

IV. Revisión de las Bases Meteorológicas: Termodinámica y Dinámica

Andrew S. Kowalski
Catedrático de Universidad
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Granada
andyk@ugr.es

Bibliografía meteorológica

- Wallace & Hobbs; Capítulo 3. (termodinámica)
- Holton; Capítulos 1+2. (dinámica)
- Stull; Capítulo 2. (notación de Einstein)

BASES METEOROLÓGICAS

ESQUEMA

- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - Procesos de Mezcla
- Dinámicas atmosféricas
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

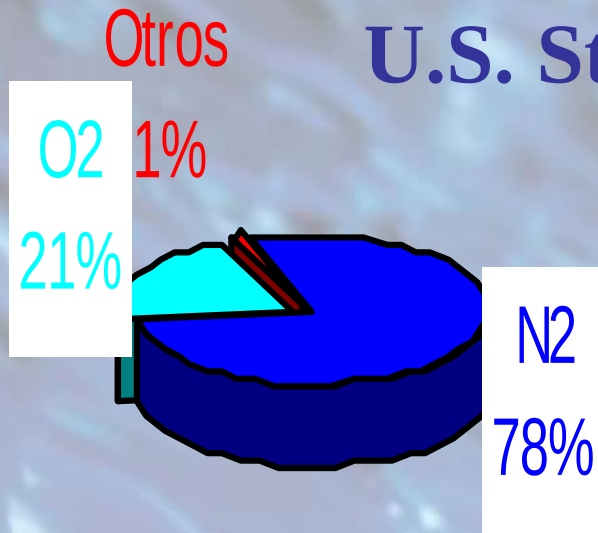
BASES METEOROLÓGICAS

ESQUEMA

- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - Procesos de Mezcla
- Dinámicas atmosféricas
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

COMPOSICIÓN DE LA ATMÓSFERA

U.S. Standard 1976



Constituyentes permanentes

• N ₂	78.084 %	vol
• O ₂	20.948 %	vol
• Ar	0.934 %	vol
• CO ₂	0.033 %	vol
• Ne	18.18*10 ⁻⁴ %	vol
• He	5.24*10 ⁻⁴ %	vol
• Kr	1.14*10 ⁻⁴ %	vol
• Xe	0.089*10 ⁻⁴ %	vol
• H ₂	0.5*10 ⁻⁴ %	vol
• N ₂ O	0.27*10 ⁻⁴ %	vol
• CH ₄	1.5*10 ⁻⁴ %	vol
• CO ₂	0.27*10 ⁻⁴ %	vol

Constituyentes variables

• <u>H₂O</u>	0-4	%	vol
• O ₃	0-12	*10 ⁻⁴ %	vol
• SO ₂	0.001	*10 ⁻⁴ %	vol
• NO ₂	0.001	*10 ⁻⁴ %	vol
• NH ₃	0.004	*10 ⁻⁴ %	vol
• NO	0.0005	*10 ⁻⁴ %	vol
• SH ₂	0.00005	*10 ⁻⁴ %	vol

ECUACIÓN DE ESTADO

Problemático

$$p \textcircled{V} = n R^* T$$

Requiere un cambio (de constante)

$$p = \left(\frac{n}{V} \right) R^* T$$

$$p = \left(\frac{nm}{V} \right) \left(\frac{R^*}{m} \right) T$$

masa molecular

$$p = \rho R T$$

forma preferida en la meteorología

ECUACIÓN DE ESTADO (S.I.)

$$p = \rho R T$$

- p : presión en Pascales (Pa; N m^{-2} ; $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
 - ρ : densidad en kg m^{-3}
 - R : constante particular ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
 - T : Temperatura en Kelvin (K)
- A veces se escribe así (volumen específico):

$$p\alpha = R T$$

ó

$$p v = R T$$

Ecuación de Estado de una mezcla

Ley de gases, gas i $p_i = \rho_i R_i T$

Ley de gases, mezcla $p = \rho R_d T$

Conservación de masa $\rho = \sum \rho_i$

Ley de Dalton $p = \sum p_i$

$$p = T \sum \rho_i R_i \qquad R_d \equiv \frac{\sum \rho_i R_i}{\sum \rho_i}$$

AIRE SECO

Gas	Peso mol.	R_g (J kg ⁻¹ K ⁻¹)	% masa
N ₂	28.016	296.7	75.52
O ₂	32.000	259.8	23.15
Ar	39.444	208.1	1.28
CO ₂	44.010	188.9	0.05

$$R^* = 8.31436 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Constantes del aire seco

$$R_d = (\sum M_i R_i) / M = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$R^* = m_d R_d \Rightarrow m_d = 28.97 \text{ g/mol}$$

$$c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

$$\begin{array}{ccccccc} dQ & = & dU & + & dW \\ \text{calor} & & \text{energía} & & \text{trabajo} \\ & & \text{interna} & & \end{array}$$

Por unidad de masa (energía específica)

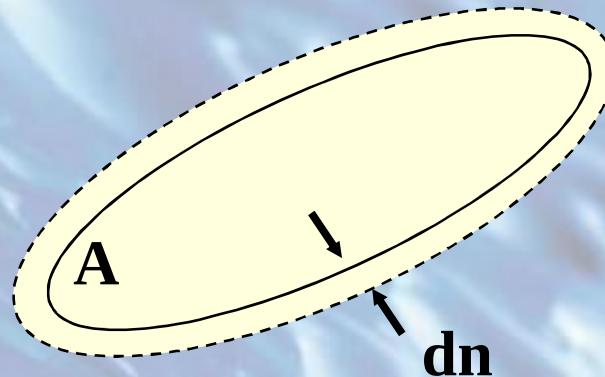
$$dq = du + dw$$

Energía interna: en función de la temperatura

Trabajo: ...

Trabajo realizado por un gas que se dilata

- A: una superficie 3-D $p = F/A \rightarrow A = F/p$
- Expansión: $dV = A \, dn$
- Substitución: $p \, dV = F \, dn = dW$



- Por unidad de masa: $dw = p \, dv$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

$$pv = R_d T$$

$$d(pv) = R_d dT$$

$$c_{pd} - c_{vd} = R_d$$

$$dq = du + dw = c_{vd} dT + p dv$$

$$dq = c_{vd} dT + d(pv) - v dp$$

$$dq = c_{vd} dT + R_d dT - v dp$$

$$dq = c_{pd} dT - v dp$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA Tres versiones

$$\text{P. Adiabático } dq = 0 \quad 0 = c_{pd} dT - v dp$$

$$0 = du + dw$$

$$0 = c_{vd} dT + p dv$$

$$c_{pd} dT = v dp$$

$$-du = dw = p dv$$

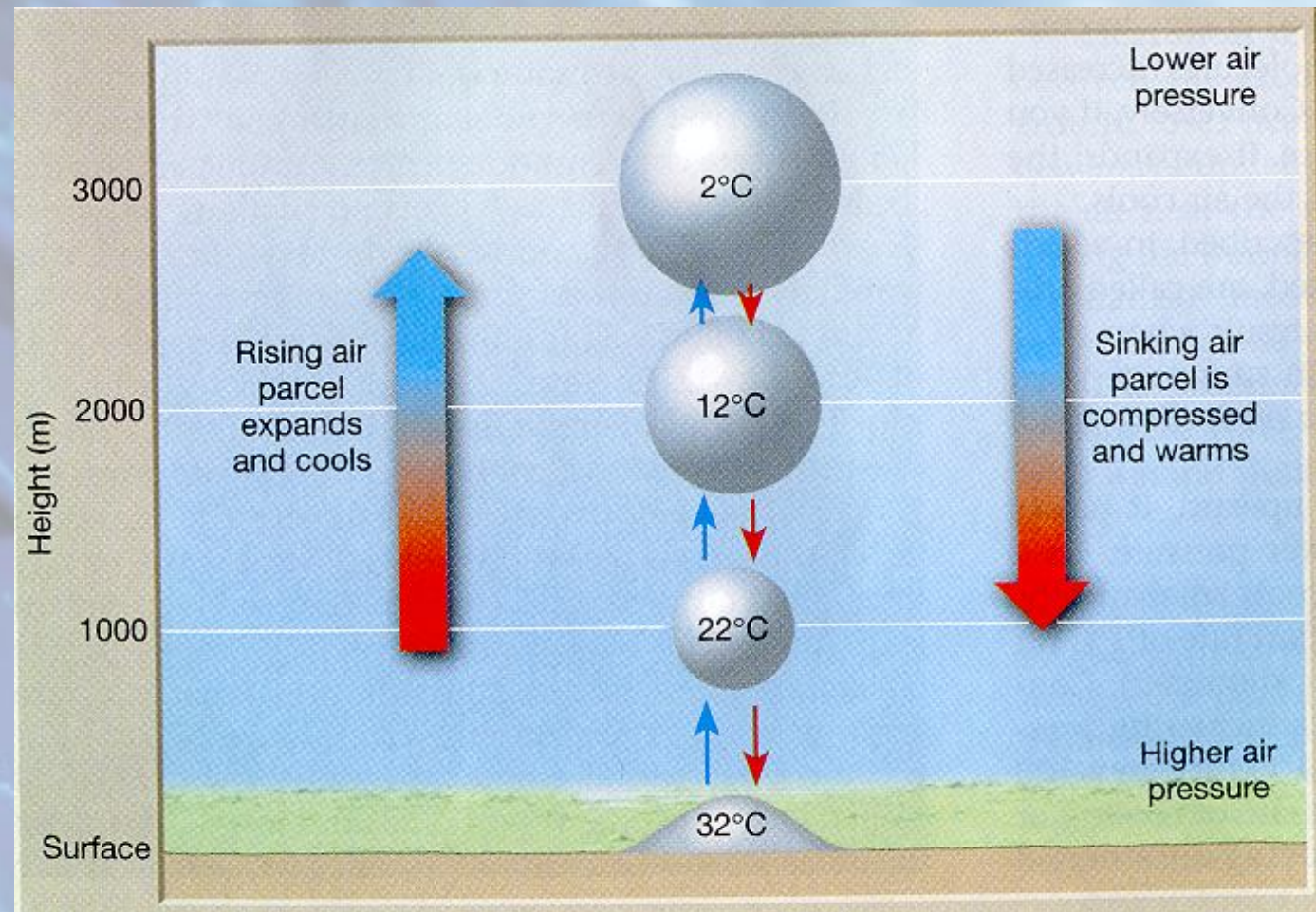
$$-c_v dT = p dv$$

PROCESO ADIABÁTICO SECO

$$c_{pd} dT = v dp$$

$$-du = dw = p dv$$

$$-c_v dT = p dv$$



DEFINICIÓN: UNA NUEVA TEMPERATURA

$$pv = R_d T$$

$$d(pv) = R_d dT$$

$$c_{pd} - c_{vd} = R_d$$

$$dq = du + dw = c_{vd} dT + p dv$$

$$dq = c_{vd} dT + d(pv) - v dp$$

$$dq = c_{vd} dT + R_d dT - v dp$$

$$dq = c_{pd} dT - v dp$$

P. Adiabático $dq = 0$ $0 = c_{pd} dT - v dp$

$$0 = du + dw$$

$$0 = c_{vd} dT + p dv$$

$$c_{pd} dT = v dp$$

$$-du = dw = p dv$$

$$-c_v dT = p dv$$

TEMPERATURA POTENCIAL

P. Adiabático

$$c_{pd} dT = v dp$$

$$c_{pd} dT = R_d T (dp / p)$$

 Ley de gases

$$dT / T = (R_d / c_{pd}) (dp / p)$$

$$T / T_o = (p / p_o)^{R_d / c_{pd}}$$

$$R_d / c_{pd} = 0.286$$

TEMPERATURA POTENCIAL

Es la alcanzada evolucionando por vía adiabática seca hasta un nivel de referencia fijado en 1000 hPa

$$\theta = T (1000 / p)^{R / c_p}$$

BASES METEOROLÓGICAS

ESQUEMA

- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - Procesos de Mezcla
- Dinámicas atmosféricas
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

AIRE HÚMEDO. VAPOR DE AGUA.

Ecuación de Estado del Vapor de agua

$$e_v = R_v T$$

$$e = \rho_v R_v T$$

Constantes vapor de agua

$$R_v = R^* / m_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$c_{vv} = 1350 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$c_{pv} = 1810 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$L_f = 334000 \text{ J kg}^{-1}$$

$$L_v = 2500000 \text{ J kg}^{-1}$$

$$L_s = 2834000 \text{ J kg}^{-1}$$

$$c_i = 1950 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ (hielo)}$$

$$c_l = 4187 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ (líquido)}$$

~~INDICES DE HUMEDAD~~

Proporción de mezcla, r:

$$r = M_v / M_d = (M_v / V) / (M_d / V) = \rho_v / \rho_d$$

$$e = \rho_v R_v T \quad (p - e) = \rho_d R_d T$$

$$r = (e / R_v T) / ((p - e) / R_d T) = (R_d / R_v) (e / (p - e)) = 0.622 (e / (p - e))$$

$$r = 0.622 (e / (p - e)) \quad \text{se conserva}$$

Humedad específica, q:

$$q = \rho_v / \rho_m = \rho_v / (\rho_d + \rho_v) = 0.622 (e / (p - 0.378 e))$$

$$\text{Ya que } p \gg e \Rightarrow r \approx q$$

Proporción de mezcla saturante r_s :

$$r_s = 0.622 (e_s / (p - e_s))$$

INDICES DE HUMEDAD

Humedad absoluta, ρ_v :

$$\rho_v = M_v / V = e / R_v T$$

Depende del volumen y por tanto varía en procesos de expansión o compresión aunque no se modifique la masa de vapor en el aire.

Humedad relativa, (U):

Caracteriza la humedad en comparación con el valor límite de saturación a una temperatura dada. Depende tanto del contenido de vapor como de la temperatura.

$$U/100 = r / r_s = (0.622 (e / (p-e))) / (0.622 (e_s / (p-e_s))) \cong e / e_s$$

ECUACION DE ESTADO DEL AIRE HUMEDO

$$r \equiv \left(\frac{M_v}{M_d} \right)$$

$$\begin{aligned} R_m &= \left(\frac{M_v R_v + M_d R_d}{M_v + M_d} \right) \left(\frac{1/M_d}{1/M_d} \right) \\ &= \left(\frac{r R_v + R_d}{r + 1} \right) \left(\frac{1 - r}{1 - r} \right) \quad (r \ll 1) \end{aligned}$$

$$R_m \approx R_d (1 + 0.61 r)$$

Luego: importancia en la definición de la temperatura virtual

ECUACION DE ESTADO DEL AIRE HUMEDO

Aire húmedo (m = “moist”) y seco a la misma T y p

$$p = \rho_m R_m T$$

$$R_m = R_d (1 + 0.61 r) \Rightarrow \rho_m = (R_d/R_m) \rho_d = \rho_d / (1 + 0.61 r) < \rho_d$$

$$p = \rho_d R_d T$$

A p y T dadas el aire húmedo es menos denso que el aire seco

Temperatura Virtual T_v

$$p = \rho_m R_m T = \rho_m R_d (1 + 0.61 r) T = \rho_m R_d T_v$$

$$T_v = T (1 + 0.61 r)$$

T_v es la que tendría que tener el aire seco para que a una p dada tenga la misma densidad que el aire húmedo a T y r

$$p = \rho_m R_d T_v \quad \text{o} \quad p = \rho_m R_m T$$

BASES METEOROLÓGICAS

ESQUEMA

- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - **Procesos de Mezcla**
- Dinámicas atmosféricas
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

MEZCLAS DE MASAS DE AIRE

Mezcla horizontal de masas de aire

(M_1, q_1, r_1, T_1) y (M_2, q_2, r_2, T_2) . Mezcla isobárica, suponiendo no condensación

$$q_m = (M_1 q_1 + M_2 q_2) / (M_1 + M_2)$$

$$\text{Usando } q = 0.622 (e / (p - 0.378 e))$$

$$e_m / (p - 0.378 e_m) = ((M_1 e_1 / (p - 0.378 e_1)) + (M_2 e_2 / (p - 0.378 e_2))) / (M_1 + M_2)$$

Obtenemos

$$e_m \cong (M_1 e_1 + M_2 e_2) / (M_1 + M_2)$$

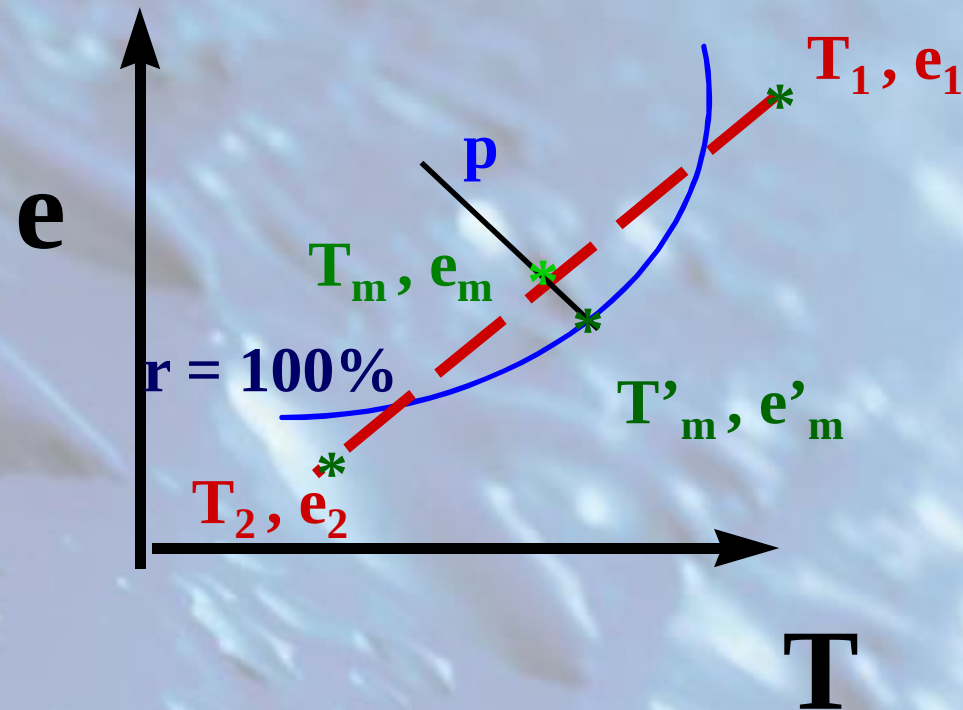
Suponiendo proceso isobárico sin intercambio de calor con el ambiente

$$T_m \cong (M_1 T_1 + M_2 T_2) / (M_1 + M_2)$$

Conclusión: Tanto T como e se mezclan linealmente

MEZCLAS DE MASAS DE AIRE

Mezcla horizontal de masas de aire



Si la mezcla resulta sobresaturada hay condensación, en este proceso isobárico pasamos de (T_m, e_m) a (T'_m, e'_m) , para ello se condensa $(r_m - r'_m)$ g que ceden el calor latente de condensación $L_v(r_m - r'_m)$ para aumentar la temperatura de T_m hasta T'_m .

MEZCLAS DE MASAS DE AIRE

Mezcla vertical de masas de aire. Nivel de condensación por mezcla

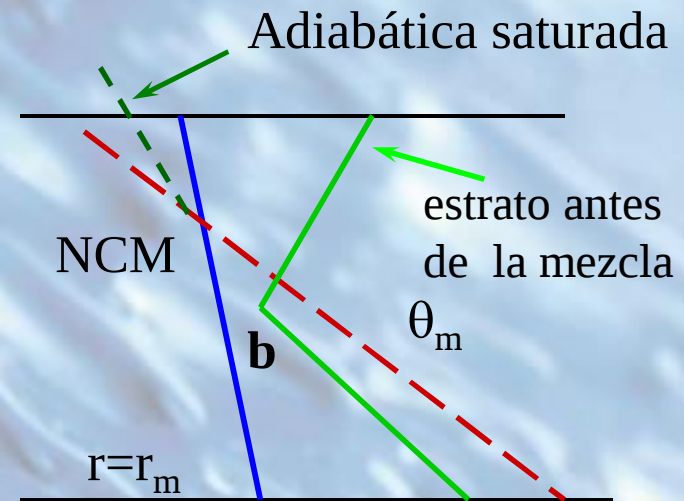
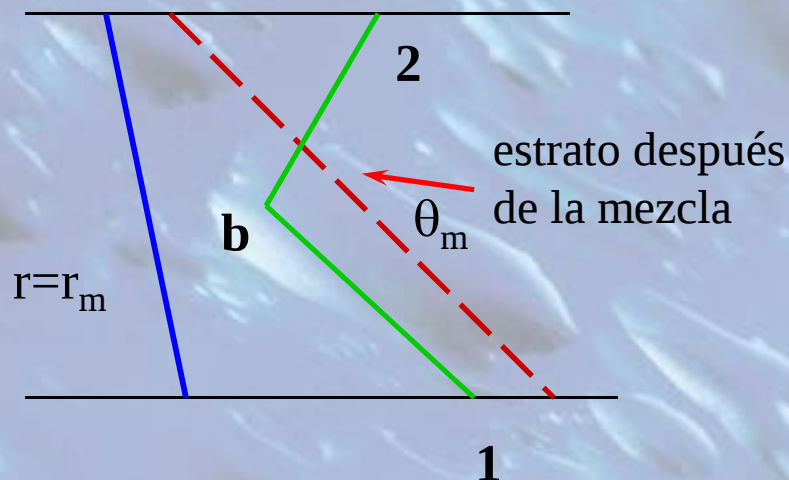
(T_1, p_1) y (T_2, p_2) . Se puede considerar un proceso de mezcla a una presión común p que alcanzan mediante una evolución adiabática

$$T_{p1} = T_1 (p / p_1)^{R_d / c_{pd}} \quad T_{p2} = T_2 (p / p_2)^{R_d / c_{pd}}$$

$$T_{mp} = (M_1 T_{p1} + M_2 T_{p2}) / (M_1 + M_2)$$

que multiplicada por $(1000/p)^{R_d / c_{pd}}$ permite escribir

$$\theta_m = (M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2) / (M_1 + M_2)$$



BASES METEOROLÓGICOS

ESQUEMA

- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - Procesos de Mezcla
- **Dinámicas atmosféricas**
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Trucos para simplificar
- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Trucos para simplificar
- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

Dos trucos

- La Hipótesis del continuo
 - Para estudiar tiempo (clima), ignoramos el aspecto discreto del aire
 - Un “punto” (una burbuja, “*a parcel*”) de aire es un elemento pequeño con muchas moléculas
 -

$$\lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{Dx}{Dt} \equiv u$$

- Fuerzas específicas – es conveniente escribir las fuerzas divididas por masa
- Volveremos a la ecuación

Simplificación

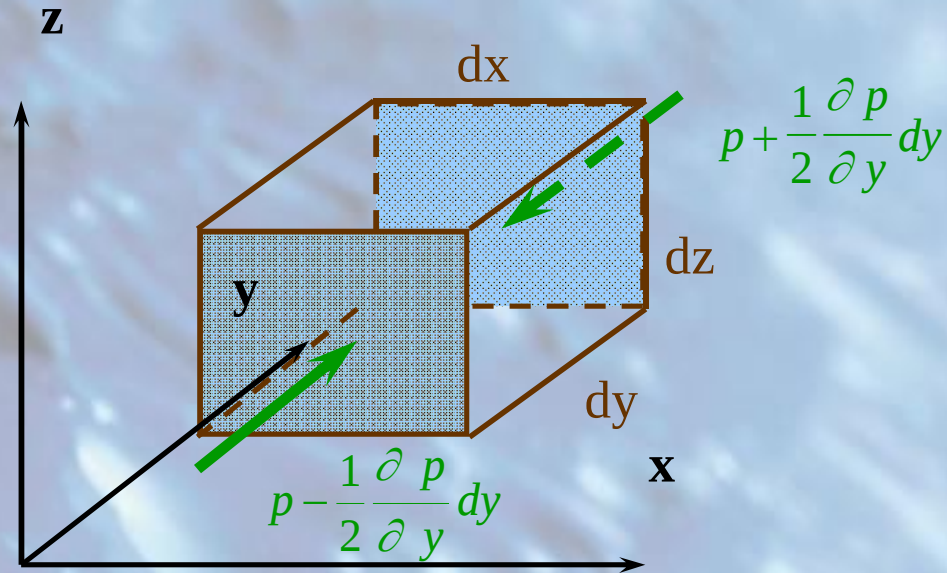
- Para estudiar movimientos muy grandes, hay que escribir la ecuación en coordenados esféricos
- No es importante para la micro-meteorología

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Trucos para simplificar
- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

Fuerza de gradiente de presión



$$\left[\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dz = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

$$\frac{\vec{F}}{m} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

Gravedad

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \frac{\vec{F}_g}{m} \equiv \vec{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

- Con a = radio de la tierra, definimos

$$\vec{g}_0^* \equiv -\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad y \quad \vec{g}^* = \vec{g}_0^* \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{a} \right)^2}$$

- como $z \ll a$ $\vec{g}^* = \vec{g}_0^*$ (cte)

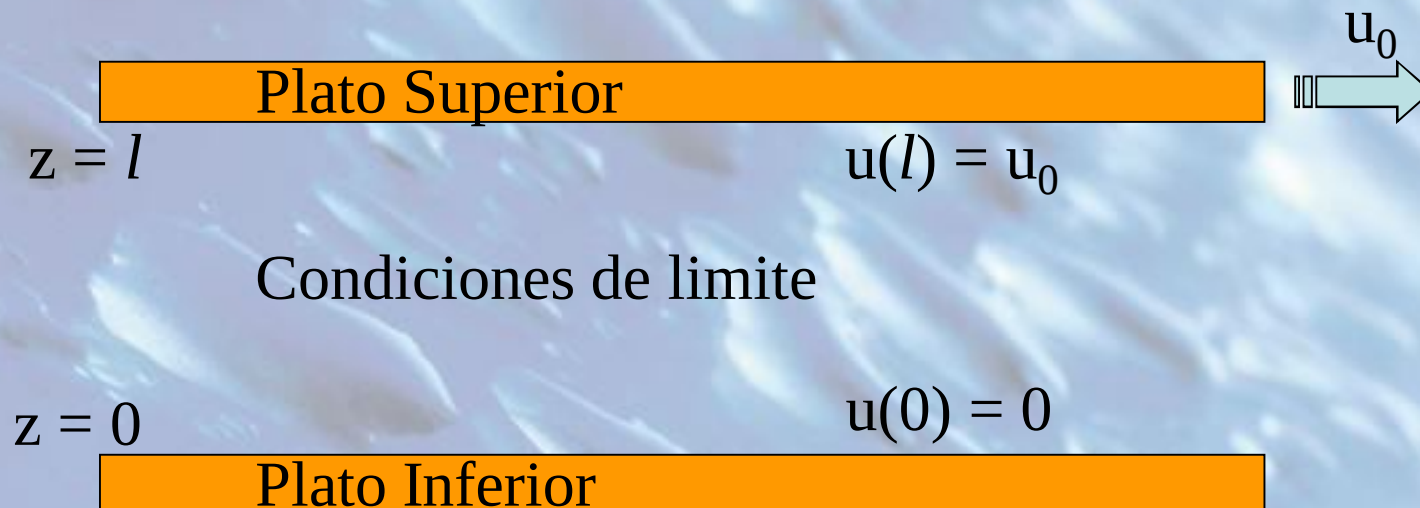
La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

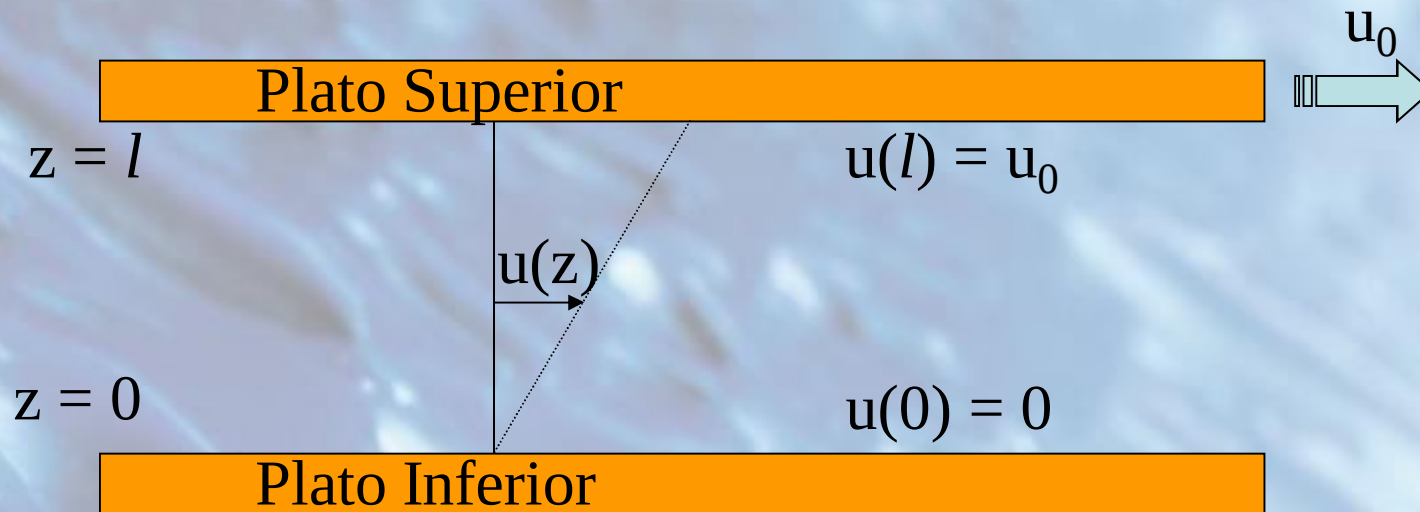
- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

Viscosidad (molecular)

- Consideramos dos platos (poco) separados por un fluido
 - El plato superior se mueve
 - El plato inferior no



Viscosidad

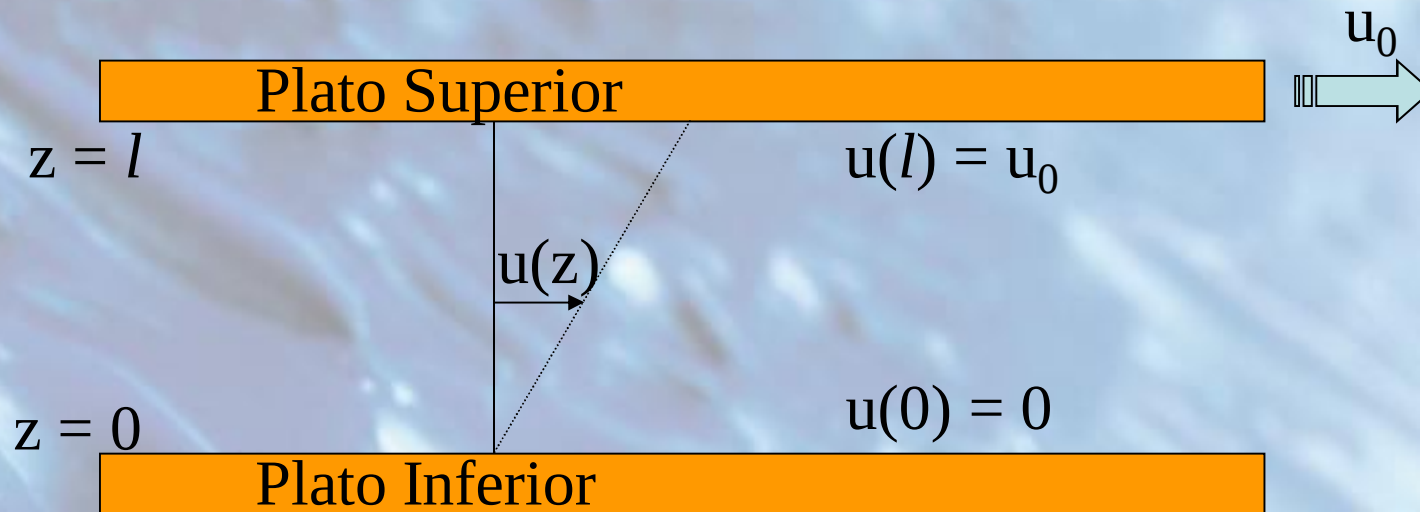


Se ha determinado (por medidas) que la fuerza necesaria para mantener en movimiento del plato superior es:

$$F = \mu A \frac{u_0}{l}$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido

Viscosidad

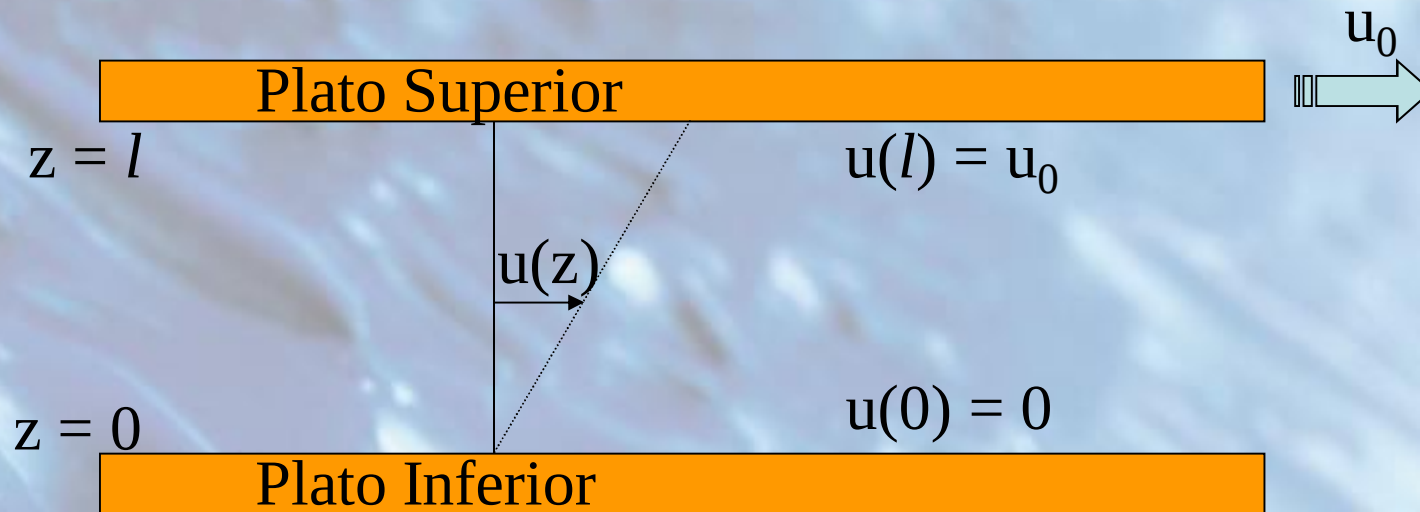


Si el movimiento es uniforme, las fuerzas netas suman a cero en todo lugar, y la fuerza aplicada por cada punto en el fluido en su vecino abajo es:

$$F = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

se debe a los movimientos aleatorios moleculares

Viscosidad



Esta fuerza se llama el estrés de cizalla (gradiente de velocidad) en la dirección “x” por la gradiente vertical

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

La fuerza que puede acelerar un movimiento es

$$F_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Viscosidad (“fricción”)

- Para ponerla en la forma “especifica”, definimos la viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

- Sumando los componentes:

$$\frac{F_{r,x}}{m} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Cambio local y advección

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

Cambio local y advección

- En un punto (local) definido, podemos observar cambios por dos procesos:
 - Cambio material
 - Advección ($u = \frac{\partial x}{\partial t}$)
- Por ejemplo, sube la temperatura porque
 - Todo el fluido se calienta
 - El viento viene de una región mas caliente

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

cambio material cambio local advección

The diagram illustrates the decomposition of the material derivative $\frac{dT}{dt}$ into its constituent parts. The equation $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$ is shown. Below the equation, three labels are positioned: 'cambio material' on the left, 'cambio local' in the center, and 'advección' on the right. An arrow points from 'cambio material' to the $\frac{dT}{dt}$ term. Another arrow points from 'cambio local' to the $\frac{\partial T}{\partial t}$ term. A third arrow points from 'advección' to a bracket that encompasses the three spatial derivative terms: $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$.

La ecuación de movimiento

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- 3 Fuerzas
 - Gradiente de presión
 - Gravedad
 - Fricción (viscosidad)
- 3 Tipos de Aceleración
 - Aceleración relativa
 - “Fuerzas aparentes”
 - Cambio local y advección

La ecuación de movimiento
(Navier-Stokes)

La ecuación de movimiento (Navier-Stokes)

- Solo un componente (u):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

- En forma vectorial:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \bullet \nabla) \vec{V} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} + -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}_0^* + \vec{F}_r$$

- Luego: una notación más compacta

BASES METEOROLÓGICAS

ESQUEMA

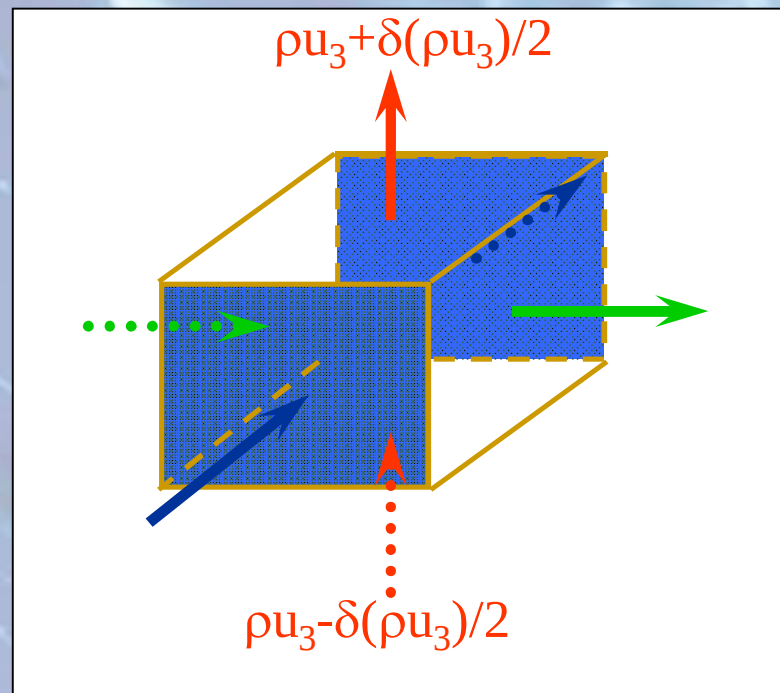
- Meteorología Básica
 - Aire seco: Estado y Termodinámica
 - Aire Húmedo. Vapor de agua
 - Procesos de Mezcla
- Dinámicas atmosféricas
 - ECUACIONES DE CONSERVACIÓN
 - MOMENTO (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)
 - Masa
 - (Notación “summation”)
 - Las ecuaciones Navier-Stokes
 - La ecuación termodinámica
 - Conservación de un escalar

Conservación de masa

- “The continuity equation”

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$



Una Nueva Notación

- La notación de Einstein (“summation notation”)
- Índices únicas : Tres Dimensiones

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w \\ &= \hat{i}u_1 + \hat{j}u_2 + \hat{k}u_3 = \underbrace{(u_i)}_{\text{vector}}\end{aligned}$$

- De hecho, lo de arriba representan términos que se pueden meter en tres ecuaciones. En los fluidos, se notan unas interacciones entre las direcciones; ejm:

tensor $\longrightarrow (u_i u_j) = \begin{vmatrix} uu & uw & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{vmatrix}$

escalar $\longrightarrow (u_i u_i) = uu + vv + ww$

“Summation Notation”

- Dos operadores:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\varepsilon_{mnq} = \begin{cases} +1 & mnq = 123, 231, 312 \\ -1, & mnq = 321, 213, 132 \\ 0, & m = n, m = q, n = q \end{cases}$$

“Summation Notation”: Ejemplos

- Gravedad: $\vec{g} = \delta_{i3} g$
- Gradiente de Presión: $\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x_i}$
- Fricción (tensor): $\tau_{ij} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$
- Coriolis: $-2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j u_k$
– (η_j : vector de unidad, paralelo al eje de rotación)
- Divergencia: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$
- Ahora, podemos examinar las ecuaciones de conservación

“Summation Notation”

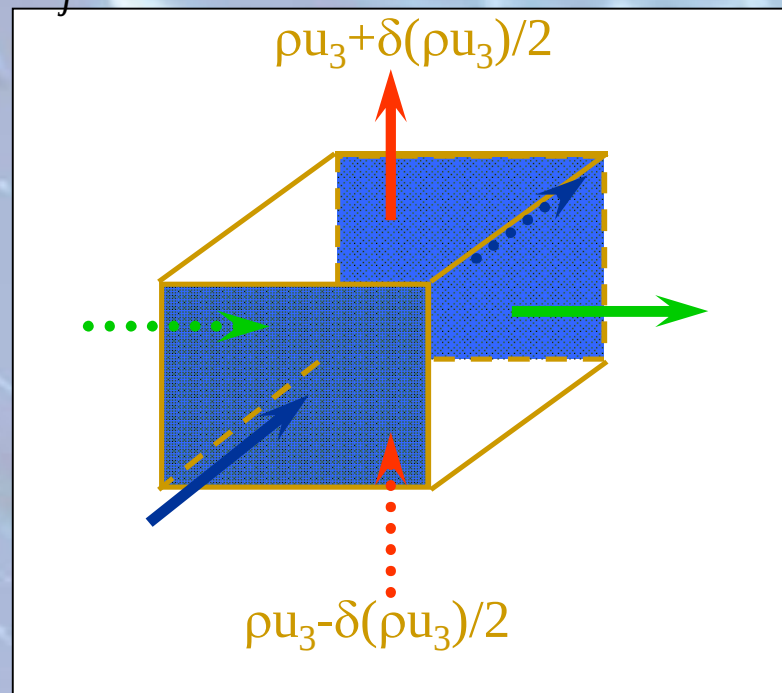
- Economía de Expresión:
 - Conservación de masa
 - Ecuaciones de Navier-Stokes
 - Ecuación Termodinámica
 - Conservación de un escalar

Conservación de masa

- “The continuity equation”

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$



La ecuación Navier-Stokes (conservación de inercia)

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{-g\delta_{i3}}_{III} - \underbrace{2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k}_{IV} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{VI}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- III gravedad
- IV Coriolis
- V gradiente de presión
- VI estrés viscoso (fricción)

La ecuación termodinámica

$$\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}}_{\text{II}} = K_T \underbrace{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}}_{\text{VI}} - \underbrace{\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R_j}{\partial x_j}}_{\text{VII}} - \underbrace{\frac{LE}{\rho c_p}}_{\text{VIII}}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- VI transporte molecular (“conducción”)
- VII divergencia del flujo radiativo
- VIII calor latente por cambio de fase
(despreciamos el calor producido por fricción)

Conservación de un escalar

- Razón de mezcla (r), de H_2O por ejemplo

$$\underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{u_j}_{\text{II}} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_j}}_{\text{VI}} = \underbrace{K_v}_{\text{VI}} \underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2}}_{\text{VII}} + \underbrace{\frac{E}{\rho_d}}_{\text{VII}}$$

- I almacenamiento (cambio local)
- II transporte (“advección”)
- VI transporte molecular (“difusión”)
- VII evaporación (fuente/sumidero = *source/sink*)

Una nota final sobre la conservación de un escalar

- La razón de mezcla (r), se conserva, por lo cual se puede escribir una ecuación de conservación:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + u_j \frac{\partial r}{\partial x_j} = K_v \frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} + \frac{E}{\rho_d}$$

- En la literatura, se puede encontrar “ecuaciones de conservación” para cantidades que no se conservan:
 - “un escalar c ”
 - Densidad de CO_2 (incompresibilidad)
 - “Concentración” de CO_2