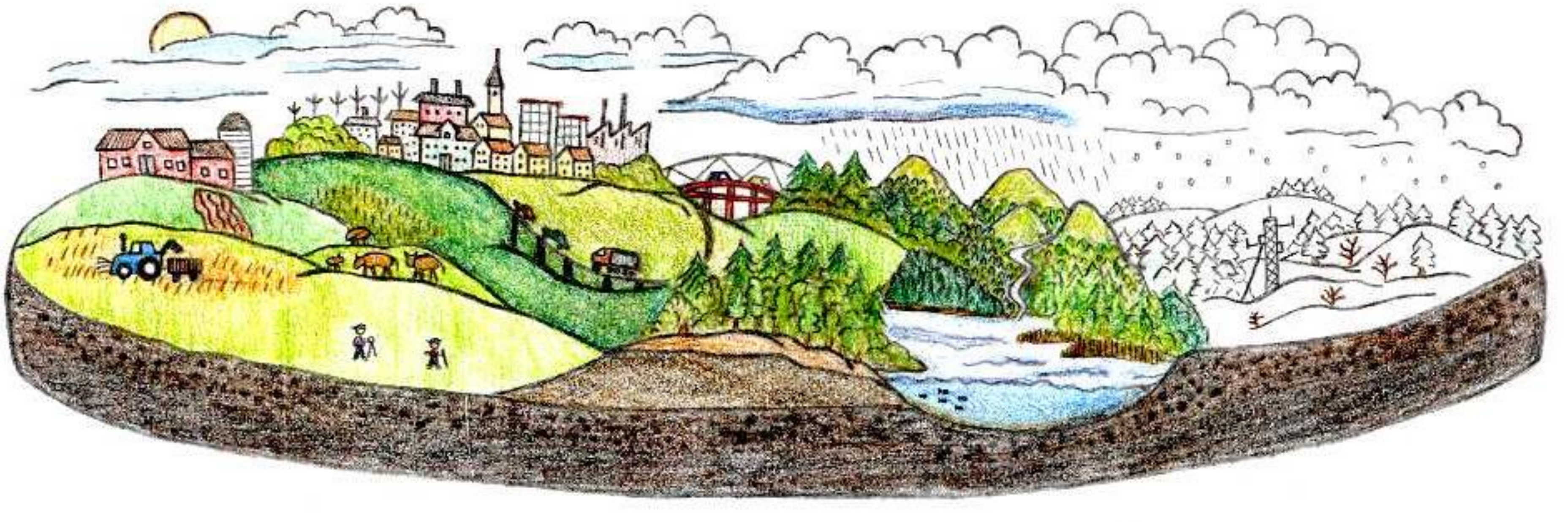
Bases Físicas del Medio Ambiente

Oscilaciones



Programa

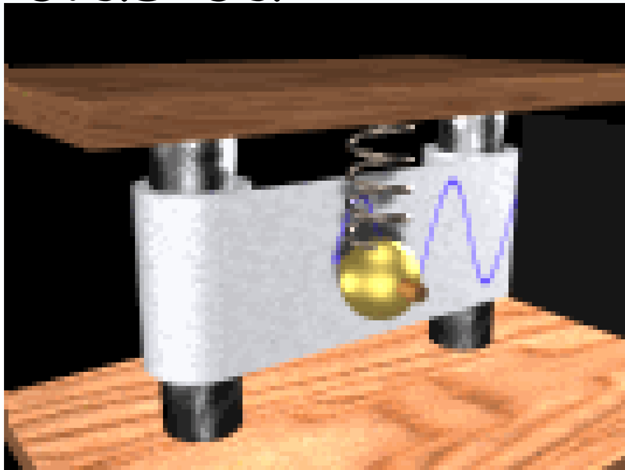
- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

Programa

- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

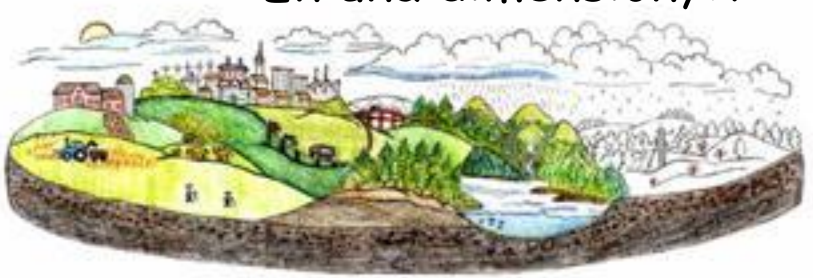
Esta lección ≠ "Física"

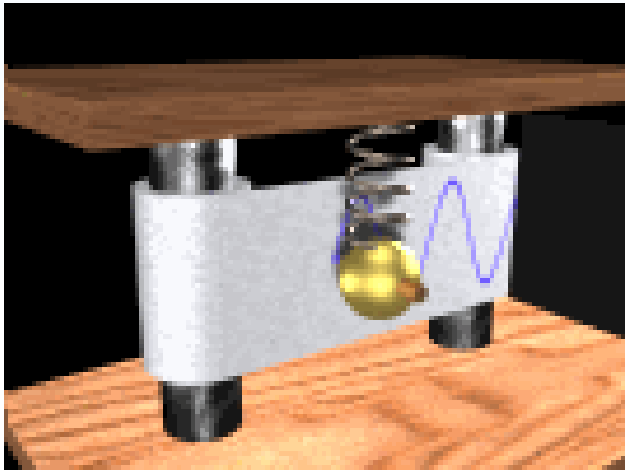
- Se trata de reconocer la utilidad de la matemática
  - Trigonometría
  - Cálculo
- Para describir unas aplicaciones interesantes de la mecánica clásica
- Luego, un poco de física



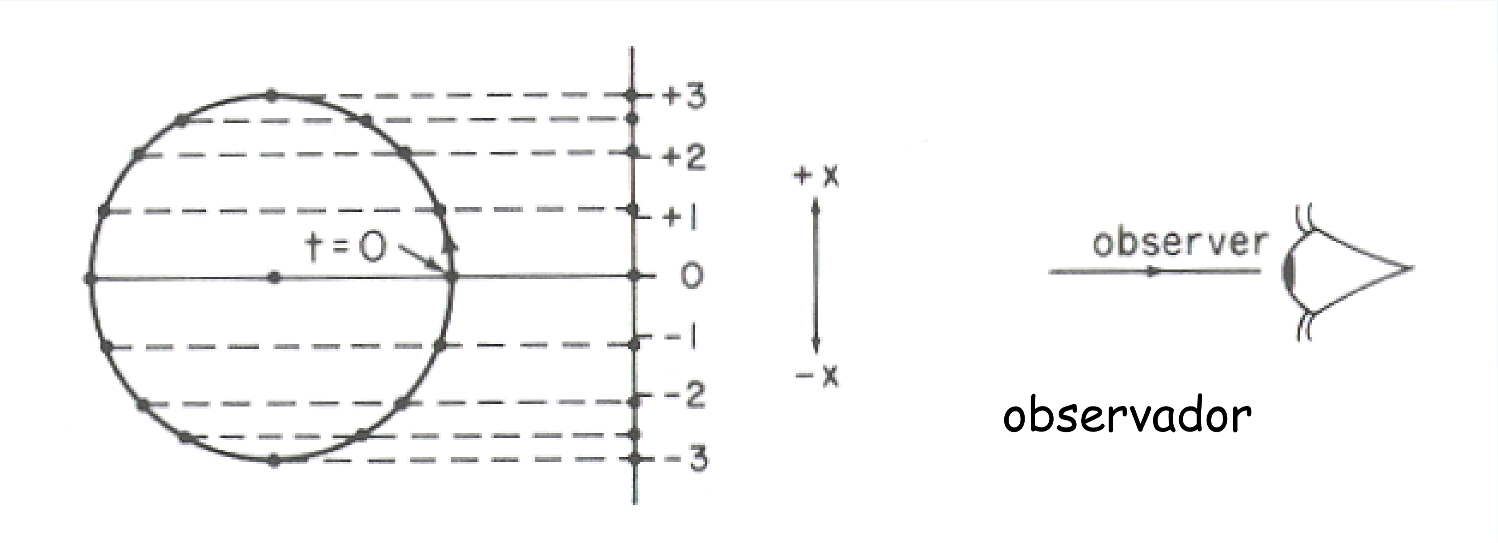
Definiciones: Movimientos Periódicos

- Periódico: movimiento que se repite así mismo
- Periodo: el tiempo necesario para que se repita
- Ejemplos de movimientos periódicos
  - Rotación de la Tierra alrededor del Sol, período = 1 año
  - Oscilación de un péndulo
  - Movimiento de las manecillas de un reloj
  - Masa colgada de un muelle
- Movimiento armónico simple (MAS)
  - Forma más sencilla de oscilación
  - Simplificación (sin arrastre)
  - En una dimensión, x



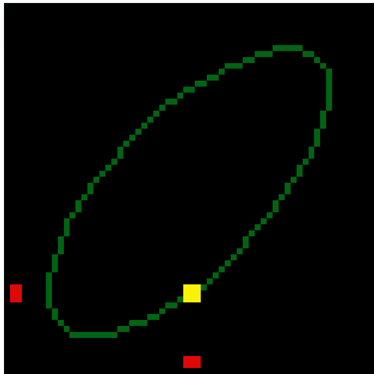


El MAS es la proyección del movimiento uniformo circular



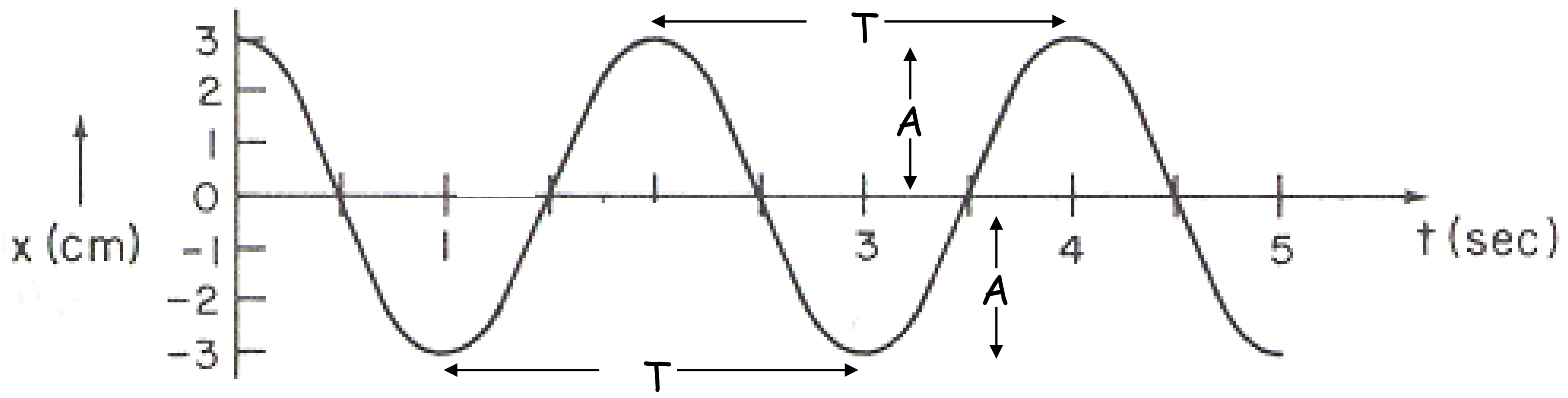
observador

Importancia de la trigonometría



Movimiento armónico simple (MAS)

- Posición (x) frente a tiempo (t)
  - Definición del periodo, T
  - Definición de la amplitud, *A*



Frecuencia y Periodo

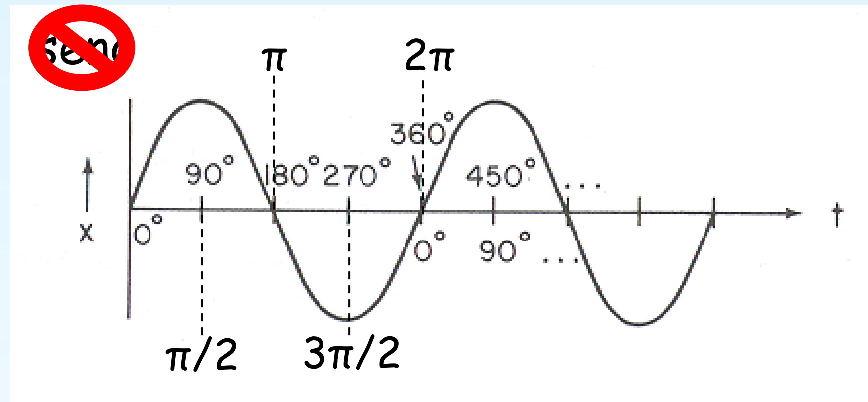
f = 1/T $\qquad\qquad$ T = 1/f

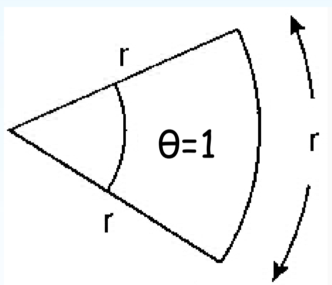
T periodo, en segundos (s)
f = frecuencia en Hertzios (Hz)

prefijos métricos :
centi- (c), mili- (m), micro- (m)
kilo- (k), mega- (M)

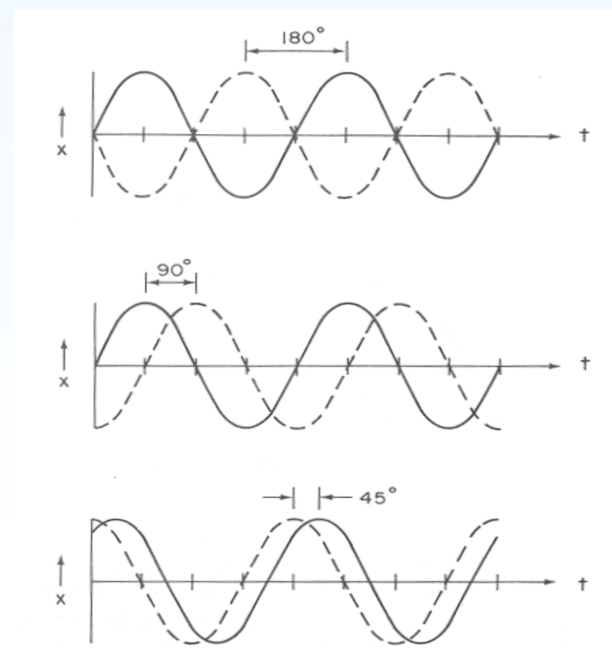
Fase y desfase (en tiempo)

- Fase – en qué parte de su ciclo se encuentra en un momento dado
  - Grados: arbitrarios
  - Radianes: relacionan un arco con el ángulo (y el radio)





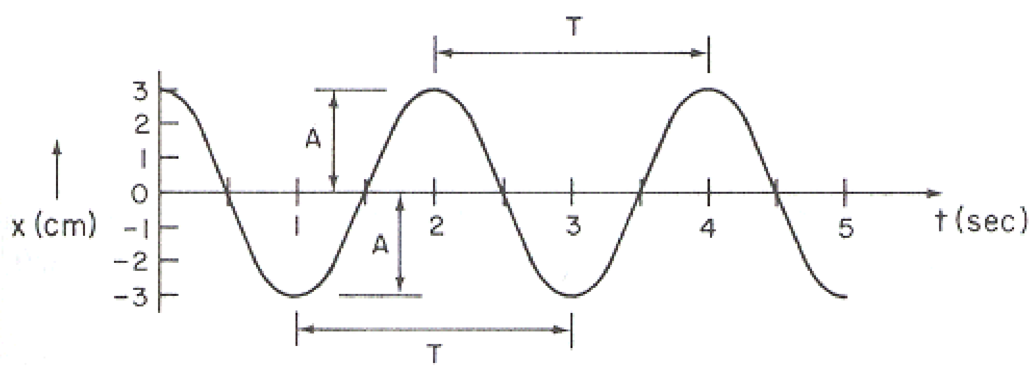
- Desfase – en qué parte de su ciclo se encuentra, comparado con otro señal



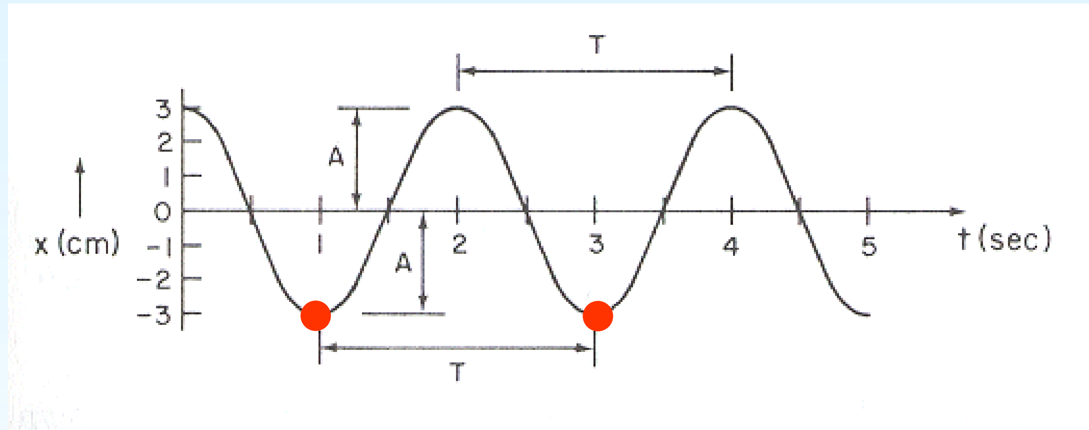
Descripción matemática MAS

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

- A = amplitud
- $\omega t + \delta$ = fase
- δ = fase inicial ($t=0$) o “constante de fase”
- ω = ??



Comportamiento
Descripción matemática



- Aumento de 2π en la fase:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \delta + 2\pi)$$

- El periodo (T) corresponde a 2π: ¿cómo?

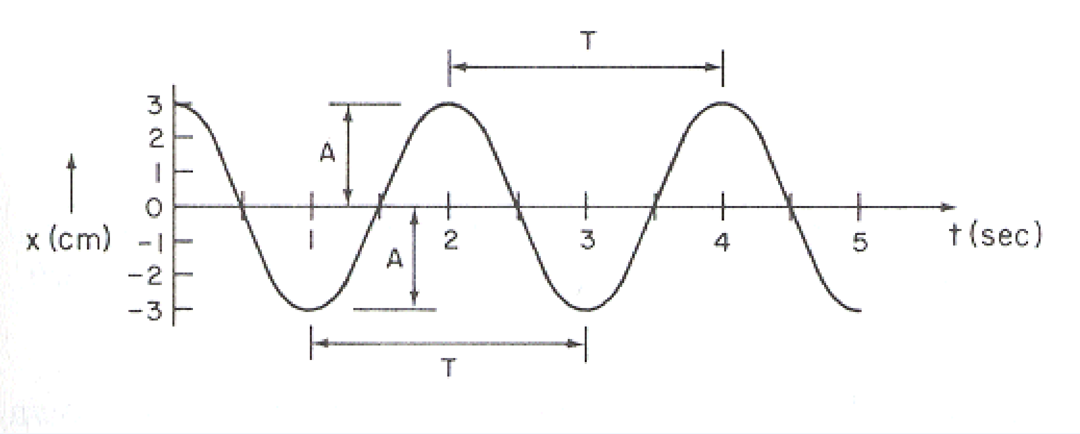
$$\omega(t + T) + \delta = \omega t + \delta + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periodo, Frecuencia, y Frecuencia Angular

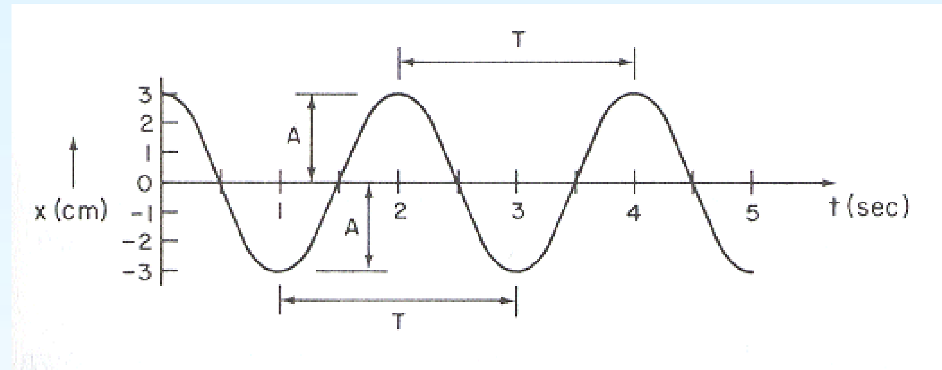
$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$



- Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ tiempo para cumplir un ciclo
- Frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ número de ciclos por unidad de tiempo (Hz)
- Frecuencia Angular $\omega = 2\pi f$ número de radianes por unidad de tiempo (rad s^{-1})

Otras observaciones

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

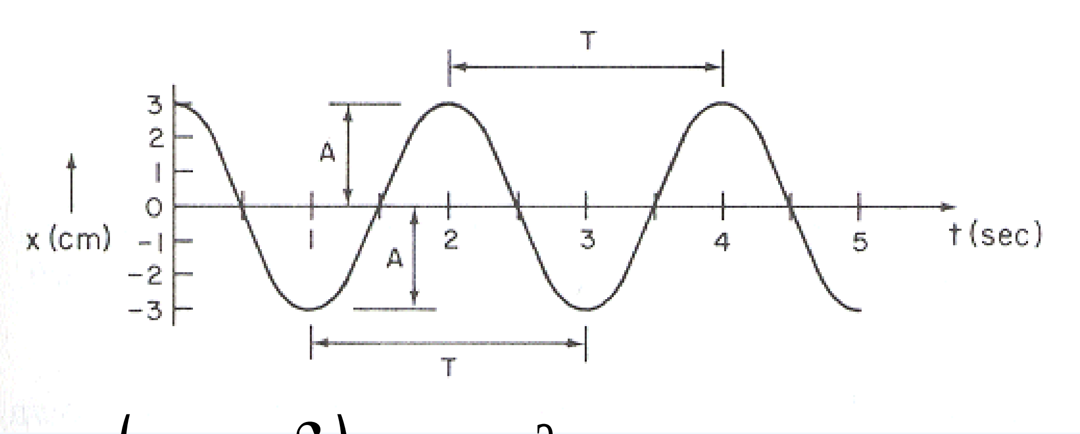


- Para t=0
  - $x_0 = A\cos(\delta)$
  - La posición inicial depende en
    - A
    - δ
- La velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \delta) = -A\omega\cos\left(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$$

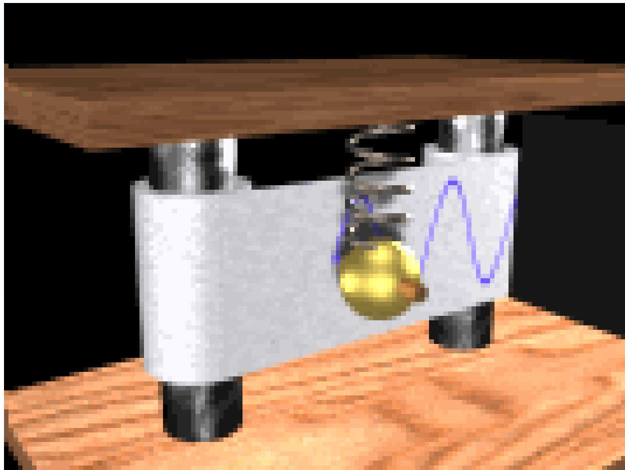
Una derivada más

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$



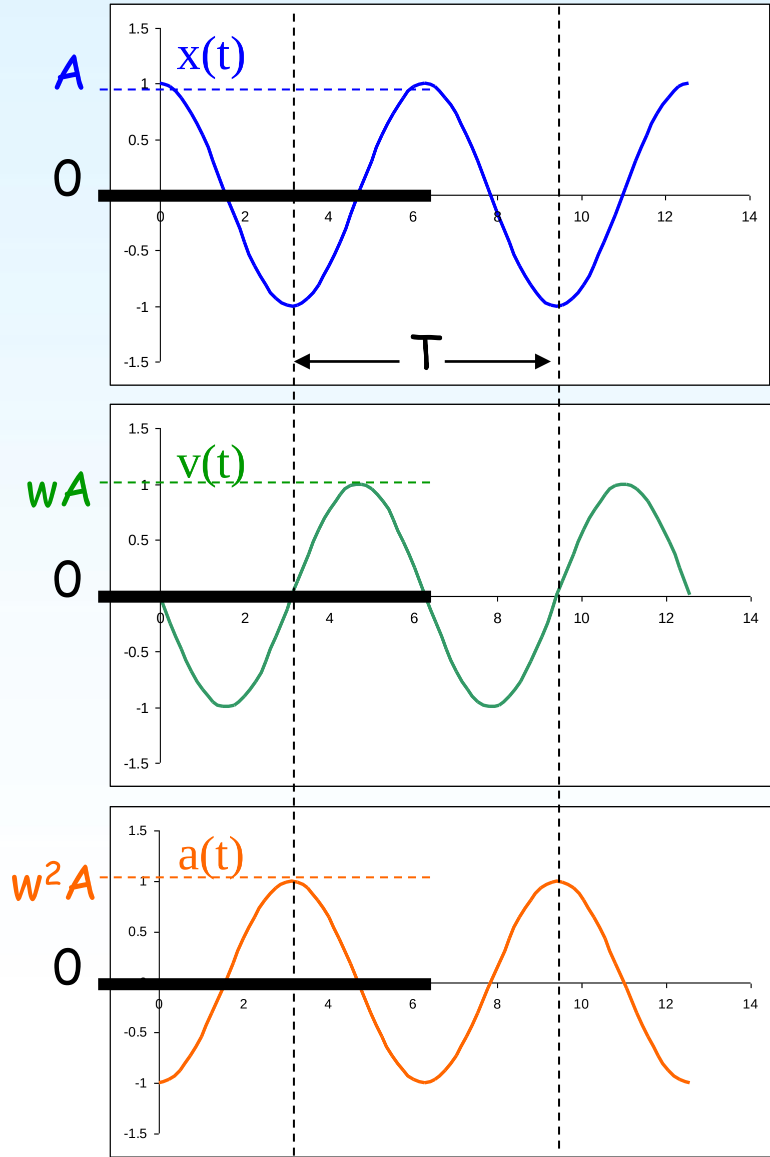
- La aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$



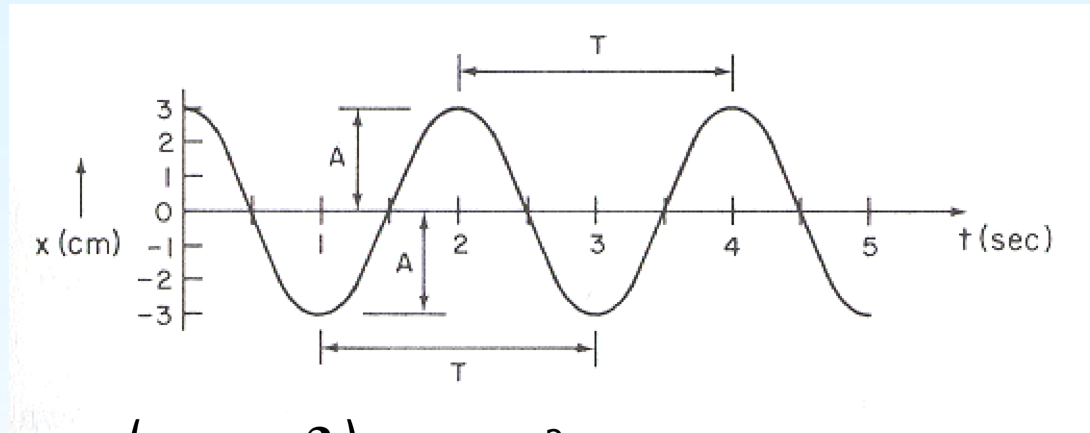
Fase y desfase

- Hay un desfase de 90° ($\pi/2$) entre x(t) y v(t)
- Hay un desfase de 90° ($\pi/2$) entre v(t) y a(t)
- Hay un desfase de 180° (π) entre x(t) y a(t)



Estamos llegando a la física… (trigonometría: no para divertirnos)

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$



- La aceleración

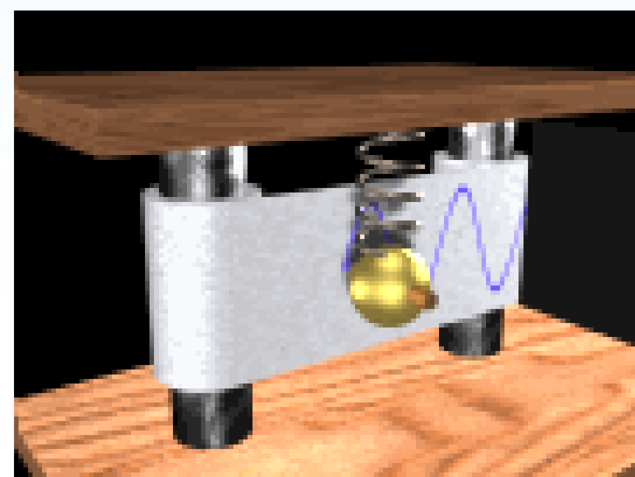
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

- (Volvemos a la física; F=ma)

$$F = -m\omega^2 x$$

Fuerza proporcional al desplazamiento

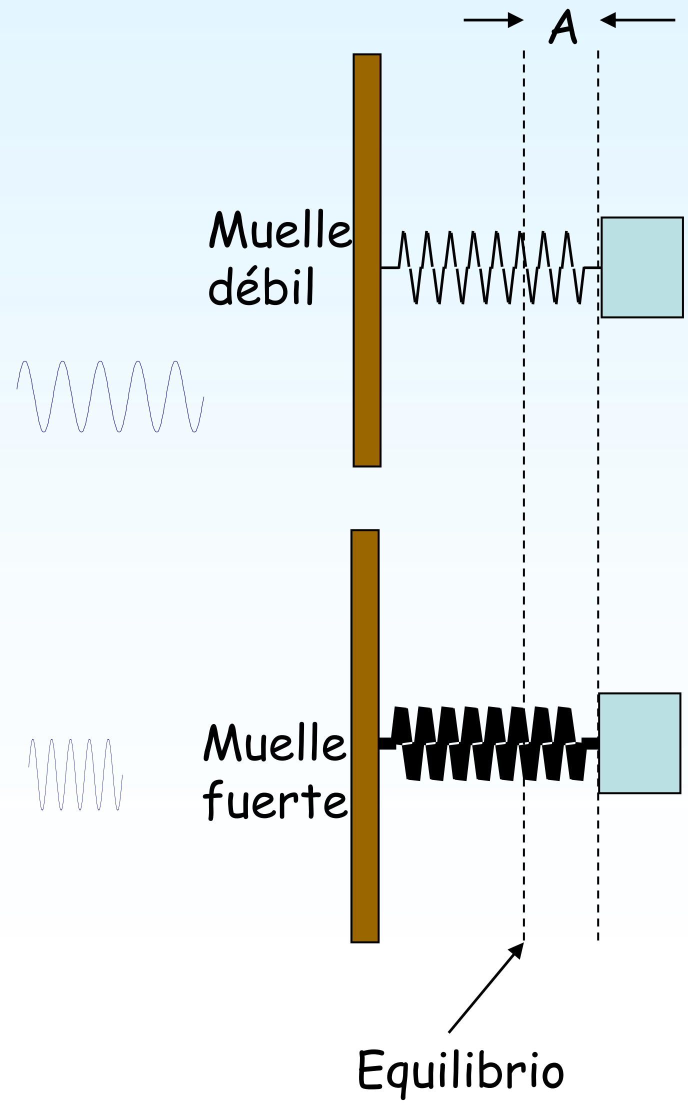
de sentido contrario



Características de un MAS

$$F = -m\omega^2 x$$

- La fuerza es proporcional al (negativo del) desplazamiento
- T (en consecuencia f y ω) es independiente de A
  - Los valores inicial x_0 y v_0 determinan la amplitud (A), mientras
  - La fuerza (del muelle, ejm.) determina las características temporales (T, f, ω)

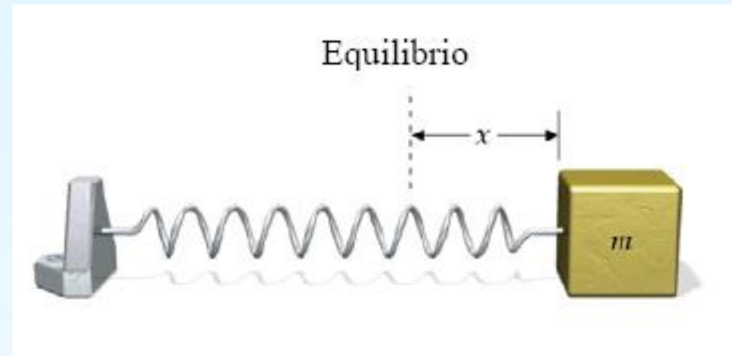


Resumen de las variables más sencillas que caracterizan un MAS

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

- A Amplitud (metros)
- $\omega t + \delta$ Fase ([radianes])
- δ Cte. De Fase ([radianes])
- ω Frecuencia Angular ([rad]/s, s-1)
- T Periodo (s)
- f Frecuencia (Hz, [oscillations]/s)

Ejemplo clásico de MAS
Masa conectada a un muelle



- Ley de Hooke:

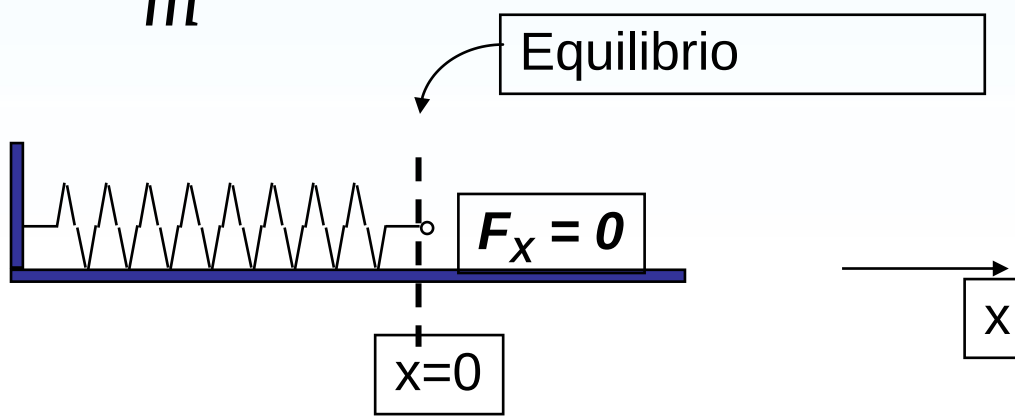
$$F = -kx$$

- Compara con el MAS:

$$F = -m\omega^2 x$$

- Estas expresiones son idénticas si:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$



Energía Potencial de un MAS
Cargando el muelle

- La fuerza del muelle es

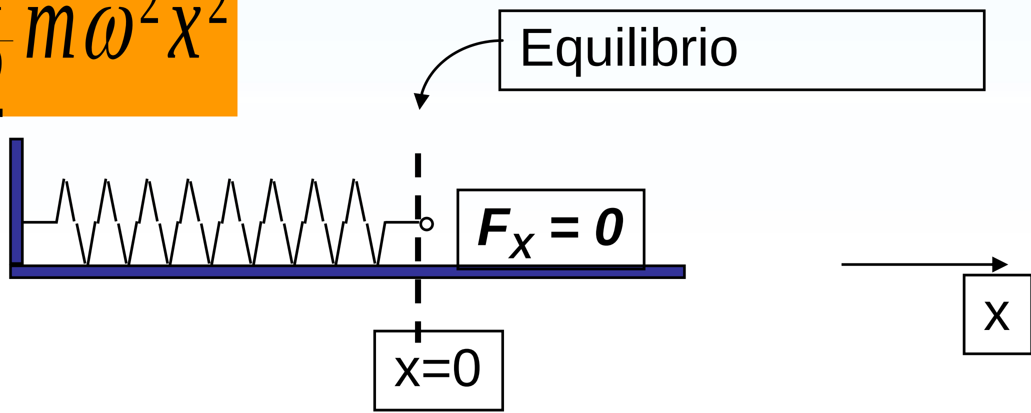
$$F = -m\omega^2 x$$

- El trabajo hecho por el muelle es

$$W(x) = \int F dx = -m\omega^2 \int x dx = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

- El muelle recibe (y almacena) energía
- Energía potencial elástica (U)

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



Energía Total (E) de un MAS: Potencial (U) y Cinética (K)

Energía potencial (U)

$$U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$x=A\cos(\omega t+\delta)$$

$$U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

Energía cinética (K)

$$K(x)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\delta)$$

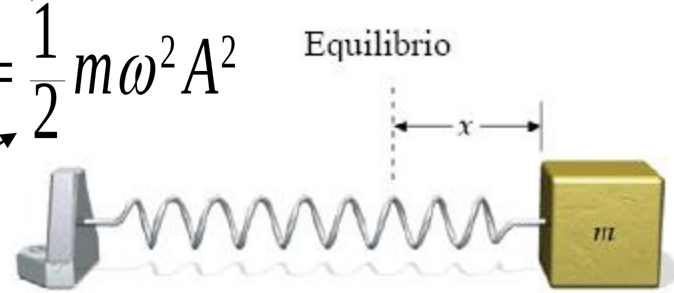
$$K(x)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\delta)$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\underline{\sin}^2(\theta)+\underline{\cos}^2(\theta)=1$$

$$E=U(x)+K(x)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

constante, $\neq f(t)$

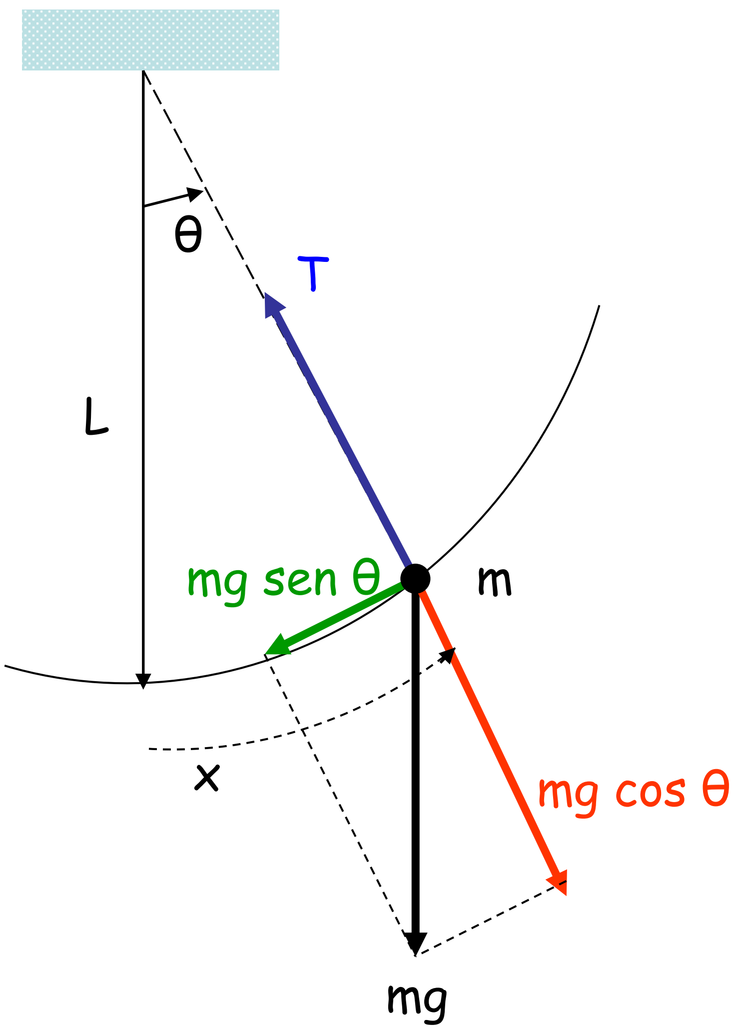


Programa

- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

Aplicaciones del MAS: El Péndulo Simple

- Consideramos el péndulo de masa (m)
  - En la dirección radial, hay balance de fuerzas
    - La tensión (T) centrípeta
    - Componente centrífugo de g
  - En la dirección tangencial, aceleración (fuerza neta)
    - F = -mg sen θ



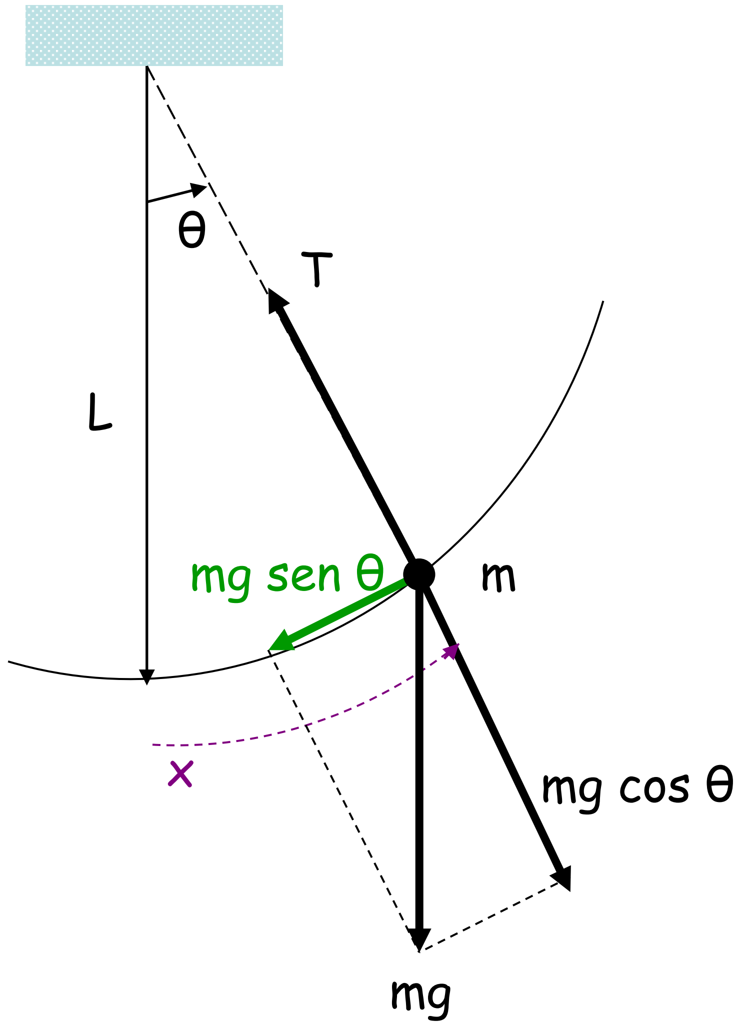
El Péndulo Simple ¿Es MAS? No exactamente

- MAS: fuerza proporcional al desplazamiento

$$F = -m\omega^2 x$$

- Examinamos, si es el caso
  - Desplazamiento (arco), x = L θ
    - Proporcional al ángulo, θ
  - Fuerza, F = -mg sen θ
    - Proporcional a sen θ
- No es MAS
  - Pero, para θ pequeño

θ (rad)	seno(θ)
0,001000000	0,001000000
0,002000000	0,001999999
0,005000000	0,004999979
0,010000000	0,009999833
0,020000000	0,019998667
0,050000000	0,049979169
0,100000000	0,099833417
0,200000000	0,198669331
0,500000000	0,479425539
1,000000000	0,841470985
2,000000000	0,909297427
5,000000000	-0,958924275



El Péndulo Simple ¿Es MAS? No exactamente

- MAS: fuerza proporcional al desplazamiento

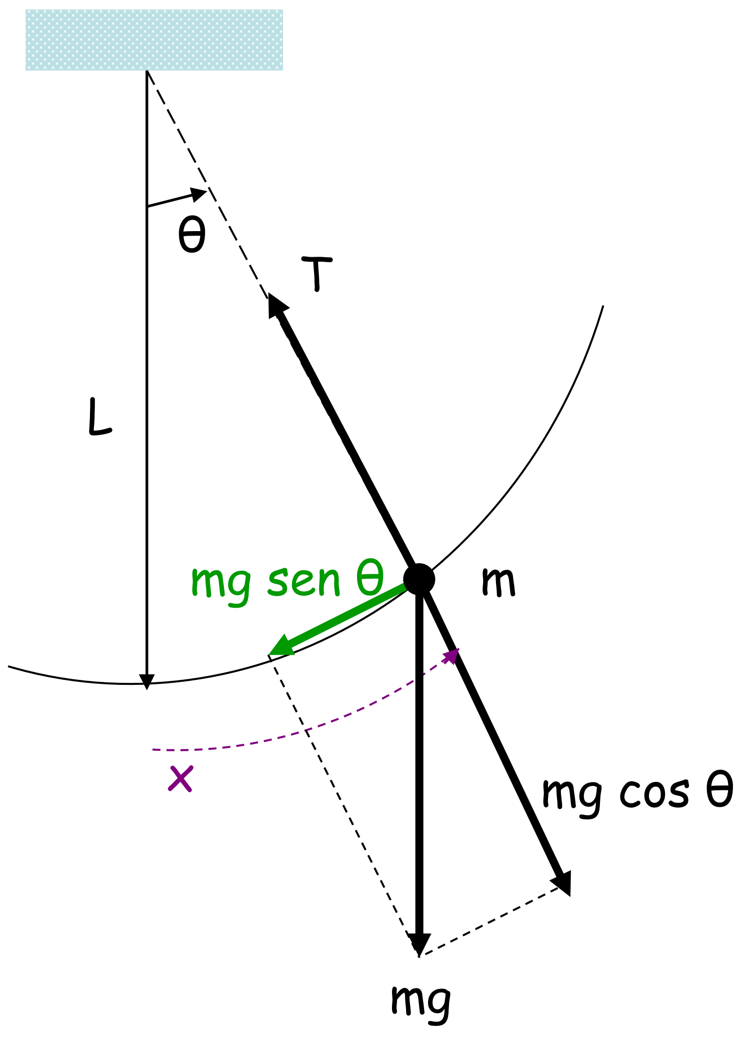
$$F = -m\omega^2 x$$

- Examinamos, si es el caso
  - Desplazamiento (arco), $x = L\,\theta$
    - Proporcional al ángulo, θ
  - Fuerza, $F = -mg \text{ sen } \theta$
    - Proporcional a sen θ

$$\boxed{\theta = \frac{x}{L}}$$

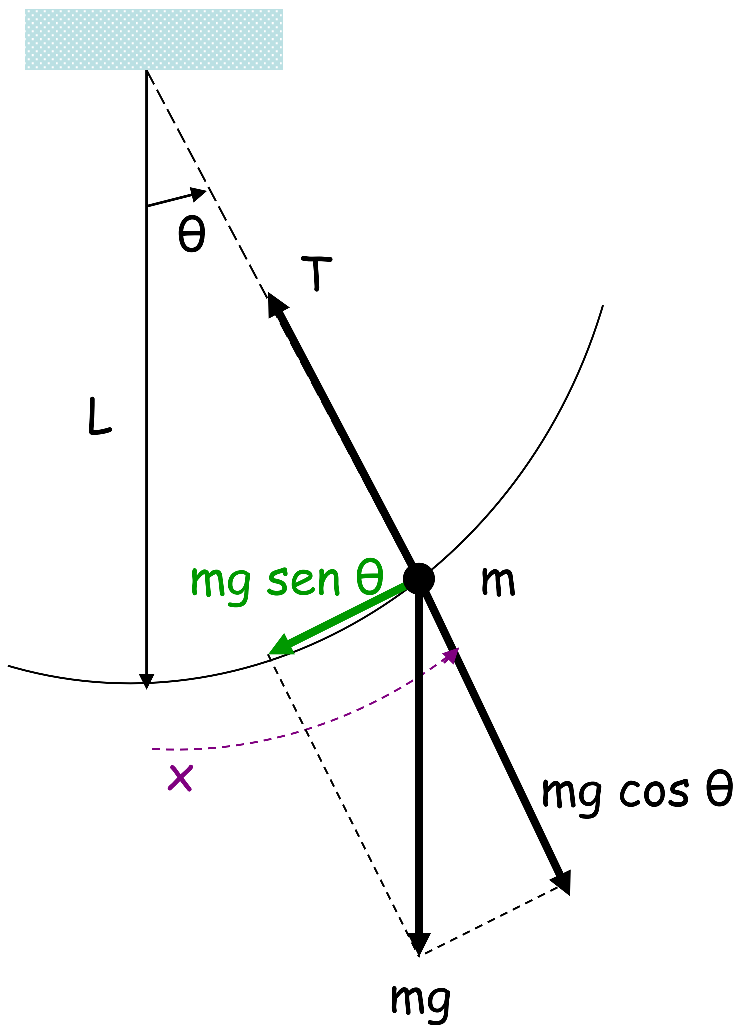
- No es MAS
  - Pero, para θ pequeño, sen θ ≈ θ
  - Para θ pequeño, $F \approx mg\theta$

$$F = -\frac{mg}{L}x$$



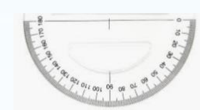
Periodo del Péndulo Simple

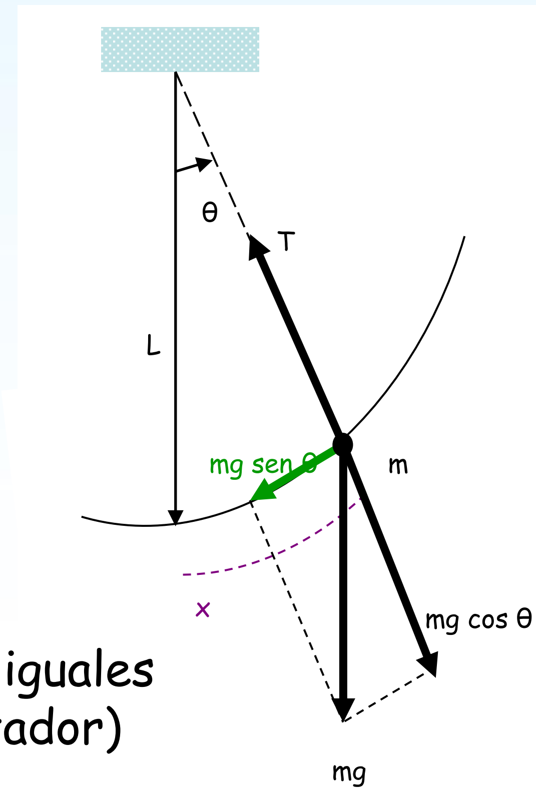
- MAS $F = -m\omega^2 x$
- Péndulo (θ pequeño) $F = -\dfrac{mg}{L}x$
- Parámetros
  - Frecuencia Angular $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$
  - Periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$
  - Frecuencia $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$



Descripción Angular

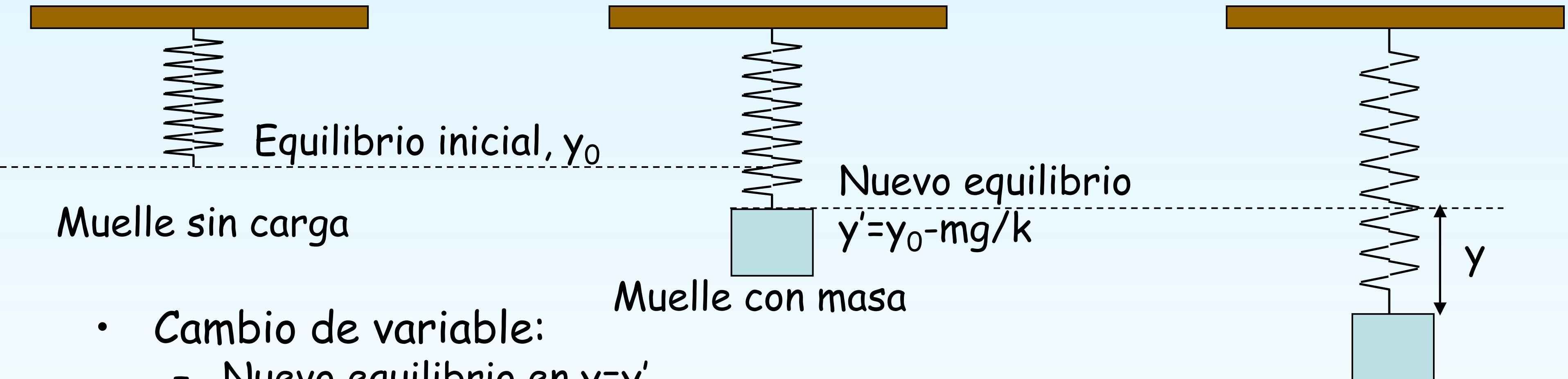
- MAS $$F = -m\omega^2 x = -m\frac{g}{L}x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
- Ecuación del movimiento $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0$$
- Recordar que x = L θ
- Como L es cte.: $$\frac{d^2x}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
- Substituyendo $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$





Son aproximadamente iguales
(medir θ con transportador)

Un ejemplo más: masa colgada de muelle vertical



- Cambio de variable:
  - Nuevo equilibrio en $y=y'$
  - Casi igual al caso horizontal, midiendo y desde y'
- Porque "casi": el papel de la gravedad
  - Energía potencial gravitacional, varía con y
  - Influye en determinar y_0 (desplaza el sistema entero hacía abajo)
  - No influye directamente en la velocidad máxima (ni ω, ni T,ni f)

Si un@ alumn@ lo demostrase energéticamente, estaría **bien** preparad@ para el examen ☺

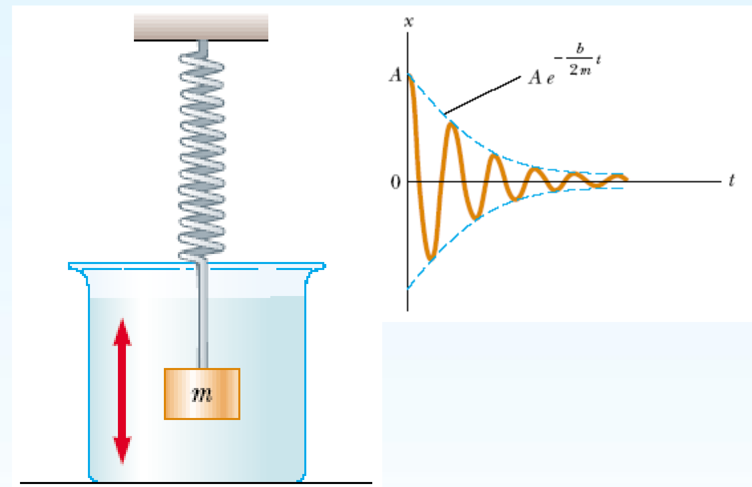
Programa

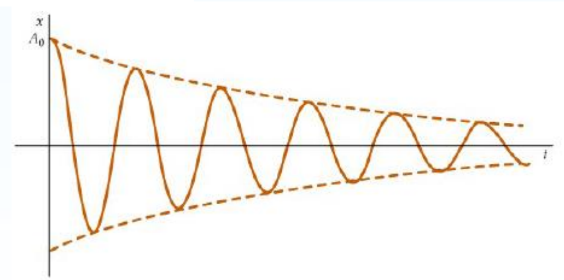
- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

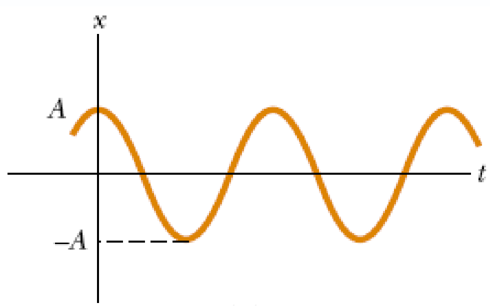
Oscilaciones amortiguadas

- En la realidad, la oscilación (muelle, péndulo) no sigue para siempre
  - La fricción convierte la energía en calor
  - “Pérdida” de energía
- Pérdida ~ amortiguamiento
  - Amortiguamiento fuerte
  - Amortiguamiento moderado
  - Amortiguamiento ligero
- ¿Entonces porque hablamos del MAS?
  - Simplicidad
  - Utilidad

  - La fricción no cambia mucho ni ω, ni T,ni f







Oscilador amortiguado

- Una aproximación sencilla para rozamiento/amortiguamiento es

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

  - Proporcional a la velocidad
  - Opone el movimiento (trabajo negativo)
  - b=cte (kg s^{-1}), determina el grado de amortiguamiento
- Entonces, con amortiguamiento, el MAS se convierte

$$ma = -m\omega^2 x - bv$$

$$\frac{1}{m}\left\{ m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0{}^2 x = 0 \right\}$$

Ecuación del movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

frecuencias (s^{-1})

γ – la de fricción

ω_0 – la del MAS sin fricción (nueva notación)

ω – la del sistema con fricción

Oscilador amortiguado

- Ecuación del movimiento: $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0$$

- Solución particular
  - Amortiguamiento pequeño
  - $\gamma < \omega_0$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

- ¿Cómo? Hacía falta adivinar la solución
- ¿No lo crees? → Confirmar que resuelve la ecuación diferencial

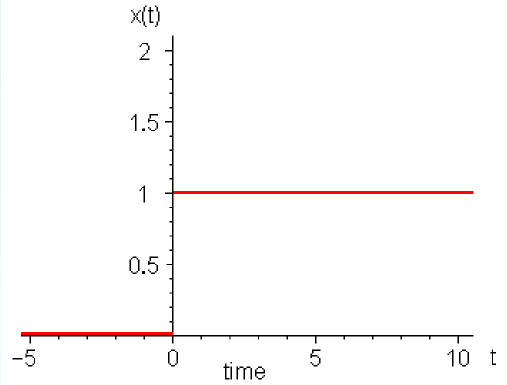
Oscilador amortiguado

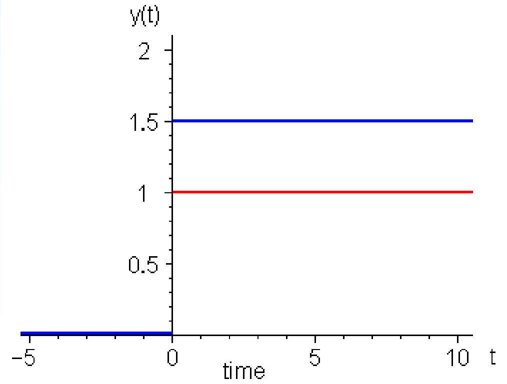
- Ecuación del movimiento: $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0$$

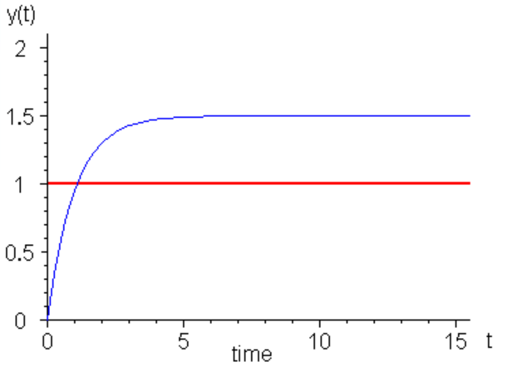
- ¿Qué pasa si $\gamma > \omega_0$ $$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$
  - Entonces, ω no es real
  - Fricción muy fuerte
    - Llega a la posición de equilibrio con poca inercia
    - No lo sobrepasa (o quizás un poco)
- Aplicaciones para diseño de instrumentos

Retos de la instrumentación
Señal/Respuesta

- Los instrumentos tiene problemas de
  - Calibración
  - Respuesta dinámica
    - Incapaces de medir cambios instantáneos

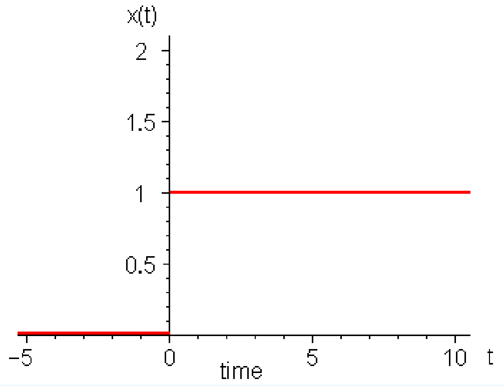


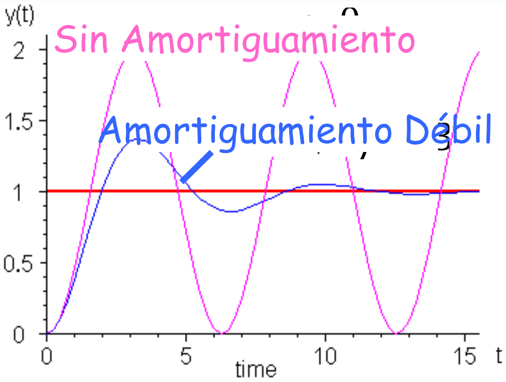


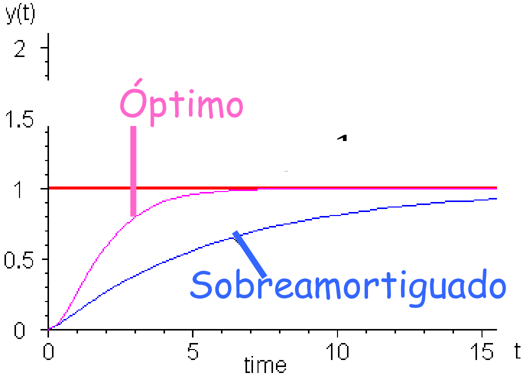


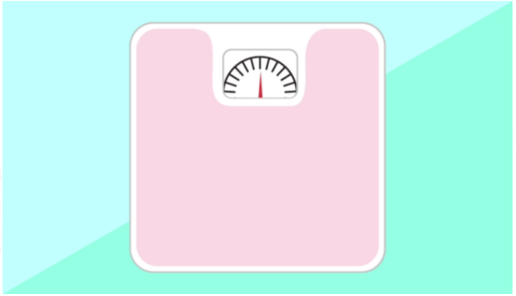
Instrumentos de orden dos

- Los instrumentos tiene problemas de
  - Calibración
  - Respuesta dinámica
    - Incapaces de medir cambios instantáneos
    - Tienen inercia
      - Falta de amortiguamiento → oscilaciones
        - » Sin amortiguamiento
        - » Amortiguamiento demasiado débil
      - Demasiado amortiguamiento → respuesta lenta
        - » Sobreamortiguamiento
    - Críticamente amortiguamiento









Amortiguamiento y energía

- "Pérdida de energía": trabajo negativo
- Potencia de la fuerza de fricción

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\,dx}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = -bv^2$$

- Otra manera de ver cómo se disipa energía y potencia
  - Recordándonos que la energía total es $\left(E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)$
  - Y la ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -bv - kx \quad \Longrightarrow \quad -bv = m\frac{dv}{dt} + kx$$

  - Perdida de potencia : $\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = v\left(m\frac{dv}{dt} + kx\right) = -bv^2$

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

Potencia cedida, como flujo de calor al medio

Programa

- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

Oscilaciones Forzadas

- Un sistema suele vibrar a una frecuencia natural
  - Ejm. Muelle: $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Notación – frecuencia del MAS sin fuerza externa

- Ahora, consideramos la acción de una fuerza externa (F_{ext})
  - Si actúa en el sentido del movimiento → aumenta la energía mecánica
  - Si lo hace en sentido contrario, absorbe energía (trabajo negativo)
  - Para F_{ext} cte. (ejm., atracción gravitacional)
    - A veces opone y veces aumenta la oscilación
    - Trabajo neto realizado en un ciclo = 0
    - Sólo varía la posición de equilibrio del sistema
- Una fuerza interesante es la que varía sinusoidalmente

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$$

frecuencia angular de la fuerza externa

Oscilaciones Forzadas

- La suma de fuerzas es:

$$\sum F = -m\omega_0{}^2 x - bv + F_0\cos(\omega t) = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0{}^2 x = F_0\cos(\omega t)$$

- Cuya solución (simplificada*) es

$$x(t) = A_0 sen(\omega t + \varphi_0)$$

  - con

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}$$

*Despreciamos un término transitorio, de poca duración

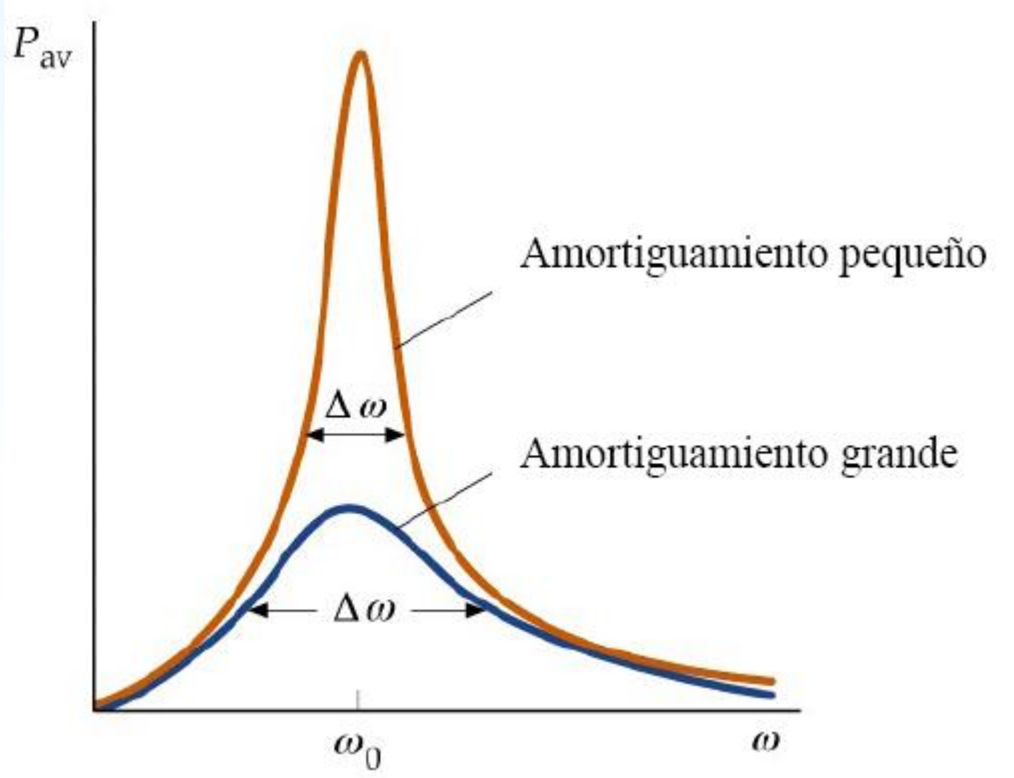
Oscilación Armónica Forzada

$$x(t) = A_0 sen(\omega t + \varphi_0)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}$$

- La amplitud A_0 depende mucho de la diferencia de frecuencias (natural y aplicada)
- Con $\omega = \omega_0$, tenemos "resonancia"
  - F_{ext} y velocidad están en fase (niño columpiando)
  - La amplitud queda limitada por el amortiguamiento (si acaso)



¿Porqué resonancia?: Examinar la potencia

$$x(t) = A_0 sen(\omega t + \varphi_0)$$

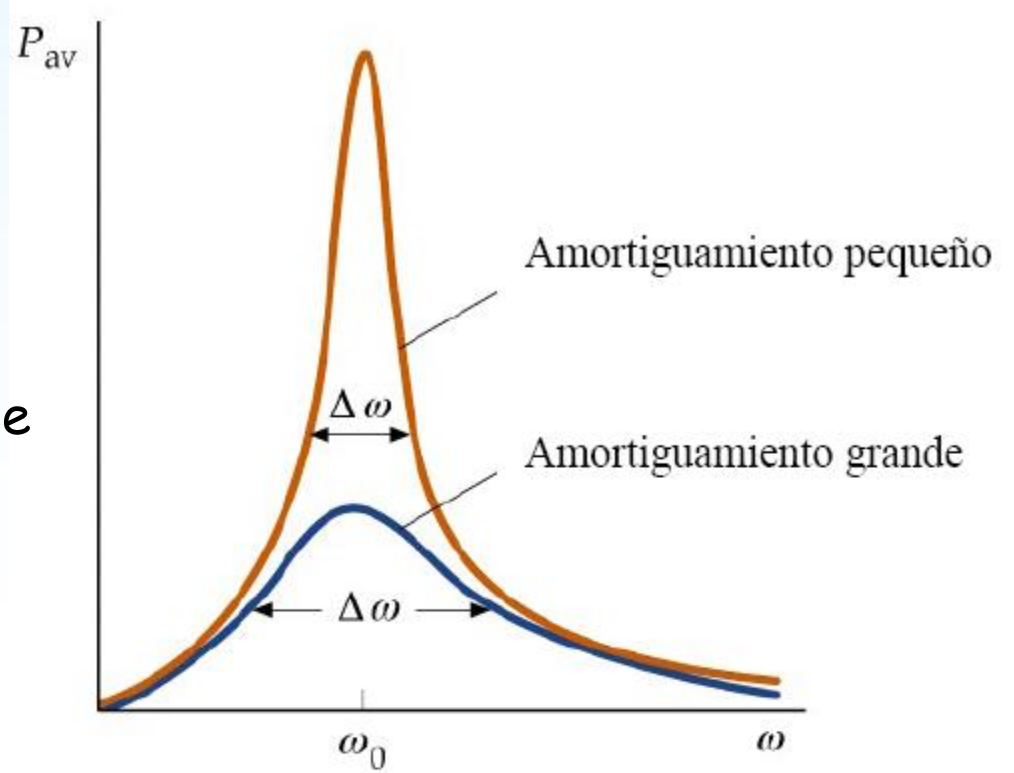
$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Potencia,

$$P = Fv = F\,\frac{dx}{dt}$$

$$= F_0 \cos(\omega t + \varphi_0) A_0 \omega sen(\omega t + \varphi_0)$$

"resonancia" -F_{ext} y velocidad en fase



Importancia de la resonancia

- Tacoma Narrows Bridge (Washington, EEUU) 7 noviembre 1940
  - Resonancia entre
    - Las ráfagas de viento
    - (Una de las) frecuencia(s) natural(es) del puente
  - Consecuencias para la ingeniería
    - Para sobredimensionar las edificaciones
    - No basta pensar solo en la fuerza del viento
    - La amplitud de la oscilación armónica forzada
- (Colapsó)
- Otros ejemplos:
  - Empujar un niño en un columpio
  - Coche en una cárcava – "balancear"

Programa

- **V. OSCILACIONES. (3h)**
- Introducción. Movimiento armónico simple. Energía del oscilador armónico. Aplicaciones del movimiento armónico. Péndulos. Movimiento en las proximidades del equilibrio. Oscilaciones amortiguadas. Oscilaciones forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.

Superposición de MAS

- Dos MAS en la misma dirección

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

- El desplazamiento total es:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

- **Dos casos**
  - Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$
    - Entonces es un MAS $x = A\cos(\omega t + \delta)$ (Demostrar: ID trig.)
  - Si $\omega_1 \neq \omega_2$
    - No es un MAS

Otras combinaciones de dos movimientos armónicos simples

- Considerar una partícula con dos MAS en direcciones ortogonales

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \delta_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \delta_y)$$

- Si las frecuencias son distintas, el movimiento es **muy** complejo, y requiere un estudio especial
- Para frecuencias iguales: $\omega_x = \omega_y = \omega$

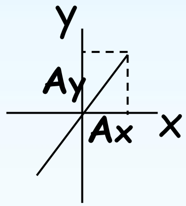
Combinaciones de dos MAS

- Dos MAS en direcciones ortogonales

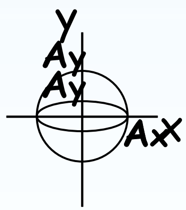
$$x = A_x \cos(\omega_x t + \delta_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega_y t + \delta_y)$$

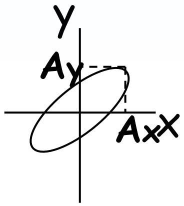
$$\omega_x = \omega_y = \omega$$

  - La constante de fase δ adquiere importancia
    - Si $\delta_x = \delta_y = \delta$
    - Entonces $$y = A_y \cos(\omega t + \delta) = \frac{A_y}{A_x} x = kx$$

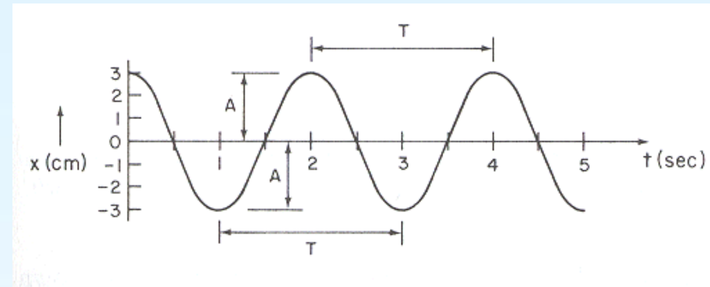


    - Si $\delta_y - \delta_x = \pi/2$, podemos considerar dos casos
      - $A_x = A_y \rightarrow$ el movimiento es un círculo
      - $A_x \neq A_y \rightarrow$ el movimiento es un elipse
    - Si $\delta_y - \delta_x \neq 0 \neq \pi/2 \neq \pi$, también es un elipse

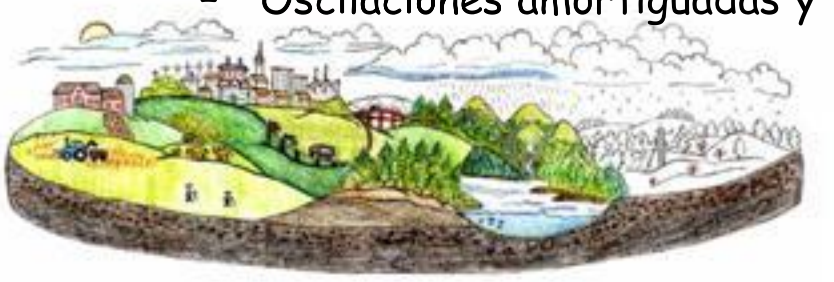




Conceptos/Ecuaciones a Dominar



- Oscilación $x = A\cos(\omega t + \delta)$
  - Amplitud, A; Periodo, $T = \frac{2\pi}{\omega}$
  - Frecuencia Angular, ω; Fase, $\omega t + \delta$
  - Fase inicial ("cte"), δ; Frecuencia, $f = \frac{1}{T}$
- MAS
  - Fuerza y desplazamiento $F = -m\omega^2 x$
  - Velocidad $v = -A\omega \sin(wt + \delta)$
  - Aceleración $a = -\omega^2 x$
  - Energía potencial $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
  - Energía cinética $K(x) = \frac{1}{2}mv^2$
  - MAS aproximado; péndulo $F = -\frac{mg}{L}x$
  - Oscilaciones amortiguadas y forzadas. Resonancia. Superposición de M.A.S.



Fin