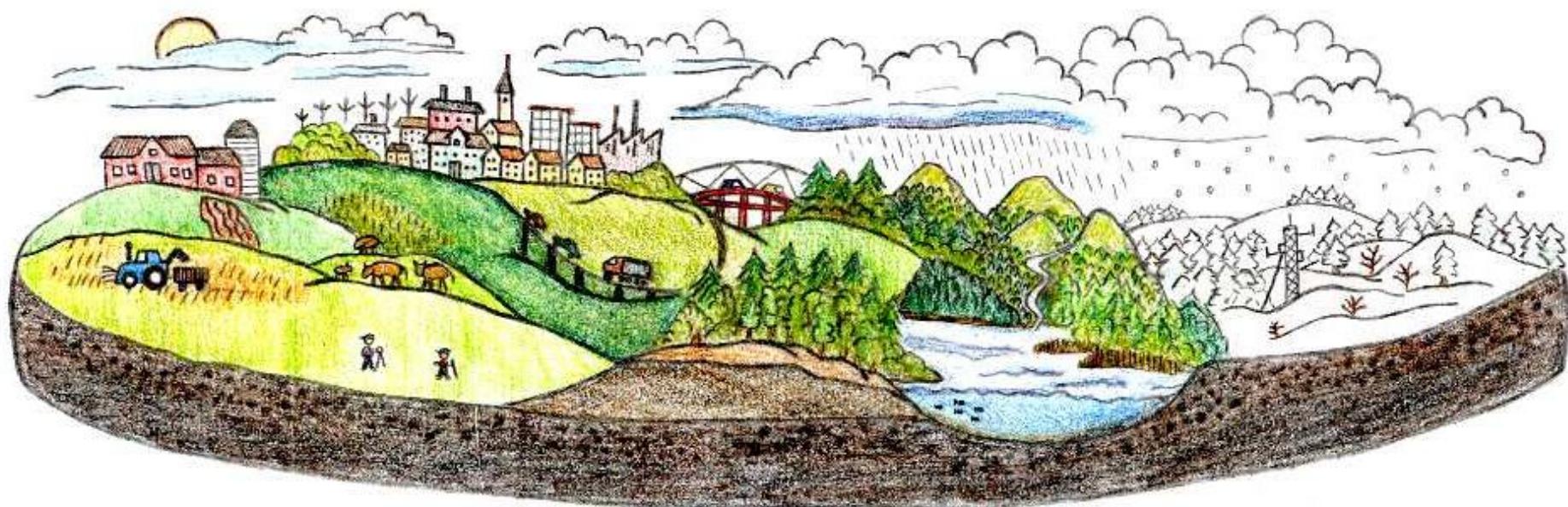


Físicas (1º curso CC AA)

Teoría de Errores
(Programa de Prácticas)



Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- **Introducción.** Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



www.mapquest.com
Granada - Málaga
131.02km



Granada – Málaga

131±1 km

- ¿Es interesante decir 131.02 km?
 - ¿Es exacto/científico?
 - ¿Significa 131.020000000000... km?
 - ↑
 - m
 - ↑
 - μ m
 - ¿Qué precisión tiene?
 - ¿Qué es "la verdad"?
 - ¿Podríamos aceptar un error de 1000 m?



“Más vale acertar aproximadamente que errar exactamente”

John Maynard Keynes

Economista

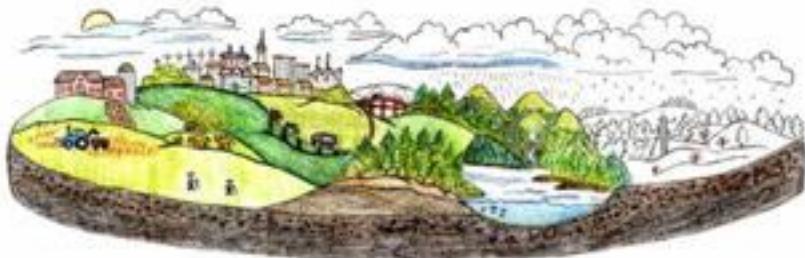
¿Cuánto mides?

- ¿Se puede aceptar un error de 1000 m?
- ¿Qué error se puede aceptar?
 - El error: *relativo* a la magnitud
- ¿Qué error es inevitable?
 - ¿Cuántas cifras podemos escribir?



Contexto

- Esta pequeña introducción nos ha plantado algunas preguntas
- Ahora pasamos a algunas definiciones interesantes para empezar a contestar



Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. **Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores.** Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Error Absoluto

$$\Delta x = x_m - x$$

- Δx = error absoluto
- x_m = valor medido o aproximado
- x = “la verdad”



Error Relativo

$$e = \frac{\Delta x}{x_m} \times 100\%$$

-
- e = error relativo
- x_m = valor medido o aproximado
- Δx = error absoluto



Intervalos de confianza

$$x = x_m \begin{cases} +\delta_{\max} \\ -\delta_{\min} \end{cases}$$

$$x_m - \delta_{\min} \leq x \leq x_m + \delta_{\max}$$

δ_{\min} = máximo posible subestimación

δ_{\max} = máximo posible sobreestimación

x_m = valor medido o aproximado

x = "la verdad"



Simetría

- En el caso que

$$\delta_{\max} = -\delta_{\min} = \Delta x$$

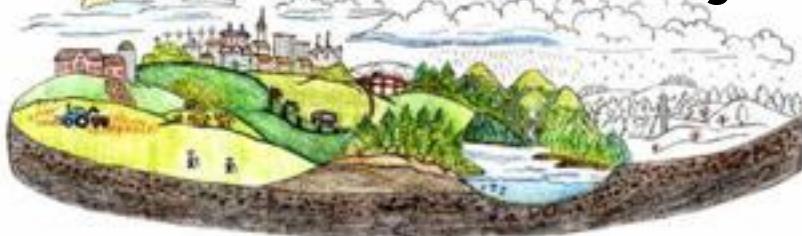
- (lo que pasa con frecuencia)
- Solemos escribir la medida así

$$x = x_m \pm \Delta x$$



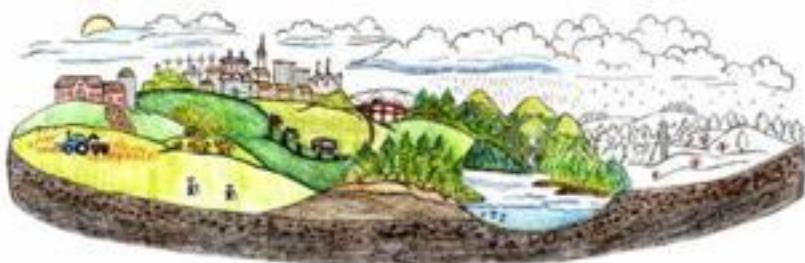
Ejemplo asimétrico

- Distancia sol-tierra : $(150 \pm 3) \cdot 10^6$ km
- Error absoluto: $3 \cdot 10^6$ km
- Error relativo: 2%
- No es simétrico, en realidad (varia)
- $147.09 \cdot 10^6$ km $< x < 152.10 \cdot 10^6$ km
- Nosotros trabajaremos con casos simétricos



Definiciones

- **Exactitud** - grado de concordancia entre el valor verdadero y el experimental
- **Precisión** - concordancia entre una medida y otras de la misma magnitud, realizadas en condiciones sensiblemente iguales
- **Sensibilidad** - el valor mínimo de la magnitud que un aparato es capaz de diferenciar

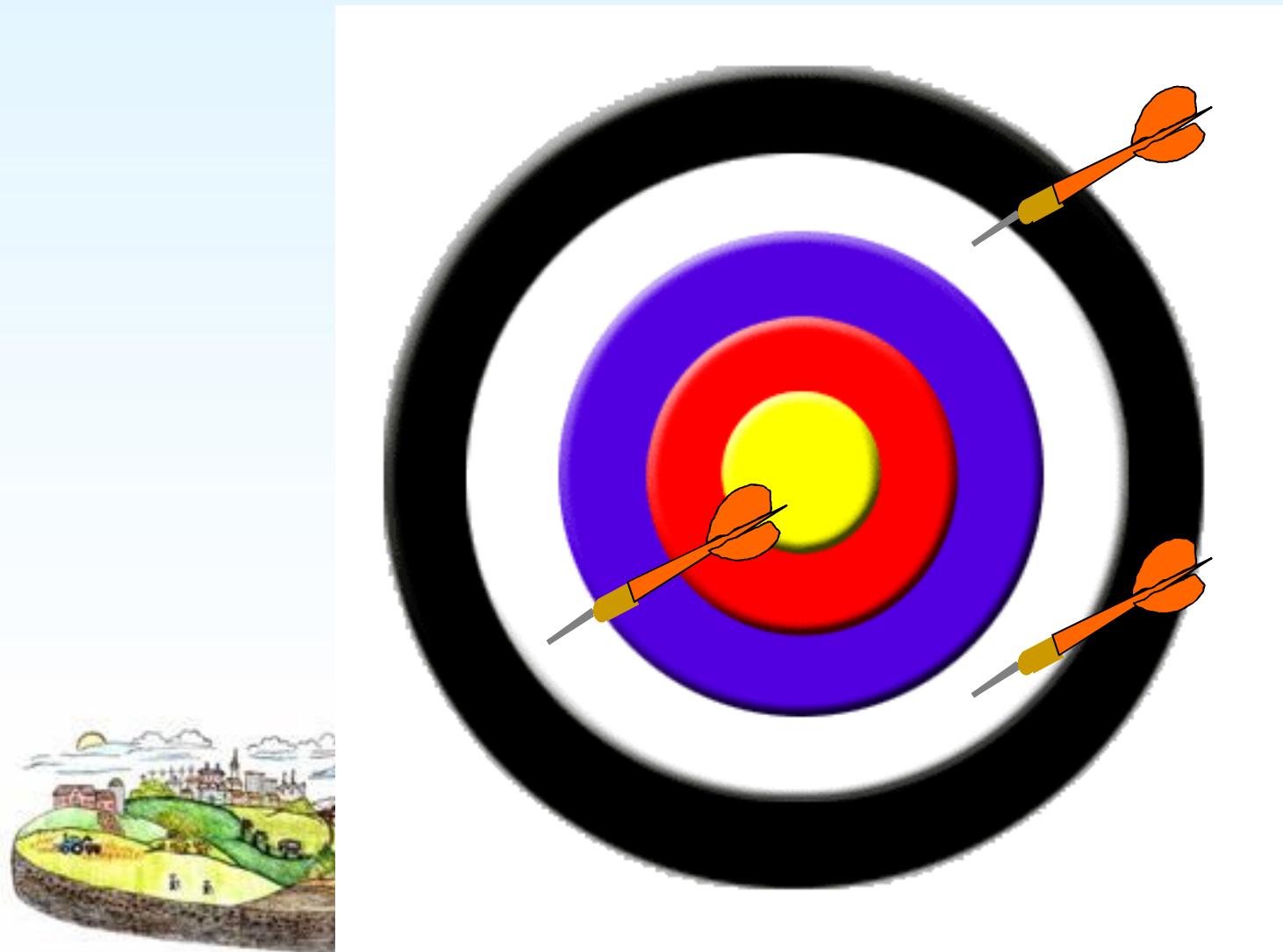


Exactitud y Precisión

- Tirando flechas



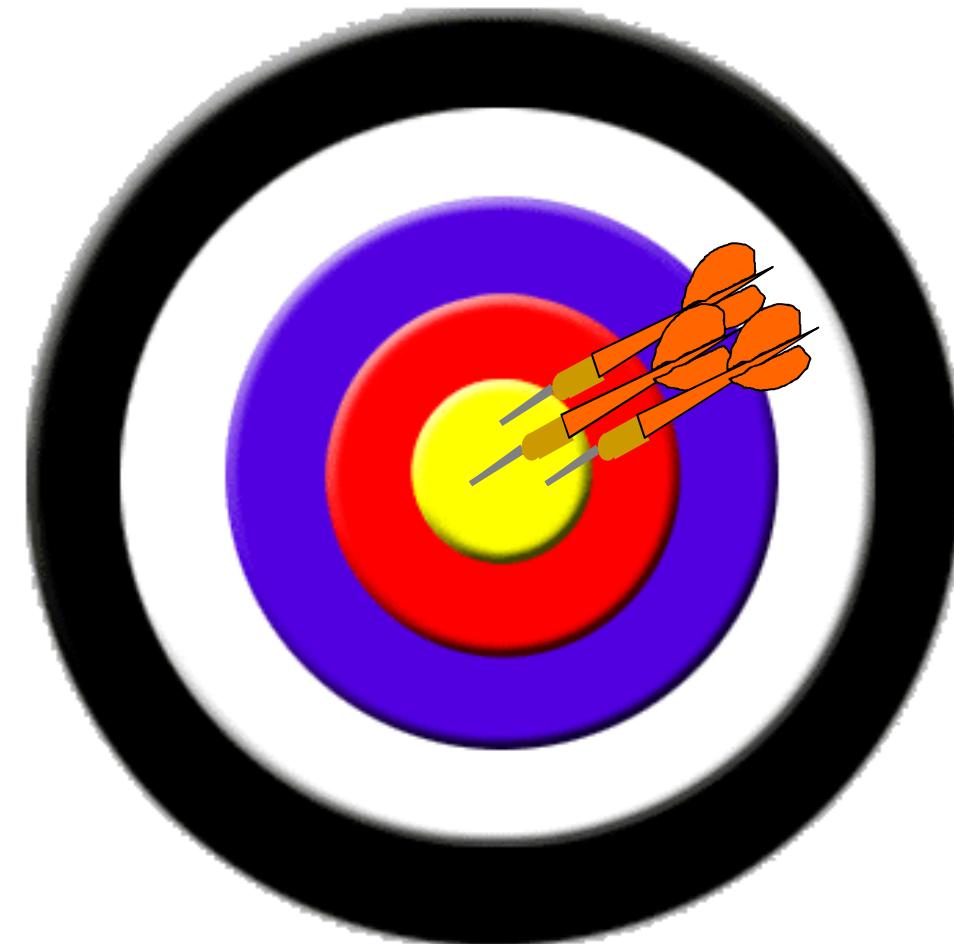
Ni preciso ni exacto



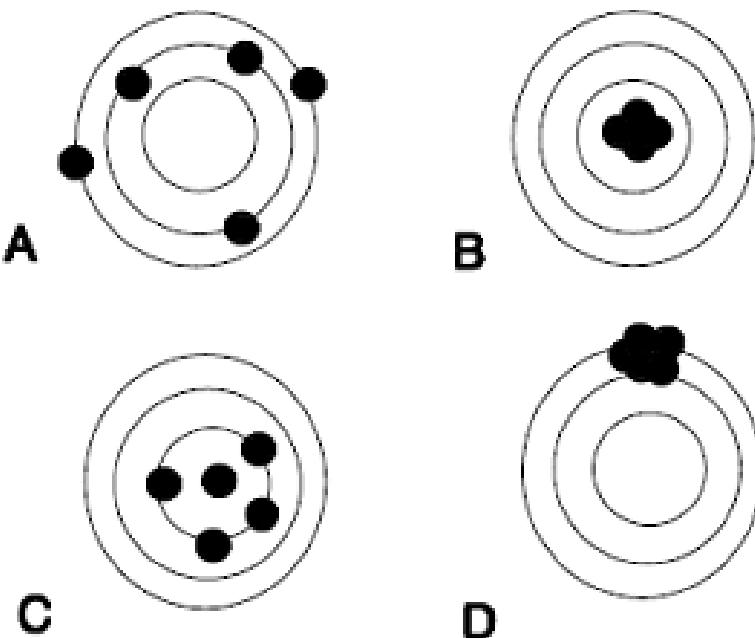
Preciso



Exacto

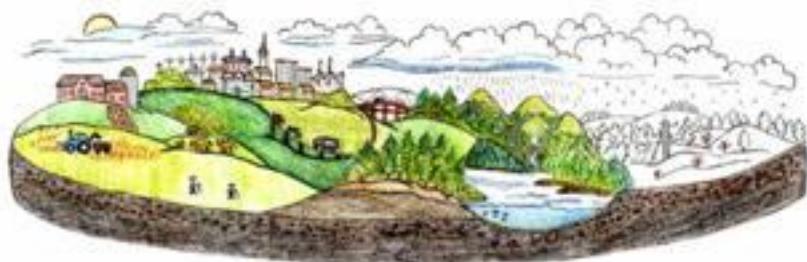


Exactitud y Precisión



- A) Ni preciso ni exacto
- B) Preciso y exacto
- C) Impreciso y exacto
- D) Preciso pero inexacto

<http://www.ingenieriaactiva10.blogspot.com.es>



Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. **Expresión de magnitudes físicas.** Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



¿Qué sabemos

- Aceleración de gravedad, $g = \underline{\hspace{2cm}}$
- Número de Avogadro, $N = \underline{\hspace{2cm}}$
- Velocidad de luz, $c = \underline{\hspace{2cm}}$



Expresión de magnitudes físicas

- Cantidad
- Unidad (!!)
- Grado de confiabilidad
 - índice de exactitud
 - error



Expresión de cantidades

- El orden de cálculo no es *nada* intuitivo
- PRIMERO: Error absoluto
- ENTONCES: Valor de la cantidad

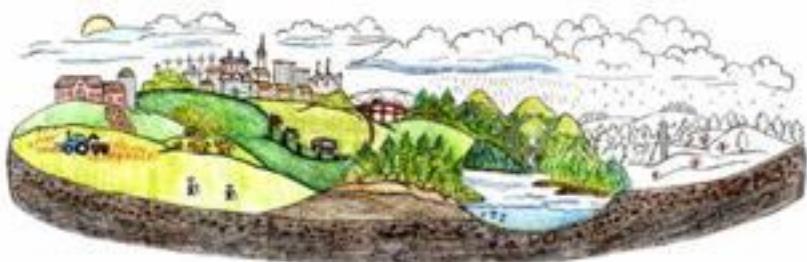


¿Qué edad tienes?

- Antes de contestar:
- **Primero** eliges las unidades
 - Casi siempre en años
 - ¿Un bebé puede tener 0 años? (mejor 2 meses)
- **Segundo** aceptas un error absoluto
 - Nunca contestas hasta más o menos una hora
 - Normalmente: hasta +/- 1 año
- Los dos pasos anteriores están relacionados (y mucho)
- ENTONCES:

un niño dice cuatro años y medio

un alumno dice 19 años



Expresión de cantidades

- Seguimos el mismo orden
- PRIMERO: Error absoluto
- ENTONCES: Valor de la cantidad

OLVIDARLO = PERDER PUNTOS (PRÁCTICAS)



Expresión de cantidades

1º Elegir la magnitud

EDAD DEL PROFESOR
→ Edad : 51,7528 años

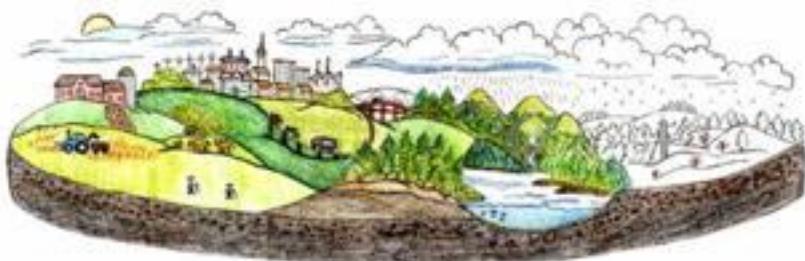
2º Determinar el valor y
«aceptar» un error

→ Error : 1 año

3º Adaptar las cifras del
valor y el error

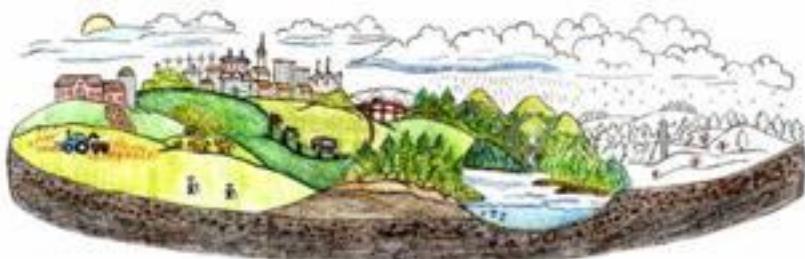
→ Edad: 51 +/- 1 año

¿o será más acertado redondear a 52 +/- 1 años



Paso 3º: Adaptar las cifras del valor y el error

- **Convenio para la Expresión de cantidades**
- Pérdida de información **nunca será mayor del 20%**
 - El convenio para expresar correctamente las cantidades usa el concepto de CIFRA SIGNIFICATIVA:
 - Las cifras significativas son aquellas que aportan información útil tanto del error como del valor de la cantidad:
 - Caso del error: Las cifras significativas son la primera o segunda cifra desde la izquierda dependiendo del valor del error (ejemplo: de $\pm 3,4567$ es el «3»; de $\pm 0,005789$ es el «5»; de $\pm 1,5681$ son el «1» y el «5»).
 - Caso del valor: Las cifras significativas dependen del error.

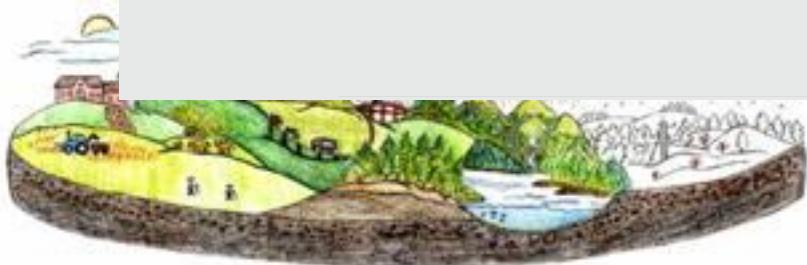


Un esquema nos ayudará a expresar correctamente las cantidades

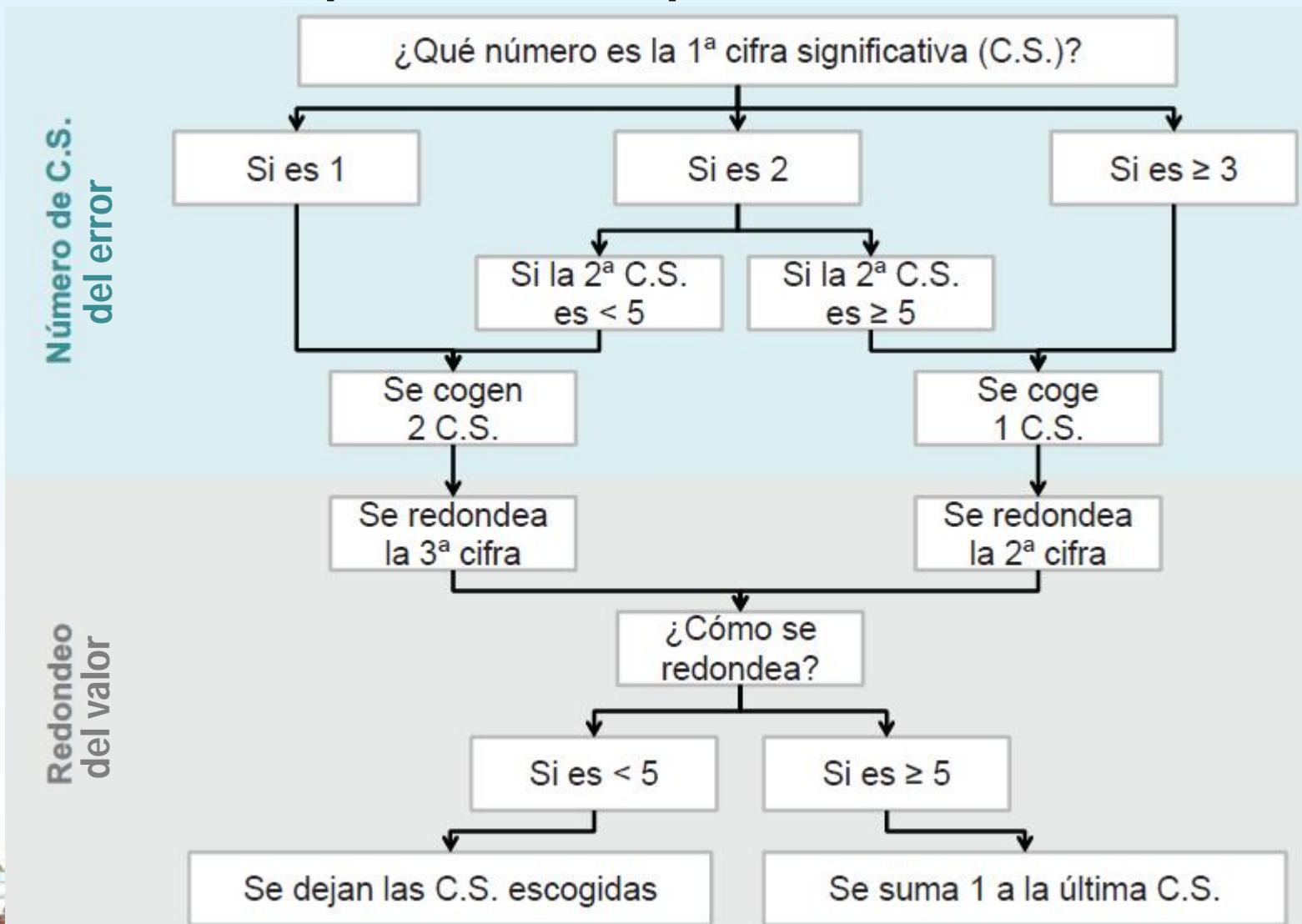
Convenio para la expresión de cantidades

¿Qué número es la 1^a cifra significativa (C.S.)?

Número de C.S.
del error



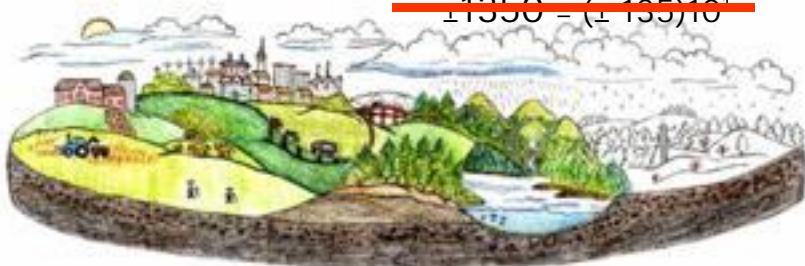
Convenio para la expresión de cantidades



OLVIDARLO = PERDER PUNTOS (PRÁCTICAS)

El error absoluto

- Convenio: solo tiene uno o dos dígitos significativos
- En general, uno
 - $(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \times 10^N$
 - Ejm: población de Granada $\pm 40000 = (\pm 4)10^4$ $\pm 30000 = (\pm 3)10^4$ ~~$\pm 35000 = (\pm 35)10^3$~~
- Excepción: **podemos** usar dos cuando redondear nos quita mucha información:
 - Si el primero dígito es 1
 - Si el primero dígito es 2 y el segundo es inferior a 5
 - Redondear 84 a 80 nos da un error de menos de 5% (ejm: edad de un abuelo)
 - Redondear 6 a 10 es muy bruto: hay mucha diferencia! (ejm: edad de un niño)
 - $(10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24) \times 10^{N-1}$
 - Ejm. Población de Almuñecar $\pm 1000 = (\pm 1)10^3$ $\pm 1300 = (\pm 13)10^2$ ~~$\pm 1350 = (\pm 135)10^1$~~



Expresando el error absoluto

- Solo un dígito significativo
(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
- A veces se permiten dos
(10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24)
- Los ceros normalmente no son significativos
 - Al final de la cifra
 - Al principio de la cifra



La Magnitud de la Cantidad

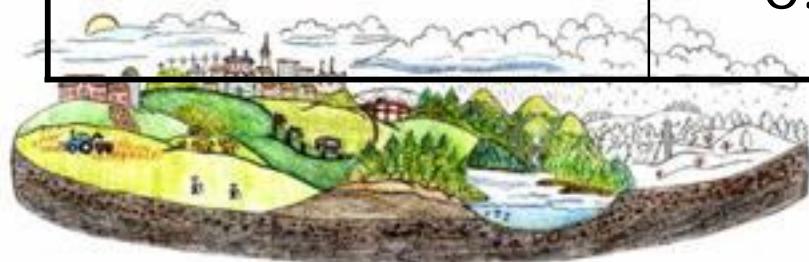
¿Cuanto mides?

- ¡ No más precisa que permite el error !
- Ejm: $h = 1.74\cancel{6}$ +/- 0.01 m
- $h = 1.75$ +/- 0.01 m
- Si sólo sabes tu altura hasta el centímetro, ¿qué sentido tiene especificar los milímetros?



Ejemplos de Magnitudes

Incorrectos (U)	Correctos (U)	Mejor? (U)
3.418 ± 0.123	$3.4 \pm 0.1 \pm 0.12$ 3.42 ± 0.12	$(342 \pm 12) 10^{-2}$
6.30 ± 0.085	6.30 ± 0.09	$(630 \pm 9) 10^{-2}$
46.288 ± 1.553	46.3 ± 1.6	$(463 \pm 16) 10^{-1}$
428.351 ± 0.15	428.35 ± 0.15	$(42835 \pm 15) 10^{-2}$
0.01683 ± 0.0058	0.017 ± 0.006	$(17 \pm 6) 10^{-3}$



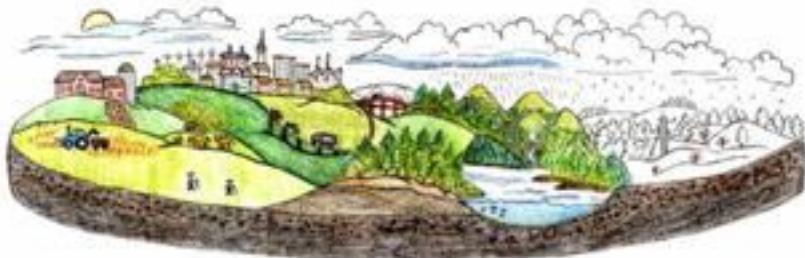
Errores

- Se desconoce la “verdad”
- Siempre hacemos algún tipo de error
- Objetivos:
 - Caracterizar/conocer los errores
 - Minimizarlos cuando es posible



Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. **Minimización de errores.** Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



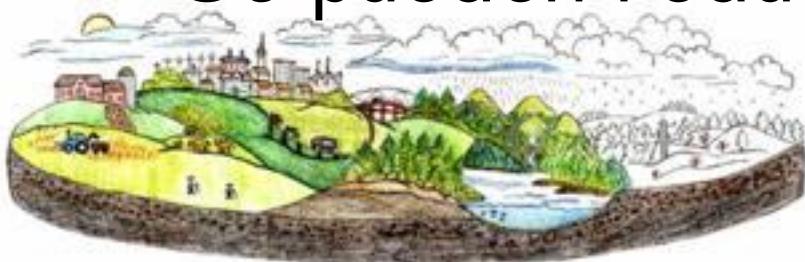
Tipos de Errores

- Errores sistemáticos
 - Difícil a caracterizar
 - Si los conocemos, los corregimos
 - Pueden ser constantes - afectan todas medidas
- Errores aleatorios
 - Inevitables y desconocidos, pero unas hipótesis:
 - Distribución de frecuencias “normal”
 - Más pequeñas, más frecuentes
 - Promedio de cero



Errores aleatorios

- Errores de discernimiento
- Cambios en las condiciones experimentales
- Errores de especificación en los procesos de fabricación (por ejemplo, una bola esférica metálica puede estar ligeramente ovalada o contener planos)
- Se pueden reducir (¿cómo?)

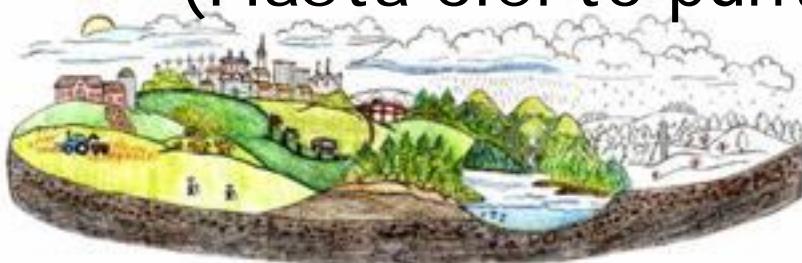


Error cuadrático medio (MSE)

- Cuando se hace múltiples (N) medidas (x_i) de un fenómeno ALEATORIO, se puede estimar el error cuadrático medio, σ_x

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

- Donde \bar{x} es el promedio de las N medidas
- Cuando más medidas hay, menos error
- (Hasta cierto punto)



Deducciones

- Una estimación es mejor cuando
 - menos error sistemático tiene
 - menos error aleatorio tiene
- Los errores son inevitables
- Medir con cuidado, y precisión
- A veces, hacen falta muchas medidas
- **¿Cuántas medidas necesitamos?**



Unas reglas prácticas para medir una cantidad en el laboratorio

- Para empezar: tres (3) medidas con error experimental ε_x (sensibilidad)
- Calcular la dispersión: $D = x_{\max} - x_{\min}$
- Comparar D y ε_x

$$D \leq \varepsilon_x$$

- Error dominante es tipo sistemático (limitación de instrumento)
- No se puede hacer mucho!
- Tomar como valor, $x \pm \varepsilon_x$

$$D > \varepsilon_x$$

- Error es tipo aleatorio
- Posiblemente, hace falta más medidas!
- ¿Cuántas medidas bastan?



Tanto por ciento de dispersión

$$T = \frac{100\% D}{\bar{x}}$$



Tanto por ciento de dispersión

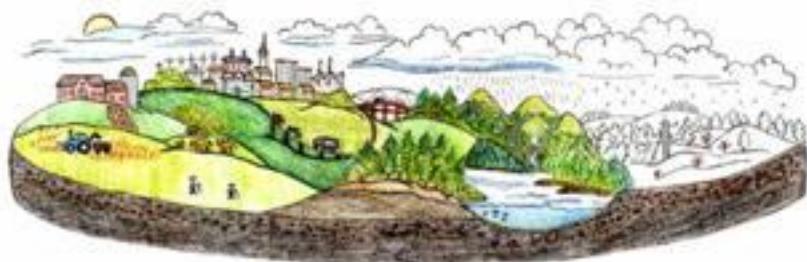
$$T = \frac{100\% D}{\bar{x}}$$

	<u>T<2%</u>	<u>2%<T<8%</u>	<u>8%<T<15%</u>	<u>T>15%</u>
N	3	6	15	50
Error	ε_i	$\alpha = \max(D_6 / 4, \varepsilon_i)$	σ_x	$\sigma_x / (\sqrt{N} - 1)$
Expresión	$x \pm \varepsilon_i$	$x \pm \alpha$	$x \pm \sigma_x$	$x \pm \sigma_x / (\sqrt{N} - 1)$



Cuantas Medidas

- Volveremos a este tema con unas definiciones de la estimación de errores
- Ahora: motivación para el tratamiento de (y propagación de) los errores



Motivación

- Granada – Jaén: 94 ± 1 km
- Digamos que se sabe que el tiempo promedio para el viaje es 1.0 ± 0.1 horas
- ¿Cuál es la velocidad promedia para el viaje?
 - Acordarse: para escribir un resultado, hay que empezar con el error!
- ¿Cómo podemos determinar el error en esta estimación?



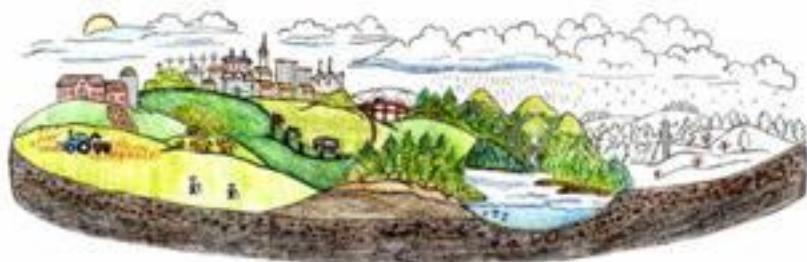
Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. **Propagación de errores.** Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Propagación de errores

- Hay una distinción entre
 - Errores en medidas directas
 - Errores en magnitudes derivadas
- Un poco de teoría (**importante**)



Propagación lineal de errores

-Sea $f = f(x, y, z, c)$

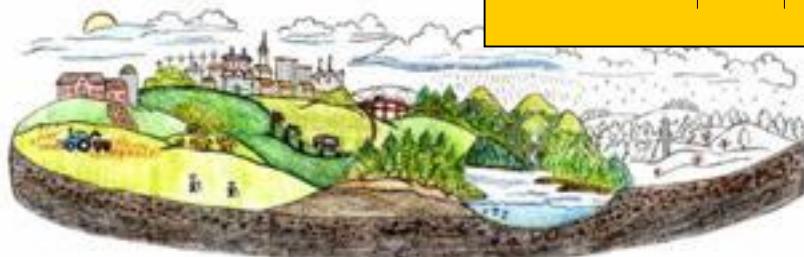
La función **f** liga a la magnitud que nos interesa hallar (**f**) con las magnitudes independientes que se obtienen del experimento (**x,y,z**) y con una constante (**c**).

Diferenciando:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial c} dc$$

Si identificamos los incrementos con los errores absolutos de las variables correspondientes, en el caso más desfavorable se obtendrá:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c$$



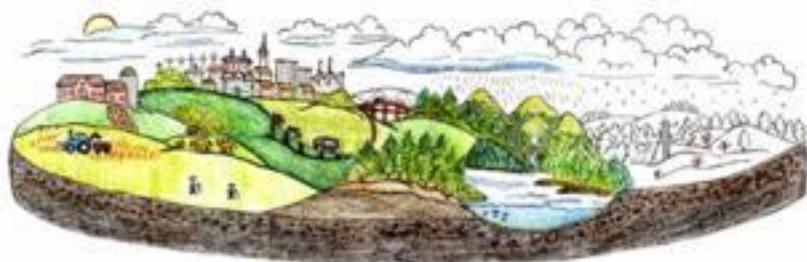
Sensibilidad de **f**
al determinante **z**

Error en **z**

Derivadas parciales

- Son imprescindibles en esta asignatura
 - ¡A revisar!
 - No solemos trabajar con ejemplos muy difíciles

$$y = ax^n$$



$$y' \equiv \frac{\partial y}{\partial x} = n a x^{n-1}$$

Ejemplo numérico

- Densidad de flujo radiativo emitida por un cuerpo negro
- $E = \sigma T^4$
- $\sigma = 5.67 \pm 0.01 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
(constante de Stephan-Boltzmann)
- Para un cuerpo negro con $T = 300 \pm 1 \text{ K}$
- ¿Cómo podemos expresar E ?



4 valores...

Ejemplo numérico

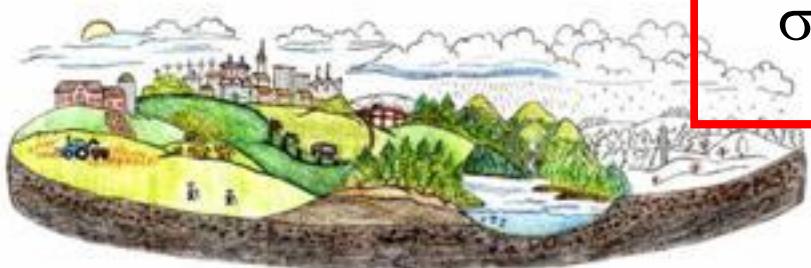
$$E = \sigma T^4$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left| \frac{\partial E}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial E}{\partial \sigma} \right| \Delta \sigma \\ &= \left| 4\sigma T^3 \right| (1K) + \left| T^4 \right| (0.01 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}) \\ &= (6.12 \quad + \quad 0.81) W m^{-2}\end{aligned}$$

- $E = 459 \pm 7 W m^{-2}$

Podemos hacer mejor

$$\sigma = 5.6703 \pm 0.0007 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$$



Resumen: propagación lineal de los errores

$$f = f(x, y, z, c)$$

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c$$

Tenemos que pensar en esta ecuación en muchas ocasiones (en todas las prácticas)



Ejm: (intuitivamente) Como pesar una cantidad de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$



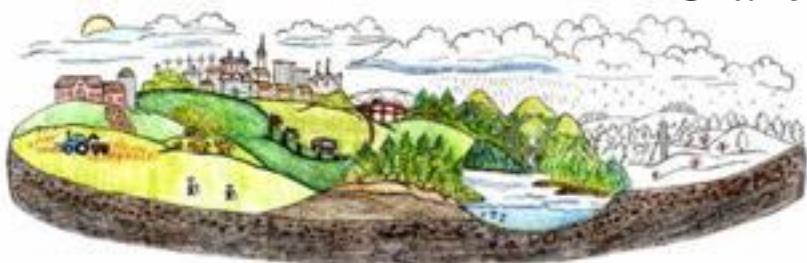
Escala con sensibilidad = 0.01g

Botella vacía:

(Misma)

botella con agua:

Claro, el agua pesa: 20g pero ¿ERROR?



~~$20.00 \pm 0.01\text{g}$~~

Como pesar una cantidad de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ (científicamente)



Botella vacía: $x = \pm 0.01\text{g}$

(Misma)

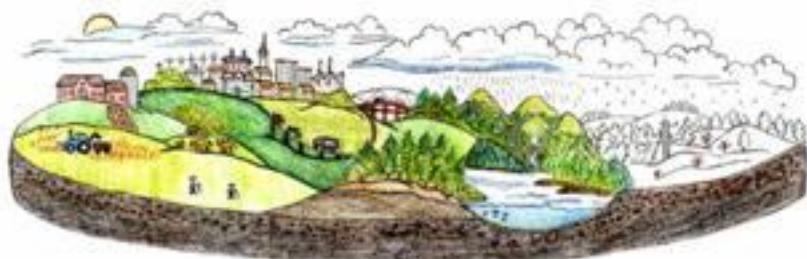
botella con agua: $y = \pm 0.01\text{g}$

$$z = y - x$$

$$\Delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x$$

$$\Delta z = \Delta y + \Delta x$$

$$20.00 \pm 0.02\text{g}$$

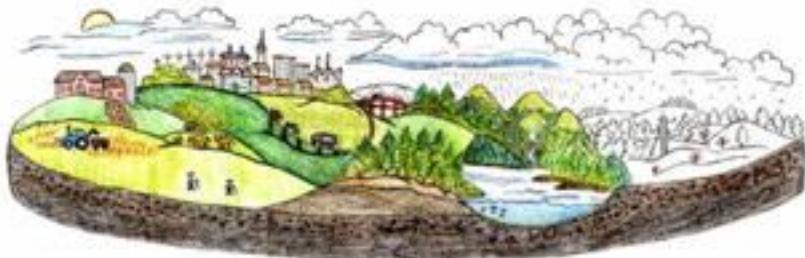


Resumen: propagación lineal de los errores

$$f = f(x, y, z, c)$$

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c$$

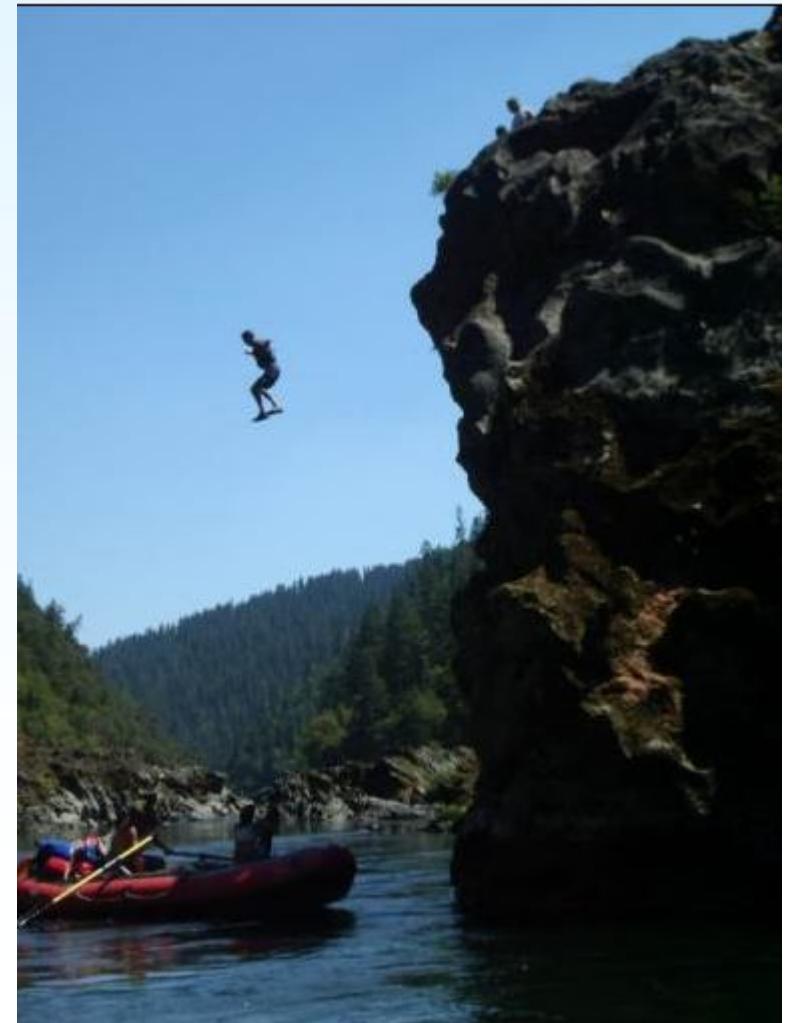
Ahora un ejemplo experimental



Altura de un acantilado

- ¿Cómo medir?
 - Difícil mantener un metro en vertical
 - Otra opción

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$



Hacemos una medida

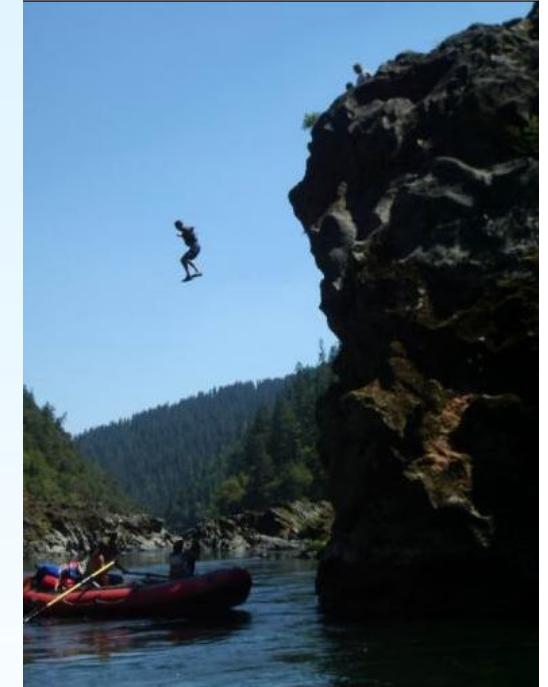
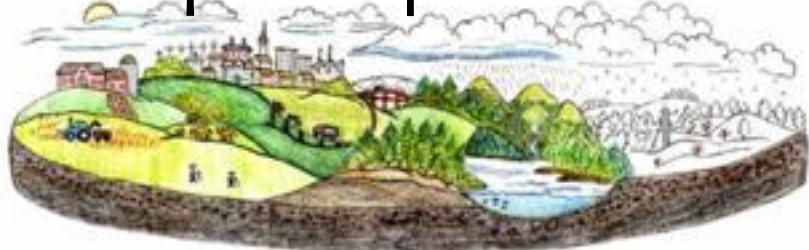
$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

-



$$t_1 = 1.48 \pm 0.01\text{s}$$

- Posibles errores (aleatorios):
 - $v_0 \neq 0$
 - Pulgar torpe o errático
 - A la salida
 - A la entrada al agua
- ¡ A repetir !



$$t_2 = 1.47 \pm 0.01\text{s}$$

$$t_3 = 1.46 \pm 0.01\text{s}$$

Tanto por ciento de dispersión

$$t_1 = 1.48 \pm 0.01 \text{ s}$$

$$t_2 = 1.47 \pm 0.01 \text{ s}$$

$$t_3 = 1.46 \pm 0.01 \text{ s}$$

$$\bar{t} = 1.47 \text{ s}$$

$$D = 0.02 \text{ s}$$

$$T = \frac{100\% D}{x}$$
$$= 1.4\%$$

	<u>$T < 2\%$</u>	<u>$2\% < T < 8\%$</u>	<u>$8\% < T < 15\%$</u>	<u>$T > 15\%$</u>
N	3	6	15	50
Error	ε_i	$\alpha = \max(D_6 / 4, \varepsilon_i)$	σ_x	$\sigma_x / (\sqrt{N} - 1)$
Expresión	$x \pm \varepsilon_i$	$x \pm \alpha$	$x \pm \sigma_x$	$x \pm \sigma_x / (\sqrt{N} - 1)$



Valor experimental

$t = 1.47 \pm 0.01 \text{ s}$

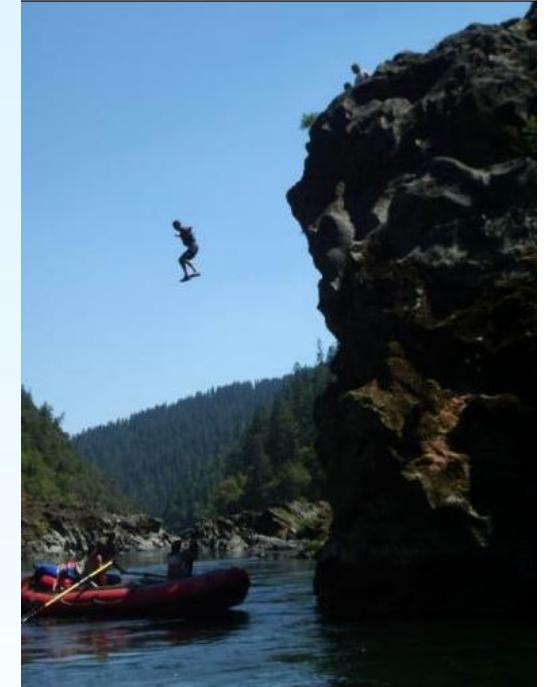
Nuestro valor experimental

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

-  $t = 1.47 \pm 0.01 \text{ s}$

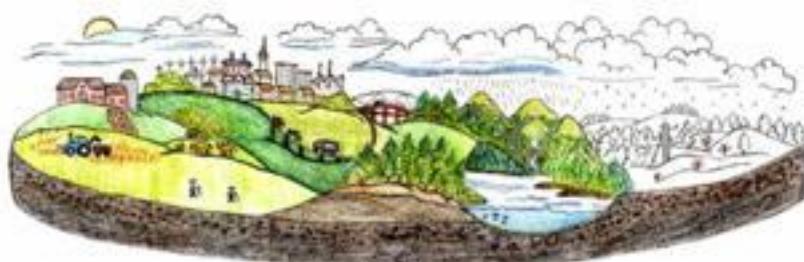
- Para poder escribir h , 1º su error

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c$$



$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Delta h = \left| \frac{\partial h}{\partial g} \right| \Delta g + \left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \Delta t$$



$$= \left| \frac{1}{2} t^2 \right| \Delta g + |gt| \Delta t = v \Delta t$$

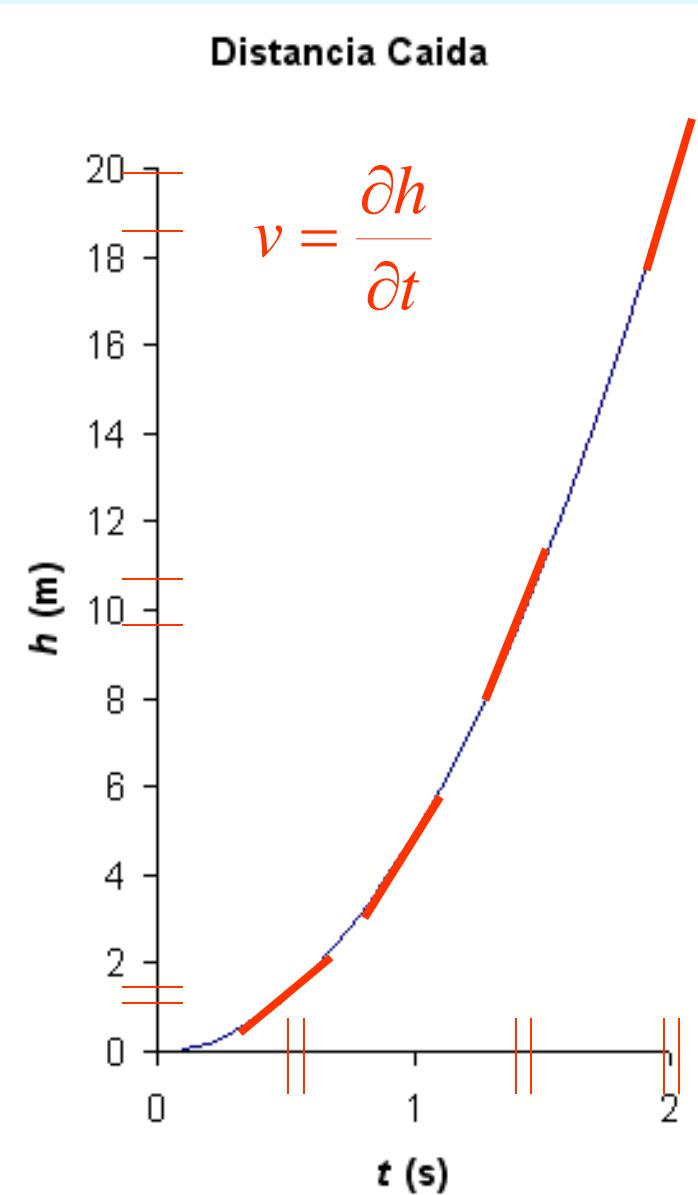
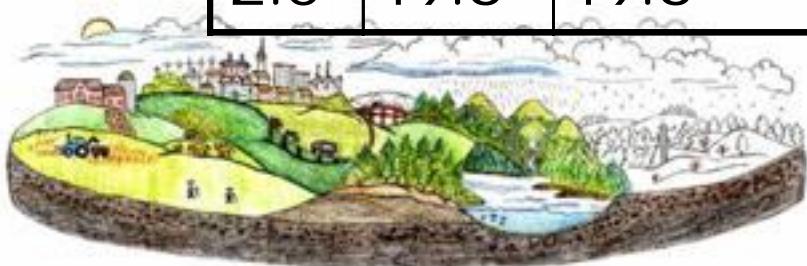
Errores, distancia frente a tiempo

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

-  +/- 0.01 s

$$\Delta h = g t \Delta t = v \Delta t$$

t (s)	h (m)	v (m/s)
0.5	1.23	4.9
1.0	4.9	9.8
1.5	11.02	14.7
2.0	19.6	19.6



experimentalmente
con un péndulo



$$g = 9.782 \pm 0.001 \text{ m s}^{-2}$$

- 1^{er} paso: el error

Valor
experimental

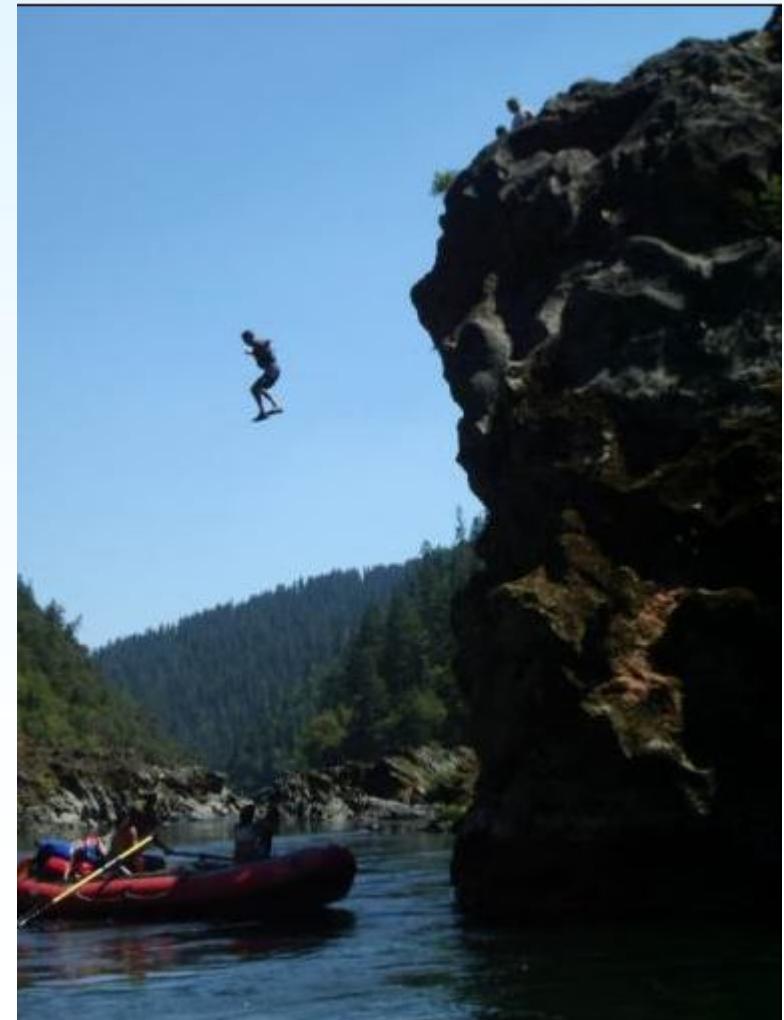
$$t = 1.47 \pm 0.01 \text{ s}$$

$$\Delta h = g t \Delta t = v \Delta t$$

$$\Delta h = 0.14 \text{ m}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 10.59 \pm 0.14 \text{ m}$$



Programa

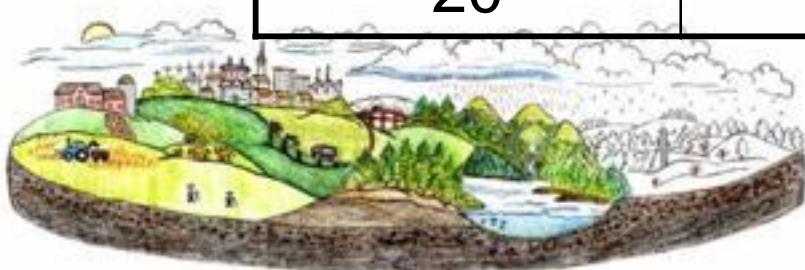
- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. **Interpolación en tablas.** Regresión y correlación.



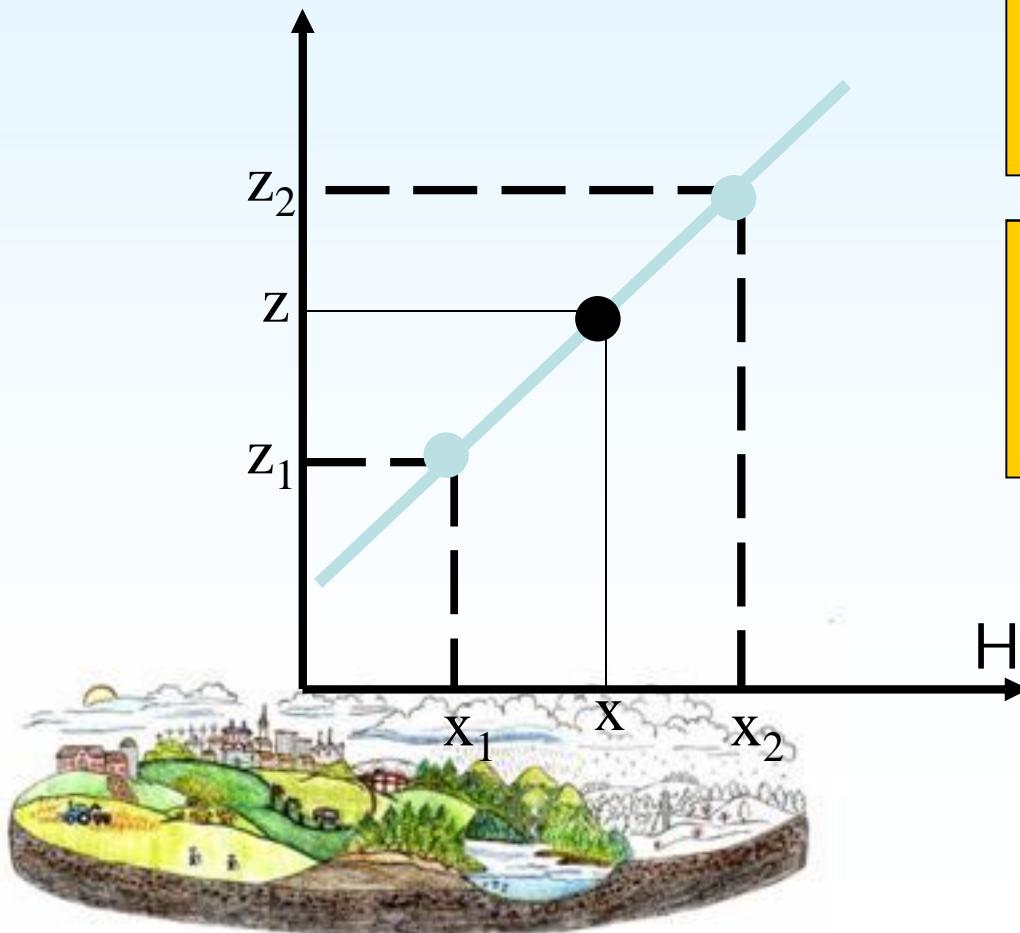
Interpolación en tablas

- ¿Qué valor (z) tiene el calor latente a una temperatura de $x=12+/-1^{\circ}\text{C}$? ¿Qué error tiene este valor?

T (°C)	Calor latente de evaporación (J/g)
0	2501
5	2489
10 (x_1)	2477 (z_1)
15 (x_2)	2466 (z_2)
20	2453



Interpolación Lineal



$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\Delta z = \left| \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right| \Delta x$$

Hipótesis:

- A. Error proviene de x
- B. Relación lineal

En tablas de doble entrada

	y₁	y₂
x₁	z ₁₁	z ₁₂
x₂	z ₂₁	z ₂₂

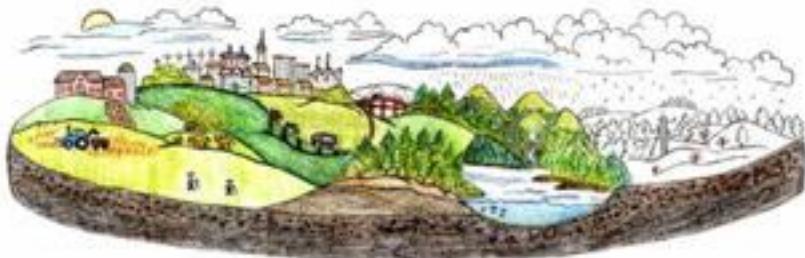
$$z = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1} (y - y_1)$$

$$\Delta z = \left| \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1} \right| \Delta x + \left| \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1} \right| \Delta y$$



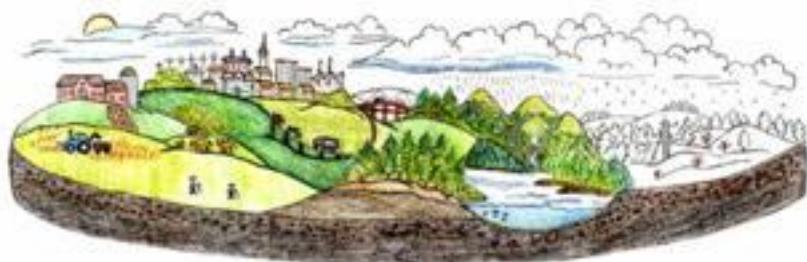
Programa

- **I B. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas.
Regresión y correlación.



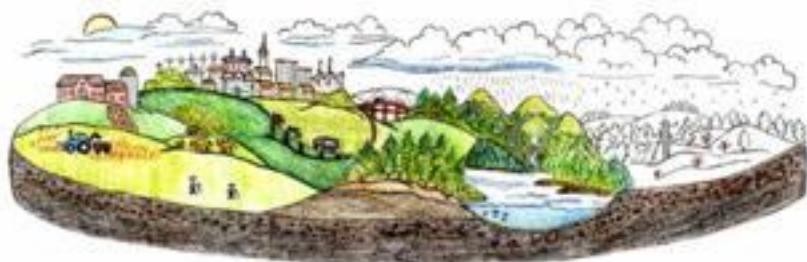
Regresión y Correlación (Métodos cuantitativos de análisis gráfico)

- Importancia de las representaciones gráficas
- Utilidad de las versiones linealizadas de los gráficos (X, Y)
- Distintas maneras de llevar a cabo una linealización

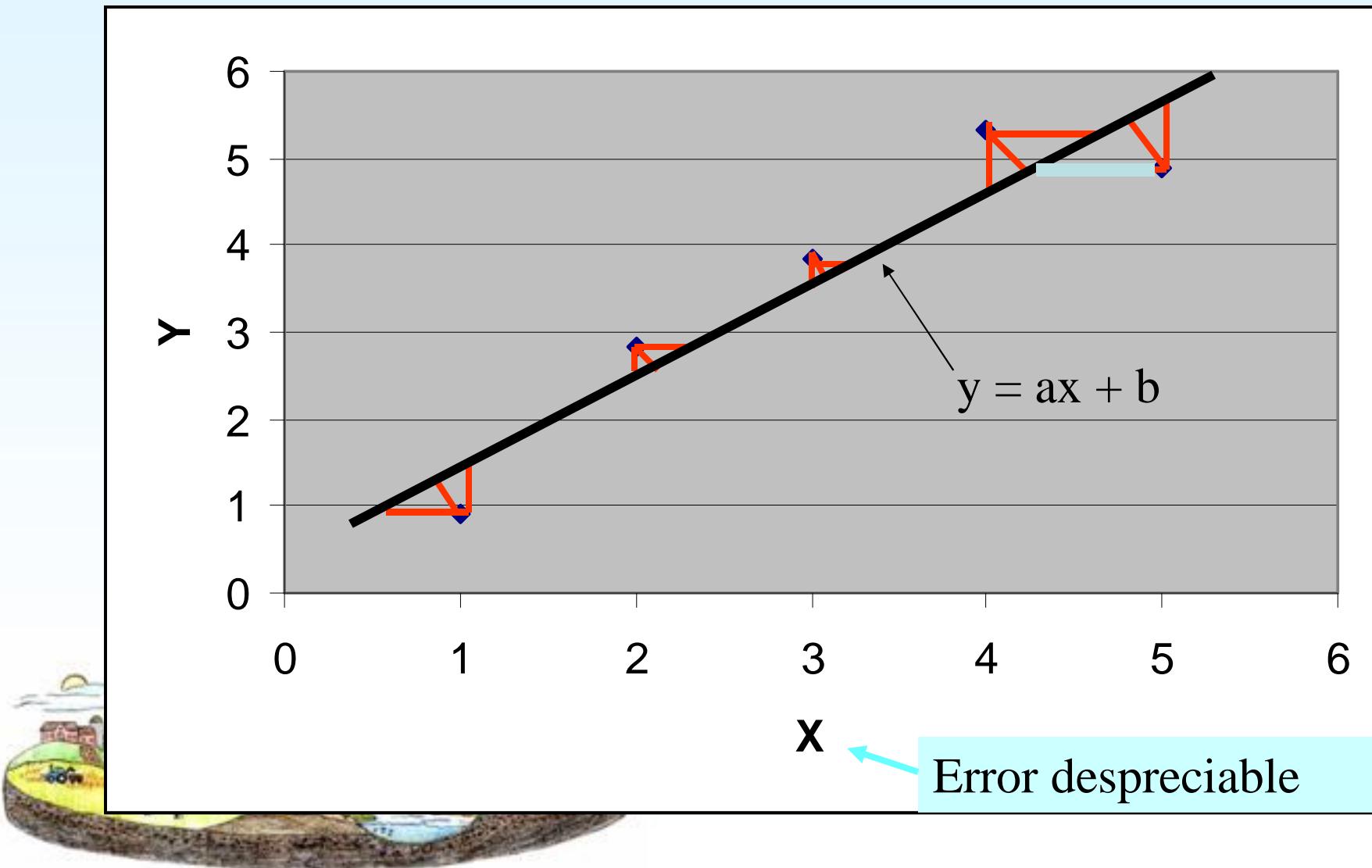


Regresión Lineal

- El método se llama también “mínimos cuadrados”
 - La relación analítica que mejor se ajusta a nuestros datos
 - La importancia de la elección del variable “independiente”



¿En que dirección?



Suma de cuadrados (*Sum of squares*)

- Es útil definir la función χ^2 (Chi-cuadrado):

$$\chi^2 = \sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$$

- Una medida de la desviación total de los valores observados y_i respecto de los predichos por el modelo lineal.
- Los mejores valores de la pendiente a y la ordenada en el origen b son aquellos que minimizan esta desviación total.



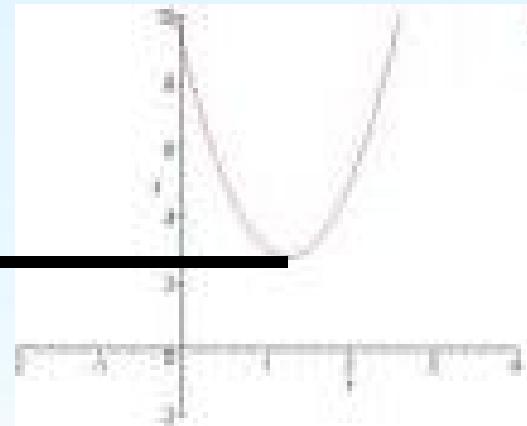
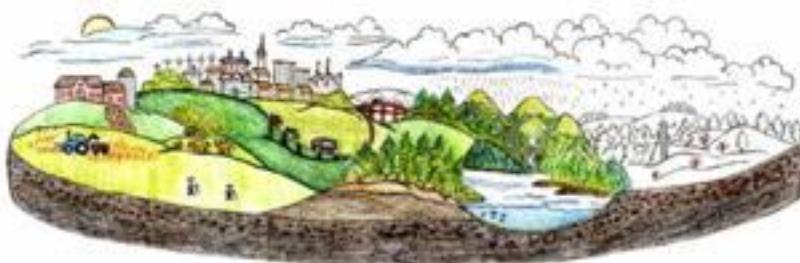
Mínimos cuadrados (Least Squares)

Como buscar el mínimo de una función cuadrática:

Primer derivado = 0

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

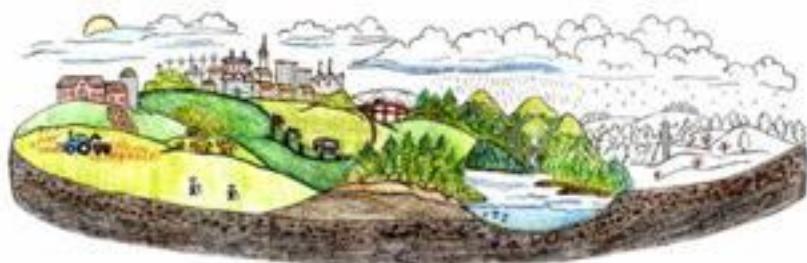


$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$

Bondad del ajuste (*Goodness of fit*)

- El criterio de mínimos cuadrados es **objetivo**; reemplaza el juicio personal de quien mire los gráficos y defina cuál es la mejor recta.
- Además, da una posibilidad de estimar la bondad del ajuste, a través el coeficiente de correlación (ρ) entre las variables X e Y
- Muchas veces se presenta su cuadrado (R^2).



El coeficiente de correlación

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$Var(y) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \right)^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$$

$$Cov(x, y) = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N^2} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$$

$$\rho = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

$$-1 \leq \rho \leq +1$$



El coeficiente de correlación

- Describe la correlación entre los variables
- $\rho = 0$, los variables no son correlacionados
- $\rho < 0$, los variables son anti-correlacionados
- $\rho > 0$, los variables son correlacionados
 - $\rho = 0.95$, mucha correlación
 - $\rho = 0.7$, correlación, pero no mucha



$$R^2 = \rho^2$$

- El cuadrado del coeficiente de correlación expresa el porcentaje de la varianza en los variables X e Y que explica el modelo lineal
 - $\rho = 0.95$, el modelo explica 90% de la varianza
 - $\rho = 0.7$, explica 49% de la varianza
 - $\rho = 0.3$, explica 9% de la varianza

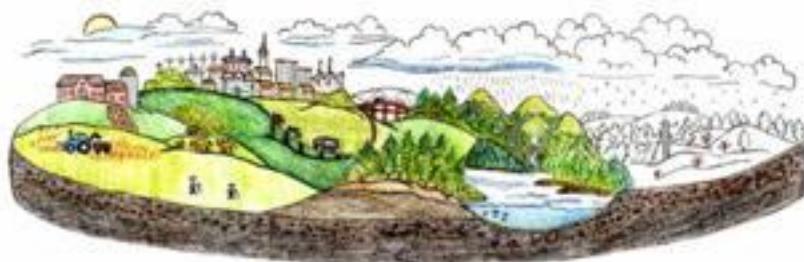


Otra ventaja del método

- Podemos estimar los errores asociados con los parámetros a y b

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$



En función de ρ

- Las incertidumbres de a y b también pueden describirse así:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{a^2}{(N-2)} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right)} \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

- Estas ecuaciones son **muy útiles**, ya que la mayoría de las hojas de cálculo y programas de ajuste indican a , b y ρ (ó a veces R^2).



Incertidumbre de los parámetros de un modelo general

- Al igual que en el caso del optimo, se necesita minimización de la función de costo.

chungo

- Cada nodo tiene sus propias características
- Cada nodo tiene sus propias y opiniones
- Cada nodo tiene su propia tendencia de cómo es de no-lineal



Es preferible Transformar (a lo lineal)

- En general, es preferible
- Método: suponemos un modelo $y = a \ln(x)$
 - Definimos $z = \ln(x)$
 - Entonces: $y = a z + b$
 - Buscamos ajuste lineal entre y & z
 - Podemos estimar los errores asociados con los parámetros a y b

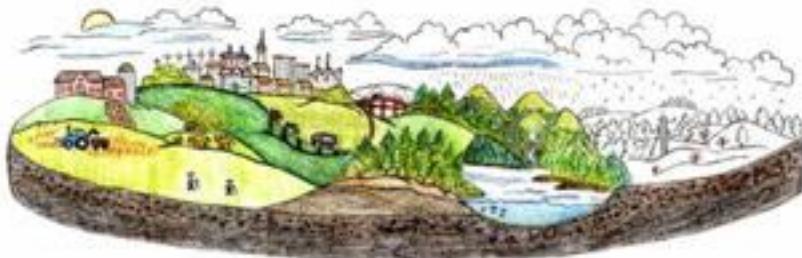


No gusta hacer muchos cálculos (tocar botones calculador)

- Muchos cálculos
- $$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$
- $$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$
$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$

- Por eso tenemos ordenadores



No g
(t

- Much



Física del 1º Curso de Ciencias Ambientales 2017-18

Diapositivas de las Lecciones

- 01a Introducción
- 01b Física Newtoniana
- 02 Hidrostática
- 03 Fenómenos de Superficie
- 04 Dinámica de Fluidos
- 05 Oscilaciones
- 06 Ondas
- 07 Sistemas Termodinámicas
- 08 1º Principio de la Termodinámica
- 09 Propiedades y Procesos Térmicos
- 10 2º Principio de la Termodinámica
- 11 Campo Eléctrico
- 12 Corriente Eléctrica, Circuitos CC
- 13 Campo Magnético
- 14 Inducción Magnética y Circuitos de CA

Relaciones de Problemas

Trabajos

Prácticas

Regresión Lineal

- Regres.pdf
- Regres.xls



$$= \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$

$$\tau_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \cdot \text{Var}(x)}}$$

