FÍSICA

1er curso Grado en Ciencias Ambientales

Introducción a las Prácticas de Laboratorio

Esquema

- El método científico
- Magnitudes físicas
  - Medidas y unidades
  - Escalares y vectores
- Cálculo vectorial

Esquema

- El método científico
- Magnitudes físicas
  - Medidas y unidades
  - Escalares y vectores
- Cálculo vectorial

¿Qué es el método científico?

Procedimiento que utilizan los científicos para establecer las teorías que explican los fenómenos que observamos.

Sus fundadores

Francis Bacon (1561-1626)

“Hacer preguntas inteligentes ya es la mitad de la sabiduría.”

Galileo Galilei (1564-1642)

"Mide lo que se pueda medir; y lo que no, hazlo medible.“

“Todas las verdades son fáciles de entender una vez descubiertas; el objetivo es descubrirlas.”

El método científico se basa en dos pilares:

Método experimental

De carácter **inductivo**; supone que el resto de los sistemas físicos reaccionarán de igual forma que el sistema concreto en el que se ha llevado a cabo la experiencia de investigación

Método teórico

De carácter **deductivo**; capaz de seleccionar los aspectos esenciales de una situación física, generar unas leyes o teoría y deducir resultados en futuros experimentos

Comprende las siguientes etapas:

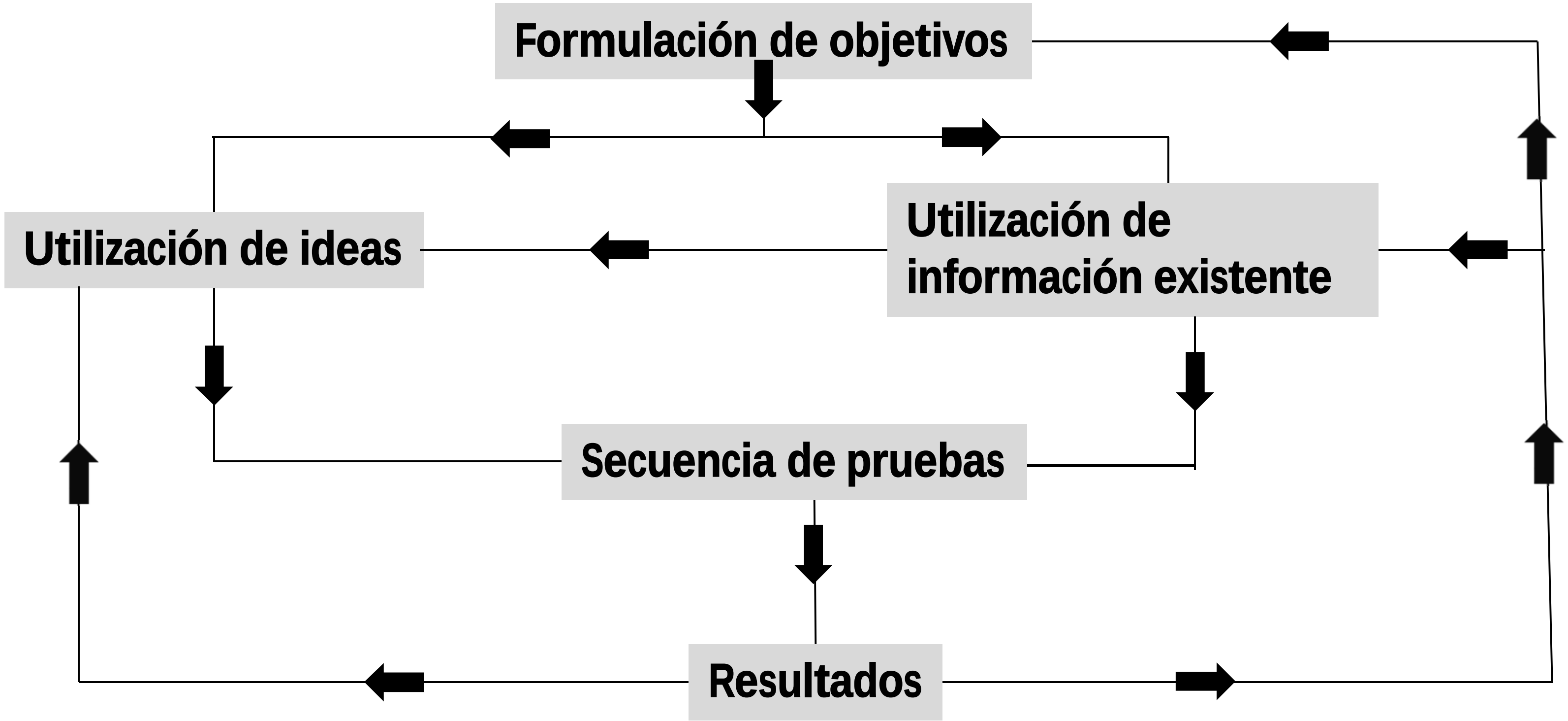
1. **Observación: identificar el problema**
2. **Hipótesis: conjetura razonable**
3. **Inducción: predecir las consecuencias de esa hipótesis.**
4. **Comprobación de la hipótesis por experimentación.**
5. **Demostración o refutación de la hipótesis**
6. **Conclusiones: formular la regla general más simple que recoja la hipótesis, predicciones y los resultados experimentales.**

El método experimental

Los experimentos normalmente difieren en el aspecto externo pero generalmente todos siguen la misma forma básica.

Están sujetos a un modelo secuencial de

planificación -> implementación -> evaluación



Tipos de experimentos

1. **Experimentos ilustrativos**
   Ilustran nociones teóricas. Es lo que haremos en el laboratorio!

2. **Experimentos de investigación**
   Pretenden una apreciación de todos los aspectos del problema en ausencia de un conocimiento apropiado del mismo

3. **Experimentos de diseño y síntesis**
   Se realizan para mejorar los diseños ya existentes, con el estudio de ciertos aspectos que no han sido tenidos en cuenta (por olvido o simplificación) en etapas anteriores.

4. **Experimentos para mejora de las técnicas de medida**
   El entrenamiento en las técnicas de medida es fundamental para la obtención de un conocimiento crítico del valor de la experimentación y el medio de desarrollar de forma más apropiada el curso de la experimentación.

Presentación de los resultados del experimento

Si no comunicamos nuestros resultados de forma correcta, clara y concisa al resto de la comunidad científica, nuestro trabajo se vuelve baldío e insolidario, ya que no contribuye al avance del conocimiento y al desarrollo tecnológico.

El examen o los informes de prácticas son un EJERCICIO DE COMUNICACIÓN entre ALUMNO y PROFESOR.

Prestar máxima atención a esta parte del proceso

¿Qué hay que tener en cuenta ANTES de realizar un informe científico?

Receptor o receptores

Revista científica (especialistas)
Revista de divulgación (público en general)
Responsables políticos

- Profesor -> es el caso de un informe de prácticas realizado por un alumno.
¡Es un caso especial! Se debe hacer con un planteamiento didáctico.

Tipo de comunicación

- Didáctica
- Investigadora (artículo científico, comunicación en congreso, informe técnico, etc).

Estructura de un informe científico

- Título del trabajo y nombre de los autores
- Resumen
- Índice de contenidos (sólo para informes largos)
- Notación (sólo cuando sea necesario)
- Introducción
- Teoría
- Experimentación
- Resultados
- Conclusiones
- Discusión y trabajo futuro
- Agradecimientos
- Apéndices (sólo cuando sea necesario)
- Referencias

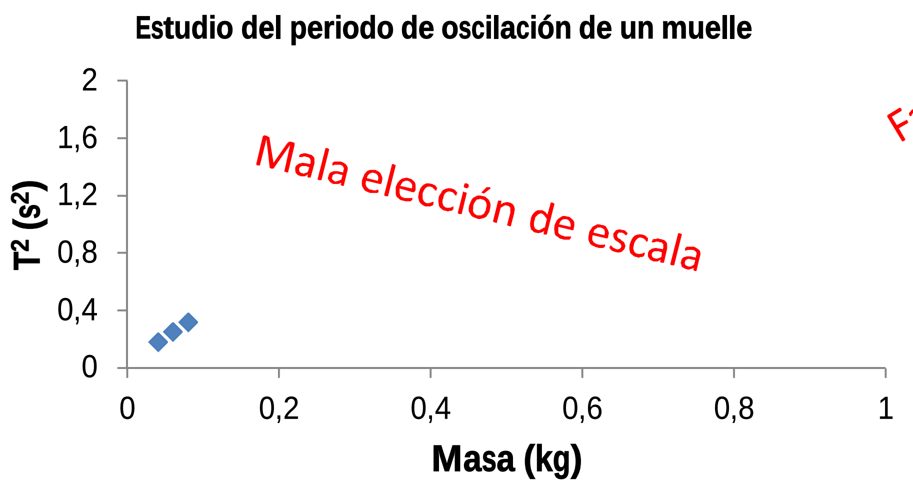
Algunos consejos...

- No todas las secciones son necesarias.
- Se utilizan **acrónimos** con frecuencia -> <u>necesario definirlos</u> la primera vez que aparecen.
- Las ecuaciones, gráficas y tablas deben aparecer enumeradas.

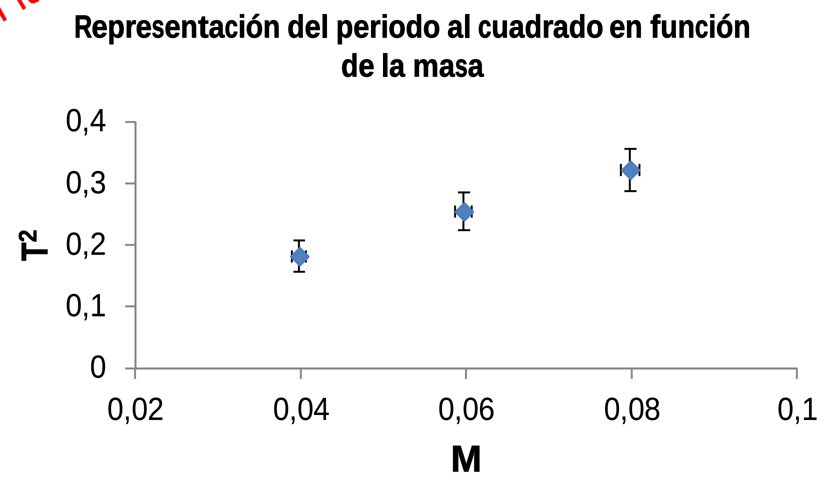
- **<u>Confección de gráficos</u>**:

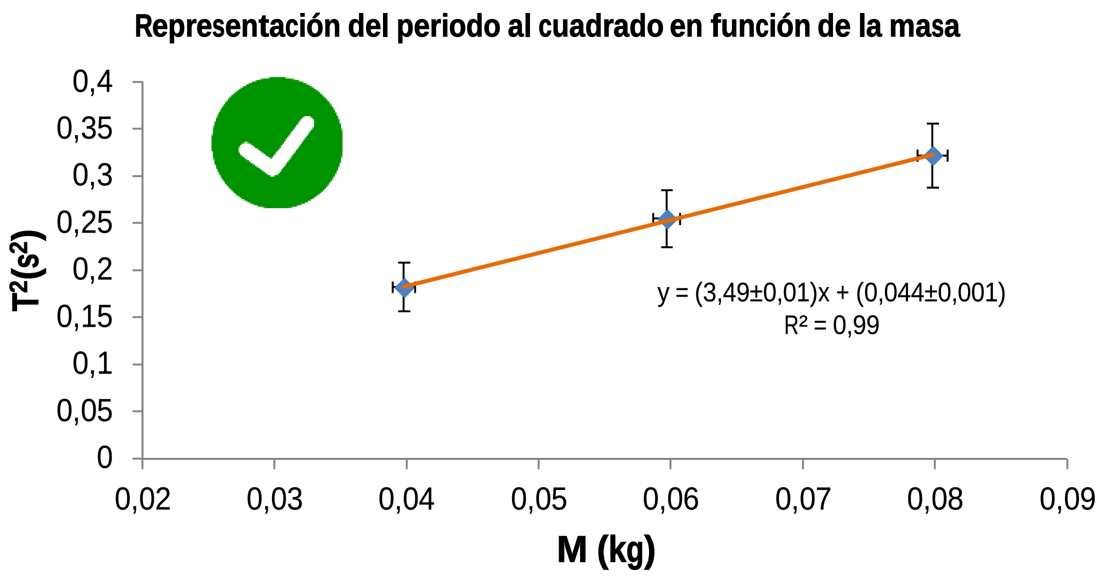
  - Se debe elegir una escala adecuada.
  - Los ejes deben dividirse utilizando una escala sencilla.
  - Sobre los ejes mostraremos la magnitud física representada en ellos y la unidad de medida.
  - Cada gráfica debe llevar un título en la parte superior.
  - Salvo casos excepcionales, la variable independiente del fenómeno debe ir representada en abscisas y la dependiente en ordenadas.
  - Los valores medidos se representan sobre la gráfico por el punto correspondiente a sus coordenadas y con las barras de error en x e y.

Ejemplos



Faltan las unidades





Esquema

- El método científico
- Magnitudes físicas
  - Medidas y unidades
  - Escalares y vectores
- Cálculo vectorial

Una **magnitud física** es una propiedad **medible** de un sistema físico, es decir, a la que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medición o una relación de medidas.

Una **magnitud física** consta, al menos, de los siguientes elementos:

1. Una **cantidad**.
2. Una **unidad**.
3. Grado de confiabilidad en la cantidad (exactitud o **error**)

Para **MEDIR** necesitamos:

- Un sistema de unidades
- Herramientas matemáticas (la física no puede entenderse sin una apreciación básica del cálculo)

Repasar nociones básicas de cálculo (resolución de ecuaciones sencillas, derivadas, derivadas parciales, cambio de unidades, análisis vectorial, etc.)

Medidas directas e indirectas

Importante diferenciar entre **MEDIR DIRECTAMENTE** y **ESTIMAR** a través de medidas.

EJEMPLO: Queremos determinar la densidad de un mármol rectangular

¿Qué hacemos?

- Medidas directas
  - La masa
  - Las dimensiones (longitud, anchura, altura)

- “Medidas indirectas” (cálculos)
  - Volumen
  - Densidad

Sistemas de unidades

El **Sistema Internacional de Unidades** se basa en dos tipos de magnitudes físicas:

- **Unidades fundamentales**, de las que derivan todas las demás.
  - **Longitud:** metro (m)
  - **Masa:** kilogramo (kg)
  - **Tiempo:** segundo (s)
  - **Temperatura:** Kelvin (K)
  - **Intensidad de corriente eléctrica**: Amperio (A)
  - **Cantidad de sustancia**: mol (mol)
  - **Intensidad luminosa**: candela (cd)

- **Unidades derivadas**, que son las restantes y que pueden ser expresadas con una combinación matemática de las anteriores.
  - Velocidad: m/s
  - Densidad: kg/m^3
  - Fuerza: Newton (N) -> $kg\ m\ s^{-2}$
  - Energía: Julio (J) -> $kg\ m^2\ s^{-2}$
  - Etcétera…

Múltiplos y submúltiplos

Prefijo		Símbolo	Factor	Equivalente
Múltiplos	Exa	E	10^{18}	1000000000000000000
	Peta	P	10^{15}	1000000000000000
	Tera	T	10^{12}	1000000000000
	Giga	G	10^{9}	1000000000
	Mega	M	10^{6}	1000000
	Kilo	k	10^{3}	1000
	Hecto	h	10^{2}	100
	Deca	da	10^{1}	10
Submúltiplos	Deci	d	10^{-1}	0.1
	Centi	c	10^{-2}	0.01
	Mili	m	10^{-3}	0.001
	Micro	µ	10^{-6}	0.000001
	Nano	n	10^{-9}	0.000000001
	Pico	p	10^{-12}	0.000000000001
	Femto	f	10^{-15}	0.000000000000001
	Atto	a	10^{-18}	0.000000000000000001

Cambio de unidades

[redacted]

EJEMPLOS:

- ¿Cuántos m/s son 120 km/h?

$$120\frac{km}{h} = 120\frac{km}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,km} \times \frac{1\,h}{3600\,s} = 33\ {}^{m}/_{s}$$

- Expresa en unidades del SI las siguientes magnitudes físicas:
  - Densidad del aceite: 0.92 g/cm^3 — 920 kg/m^3
  - Fuerza peso: 2·10^6 g cm s^{-2} — 20 N
  - Energía cinética: 5 kJ — 5000 J ó 5·10^3 J

Análisis dimensional

Las magnitudes tienen **DIMENSIONES**

Magnitud	Dimensión	Unidad (SI)
Longitud	L	m
Tiempo	T	s
Masa	M	kg
Área	L^2	m^2
Volumen	L^3	m^3
Densidad	$M\ L^{-3}$	$kg\ m^{-3}$

IMPORTANTE: Dos magnitudes no pueden ser comparadas si no tienen la misma dimensión

LAS ECUACIONES DEBEN SER DIMENSIONALMENTE HOMOGÉNEAS

$$A = B + C$$

A, B y C tienen la misma dimensión

Ejemplos:
¿son homogéneas estas ecuaciones?

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$[L] = [L\ T^{-1}\ T] + [L\ T^{-2}\ T^2]$

$[L] = [L] + [L]$ ✓

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\downarrow$ más sencillo...

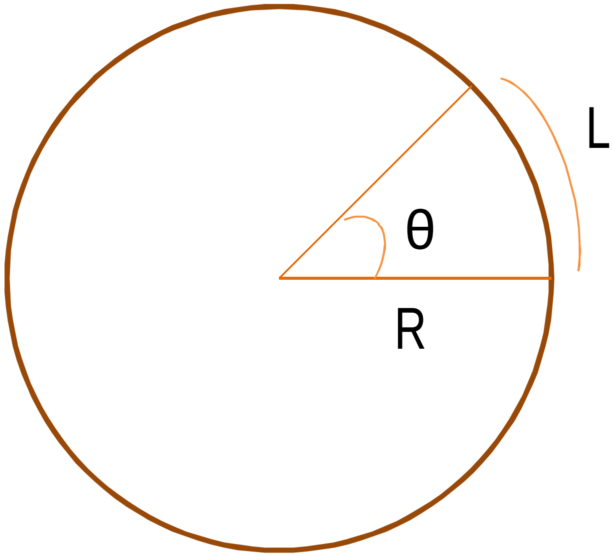
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$[T^2] = [L\ L^{-1}\ T^2]$

$[T^2] = [T^2]$ ✓

¿Qué pasa con π? ¿no tiene dimensión?

Los ángulos son adimensionales



Ángulo: $\theta = \dfrac{L}{R}$

Unidad (SI): radián (rad)

Dimensión: NO TIENE

De grados a radianes. 2π rad = 360 °

IMPORTANTE tener en cuenta cuando trabajamos con la calculadora!

Las constantes en la Física

$$(F)\ \alpha\ (m)(a)$$

Al introducir un sistema de unidades

$$FU_F = CmU_m aU_a$$

C depende del sistema de unidades elegido

$$F = ma$$

$U_F = 1$ N
$U_m = 1$ kg
$U_a = 1$ m/s^2

C =1

Las constantes en la Física

- **Constantes particulares:** dependen de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno. Ejemplos: constante recuperadora del muelle

- **Constantes universales:** no dependen de la naturaleza de los cuerpos.

Ejemplos:

- La constante de la gravitación universal $G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

  Ley de la gravitación universal:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

- La velocidad de la luz $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s

  $E = mc^2$

- El número de Avogadro $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

  El número de moles es proporcional al número de moléculas $N = nN_A$

Tensores, escalares y vectores

En física, las cantidades se caracterizan como tensores de rangos distintos:

- **Un escalar es un tensor de rango cero**. Las magnitudes escalares son aquellas que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas para su medida. Podemos decir que poseen un módulo pero carecen de dirección. ¿Ejemplos?

- **Un vector es un tensor de rango uno**. Las magnitudes vectoriales son aquellas que quedan caracterizadas por una cantidad (intensidad o módulo), una dirección y un sentido. ¿Ejemplos?

Esquema

- El método científico
- Magnitudes físicas
  - Medidas y unidades
  - Escalares y vectores
- Cálculo vectorial

Análisis Vectorial

El análisis vectorial es una excelente herramienta matemática con la cual se expresan en forma más conveniente y se comprenden mejor muchos conceptos de la física.

Como los vectores tienen módulo y dirección, las operaciones con vectores no siguen las reglas tradicionales de suma, resta y producto de los escalares.

Vectores

Un vector es un ente matemático que nos permite representar gráficamente a una magnitud física vectorial.

Físicamente un vector es una semirrecta orientada (‘flecha’) dentro de un espacio Euclidiano en el plano o en el espacio.

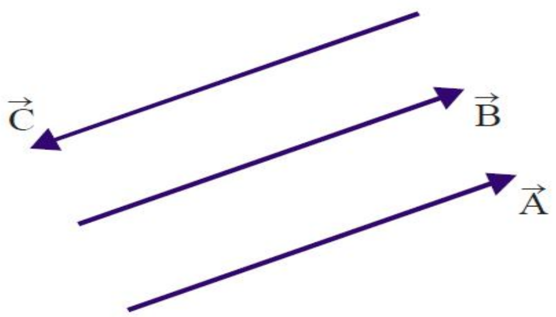


Fig. 1. Vectores paralelos y antiparalelos.

- Caracterizado por:
  - Magnitud (módulo del vector)
  - Dirección y sentido
- Se denota con letra en **negrita** o con una flecha.
- Dos maneras de expresar un vector:
  - Por ángulos
  - Por componentes

Elementos de un vector

Un vector tiene como elementos a:

- **Módulo**

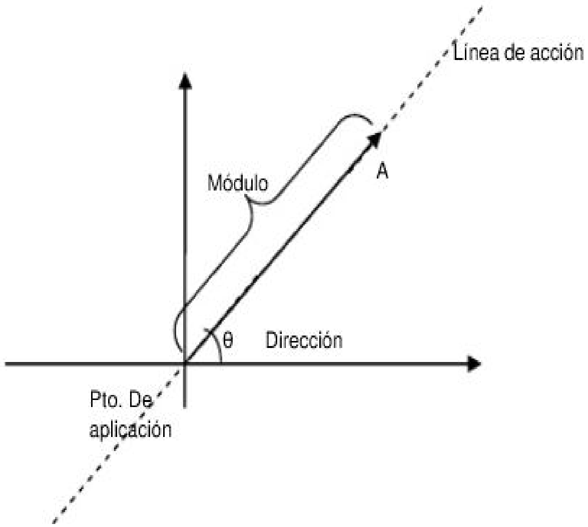
Denominado también magnitud, representa el valor o la medida de la magnitud vectorial. Se representa como $|\vec{A}|$ o simplemente A.

- **Dirección**

Es la orientación del vector con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. Se representa mediante el ángulo q formado por la línea de acción y el eje de referencia (en este caso el eje x).

- **Sentido.**

Indica el lado hacia donde se dirige el vector (línea/acción) el sentido también se indica por la dirección de las flechas.

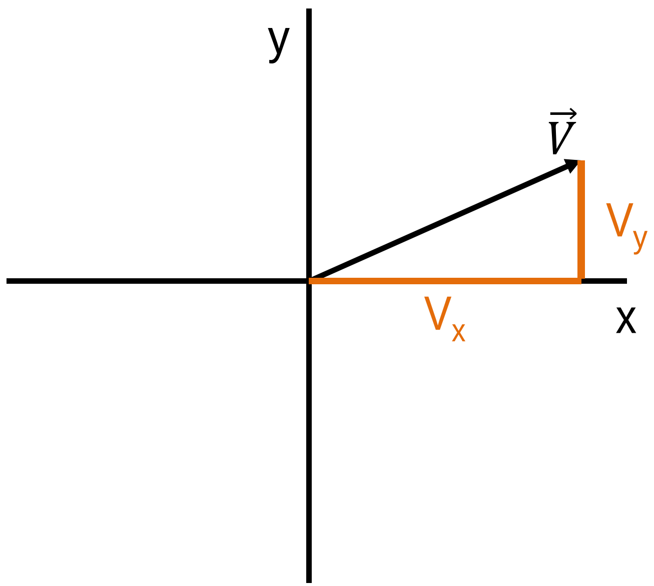


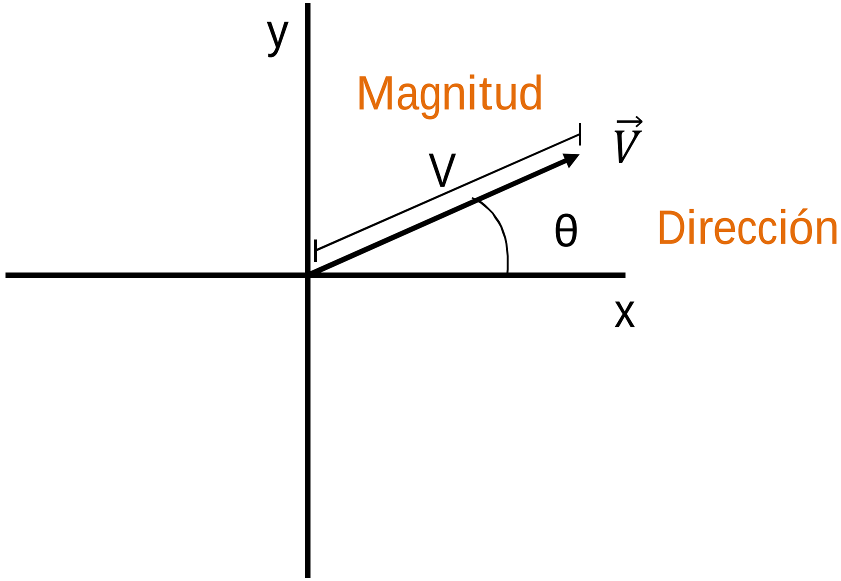
El vector expresado por componentes

El vector se compone de

- Su magnitud en la dirección del eje x
- Su magnitud en la dirección del eje y

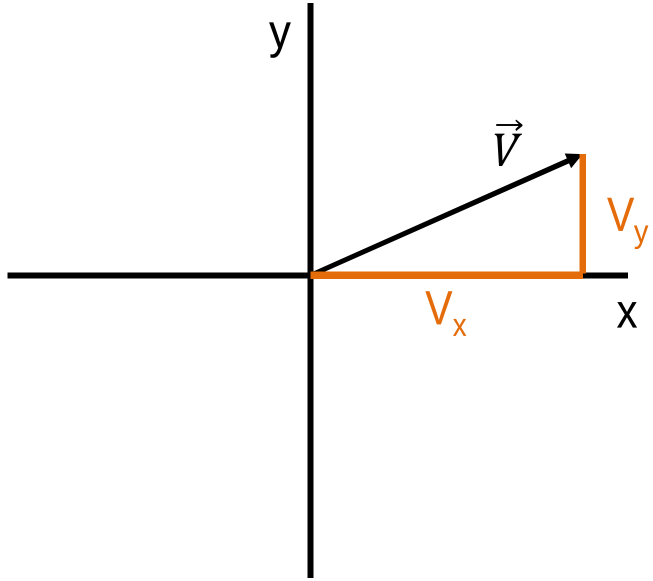
➢ Cada componente es un ESCALAR





Conocida la magnitud y dirección de un vector, ¿cómo se calculan sus componentes?

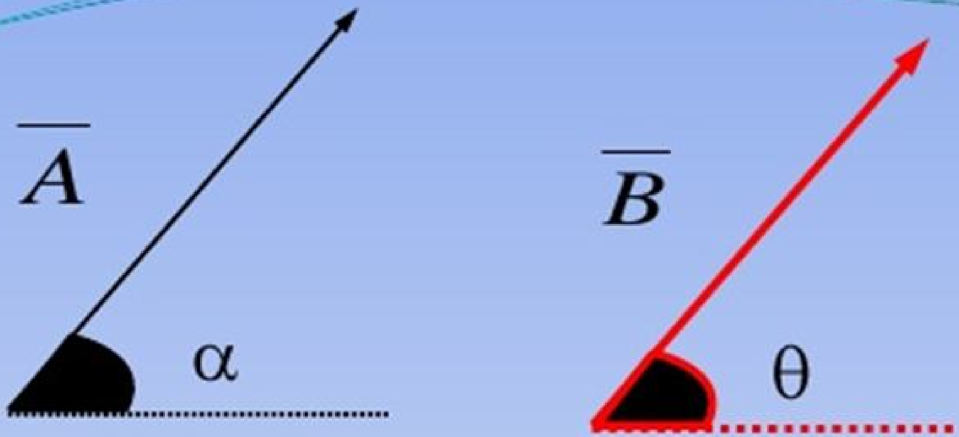
$$V_x = V\cos\theta$$
$$V_y = V\sin\theta$$



Y si conocemos las componentes del vector, ¿se pueden determinar su magnitud y dirección?

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

$$\tan\theta = {V_y}/{V_x}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} |\overline{A}| = |\overline{B}| \\ \alpha = \theta \\ Sentido\ de = Sentido\ de \\ \overline{A} \qquad\qquad \overline{B} \end{cases}$$

VECTORES IGUALES

Se dice que dos vectores son iguales sí ellos tienen igual magnitud y la misma dirección, los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura anterior, además de ser paralelos son iguales.
Un vector $-\vec{C}$ tiene la magnitud de $\vec{C}$ pero su dirección es opuesta a la del vector $\vec{C}$, los dos son antiparalelos. Se dice que un vector $\vec{a}$ es nulo sí su magnitud es cero $(a = 0)$.

Los vectores $2\vec{A}$, $5\vec{A}$ son paralelos al vector $\vec{A}$ y, en general, sí **m** es un escalar positivo la cantidad $m\vec{A}$ es un vector cuya magnitud es mA y tiene la dirección del vector $\vec{A}$.

En la figura 2 se muestran dos vectores paralelos, un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es A y otro vector $\hat{A}$ cuya magnitud es la unidad. La relación entre estos vectores la podemos expresar como $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$ ó también que $\vec{A} = A\hat{A}$. El vector $\hat{A}$ recibe el nombre de **vector unitario** y simplemente representa la dirección del vector $\vec{A}$.

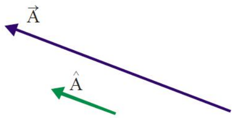


Fig. 2. Vector unitario.

Vector unitario

Un **vector unitario** es aquel cuyo módulo o magnitud es igual a la unidad, como tal no presenta dimensión y nos permite definir la dirección de un vector. El vector unitario simplemente representa la dirección de un vector.

Normalmente se representa como: $\widehat{A}$, $\widehat{r}$, $\widehat{s}$, $\widehat{i}$, $\widehat{j}$, $\widehat{k}$.

El vector unitario de un vector $\vec{A}$ cuyo módulo o magnitud es A se obtiene mediante la expresión:

$$\widehat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Suma De Vectores: *(Métodos gráficos)*

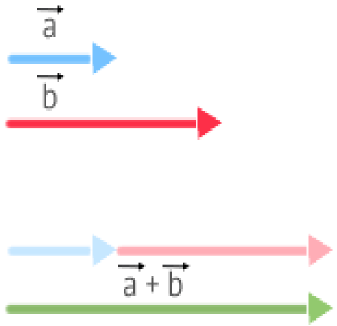
De forma gráfica, la suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ nos dará como resultado otro vector $\vec{C}$ que podemos obtener mediante 2 métodos distintos:

Método de la cabeza con cola:

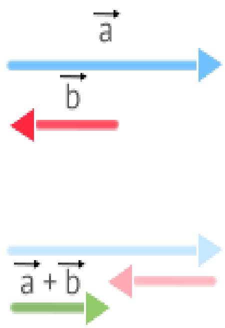
Respetando la dirección y sentido de ambos vectores,

1. Desplazamos el vector $\vec{B}$ de tal forma que su origen se encuentre a continuación del extremo de $\vec{A}$.

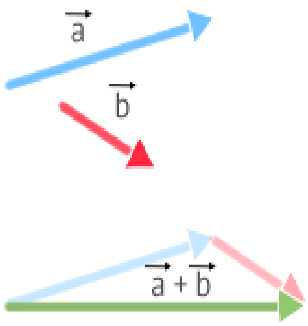
2. $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$será el segmento recto que podamos dibujar desde el origen de $\vec{A}$ hasta el extremo de de $\vec{B}$.



suma de vectores con la misma dirección y sentido



suma de vectores con la misma dirección y sentidos opuestos

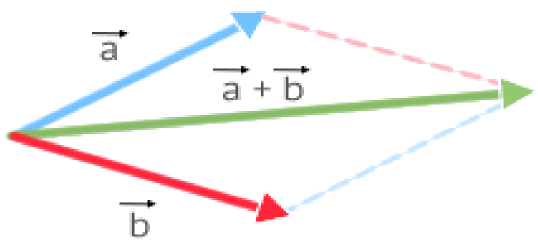


suma de vectores con distinta dirección

Suma De Vectores: *(Métodos gráficos)*

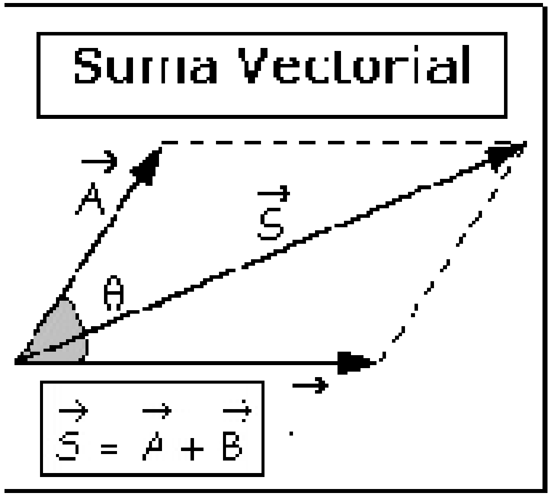
Regla del paralelogramo:

1. Se sitúan los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con los orígenes en el mismo punto
2. Desde el extremo de cada uno se dibuja una paralela al otro vector. Al final podremos ver un paralelogramo.
3. $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ será el vector que parte desde el origen común de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a través de la diagonal del paralelogramo



suma de vectores
con distinta dirección

Suma De Vectores: *(Métodos gráficos)*



El modulo de $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ viene dado por:

$$|S| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

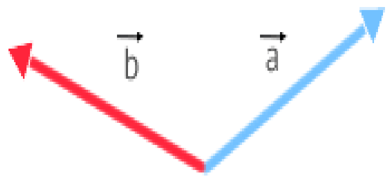
$\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

La suma de vectores satisface la ley conmutativa y asociativa:

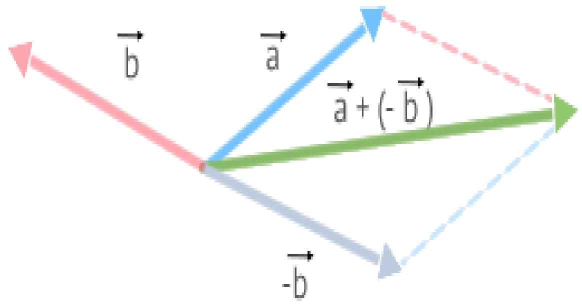
$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ $\quad (\vec{A}+\vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B}+\vec{C})$

Sustracción De Vectores: *(Método gráfico)*

La **resta** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se realiza de la misma forma que la suma, salvo que $\vec{B}$ está en sentido opuesto: $\overrightarrow{D} = \vec{A} - \vec{B} = \overrightarrow{A} + (-\vec{B})$



representación de los vectores a y b

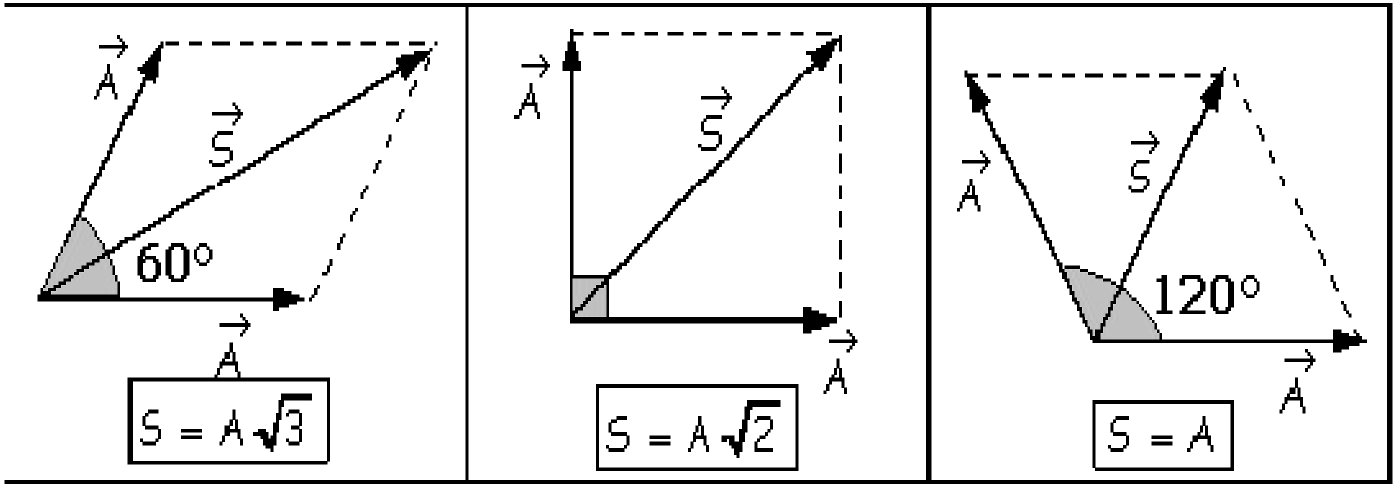


la resta de los vectores a y b es la suma de a y el opuesto de b

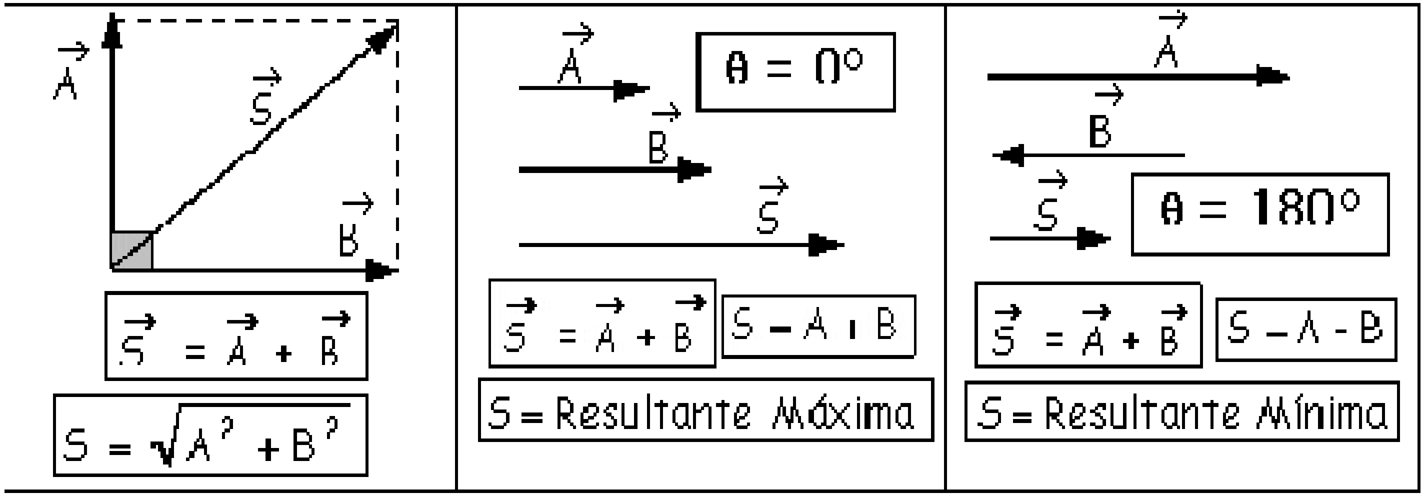
El módulo del vector diferencia es:

$$|S| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\ cos\theta}$$

Casos Especiales de la Suma Vectorial



NOTA: En estos tres primeros casos, los vectores sumados tienen el mismo tamaño.

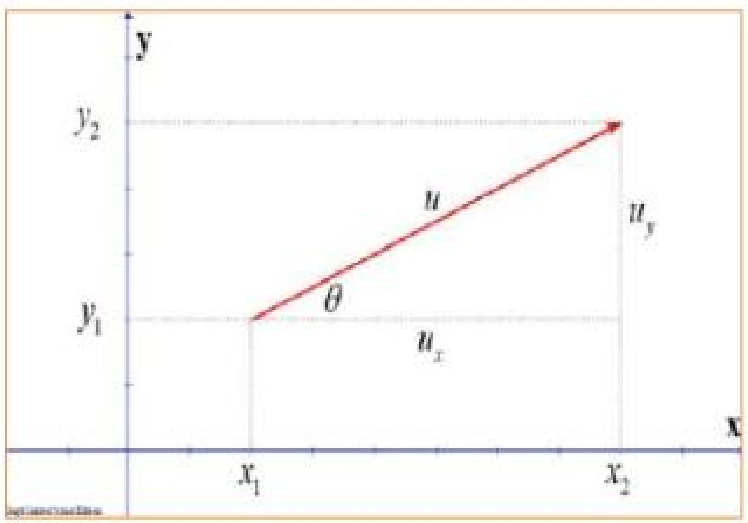


Representación de un vector en el Plano

El **plano cartesiano** está formado por dos ejes perpendiculares X y Y. El eje X está asociado con el vector unitario $\hat{i}$ y el eje Y está asociado con el vector unitario $\hat{j}$.

Un vector $\vec{u}$ en el plano cartesiano esta determinado por las coordenadas de sus puntos inicial (x_1, y_1) y final (x_2, y_2):

$$\vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (u_x, u_y)$$



El módulo del vector $\vec{u}$ en el plano esta dado por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

La dirección (q) del vector $\vec{u}$ en el plano esta dada por:

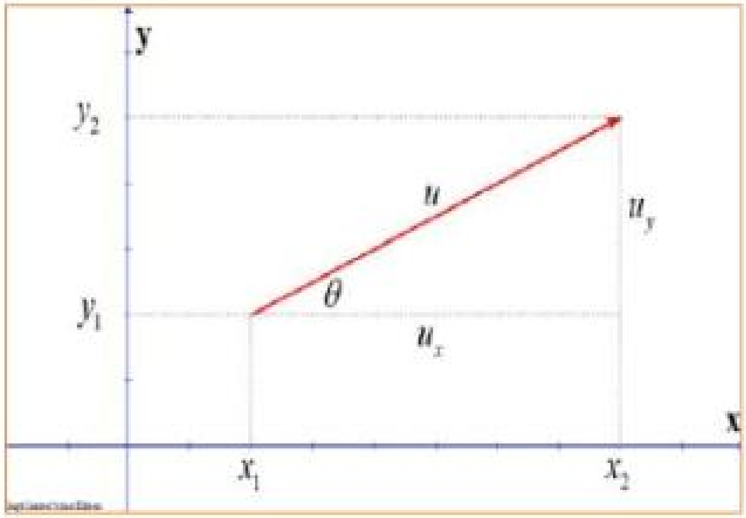
$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u_y}{u_x}\right)$$

Representación de un vector en el Plano

El vector $\vec{u}$ puede expresarse también como la composición de dos vectores perpendiculares:

$$\vec{u} = \vec{u_x} + \vec{u_y} = u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j}$$

$\hat{i}$ y $\hat{j}$ vectores unitarios



$|\vec{u_x}| = |\vec{u}|\cos\theta$ Proyección de $\vec{u}$ sobre el eje X

$|\vec{u_y}| = |\vec{u}|\operatorname{sen}\theta$ Proyección de $\vec{u}$ sobre el eje Y

$$\vec{u} = \vec{u_x} + \vec{u_y} = |\vec{u}|\cos\theta\,\hat{i} + |\vec{u}|\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

Conclusión: el vector $\vec{u}$ se puede expresar de forma matemática y de forma cartesiana:

$$\vec{u} = u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j} = (u_x, u_y)$$

Suma y resta de vectores (método analítico)

Supongamos que tenemos los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ siguientes:

$$\vec{A} = (A_x, A_y) \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}$$

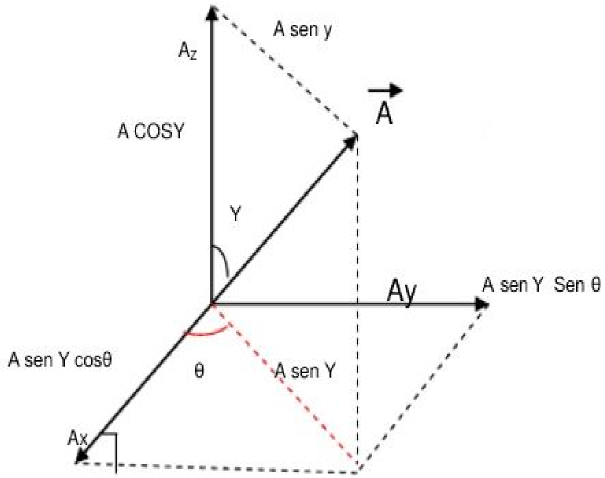
Para determinar vector suma o diferencia sólo tenemos que sumar las componentes X y las componentes Y.

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} = (A_x + Bx\,)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath}$$
$$= (A_x + B_x\,,\ A_y + B_y)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} - (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}) = (A_x - Bx\,)\hat{\imath} + (A_y - B_y)\,\hat{\jmath}$$
$$= (A_x - B_x\,,\ A_y - B_y)$$

Vector en tres dimensiones

La representación de un vector en tres dimensiones se muestra en la grafica siguiente:



La expresión del vector esta dada por:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

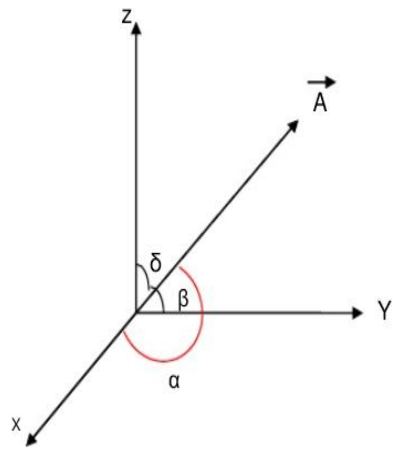
$$\vec{A} = (A_x\,,\,A_y\,,\,A_z)$$

El módulo del vector esta dada por:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$$

$$A_x = A\,Sen\,Y\,Cos\,\theta$$
$$Ay = A\,Sen\,Y\,Sen\theta$$
$$Az = A\,Cos\,Y$$

La **dirección** de un vector espacial se determina aplicando los cosenos directores.



$$Cos\,\alpha = \frac{Ax}{A}$$

$$Cos\,\beta = \frac{Ay}{A}$$

$$Cos\,\delta = \frac{Az}{A}$$

Los cosenos directores cumplen la siguiente relación :

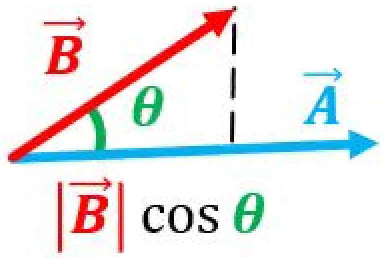
$$\boxed{Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\delta = 1}$$

Donde Ax, Ay, Az son las componentes rectangulares en dirección x,y,z respectivamente

Producto escalar de dos vectores

Sean $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$; **El producto escalar de dos vectores,** denominado también producto punto, se expresa matemáticamente como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$



Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\, |\vec{B}|\, cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre ambos vectores.

Como se puede ver, el resultado del producto escalar de dos vectores siempre es un escalar (**número real)**, que puede ser positivo, negativo o nulo dependiendo del ángulo q.

Producto escalar de dos vectores

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\, cos\theta$$

Casos particulares:

Si $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son paralelos (es decir θ=0°), el producto escalar será maximo $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|$

Si $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son anti-paralelos (es decir θ=180°), el producto escalar será mínimo $\vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}|\,|\vec{B}|$

Si $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son perpendiculares (es decir θ=90°), el producto escalar será cero $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

El producto escalar de un vector $\vec{A}$ por si mismo $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|\,|\vec{A}|\cos 0 = |\vec{A}|^2$

Propiedades del producto escalar:

1. El producto escalar es **conmutativo:** $\vec{A} \cdot \overrightarrow{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2. El producto escalar es **distributivo**: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

3. Multiplicación por un escalar: $k\vec{A} \cdot \vec{B} = k\,(\vec{A} \cdot \vec{B})$

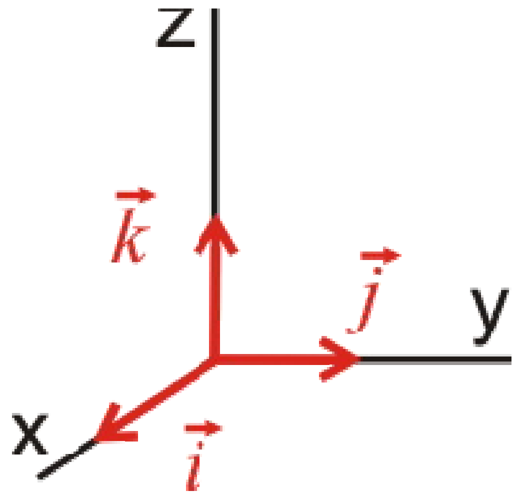
Producto escalar de los vectores unitarios

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,cos\theta$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}|\,|\hat{\imath}|\cos(0) = (1)\,(1)\,(1) = 1$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$



$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\imath}|\,|\hat{\jmath}|\cos(90) = (1)(1)(0) = 0$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

Expresión analítica del producto escalar

Sean los vectores: $\vec{A} = (A_x , A_y , A_z)$

$\vec{B} = (B_x , B_y , B_z)$

El producto escalar de estos vectores se define analíticamente como:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Demostración:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= (A_xB_x\, \hat{i} \cdot \hat{i} + A_xB_y\, \cancel{\hat{i} \cdot \hat{j}} + A_xB_z\, \cancel{\hat{i} \cdot \hat{k}}) + (A_yB_x\, \cancel{\hat{j} \cdot \hat{i}} + A_yB_y\, \hat{j} \cdot \hat{j} + A_yB_z\, \cancel{\hat{j} \cdot \hat{k}}) +$$

$$(A_zB_x\, \cancel{\hat{k} \cdot \hat{i}} + A_zB_y\, \cancel{\hat{k} \cdot \hat{j}} + A_zB_z\, \hat{k} \cdot \hat{k})$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

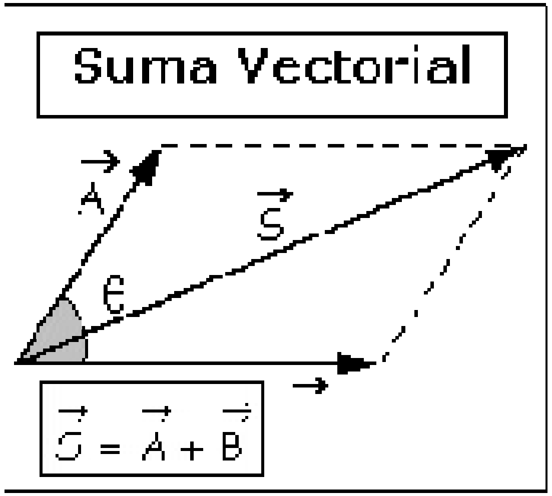
Resumen: El producto escalar sirve para calcular la proyección de un vector sobre otro y calcular el ángulo entre vectores

Producto escalar de dos vectores

Ejemplos

La figura muestra un triángulo de lados, $|\vec{A}|, |\vec{B}|\ y\ |\vec{S}| = |\vec{A} + \vec{B}|$. El ángulo entre los lados A y B es θ. **Demostrar:**

$$|S| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\ cos\theta}$$



$$\vec{S} \cdot \vec{S} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

Recordamos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0 = |\vec{u}|^2 = u^2$$

Entones:

$$S^2 = A^2 + AB\ cos\theta + BA\ cos\theta + B^2$$

$$S^2 = A^2 + 2AB\ cos\theta + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB\ cos\theta$$

$$|S| = S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\ cos\theta}$$

Producto escalar de dos vectores

Ejemplos

Calcular $\vec{A} \cdot \vec{B}$

- $\vec{A}$ =(5 , -2); $\vec{B}$ =(5 , 3)
- $\vec{A}$ = (2 $\hat{i}$ + 3 $\hat{j}$ + $\hat{k}$); $\vec{B}$ = (2 $\hat{i}$ - 3 $\hat{k}$);
- $|\vec{A}| = 6$; $|\vec{B}| = 5$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Producto escalar de dos vectores

Ejemplos

Sabiendo que: $\vec{A} + \vec{B} = (3, -2, 5)$

$\vec{A} - \vec{B} = (5, 2, -1)$

1. Determine $A^2 - B^2$

2. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Determine la proyección del vector $\vec{u} = (2, 1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 4)$ y la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{2}{5}$$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, se denota como:

$$\vec{A}\ x\ \vec{B}$$

El resultado del producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a estos vectores, cuya dirección y sentido se obtienen mediante la regla de la mano de derecha.

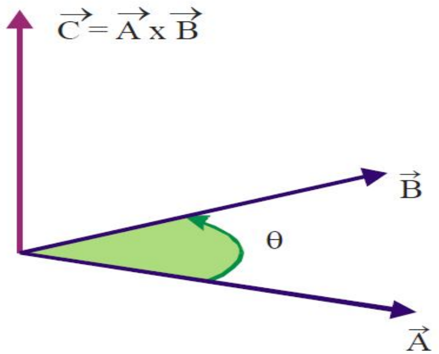


Fig. 5. Producto vectorial de dos vectores.

El módulo del producto vectorial de dos vectores se define como:

$$|\vec{A}\ x\ \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\ \text{sen}\theta \qquad \theta \text{ es el ángulo entre } \vec{A}\ y\ \vec{B}$$

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo formado por $\vec{A}\ y\ \vec{B}$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores paralelos o anti-paralelos (es decir θ es igual a 0° o 180°) es igual a cero.

La magnitud del producto vectorial de dos vectores es máxima si estos vectores son perpendiculares (es decir θ es igual a 90°)

$$|\vec{A}\, x\, \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|$$

El producto vectorial no es conmutativo

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} \neq \vec{B}\, x\, \vec{A} \qquad \vec{A}\, x\, \vec{B} = -(\vec{B}\, x\, \vec{A})$$

El producto vectorial es distributivo

$$\vec{A}\, x\, (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\, x\, \vec{B} + \vec{A}\, x\, \vec{C}$$

Si los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}\ y\ \vec{C}$, están en el mismo plano:

$$\vec{A} \,.\, (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$$

$$\vec{B} \,.\, (\vec{A} \times \vec{C}) = 0$$

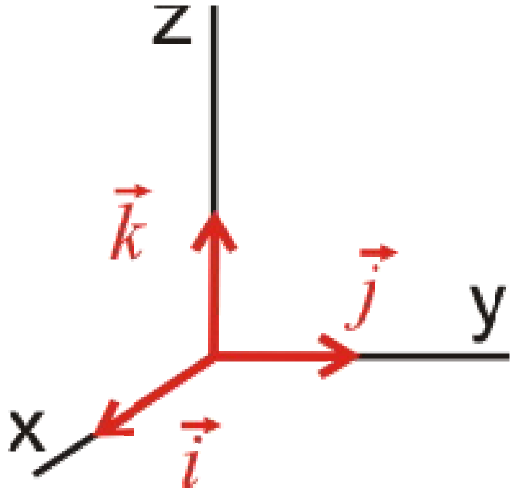
$$\vec{C} \,.\, (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

Producto vectorial de los vectores unitarios

$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ $\qquad$ $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$ $\qquad$ $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0$

$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ $\qquad$ $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$ $\qquad$ $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$

$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ $\qquad$ $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ $\qquad$ $\hat{k} \times \hat{k} = 0$



Producto vectorial mediante vectores unitarios

Sean los vectores:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}$$

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k})\,x\,(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k})$$

$$= (A_xB_x\,\cancel{\hat{i}\,x\,\hat{i}} + A_xB_y\,\hat{i}\,x\,\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\,x\,\hat{k}) + (A_yB_x\,\hat{j}\,x\,\hat{i} + A_yB_y\,\cancel{\hat{j}\,x\,\hat{j}} + A_yB_z\,\hat{j}\,x\,\hat{k}) +$$

$$(A_zB_x\,\hat{k}\,x\,\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}\,x\,\hat{j} + A_zB_z\,\cancel{\hat{k}\,x\,\hat{k}})$$

$$= A_xB_y\,\hat{k} - A_xB_z\,\hat{j} - A_yB_x\,\hat{k} + A_yB_z\,\hat{i} + A_zB_x\,\hat{j} - A_zB_y\,\hat{i}$$

$$\vec{A}\,x\,\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{j} + (AxBy - A_yB_x)\,\hat{k}$$

Calcular el producto vectorial de:

$$\vec{A} = (2, 5, -3)$$

$$\vec{B} = (1, 3, 2)$$

Producto vectorial como determinante

Un determinante se expresa de esta forma: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{ad} - \text{bc}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$\begin{vmatrix} a1 & a2 & c3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix} = a1\begin{vmatrix} b2 & b3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} - a2\begin{vmatrix} b1 & b3 \\ c1 & c3 \end{vmatrix} + a3\begin{vmatrix} b1 & b2 \\ c1 & c2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6 - 0) - 3(-4 + 3) + 4(0 - 9)$$

$$= 6 + 3 - 36$$

$$= -27$$

Producto vectorial como determinante

Sean los dos vectores:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}$$

$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{j} + (AxBy - A_yB_x)\,\hat{k}$$

$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\,\hat{j} + (AxBy - A_yB_x)\,\hat{k}$$

$$\vec{A}\ x\ \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{j} + (AxBy - A_yB_x)\,\hat{k}$$

Calcular el producto vectorial de:

$$\vec{A} = (2, 5, -3)$$

$$\vec{B} = (1, 3, 2)$$

Producto vectorial como determinante

Ejemplos

Sean los vectores:

$$\vec{A} = a1\,\hat{i} + a2\,\hat{j} + a2\,\hat{k}$$
$$\vec{B} = b1\,\hat{i} + b2\,\hat{j} + b3\,\hat{k}$$
$$\vec{C} = c1\,\hat{i} + c2\,\hat{j} + c3\,\hat{k}$$

Demostrar: $\vec{A}\,x\,\vec{B} = -(\vec{B}\,x\,\vec{A})$ $\quad\quad$ $\vec{A}\,x\,(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\,x\,\vec{B} + \vec{A}\,x\,\vec{C}$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}$$