Bases Físicas del Medio Ambiente

Dinámica de Fluidos

Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.

Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.

La hidrodinámica

- Movimiento (flujo) de los fluidos. Clases diferentes de interés (ordenados hacía simplicidad) SIMPLIFICACIONES!
  - Turbulento: caracterizado por regiones con remolinos (caótico)
  - Laminar: Capas del fluido fluyen paralelamente sin mezclarse
    - Estacionario
      - Velocidad no varía con tiempo, $v = v(x,y,z)$.
      - Líneas de corriente = trayectorias de partículas
    - Uniforme: velocidad en cada instante es igual en todos los puntos, $v = v(t)$
  - No viscoso: si se desprecia la viscosidad (fricción interna del fluido).
- Empezamos con lo más sencillo: los fluidos ideales, flujos
  - Laminares
  - Incompresibles (densidad independiente de posición y tiempo)
  - No viscosos
  - Irrotacionales (falta de inercia angular alrededor de cualquier punto)

La hidrodinámica

- Movimiento (flujo) de los fluidos. Clases diferentes de interés (ordenados hacía simplicidad) SIMPLIFICACIONES!
  - Turbulento: caracterizado por regiones con remolinos (caótico)
  - Laminar: Capas del fluido fluyen paralelamente sin mezclarse
    - Estacionario
      - Velocidad no varía con tiempo, $v = v(x,y,z)$.
      - Líneas de corriente = trayectorias de partículas
    - Uniforme: velocidad en cada instante es igual en todos los puntos, $v = v(t)$
  - No viscoso: si se desprecia la viscosidad (fricción interna del fluido).
- Empezamos con lo más sencillo: los fluidos ideales, flujos
  - Laminares
  - Incompresibles (densidad independiente de posición y tiempo)
  - No viscosos
  - Irrotacionales (falta de inercia angular alrededor de cualquier punto)

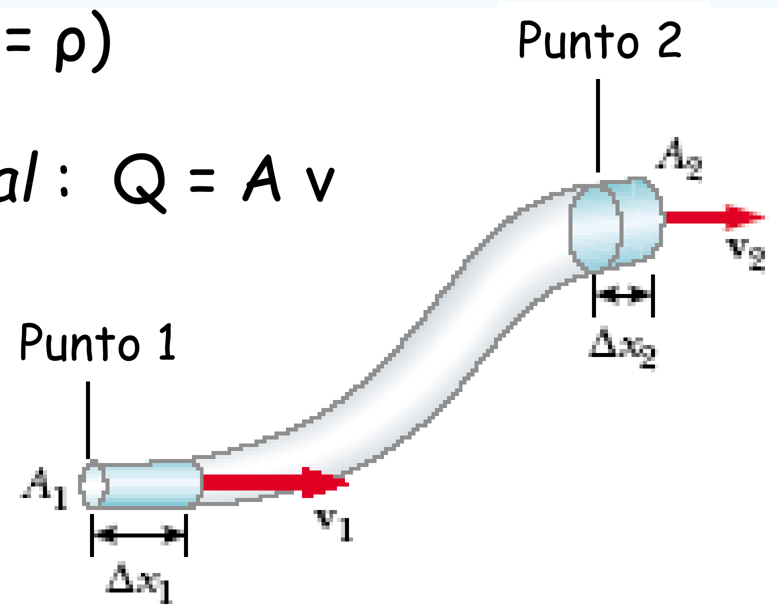
Ecuación de continuidad

- Flujo de un fluido ideal en un tubo *con ensanchamiento*
- Empezamos en el punto 1 y un intervalo de tiempo Δt
  - Longitud del bloque de fluido que pasa la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
  - Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$
  - Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Principio físico: la masa se conserva
  - Punto 1: $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
  - Punto 2: $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$
- Para fluido incompresibles ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$)

$$A_2 v_2 = A_1 v_1$$

- Definimos como constante el *caudal* : $Q = A\,v$

(unidades: $m^3\,s^{-1}$)



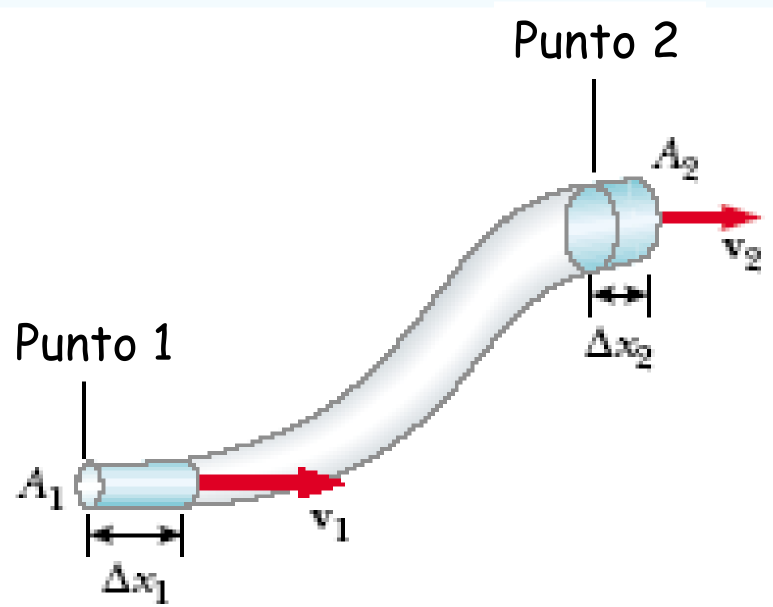
Ejemplos Comunes

- Aceleración de agua en caída libre
  - Aumenta la velocidad
  - Disminuye el área del flujo
  - Caudal, Av = cte.

Ecuación de continuidad (Fluido compresible)

- Flujo compresible (ejm. Gases)
  - El término caudal no tiene sentido
  - Pero la masa aún se conserva
- En el punto 1
  - Anchura del bloque de fluido que pasa la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
  - Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1\, \Delta x_1 = A_1\, v_1 \Delta t$
  - Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1\, V_1 = \rho_1\, A_1\, v_1 \Delta t$
- Conservación de masa
  - Punto 1: $m_1 = \rho_1\, A_1\, v_1 \Delta t$
  - Punto 2: $m_2 = \rho_2\, A_2\, v_2 \Delta t$

$$\rho_2\, A_2\, v_2 = \rho_1\, A_1\, v_1$$

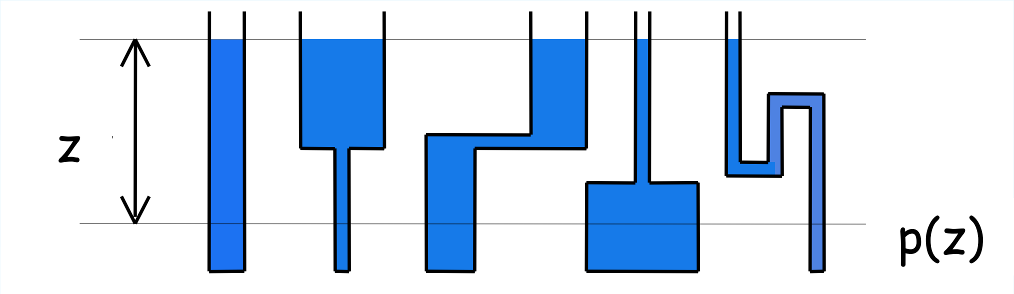


Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.

Presión estática
Presión Dinámica

- La presión hidrostática solo depende en z



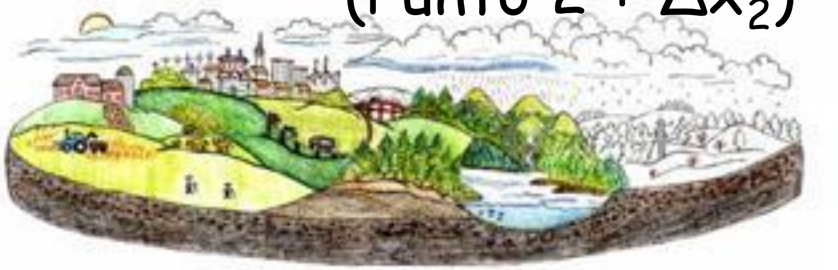
- Para los fluidos en movimiento, hay otro factor que influye en la presión ($p_A < p_B$)

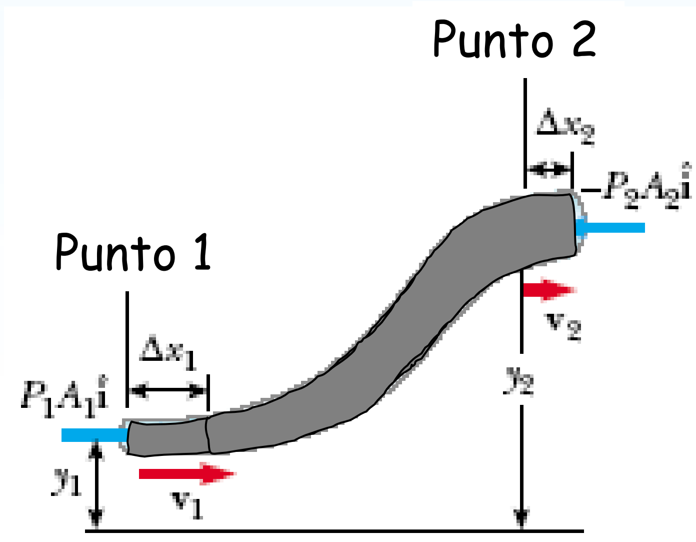
Daniel Bernoulli
Físico Suizo (1700-1782)

- Publicación famosa: Hydrodynamica (1738)
  - Demostró que la presión en un fluido disminuye cuando acelera (aumenta cuando decelera)
  - Derivación:

Principio de Bernoulli Derivación

- Consideramos
  - Un volumen (masa) de fluido ideal
  - En un tubo (cuyo diámetro aumenta)
- La masa baja consideración se halla
  - Al principio entre Punto 1 y Punto 2
  - Despues de Δt entre
    - (Punto 1 + Δx_1) y
    - (Punto 2 + Δx_2)



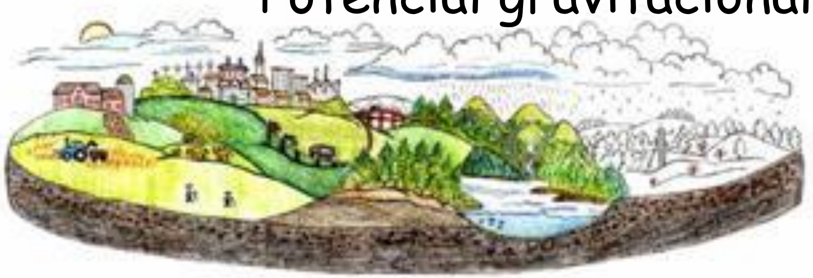


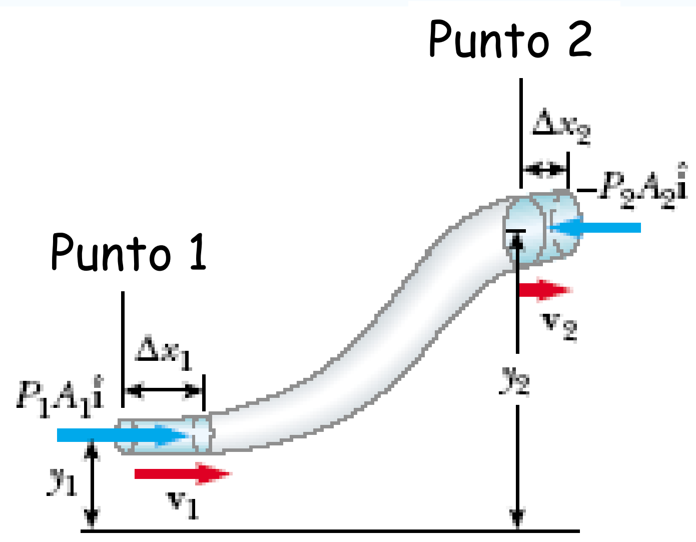
Principio de Bernoulli Derivación

- Consideramos el trabajo de las fuerzas actuando
  - Desde la izquierda tenemos
    - La fuerza $F_1 = P_1 A_1$
    - Ejerce un trabajo $W = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$
  - Y desde la derecha
    - La fuerza $F_2 = - P_2 A_2$
    - Ejerce un trabajo $W = F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 V$

(la fuerza opone el movimiento)

- Trabajo neta, $W = (P_1 - P_2) V$
- Sirve para aumentar la energía
  - Cinética (ΔK); y/ó
  - Potencial gravitacional (ΔU)



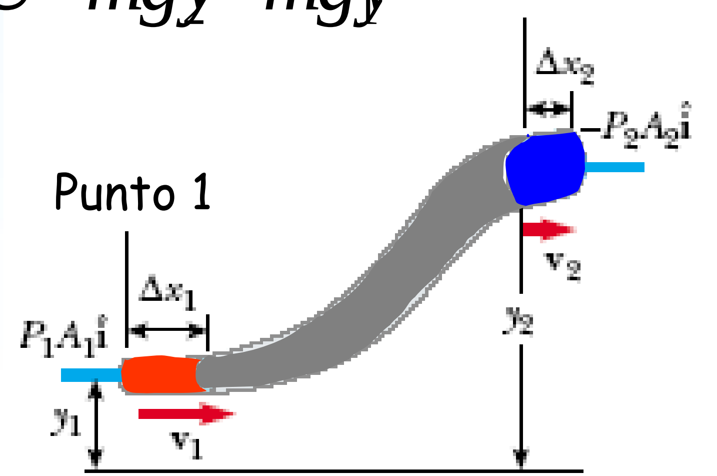


Principio de Bernoulli
Los cambios de energía

- Simplificación: (Estacionario) líneas de corriente
  - La energía de la porción gris es constante
    - ΔK se debe a la diferencia entre
      - La parte con velocidad v_1, y
      - La parte con velocidad v_2
    - De igual manera, ΔU se debe a la diferencia de altura entre
      - La parte con altura y_1, y
      - La parte con altura y_2

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Delta U = mgy_2 - mgy_1$$



Principio de Bernoulli
Los cambios de energía

- El trabajo neta sirve para cambiar la energía

W = ΔK + ΔU

$$(P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1 \qquad (\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}})$$

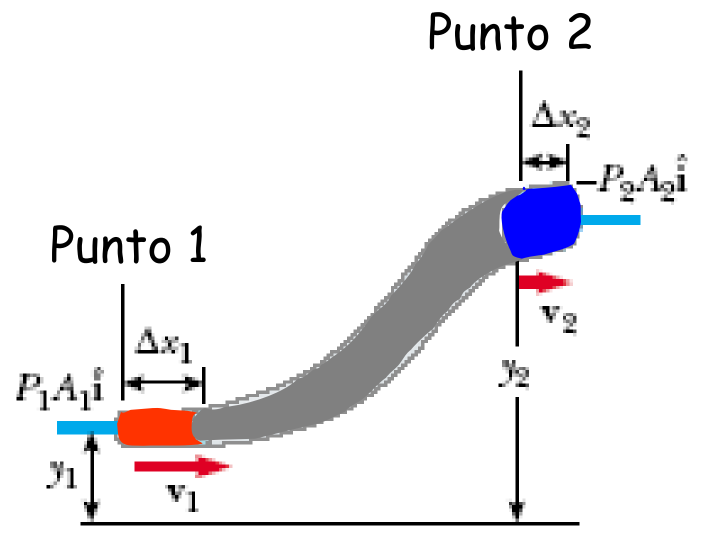
Si ahora dividimos por V y reconocemos que ρ = m/V tenemos

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1 \qquad (\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}})$$

y con un poco de álgebra

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte}$$



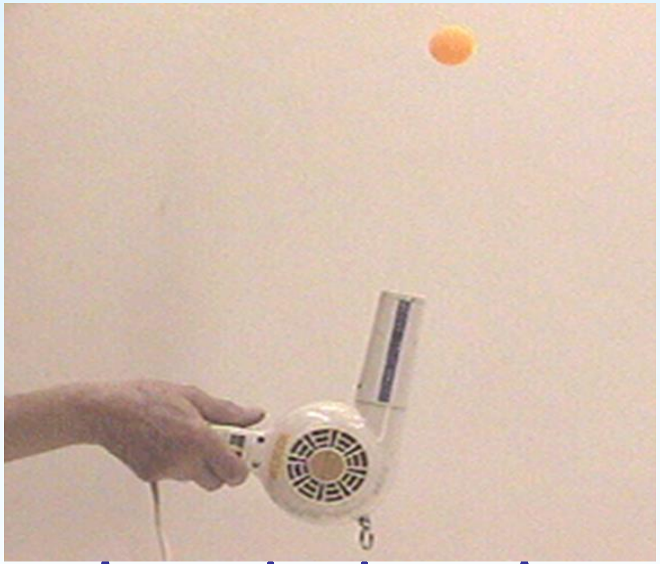
Principio de Bernoulli
Ejemplo

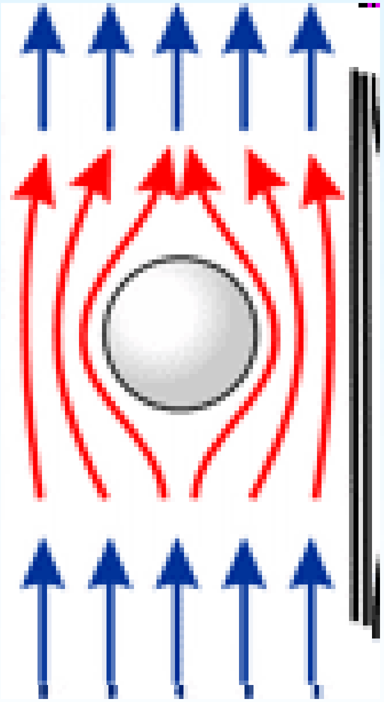
- La constructora de tu nuevo baño ahorra dinero comprando un tubo de 1 cm (diámetro) en vez de 2 cm como en el resto de la casa

- ¿Dónde hay más presión?
  - A) En el tubo de 1cm?
  - B) En el tubo de 2cm?
  - C) Son iguales?

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2 = cte$$

Principio de Bernoulli
Cambios: velocidad y presión





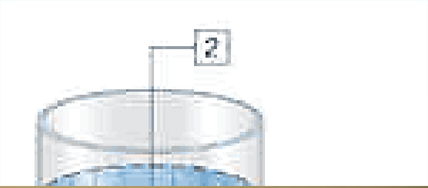
- Baja velocidad y alta presión
- Alta velocidad y baja presión

Principio de Bernoulli
Aplicación Clásica

Antes: aplicamos la ecuación hidrostática para determinar la presión del agua en la casa

Ahora: vamos a ver lo que pasa cuando el agua fluye:

Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \quad \rho g y_2$



Hipótesis para simplificar

Presión atmosférica

$v_1 >> v_2$

$$\frac{1}{2}v_1^2 = g(y_2 - y_1)$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

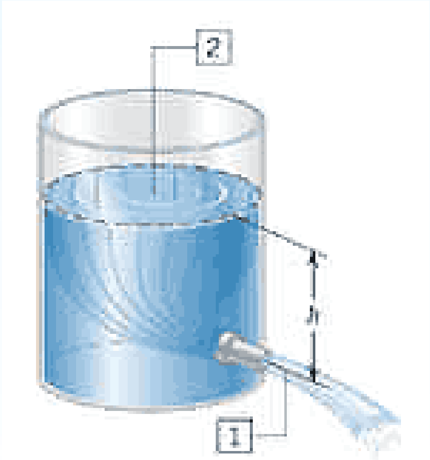
Velocidad ≠ f

(¿Caudal?)

Principio de Bernoulli
Aplicación Clásica

Antes: aplicamos la ecuación hidrostática para determinar la presión del agua en la casa

Ahora: vamos a ver lo que pasa cuando el agua fluye:



Bernoulli: $$\cancel{P_1}+\frac{1}{2}\cancel{\rho}v_1^2+\cancel{\rho}gy_1=\cancel{P_2}+\frac{1}{2}\cancel{\rho}\cancel{v_2^2}+\cancel{\rho}gy_2$$

Hipótesis para simplificar

Presión atmosférica

$v_1 >> v_2$

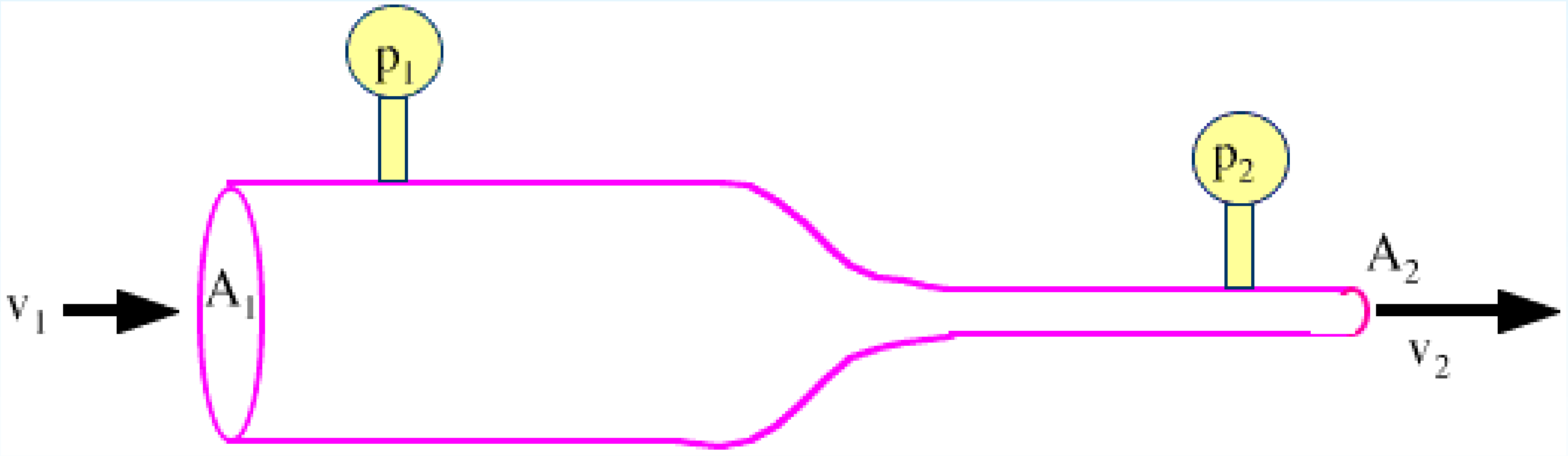
$$\frac{1}{2}v_1^2=g(y_2-y_1)$$

$$\boxed{v_1=\sqrt{2gh}}$$

Teorema de Torricelli

Velocidad ≠ f(tamaño apertura)
(¿Caudal?)

Principio de Bernoulli
El metro de Venturi



Determinar la velocidad en un tubo, por mediciones de presión

Principio de Bernoulli
¿Cómo funciona el metro de Venturi?

Cauda

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{A_2}{A_1}$$

Bernoulli: $p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$

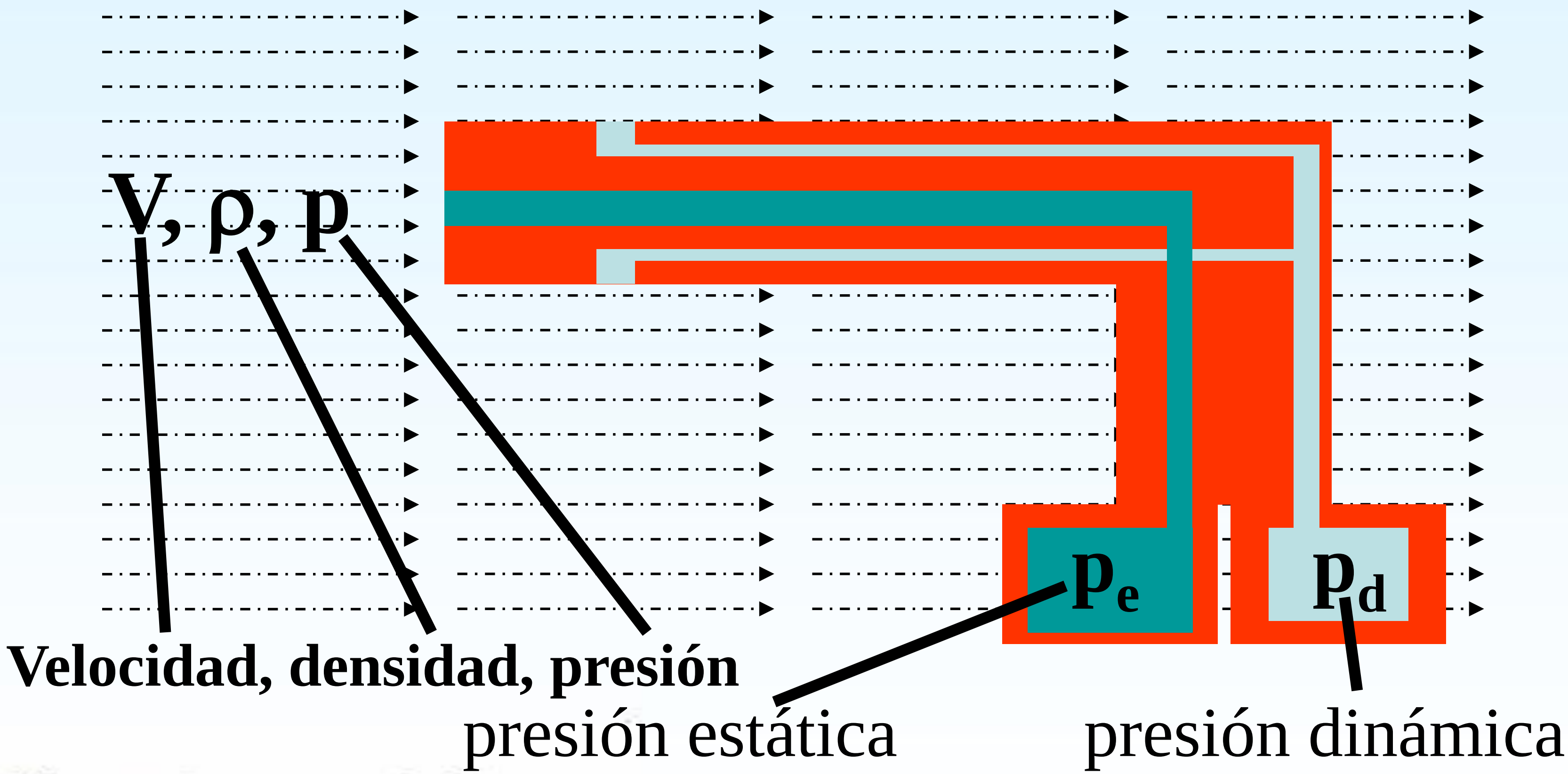
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2-\frac{1}{2}\rho v_2^2=p_2-p_1$$

$$v_1^2\left[1-\frac{v_2^2}{v_1^2}\right]=\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}$$

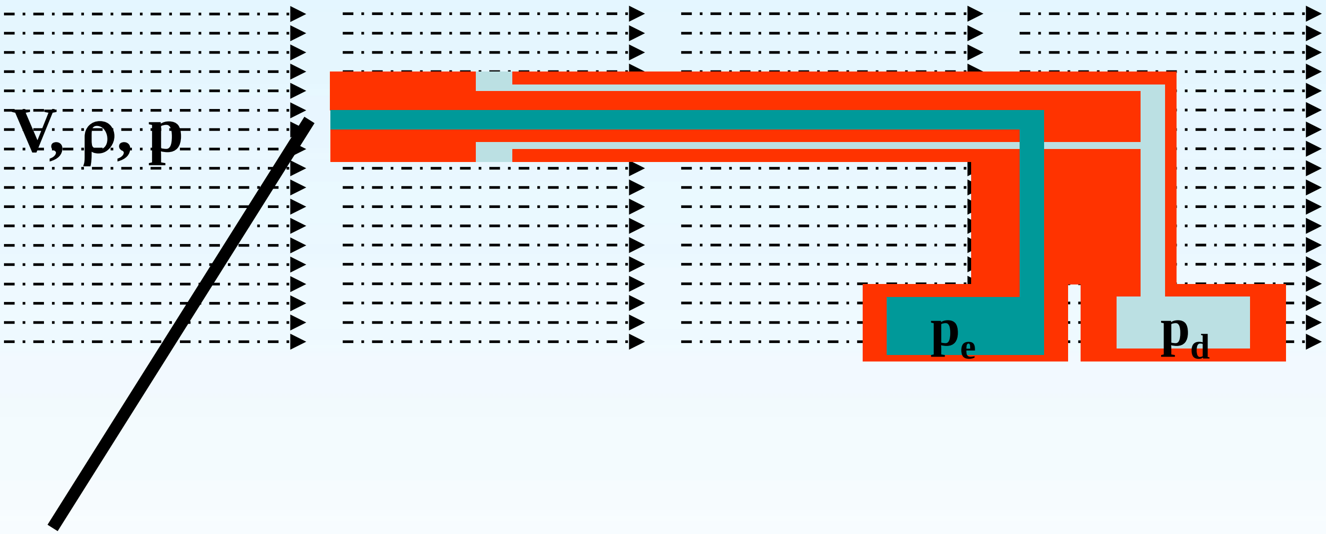
$$v_1^2\left[1-\frac{A_1^2}{A_2^2}\right]=\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho\left[1-\frac{A_1^2}{A_2^2}\right]}}$$

Principio de Bernoulli
Henry Pitot (1695-1771)



Principio de Bernoulli
El Tubo de Pitot



Punto de estagnación

$$p_e = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_d$$

$$V = \left(\frac{2}{\rho}\left[p_e - p_d\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

Principio de Bernoulli
La cavitación

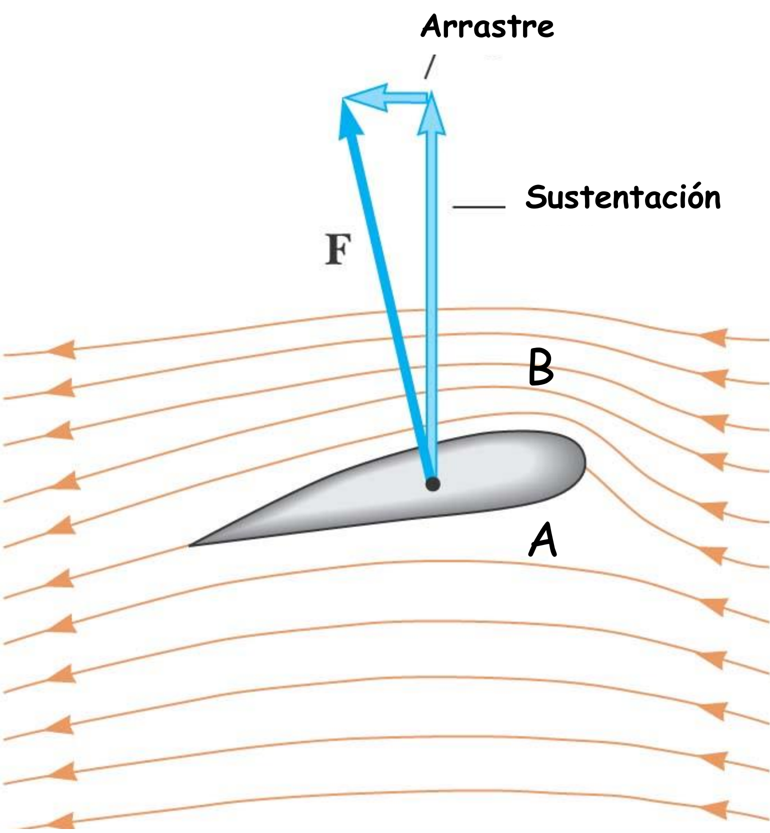
$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$


http://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation

- En un fluido de alta velocidad, puede bajar tanto la presión que el líquido se vaporice (Lord Rayleigh; 1842-1919)
- Problemas
  - Ruido
  - Vibraciones
  - Perdida de rendimiento
  - Daño a los elementos

Principio de Bernoulli
Vuelo de un avión

- Las líneas de corriente alrededor de una ala de avión en movimiento
  - La densidad de líneas refleja la velocidad
  - Bernoulli: alta velocidad → baja presión
- La sustentación
  - Debido al gradiente de velocidad ($v_A < v_B$)
  - Hay un gradiente de presión ($p_A > p_B$)
  - Una fuerza neta hacía arriba
  - Depende de
    - La velocidad del avión (relativo al aire)
    - La ala (superficie, curvatura, ángulo)



Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite Flujo externo.. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.

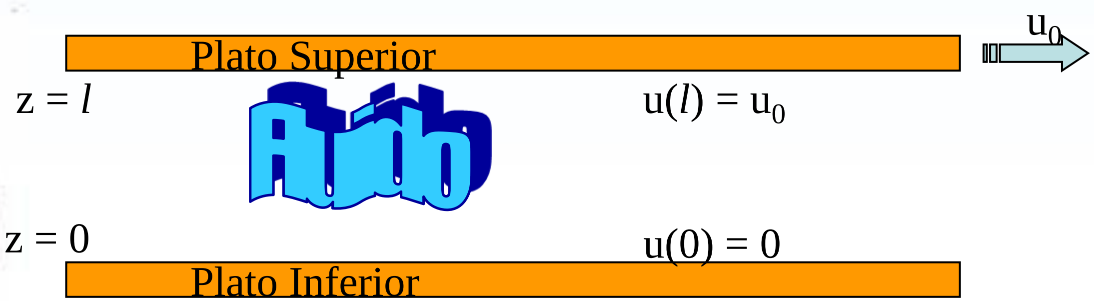
“Fluidos Reales“

- Los fluidos *reales* (frente a ideales)
  - Resisten al deslizamiento entre capas
  - Fricción interna – “viscosidad”
- La viscosidad es más importante para ciertos fluidos
  - Comparar la caida de un ladrillo por 2m
  - En el aire / en el agua / en la miel
- La importancia de la viscosidad
  - Depende del fluido, pero también
  - Depende del flujo

http://home.alltel.net/nelpi/newton.jpg

Viscosidad (molecular)

- Consideramos dos platos (poco) separados por un fluido
  - El plato superior se mueve con velocidad u_0
  - El plato inferior no (**fijo**; u=0)
- Observaciones empíricas
  - En ausencia de otras fuerzas, el plato superior decelera
  - La deceleración depende en
    - La diferencia de las velocidades (u_0 - 0= u_0)
    - La distancia (l) de separación
    - La superficie (A) de los platos
    - El fluido que interviene



Viscosidad (molecular)

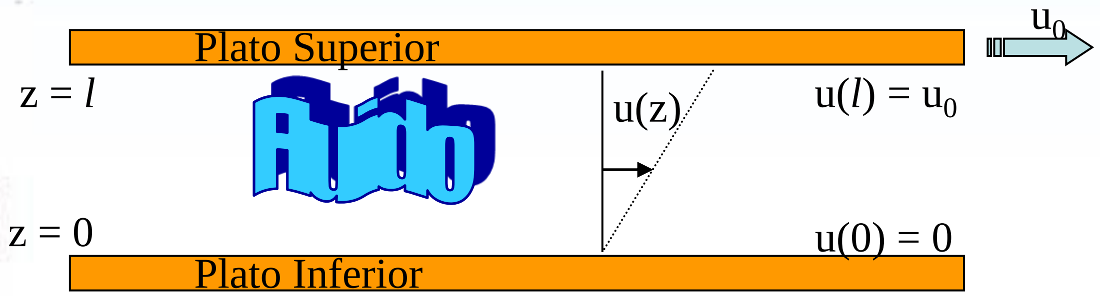
- Más observaciones empíricas
  - La propiedad relevante del fluido es la viscosidad (η)
  - Entonces, la fuerza que decelera el plato superior es

$$F = \eta A \frac{u_0}{l}$$

Característica de los fluidos "newtonianos"

  - En este caso (simple), la velocidad cambia linealmente
  - En general, la relación es

$$F = \eta A \frac{du}{dz}$$

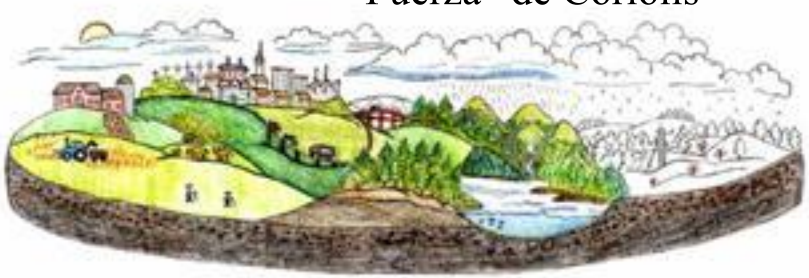


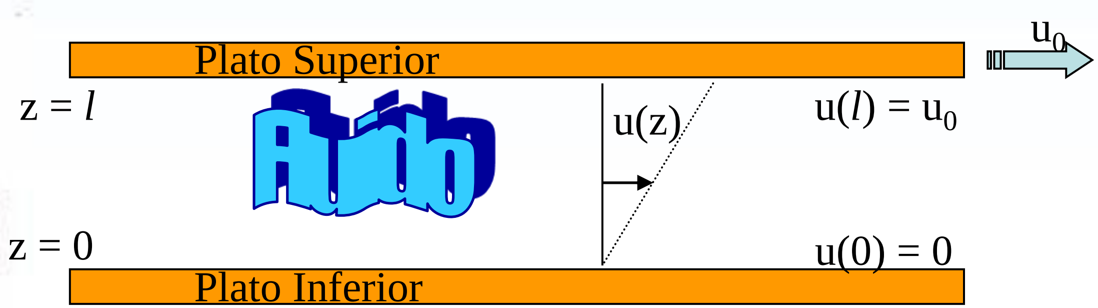
Viscosidad (molecular)

- La viscosidad (unidades)

$$\eta = \frac{Fl}{uA} \sim \frac{(kg \cdot m \cdot s^{-2})(m)}{(m \cdot s^{-1})(m^2)} \sim Pa \cdot s$$

- Esta es la viscosidad absoluta (o dinámica)
  - A veces se denota μ
  - Siempre usaremos η
- A saber: hay otro tipo de viscosidad
  - La viscosidad cinemática (ν) $\quad \upsilon = \dfrac{\eta}{\rho}$
  - Estudio de aceleraciones/fuerzas que no dependen de la masa de fluido
    - Debidas a la fuerza de gravedad
    - “Fuerza” centrifugal
    - “Fuerza” de Coriolis





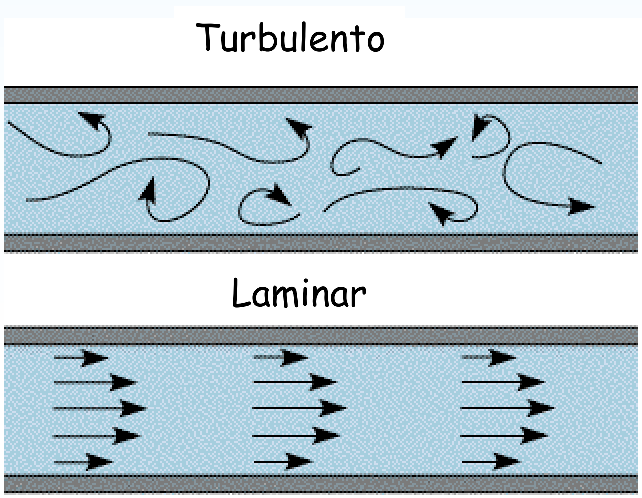
Viscosidades de unos fluidos

Fluido	T (°C)	η (10^{-3} Pa s)
Agua	0	1.8
	20	1.0
	100	0.3
Sangre	37	~4
Plasma de sangre	37	~1.5
Alcohol etilo	20	1.2
Aceite de motor	30	200*
Glicerina	20	1500
Aire	20	0.018
Hidrógeno	0	0.009
Vapor de agua	100	0.013

*mucho mayor a temperaturas bajas
(importante para los motores)

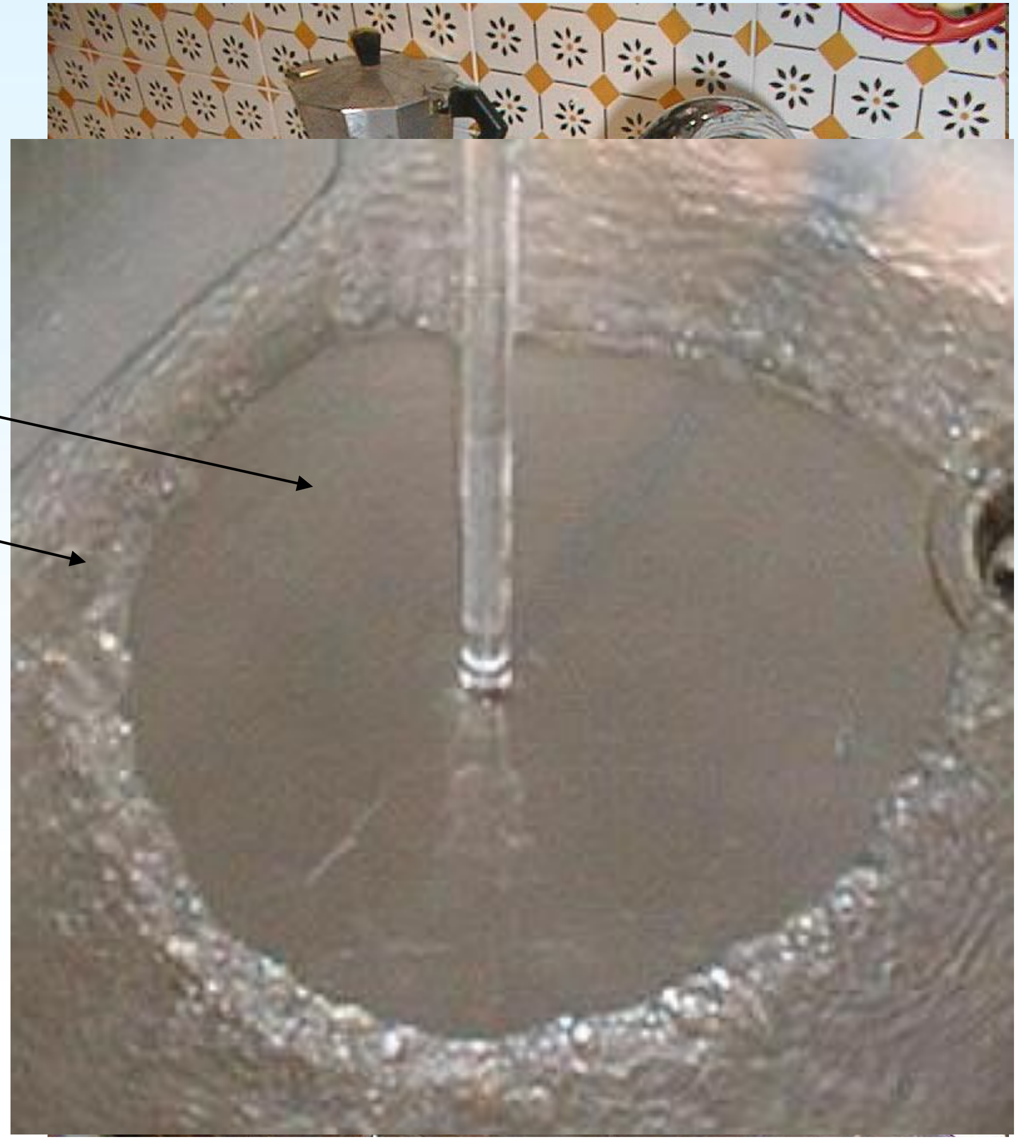
Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



Régimen laminar y turbulento

- Imagen familiar - ambos regimenes

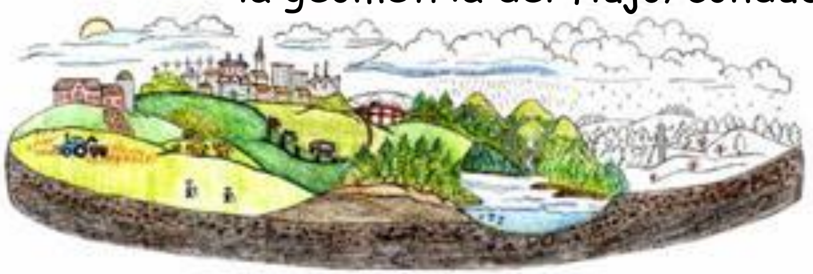


Laminar, alta velocidad

Turbulento, baja velocidad

La **transición de flujo laminar a turbulento** depende de

la velocidad v
la viscosidad η
la densidad del fluido ρ
la geometría del flujo/conducto



Régimen laminar y turbulento ¿Qué Importancia Tiene?

- Un flujo se retarda más cuando es turbulento
  - Flujo se pone turbulento → decelera
  - Fuerza adicional de arrastre (luego)
  - La presencia de la turbulencia cambia muchos aspectos de un flujo

El número de Reynolds

- Para flujo en un tubo, la iniciación de la turbulencia se puede predecir

$$Re = \frac{2vr\rho}{\eta} \sim \frac{inercia}{fricción} \qquad \left(\frac{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}\right)$$

- Una cifra adimensional. Por experiencia:
  - Si Re < 2000: flujo laminar
  - Si Re > 3000: flujo turbulento
- Importa su ***orden de magnitud***

Iniciación de la turbulencia

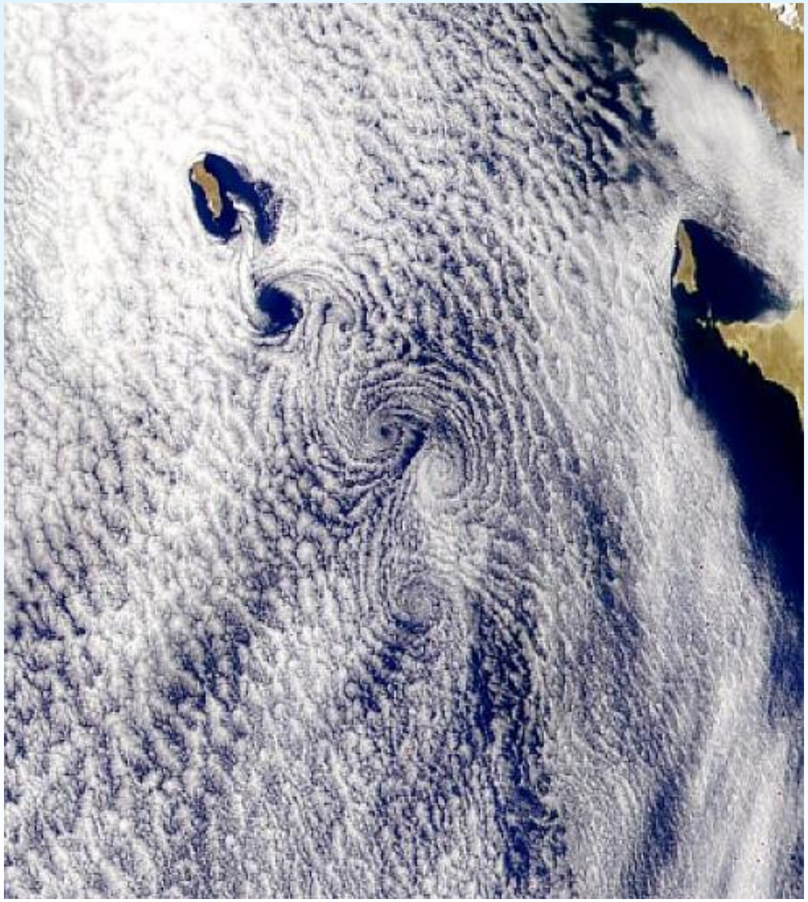
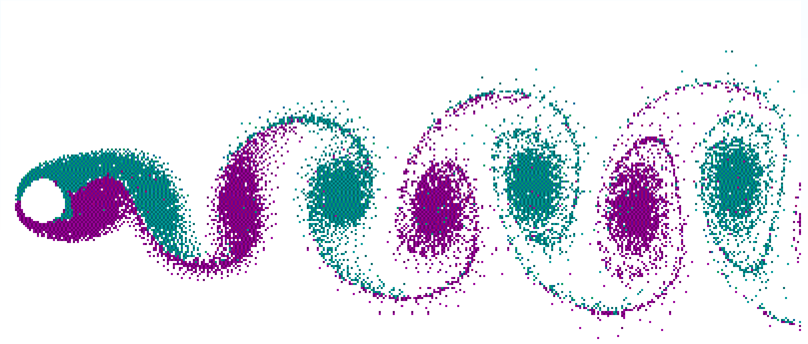


Imagen del satélite SeaWifS
Isla de Guadalupe,
20 de agosto, 1999

- Un obstáculo puede accionar la turbulencia

$$\mathrm{Re}' = \frac{v L \rho}{\eta}$$

- En función de su tamaño

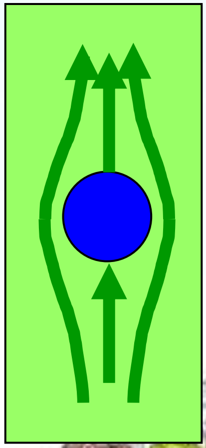


Caída Libre de Gotas de Agua
Flujo Viscoso

- En la caída de una gota de nube (agua líquida)
  - Acelera hasta lograr una velocidad límite (velocidad terminal)
  - Equilibrio entre la fuerza de gravedad, y la viscosa (F_v)

$$F_v = mg = \rho V g = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)g$$

  - Empíricamente, para Re < 1, se sabe que $F_v = kv$
  - Donde k depende de la viscosidad y el "tamaño", $k = 6\pi r\eta$



$$6\pi r\eta v = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)g$$

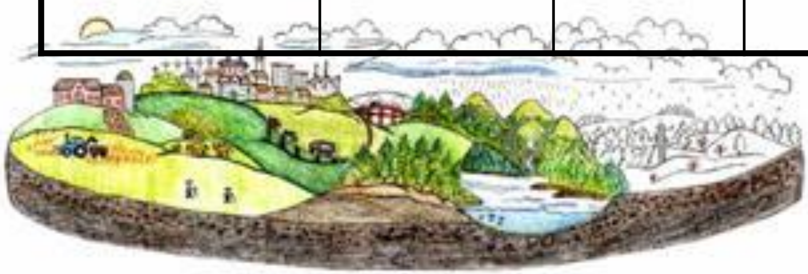
$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2 g\rho}{\eta}$$

Ley de Stokes,
(sin turbulencia)
para r < 30μm
Re<1

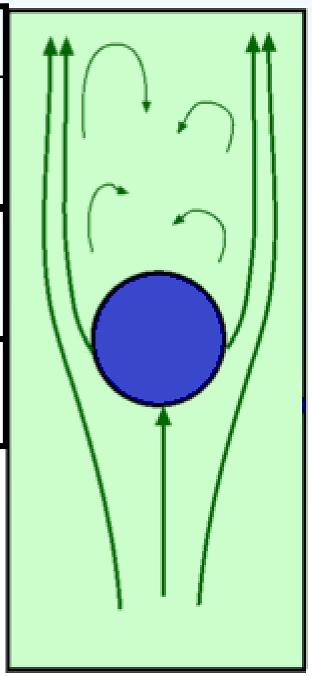
Caída Libre de Gotas de Agua Flujo Viscoso <--> Turbulento

- En la caída de una gota de *lluvia*
  - Sobresalta el valor crítico de Re
  - Se inicia la turbulencia, creación de una huella turbulenta ("wake")
    - La energía cinética (turbulenta) baja la presión (efecto Bernoulli)
    - El arrastre (por presión) es más eficaz para altas velocidades
- El incremento de velocidad con r no es tanto

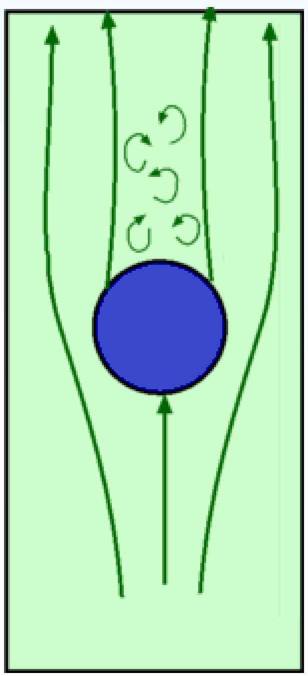
Régimen	**Arrastre**	**Re**	**r (µm)**	**v=f(r)**
Viscoso (Stokes)	Fricción	$Re < 1$	< 30	$V=c_1r^2$
Intermedio	Fricción Pressión	$Re \sim 1$	40-600	$V=c_2r$
Turbulento	Presión	$Re \gg 1$	600-2000	$V=c_3r^{1/2}$



$Re > 1$

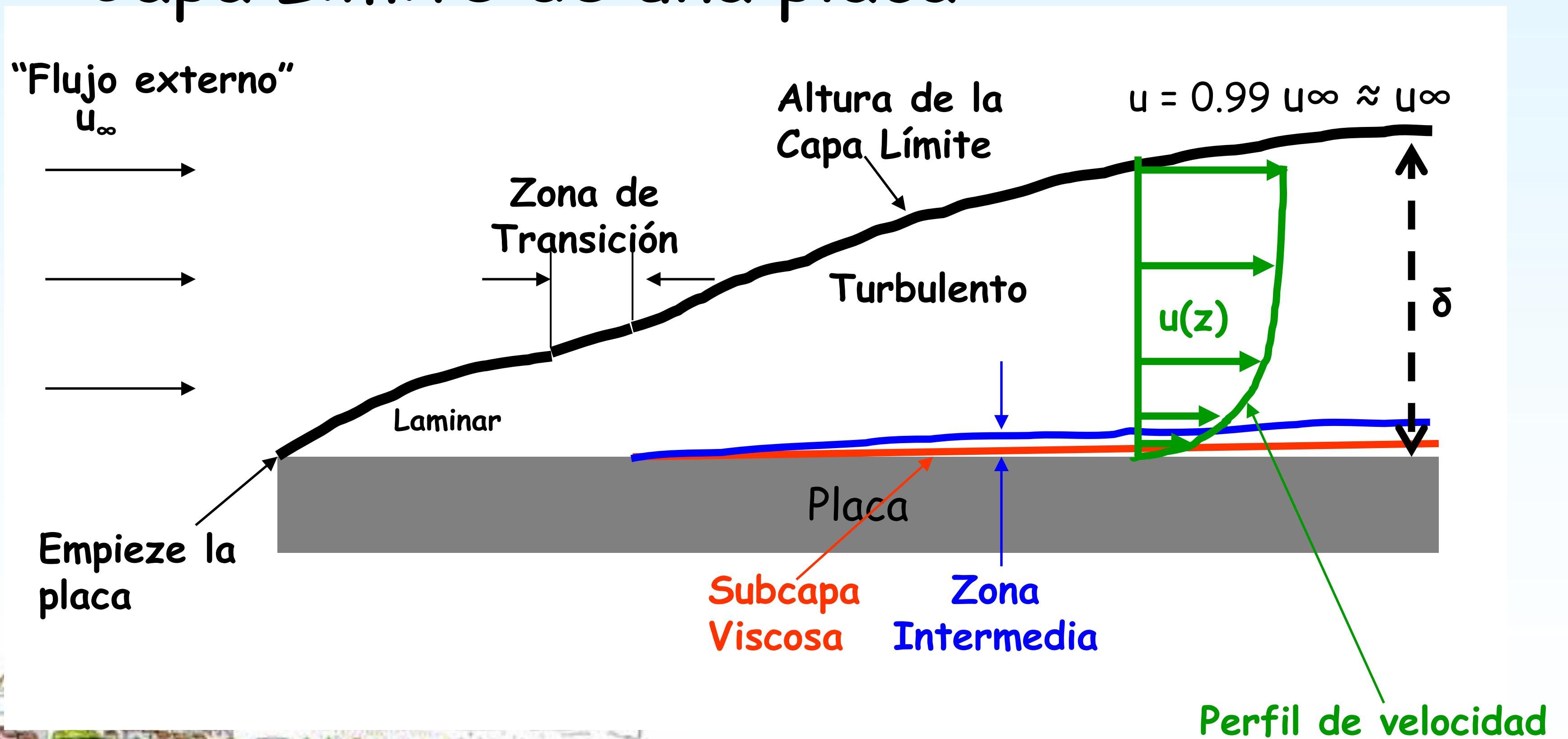


$Re \gg 1$



"Huella turbulenta"
La Capa Límite

- Capa Límite de una placa

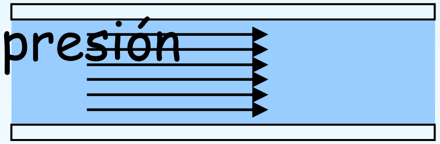


Programa

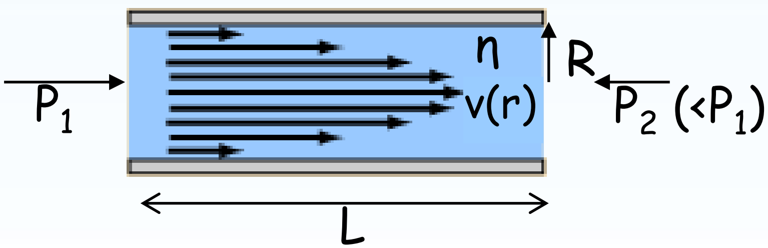
- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Flujo estacionario. Ecuación de Bernouilli. Ecuación de continuidad. Fluidos ideales. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.

Flujo laminar en tubos
La Ley de Hagen-Poiseuille

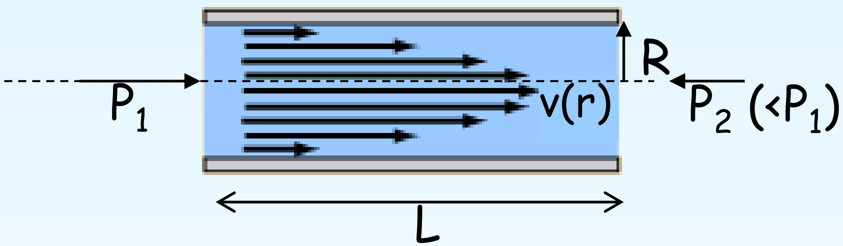
- Un fluido ideal (sin viscosidad), fluiría por un tubo sin necesidad de una fuerza
  - Genial, pero en realidad no hay fluidos ideales
  - Fluido real: hace falta una diferencia de presión
    - Agua o aceite en un tubo
    - Sangre en el sistema circulatorio del organismo



- El flujo varia con el radio, y depende de
  - La diferencia de presión
  - Las dimensiones del tubo
  - La viscosidad



Flujo laminar en tubos
La Ley de Hagen-Poiseuille



- Consideramos un cilindro de fluido con radio r
  - La fuerza de impulsión F_i es

$$F_i = (P_1 - P_2)\pi r^2$$

  - La fuerza de arrastre F_a es

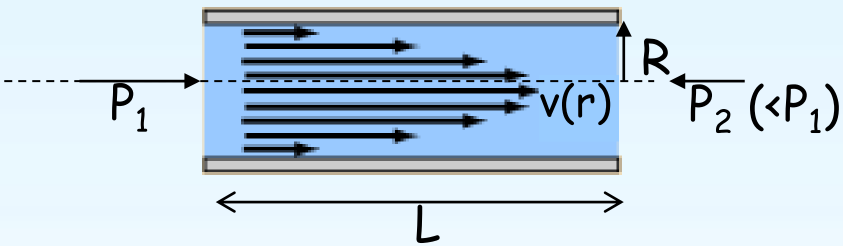
$$F_a = -\eta(2\pi r L)\frac{dv}{dr}$$

  - Igualando para buscar el equilibrio

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta(2\pi r L)\frac{dv}{dr}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$

Flujo laminar en tubos
La Ley de Hagen-Poiseuille



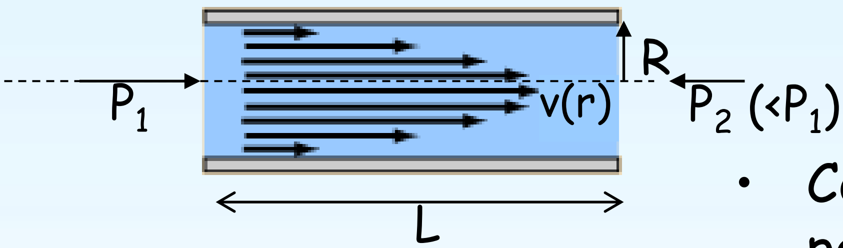
$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$

$$\int_0^v dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_R^r r dr$$

$$v = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r$$

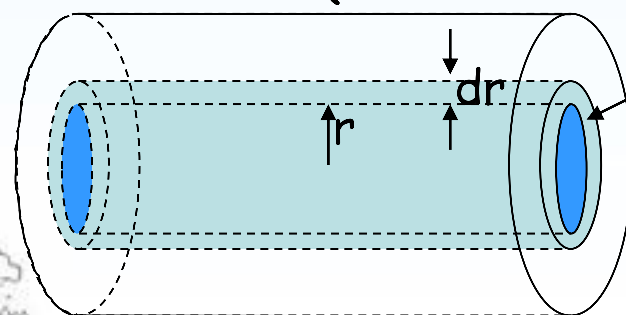
$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

Flujo laminar en tubos
La Ley de Hagen-Poiseuille



$$\boxed{v} = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

- Con esta información sobre v(r), podemos estimar el caudal del tubo
  - Problema: v(r) ≠cte
  - Pues, no es tan sencillo como Q=Av
- Truco: análisis por anillo de grosor dr con v=cte. (dentro del anillo)



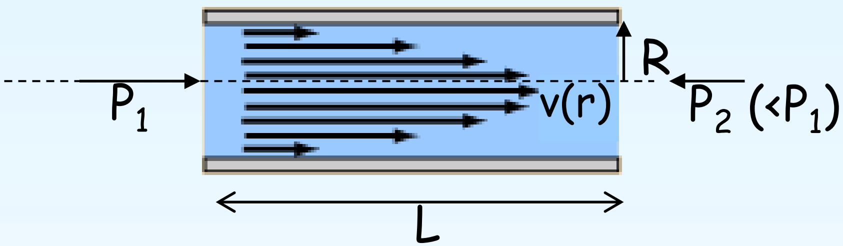
$$\boxed{dA} = 2\pi r dr$$

$$dQ = \boxed{v}\,\boxed{dA}$$

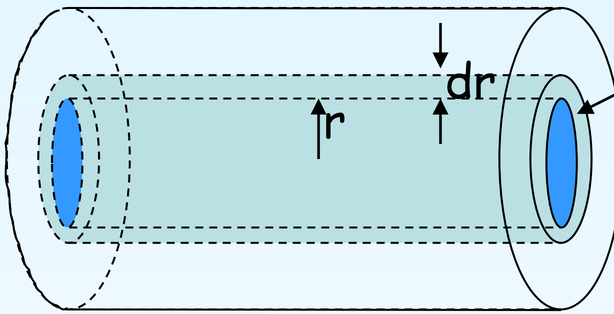
$$dQ = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)2\pi r dr$$

Flujo laminar en tubos

La Ley de Hagen-Poiseuille



$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$



$$dA = 2\pi r dr$$

$$dQ = v\,dA$$

$$dQ = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)2\pi r dr$$

$$\boxed{Q} = \int_{r=0}^{r=R} dQ = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right)dr$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\boxed{= \frac{\pi(P_1 - P_2)R^4}{8\eta L}}$$

Conceptos/Ecuaciones a Dominar

- Continuidad:
  - $\rho_2 A_2 v_2 = \rho_1 A_1 v_1$
  - Incompresible: *caudal* : Q = A v = cte
- Presión dinámica (Bernoulli):
  - Torricelli $v_1 = \sqrt{2gh}$
  - Venturi
  - Pitot $V = \left(\frac{2}{\rho}[p_e - p_d]\right)^{\frac{1}{2}}$
  - Sustentación
- Viscosidad $F = \eta A \frac{u_0}{l}$
- Número de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{2vr\rho}{\eta}$
  - Significación
  - Relaciones: inercia, fricción, arrastre
  - Capas Límites
- Hagen-Poiseuille: balance entre fricción y (Δ presión)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right]}}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte$$

Fin