se define como una covarianza
 - (Así: la técnica “eddy covariance”)

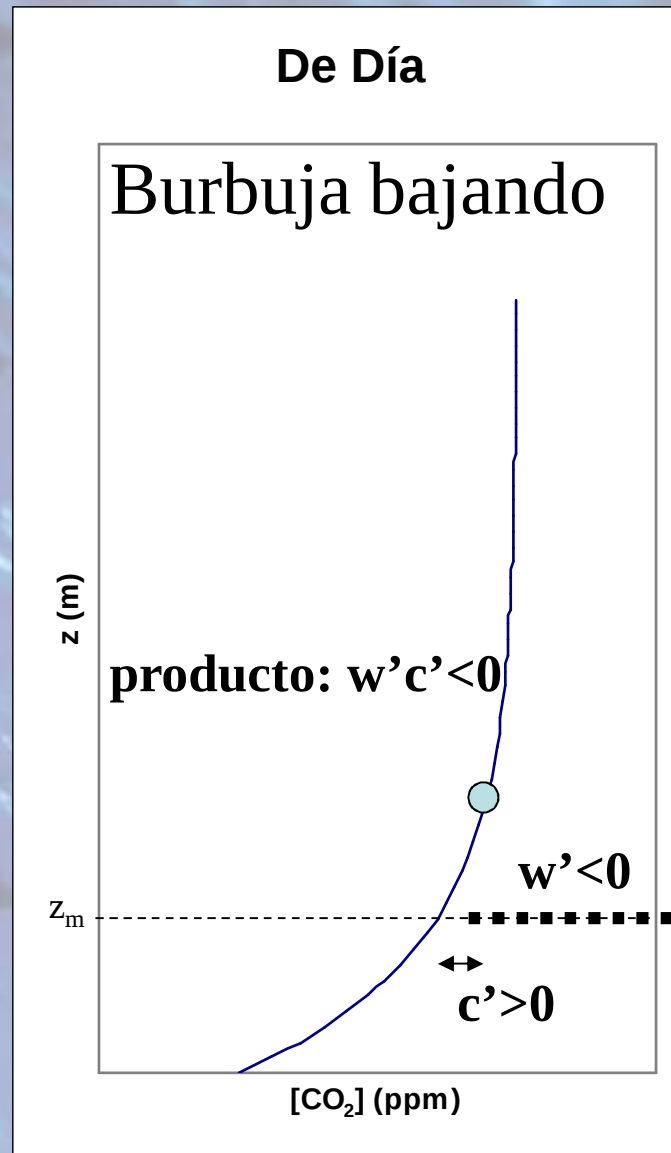
Remolinos: subiendo/bajando



De día: la fotosíntesis quita CO_2 en la superficie, y establece un gradiente

Nivel de referencia (nivel de medida)
Medidas en un marco Euleriano

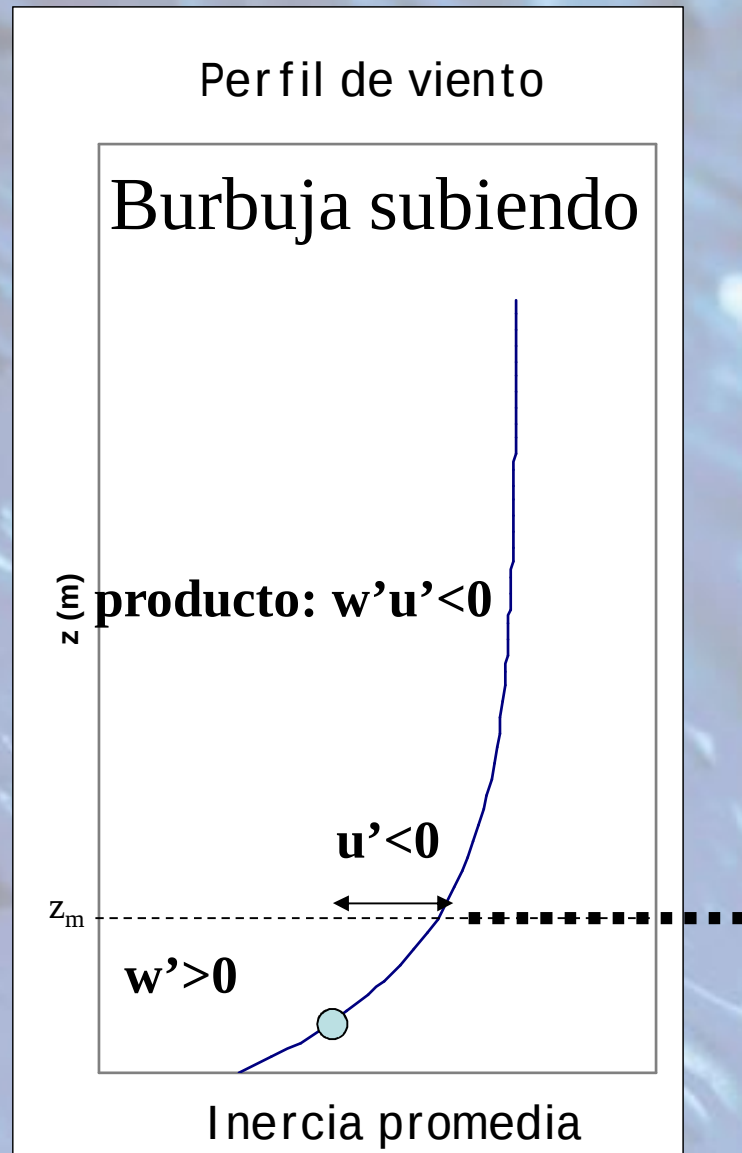
Remolinos: subiendo/bajando



De día: flujo neto de CO_2 hacia la superficie (negativo) para remolinos tanto subiendo como bajando

Nivel de referencia (nivel de medida)
Medidas en un marco Euleriano

Remolinos: subiendo/bajando



- Lo mismo que hay un flujo de CO_2 , hay un flujo de momento

$$\overline{wu} = \overline{wu} + \overline{w'u'} \\ = \overline{w'u'}$$

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

La ecuación de estado

- Descomposición temporal

$$p = \bar{p} + p'$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

$$T_v = \bar{T}_v + T_v'$$

- La ley de gases es

$$\bar{p} + p' = R_d (\bar{\rho} + \rho') (\bar{T}_v + T_v')$$

- Podemos derivar una ecuación para el **estado promedio** de la capa límite:

$$\bar{p} = R_d \bar{\rho} \bar{T}_v + R_d \overline{\rho' T_v'}$$

$$\bar{p} = R_d \bar{\rho} \bar{T}_v$$

(despreciamos los productos de perturbaciones)

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

Advección en “flux form”

- Advección de ζ (cualquier): $u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}$
- El producto de ζ con “continuity “: $\zeta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$
 - Forma incompresible (!)

- Por lo cual, se puede escribir advección como:

$$u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + 0 = u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \zeta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (\zeta u_j)}{\partial x_j}$$

- “flux form”: contiene el flujo cinético (ζu_j)

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (R_e)

La ecuación Navier-Stokes (conservación de inercia)

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{-g\delta_{i3}}_{III} - \underbrace{2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k}_{IV} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{VI}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- III gravedad
- IV Coriolis
- V gradiente de presión
- VI estrés viscoso (transporte molecular)

La ecuación termodinámica

$$\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}}_{\text{I}} + u_j \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x_j}}_{\text{II}} = K_T \underbrace{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}}_{\text{VI}} - \underbrace{\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R_j}{\partial x_j}}_{\text{VII}} - \underbrace{\frac{LE}{\rho c_p}}_{\text{VIII}}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- VI transporte molecular (“conducción”)
- VII divergencia del flujo radiativo
- VIII calor latente por cambio de fase
(despreciamos el calor producido por fricción)

Conservación de un escalar

- Razón de mezcla (r), de H_2O por ejemplo

$$\underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{\text{I}} + u_j \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_j}}_{\text{II}} = K_v \underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2}}_{\text{VI}} + \underbrace{\frac{E}{\rho_d}}_{\text{VII}}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- VI transporte molecular (“difusión”)
- VII evaporación (fuente/sumidero = *source/sink*)

Ecuaciones de conservación para la capa límite

- Las derivaciones son parecidas para la conservación de
 - Momento
 - Energía Termodinámica (calor)
 - Razón de mezcla
- Los pasos:
 - 1. Ecuación de conservación (antes)
 - 2. Expansionar términos ($\bar{\zeta}$ y ζ' , por ejemplo)
 - 3. Tomar el promedio de la ecuación
 - 4. Aplicar las leyes de Reynolds (nos quedamos con $\overline{w'\zeta'}$)
 - 5. “Continuity” $\rightarrow$ “flux form”
 - 6. Despreciamos la difusión molecular (turbulencia es más eficaz)

Ejemplo: conservación en las perturbaciones turbulentas (c)

- Los pasos:

- 1. Ecuación de conservación

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = K_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j^2} + S_c$$

- 2. Expansionar términos

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_j') \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{c} + c') = K_c \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{c} + c') + \bar{S}_c + S_c'$$

- 3. Tomar el promedio de la ecuación

- 4. Aplicar las leyes de Reynolds

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \overline{u_j' \frac{\partial c'}{\partial x_j}} = K_c \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{c} + c') + \bar{S}_c$$

- 5. "Continuity" --→ "flux form"

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' c'} = K_c \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{c} + c') + \bar{S}_c$$

- 6. Despreciar la difusión molecular

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' c'} + \bar{S}_c$$

Comparar

Resumen de las ecuaciones para el caso promedio

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$	$+\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}$	$= -f_c(\bar{V}_g - \bar{v})$	$-\frac{\partial(\overline{u'_j u'})}{\partial x_j}$
$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$	$+\bar{u}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}$	$= +f_c(\bar{U}_g - \bar{u})$	$-\frac{\partial(\overline{u'_j v'})}{\partial x_j}$
$\frac{\partial \bar{q}_T}{\partial t}$	$+\bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}_T}{\partial x_j}$	$= +\frac{S_{q_T}}{\rho}$	$-\frac{\partial(\overline{u'_j q'_T})}{\partial x_j}$
$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}$	$+\bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}$	$= -\frac{1}{\rho c_p} \left[L_v E + \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial x_j} \right]$	$-\frac{\partial(\overline{u'_j \theta'})}{\partial x_j}$
$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t}$	$+\bar{u}_j \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}$	$= +S_C$	$-\frac{\partial(\overline{u'_j C'})}{\partial x_j}$

I

II

VII

X

Promedio

Fuentes

“Difusión”

Momento vertical: luego

$$\bar{p} = \bar{\rho} R_d \bar{T}_v \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

- Término I almacenamiento
- Término II advección
- Término VII fuente /sumidero
- Término X divergencia del flujo turbulento

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

Perturbaciones

- Las perturbaciones se definen como lo que hay en general, menos la parte promedio
- Ahora, tenemos dos tipos de ecuaciones
 - General
 - Promedio
- Definimos las ecuaciones para las perturbaciones como la diferencia entre la situación general y el promedio
- Uno ejemplos
 - La ley de gases
 - La ecuación de momento

La ecuación de estado para las perturbaciones

- De la ley general de gases

$$\bar{p} + p' = R_d (\bar{\rho} + \rho') (\bar{T}_v + T'_v)$$

- Sustraemos la ecuación para promedios de la ecuación total de estado

$$\bar{p} = R_d \bar{\rho} \bar{T}_v$$

- Y obtenemos:

$$p' = R_d \rho' \bar{T}_v + R_d \bar{\rho} T'_v + R_d \rho' T'_v$$

La ecuación de estado (cont)

- Dividimos por la ecuación de promedios:

$$\frac{p'}{\overline{p}} = \frac{\rho'}{\overline{\rho}} + \frac{T'_v}{\overline{T_v}} + \frac{\rho' T'_v}{\overline{\rho T_v}}$$

- Despreciamos el último termino (producto de perturbaciones)
- Despreciamos las fluctuaciones de p

$$p' \sim 10Pa \quad \frac{p'}{\overline{p}} \sim 10^{-4}$$

$$\frac{T'_v}{\overline{T_v}} \sim 5 \bullet 10^{-3}$$

La ecuación de estado(cont)

- Podemos sustituir las fluctuaciones de densidad con las de la temperatura (que se miden)

$$\rho = f(T, q)$$

$$\frac{T'_v}{T_v} \approx \frac{\theta'_v}{\theta_v} \approx -\frac{\rho'}{\rho}$$

$$T'_v \approx T' + 0.61 \bar{T} q'$$

$$\theta'_v \approx \theta' + 0.61 \bar{\theta} q'$$

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - **Momento Vertical**
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

Inercia Vertical

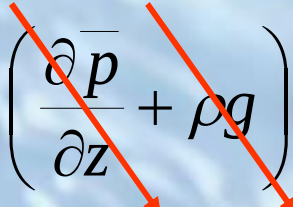
Ecuación de movimiento, $i=3$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}$$

- Multiplicamos por $\frac{\bar{\rho} + \rho'}{\bar{\rho}}$ y aplicamos promedios de Reynolds :

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{d(\bar{w} + w')}{dt} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho g \right)$$

hidrostático



La Aproximación Boussinesq (perturbaciones de densidad)

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) \frac{d(\bar{w} + w')}{dt} = -\frac{\rho'}{\rho} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

- $\frac{\rho'}{\rho} \ll 1$
- Sin embargo, $\frac{\rho'}{\rho} g$ tiene una magnitud igual de grande como los otros términos, y no lo podemos despreciar

$$\frac{d(\bar{w} + w')}{dt} = -\frac{\rho'}{\rho} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{w} + w')}{\partial x_j^2}$$

Inercia Vertical

- Subsistencia es pequeña ($\bar{w} \ll w'$), y despreciable *en la ecuación de inercia* (puede ser importante para advección de q , c , T , ...)
- Utilizando lo de la ecuación de estado

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{\theta_v'}{\theta_v} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}$$

I III VI VII

- » I – cambio material
- » III – gravedad (“*buoyancy*” = empuje-gravedad)
- » V – gradiente de presión
- » VI - fricción

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - **Momento en general**
- La “fricción” en un contexto turbulento (Re)

Momento

- La ecuación completa (antes de expandir):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

- La parte promedio

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j \bar{u}_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

- Restando, nos quedamos con la ecuación prognóstica para la “ráfaga” turbulenta u'_i :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \delta_{i3} \left(\frac{\theta'_v}{\theta_v} \right) g + \cancel{f_c \varepsilon_{ij3} u'_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

**Cambio
local**

Advección (varios)

Arquímedes

Presión

“Fricción”

ECUACIONES DE PERTURBACIONES

ESQUEMA

- Nos interesa sobre todo una dimensión
- Escalas de tiempo
 - Estadísticas
 - Los promedios de Reynolds
 - El flujo turbulento
- Las ecuaciones en promedio
 - Estado – Ley de gases
 - Las ecuaciones de conservación
 - Advección en “flux form”
 - Etapas para su derivación
 - Momento
- Las ecuaciones para las perturbaciones
 - Estado – ley de gases
 - Momento Vertical
 - Momento en general
- La “fricción” en un contexto turbulento (R_e)

El Numero de Reynolds

- La razón entre inercia y las fuerzas moleculares

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} & + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} & = & -g\delta_{i3} & - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j \bar{u}_k & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} & + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} & - \frac{\partial (\bar{u}_i' u_j')}{\partial x_j} \\
 \text{I} & \text{II} & & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} & \text{X}
 \end{array}$$

$$\frac{(I, II, X)}{(VI)} \sim \frac{UU/L}{\nu U/(LL)} \sim \frac{UL}{\nu} \equiv \text{Re}$$

- U y L : escalas típicos. $\nu_{\text{air}} \cong 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
- Re
 - para Re ~1, hace falta U ~ 10⁻² m/s y L~10⁻³ m
 - Por valores típicos (SL) U=5 m/s y L=100 m, Re ≅ 3 · 10⁷

El Numero de Reynolds

$$\text{Re} \equiv \frac{UL}{\nu}$$

- $\text{Re} \gg 1$, el movimiento es turbulento y se puede despreciar las fuerzas moleculares ***en la ecuación de inercia***
- $\text{Re} \sim 1$, régimen intermedio
- $\text{Re} \ll 1$, el movimiento es laminar

“Fricción”

- En la capa limite, lejos (a cm o más) de la superficie, el freno (“fricción”) no es molecular sino el estrés de Reynolds ($\overline{w'u'}$)
- Por eso, definimos una escala de velocidad muy importante para la turbulencia

$$u^* = (\overline{w'u'})^{0.5}$$

- Se llama la velocidad de fricción (“friction velocity”)
- Y el estrés (de Reynolds) es

$$\tau = \rho u^{*2} = \rho \overline{w'u'}$$