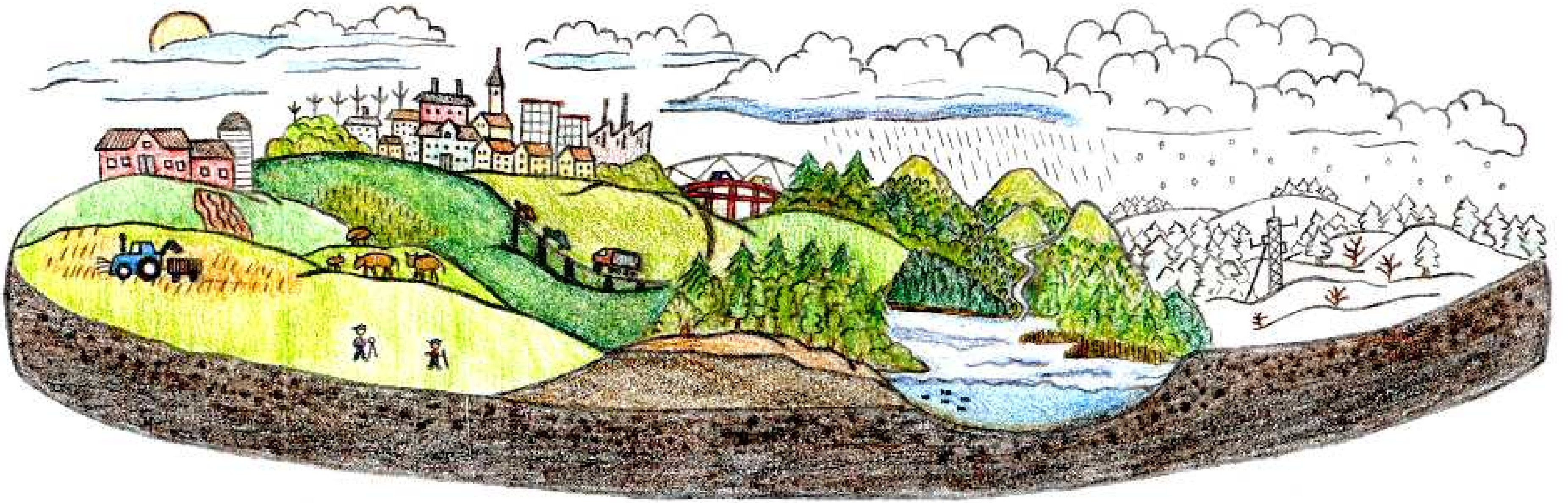
Bases Físicas del Medio Ambiente

Teoría de Errores
(Programa de Prácticas)



Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.

Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.

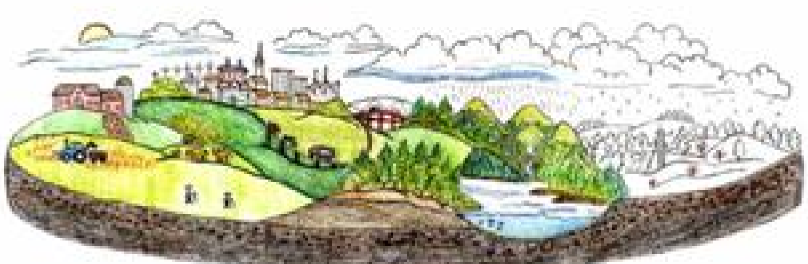
www.mapquest.com
Granada – Málaga
131.02km

Granada – Málaga
131±1 km

- ¿Es interesante decir 131.02 km?
- ¿Es exacto/científico?
  - ¿Significa 131.0200000000000... km?

    m μm

  - ¿Qué precisión tiene?
- ¿Qué es "la verdad"?
- ¿Podríamos aceptar un error de 1000 m?

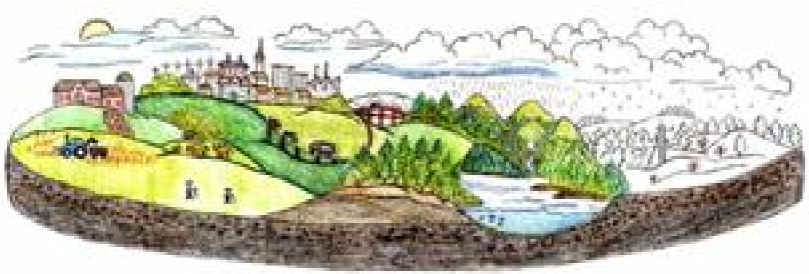


¿Cuánto mides?

- ¿Se puede aceptar un error de 1000 m?
- ¿Qué error se puede aceptar?
  - El error: *relativo* a la magnitud
- ¿Qué error es inevitable?
  - ¿Cuántas cifras podemos escribir?

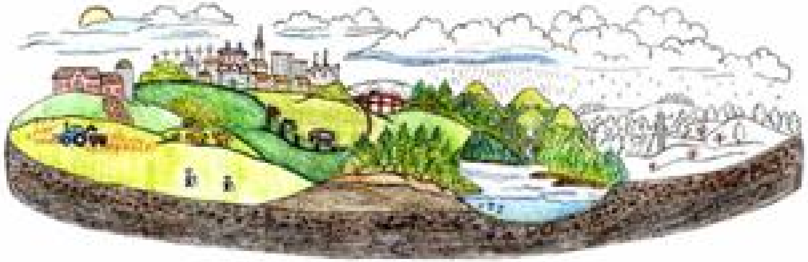
Contexto

- Esta pequeña introducción nos ha plantado algunas preguntas
- Ahora pasamos a algunas definiciones interesantes para empezar a contestar



Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Error Absoluto

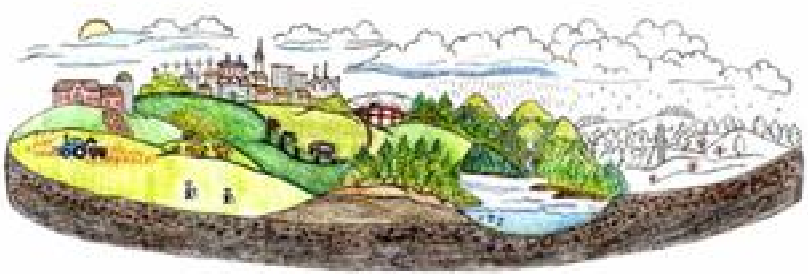
$$\Delta x = x_m - x$$

- Δx = error absoluto
- x_m = valor medido o aproximado
- x = “la verdad”

Error Relativo

$$e = \frac{\Delta x}{x_m} \times 100\%$$

- e = error relativo
- x_m = valor medido o aproximado
- Δx = error absoluto



Intervalos de confianza

$$x = x_m \begin{cases} +\delta_{\max} \\ -\delta_{\min} \end{cases}$$

$$x_m - \delta_{\min} \leq x \leq x_m + \delta_{\max}$$

δ_{min} = máximo posible subestimación

δ_{max} = máximo posible sobreestimación

x_m = valor medido o aproximado

x = “la verdad”

Simetría

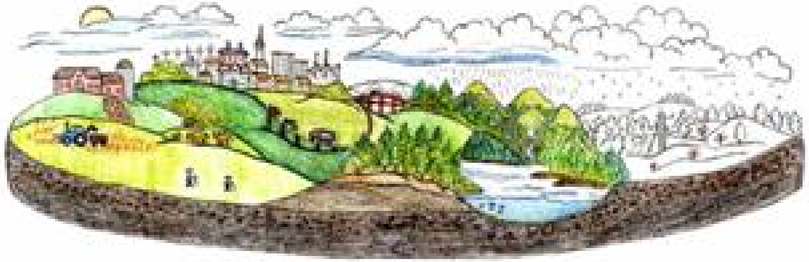
- En el caso que

$$\delta_{\max} = -\delta_{\min} = \Delta x$$

- (lo que pasa con frecuencia)

- Solemos escribir la medida así

$$x = x_m \pm \Delta x$$



Ejemplo asimétrico

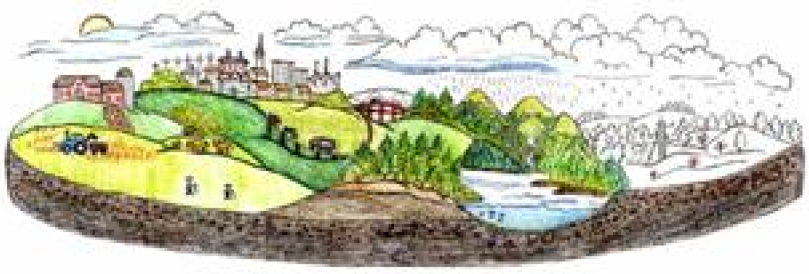
- Distancia sol-tierra : $(150 \pm 3) \cdot 10^6$ km
- Error absoluto: $3 \cdot 10^6$ km
- Error relativo: 2%

- No es simétrico, en realidad (varia)
- $147.09 \cdot 10^6 \text{ km} < x < 152.10 \cdot 10^6 \text{ km}$

- Nosotros trabajaremos con casos simétricos

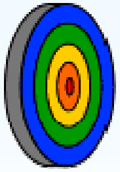
Definiciones

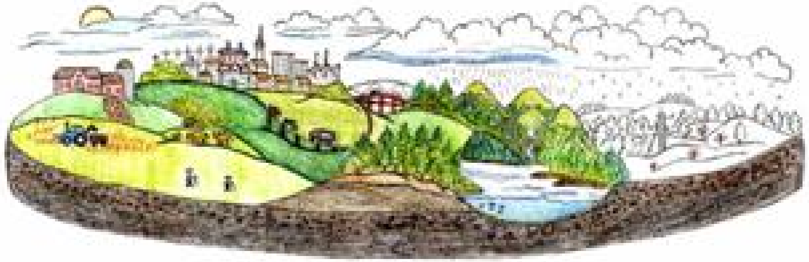
- **Exactitud** - grado de concordancia entre el valor verdadero y el experimental
- **Precisión** - concordancia entre una medida y otras de la misma magnitud, realizadas en condiciones sensiblemente iguales
- **Sensibilidad** - el valor mínimo de la magnitud que un aparato es capaz de diferenciar



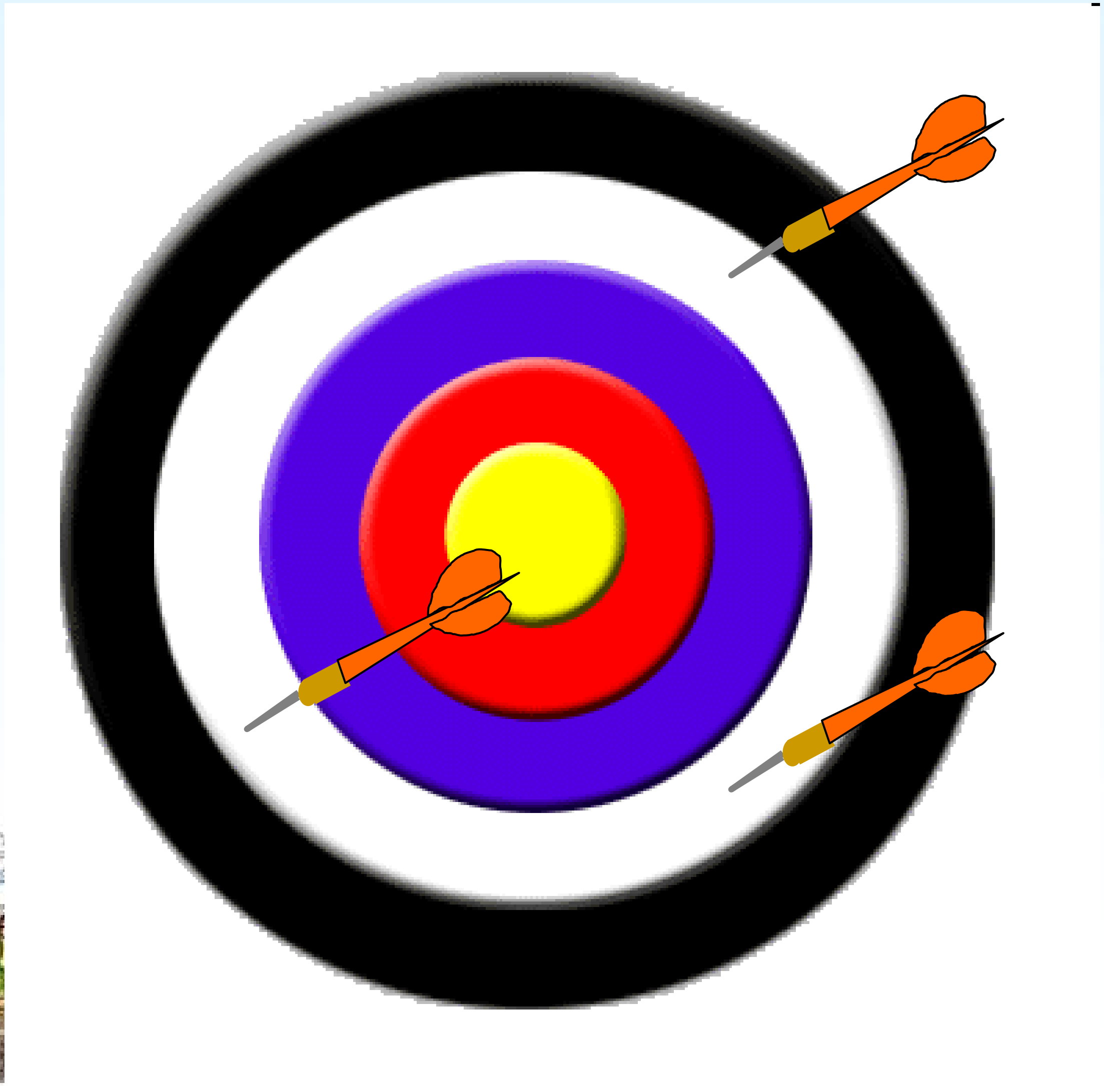
Exactitud y Precisión

- Tirando flechas





Ni preciso ni exacto



Preciso

Exacto

Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.

¿Qué sabemos

- Aceleración de gravedad, g= __________
- Número de Avogadro, N= __________
- Velocidad de luz, c= __________

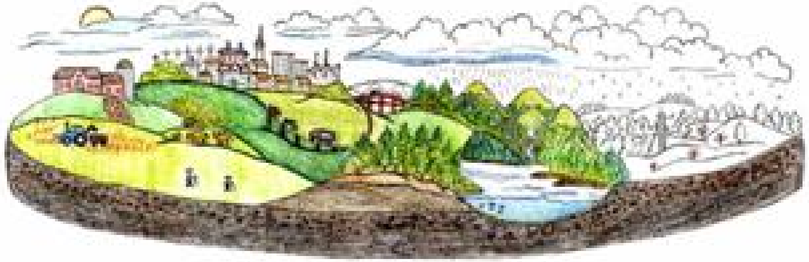
Expresión de magnitudes físicas

- Cantidad
- Unidad (!!)
- Grado de confiabilidad
  - índice de exactitud
  - error

Expresión de cantidades

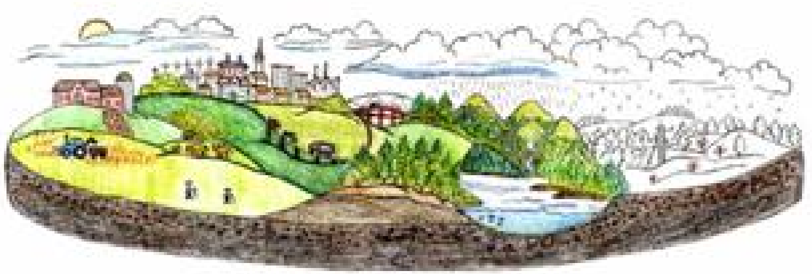
- El orden de cálculo no es ***nada*** intuitivo

- PRIMERO: Error absoluto
- ENTONCES: Valor de la cantidad



¿Qué edad tienes?

- Antes de contestar:
- ***Primero*** eliges las unidades
  - Casi siempre en años
  - ¿Un bebé puede tener 0 años? (mejor 2 meses)
- ***Segundo*** aceptas un error absoluto
  - Nunca contestas hasta más o menos una hora
  - Normalmente: hasta +/- 1 año
- Los dos pasos anteriores están relacionados (y mucho)
- ENTONCES:



un niño dice cuatro años y medio

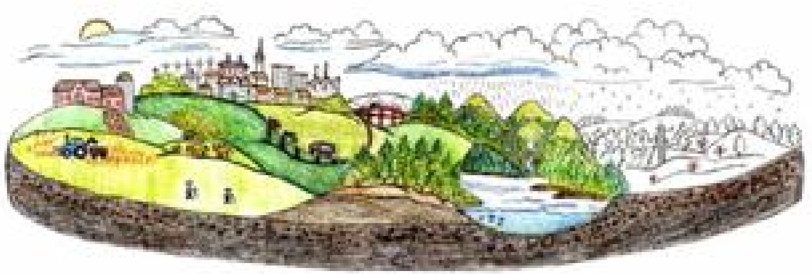
un alumno dice 19 años

Expresión de cantidades

- Seguimos el mismo orden

- PRIMERO: Error absoluto
- ENTONCES: Valor de la cantidad

OLVIDARLO = PERDER PUNTOS (PRÁCTICAS)



El error absoluto

- Convenio: solo tiene uno o dos dígitos significativos
- En general, uno
  - (1,2,3,4,5,6,7,8,9) x 10^N
    - Ejm: población de Granada

      ± 40000 = (± 4)10^4

      ± 30000 = (± 3)10^4

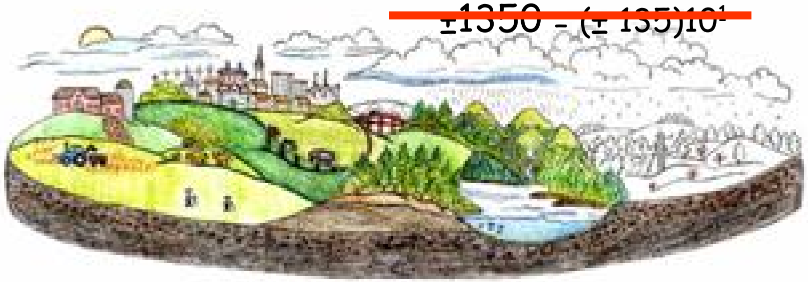
      ~~± 35000 = (± 35)10^3~~

- Excepción: ***podemos*** usar dos cuando redondear nos quita mucha información:
  - Si el primero dígito es 1
  - Si el primero dígito es 2 y el segundo es inferior a 5
    - Redondear 84 a 80 nos da un error de menos de 5% (ejm: edad de un abuelo)
    - Redondear 14 a 10 es bruto: hay mucha diferencia! (ejm: edad de un niño)
  - (10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24) x 10^{N-1}
    - Ejm. Población de Almuñecar

      ±1000 = (± 1)10^3

      ±1300 = (± 13)10^2

      ~~±1350 = (± 135)10^1~~

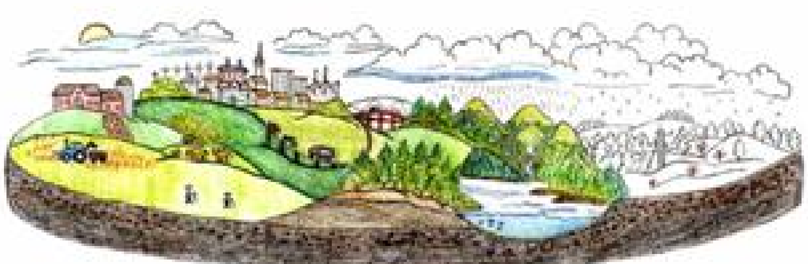


Expresando el error absoluto

- Solo un dígito significativo
  (1,2,3,4,5,6,7,8,9)

- A veces se permiten dos
(10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24)

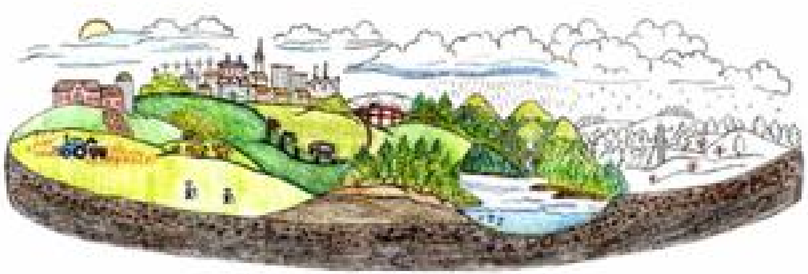
- Los ceros normalmente no son significativos
  - Al final de la cifra
  - Al principio de la cifra



La Magnitud de la Cantidad
¿Cuanto mides?

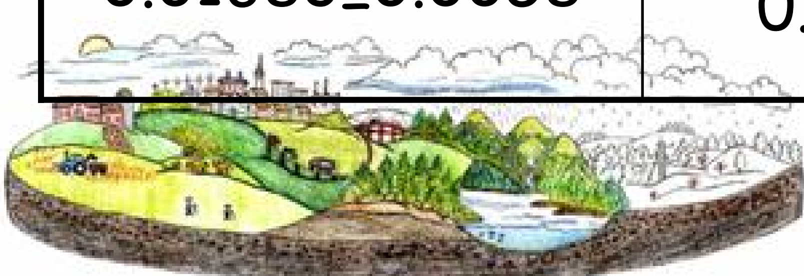
- ¡ No más precisa que permite el error !
- Ejm: $h = 1.74\cancel{6} +/- 0.01$ m
- $h = 1.75 +/- 0.01$ m

- Si sólo sabes tu altura hasta el centímetro, ¿qué sentido tiene especificar los milímetros?



Ejemplos de Magnitudes

Incorrectos (U)	Correctos (U)	Mejor? (U)
3.418±0.123	3.4±0.1 3.42±0.12	$(342 \pm 12)\ 10^{-2}$
6.30±0.085	6.30±0.09	$(630 \pm 9)\ 10^{-2}$
46.288±1.553	46.3±1.6	$(463 \pm 16) 10^{-1}$
428.351±0.15	428.35±0.15	$(42835 \pm 15)\ 10^{-2}$
0.01683±0.0058	0.017±0.006	$(17 \pm 6)\ 10^{-3}$



Errores

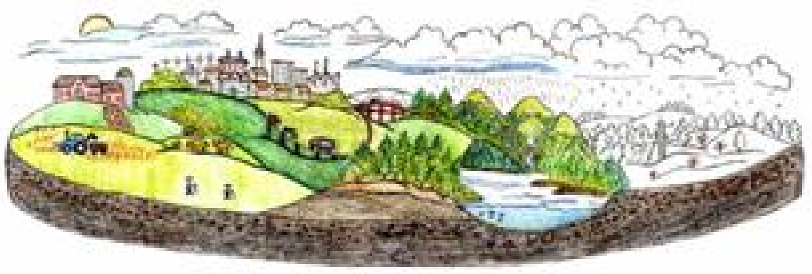
- Se desconoce la “verdad”
- Siempre hacemos algún tipo de error
- Objetivos:
  - Caracterizar/conocer los errores
  - Minimizarlos cuando es posible

Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.

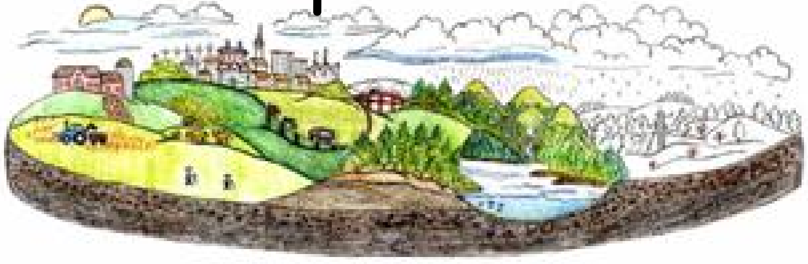
Tipos de Errores

- Errores sistemáticos
  - Difícil a caracterizar
    - Si los conocemos, los corregimos
  - Pueden ser constantes – afectan todas medidas
- Errores aleatorios
  - Inevitables y desconocidos, pero unas hipótesis:
  - Distribución de frecuencias “normal”
    - Más pequeñas, más frecuentes
    - Promedio de cero



Errores aleatorios

- Errores de discernimiento
- Cambios en las condiciones experimentales
- Errores de especificación en los procesos de fabricación (por ejemplo, una bola esférica metálica puede estar ligeramente ovalada o contener planos)
- Se pueden reducir (¿cómo?)

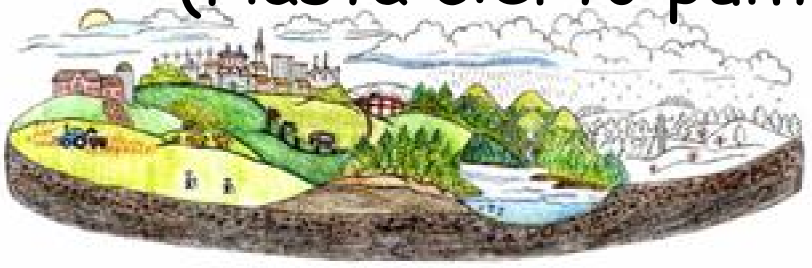


Error cuadrático medio (MSE)

- Cuando se hace múltiples (N) medidas (x_i) de un fenómeno ALEATORIO, se puede estimar el error cuadrático medio, σ_x

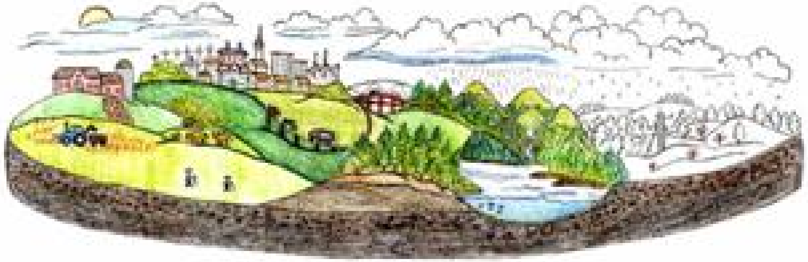
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - \overline{x})^2$$

- Donde $\overline{x}$ es el promedio de las N medidas
- Cuando más medidas hay, menos error
- (Hasta cierto punto)



Deducciones

- Una estimación es mejor cuando
  - menos error sistemático tiene
  - menos error aleatorio tiene
- Los errores son inevitables
- Medir con cuidado, y precisión
- A veces, hacen falta muchas medidas
- ¿Cuántas medidas necesitamos?



Unas reglas prácticas para medir una cantidad en el laboratorio

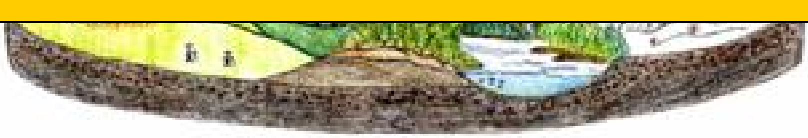
- Para empezar: tres (3) medidas con error experimental ε_x (sensibilidad)
- Calcular la dispersión: $D = x_{max} - x_{min}$
- Comparar D y ε_x

  $D <= \varepsilon_x$
  - Error dominante es tipo sistemático (limitación de instrumento)
  - No se puede hacer mucho!
  - Tomar como valor, $x \pm e_x$

  $D > \varepsilon_x$
  - Error es tipo aleatorio
  - Posiblemente, hace falta más medidas!
  - ¿Cuántas medidas bastan?

Tanto por ciento de dispersión

$$T = \frac{100\% D}{\bar{x}}$$



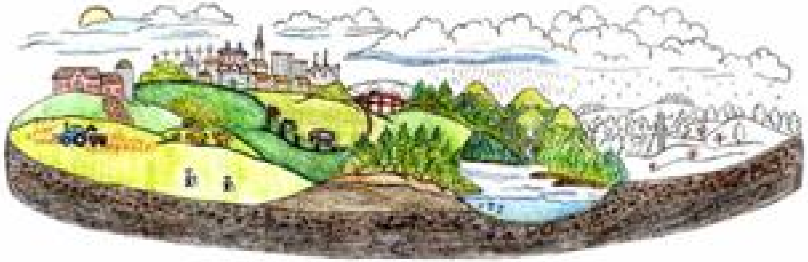
Tanto por ciento de dispersión

$$T = \frac{100\%D}{\bar{x}}$$

	T<2%	2%<T<8%	8%<T<15%	T>15%
N	3	6	15	50
Error	ε_i	$\alpha = máx(D_6/4, \varepsilon_i)$	σ_x	$\sigma_x/\left(\sqrt{N}-1\right)$
Expresión	$x \pm \varepsilon_i$	$x \pm \alpha$	$x \pm \sigma_x$	$x \pm \sigma_x/(\sqrt{N}-1)$

Cuantas Medidas

- Volveremos a este tema con unas definiciones de la estimación de errores
- Ahora: motivación para el tratamiento de (y propagación de) los errores

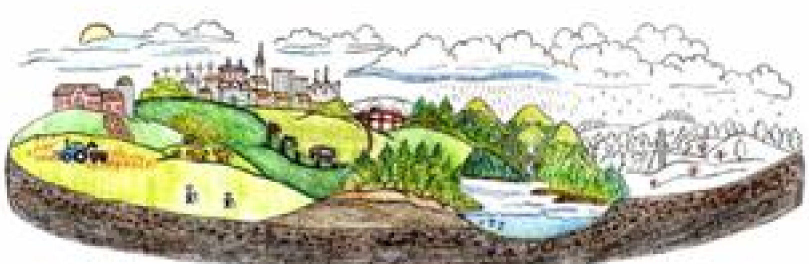


Motivación

- Granada – Jaén: 94±1 km
- Digamos que se sabe que el tiempo promedio para el viaje es 1.0± 0.1 horas
- ¿Cuál es la velocidad promedia para el viaje?
  - Acordarse: para escribir un resultado, hay que empezar con el error!
- ¿Cómo podemos determinar el error en esta estimación?

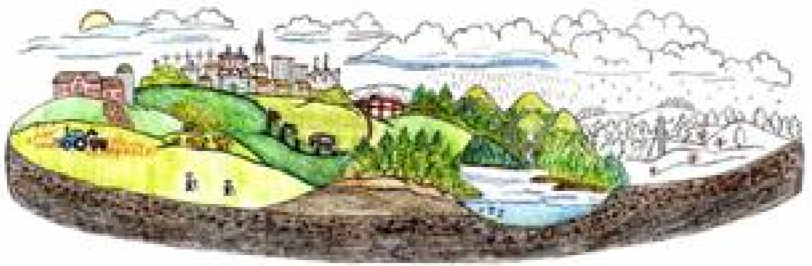
Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Propagación de errores

- Hay una distinción entre
  - Errores en medidas directas
  - Errores en magnitudes derivadas
- Un poco de teoría (importante)



Propagación lineal de errores

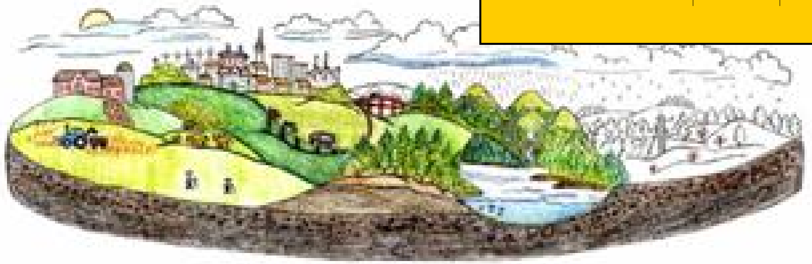
-Sea $f = f(x, y, z, c)$

La función **f** liga a la magnitud que nos interesa hallar (**f**) con las magnitudes independientes que se obtienen del experimento (**x,y,z**) y con una constante (**c**).

Diferenciando: $$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial c} dc$$

Si identificamos los incrementos con los errores absolutos de las variables correspondientes, en el caso más desfavorable se obtendrá:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c$$



Sensibilidad de **f** al determinante **z**

Error en **z**

Derivadas parciales

- Son imprescindibles en esta asignatura
  - ¡A revisar!
  - No solemos trabajar con ejemplos muy difíciles

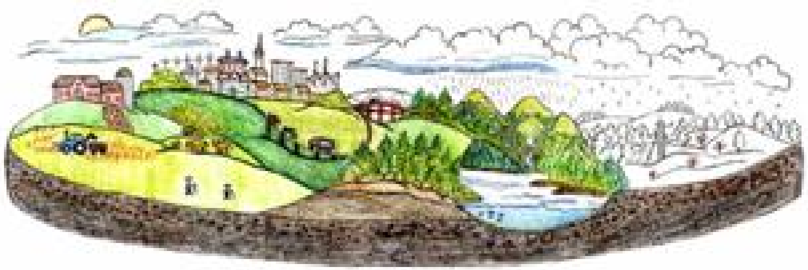
$$y = ax^n$$

$$y' \equiv \frac{\partial y}{\partial x} = n\, a\, x^{n-1}$$

Ejemplo numérico

- Densidad de flujo radiativo emitida por un cuerpo negro
- $E = \sigma T^4$
- $\sigma = 5.67 \pm 0.01 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

  (*constante de Stephan-Boltzmann*)
- Para un cuerpo negro con $T = 300 \pm 1$ K
- ¿Cómo podemos expresar *E*?



4 valores…

Ejemplo numérico

$$E = \sigma T^4$$

$$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial T}\right| \Delta T + \left|\frac{\partial E}{\partial \sigma}\right| \Delta \sigma$$

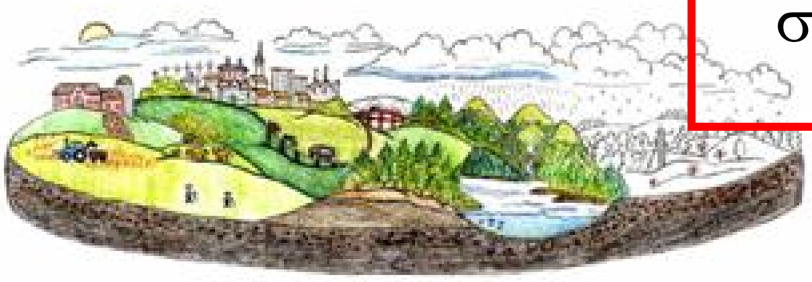
$$= \left|4\sigma T^3\right|(1K) + \left|T^4\right|\left(0.01 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}\right)$$

$$= (6.12 \quad + \quad 0.81) W m^{-2}$$

- E = 459 ± 7 W m^{-2}

Podemos hacer mejor

σ = 5.6703 ± 0.0007 x 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}

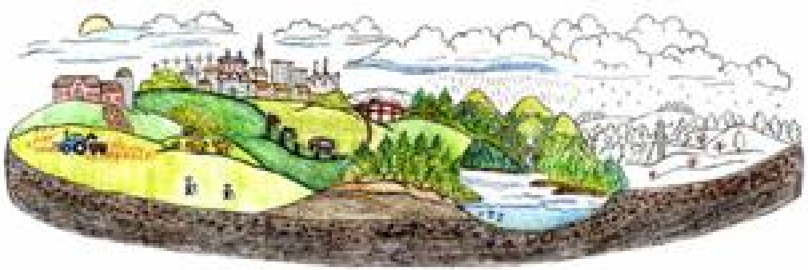


Resumen: propagación lineal de los errores

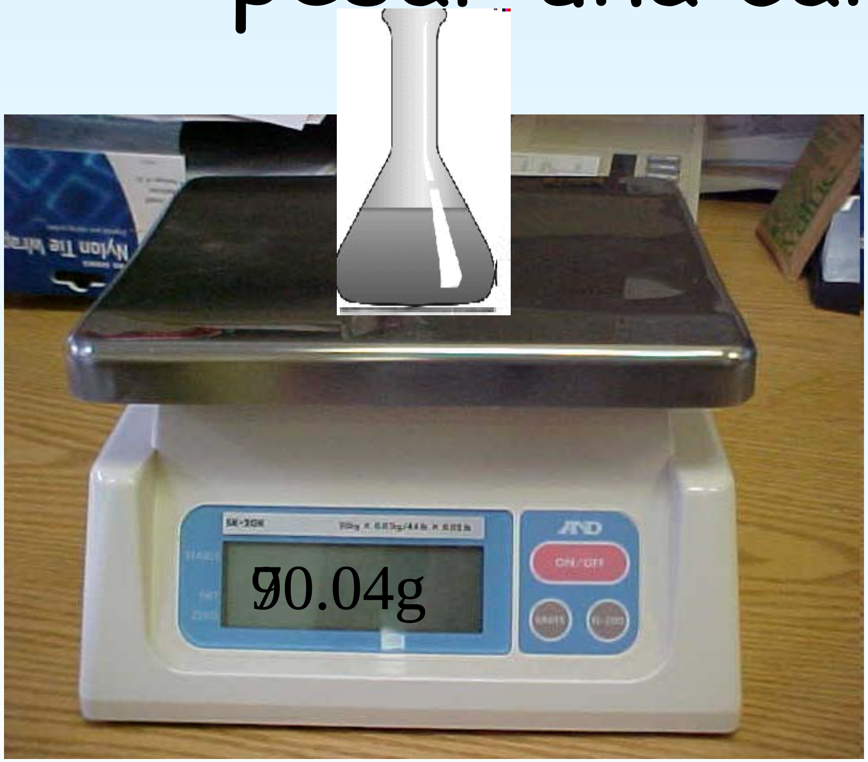
$$f = f(x, y, z, c)$$

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\Delta c}$$

Tenemos que pensar en esta ecuación en muchas ocasiones (en todas las prácticas)



Ejm: (intuitivamente) Como pesar una cantidad de $H_2O_{(l)}$



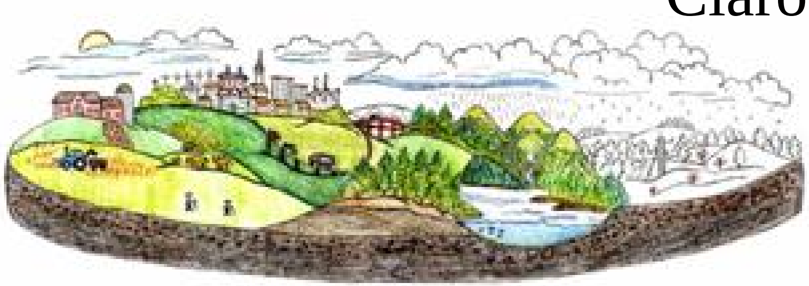
Botella vacía:

(Misma)

botella con agua:

Escala con sensibilidad = 0.01g

Claro, el agua pesa: 20g   pero ¿ERROR?



$\cancel{20.00 \pm 0.01g}$

Como pesar una cantidad de $H_2O_{(l)}$ (científicamente)

Botella vacía: x= $\pm$ 0.01g

(Misma)

botella con agua: y= $\pm$ 0.01g

$$z = y - x$$

$$\boxed{\Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \Delta x}$$

$$\Delta z = \Delta y + \Delta x$$

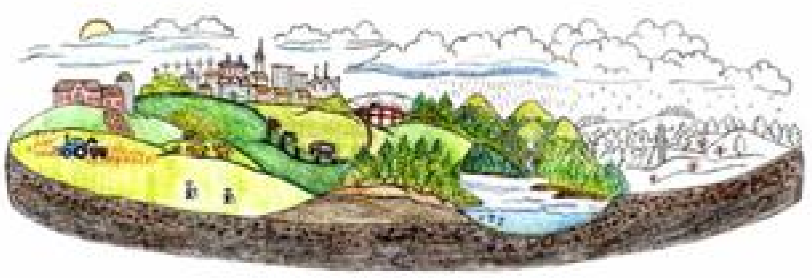
$$\boxed{20.00 \pm 0.02\text{g}}$$

Resumen: propagación lineal de los errores

$$f = f(x, y, z, c)$$

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c}$$

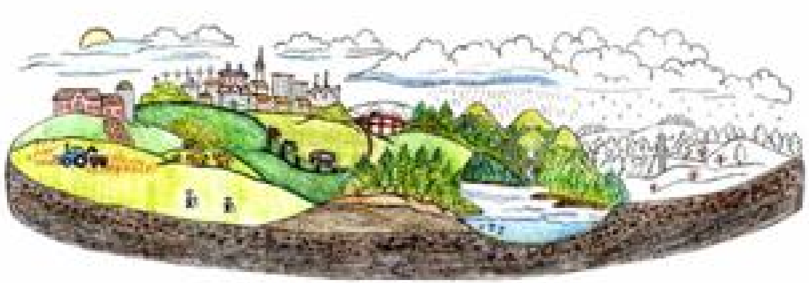
Ahora un ejemplo experimental



Altura de un acantilado

- ¿Cómo medir?
  - Difícil mantener un metro en vertical
  - Otra opción

$$h = \cancel{v_0} t + \frac{1}{2} g t^2$$



Hacemos una medida

$$h = \cancel{v_0} t + \frac{1}{2} g t^2$$

- 

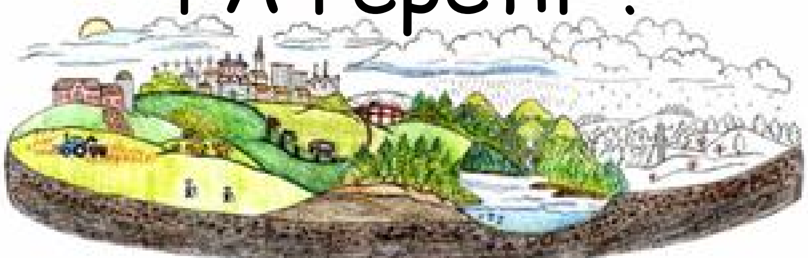
t_1 = 1.48 +/- 0.01s

- Posibles errores (aleatorios):
  - $v_0 \neq 0$
  - Pulgar torpe o errático
    - A la salida
    - A la entrada al agua

t_2 = 1.47 +/- 0.01s

t_3 = 1.46 +/- 0.01s

- ¡ A repetir !



Tanto por ciento de dispersión

t_1 = 1.48 +/- 0.01 s

t_2 = 1.47 +/- 0.01 s

t_3 = 1.46 +/- 0.01 s

$$\bar{t} = 1.47 s$$

$$D = 0.02 s$$

$$T = \frac{100\% D}{\bar{x}}$$

= 1.4%

	T<2%	2%<T<8%	8%<T<15%	T>15%
N	3	6	15	50
Error	ε_i	$\alpha = máx(D_6 / 4, \varepsilon_i)$	σ_x	$\sigma_x / \left(\sqrt{N} - 1\right)$
Expresión	$x \pm \varepsilon_i$	$x \pm \alpha$	$x \pm \sigma_x$	$x \pm \sigma_x / (\sqrt{N} - 1)$

Valor experimental

t = 1.47 +/- 0.01 s

Nuestro valor experimental

$$h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} g t^2$$

- 

t = 1.47 +/- 0.01 s

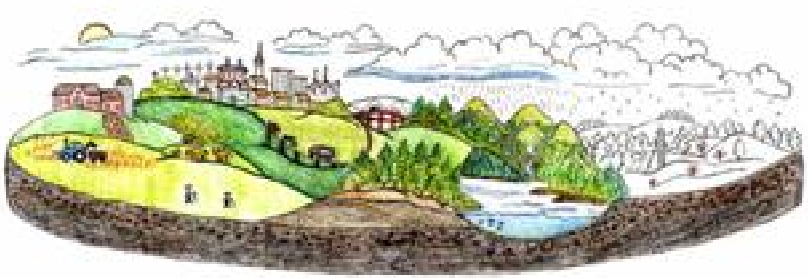
- Para poder escribir h, 1º su error

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \Delta t$$

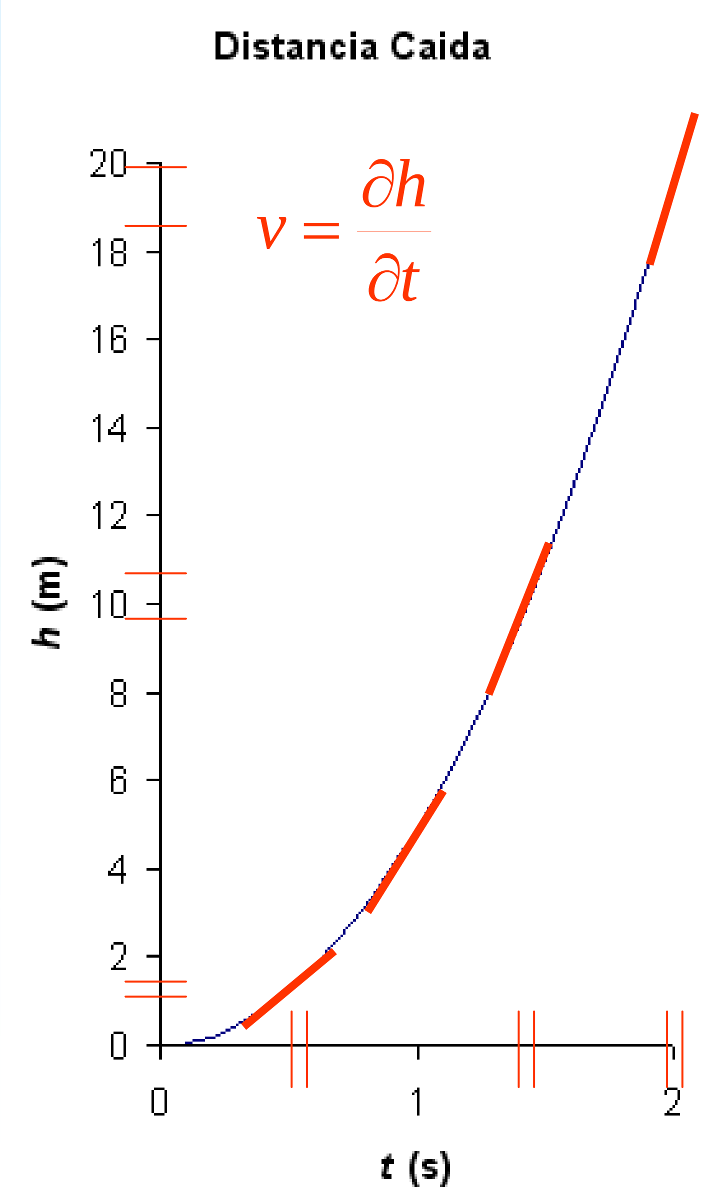
$$= \left|\frac{1}{2} t^2\right| \cancel{\Delta g} + |gt| \Delta t = v \Delta t$$



Errores, distancia frente a tiempo

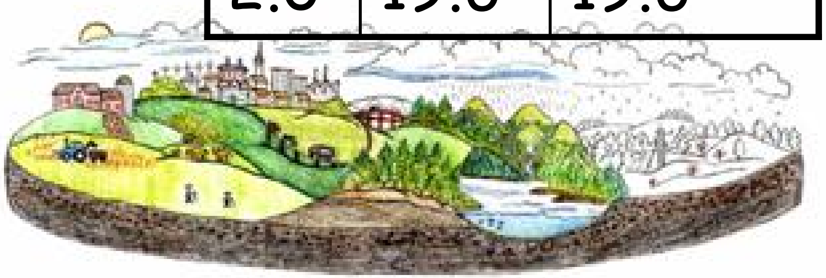
$$h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} g t^2$$

-  +/- 0.01 s



$$\Delta h = g t \Delta t = v \Delta t$$

t (s)	h (m)	v (m/s)
0.5	1.23	4.9
1.0	4.9	9.8
1.5	11.02	14.7
2.0	19.6	19.6



experimentalmente
con un péndulo

Altura de un acantilado

g = 9.782 +/- 0.001 m s^{-2}

Valor experimental

t = 1.47 +/- 0.01 s

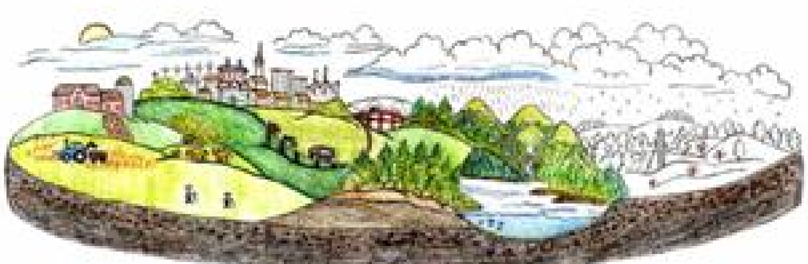
- 1^{er} paso: el error

$$\Delta h = gt\Delta t = v\Delta t$$

Δh = 0.14m

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

h = 10.59 +/- 0.14 m



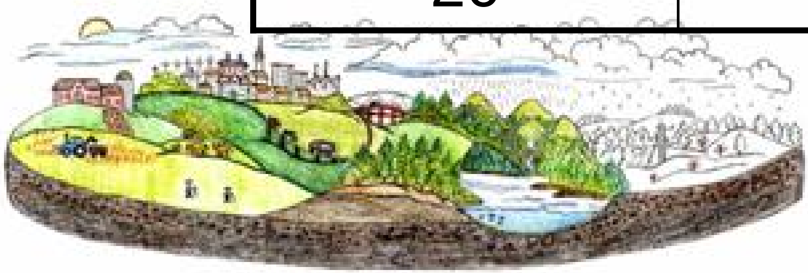
Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.

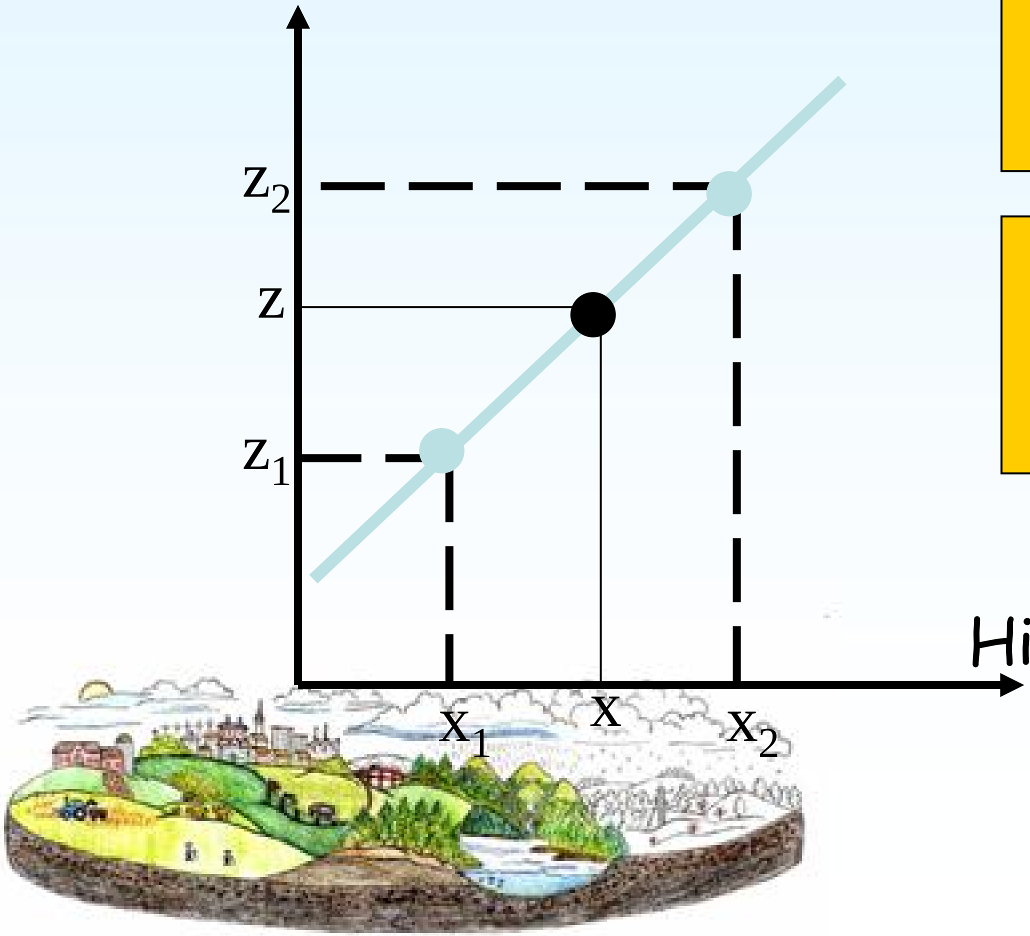
Interpolación en tablas

- ¿Qué valor (z) tiene el calor latente a una temperatura de x=12+/-1ºC? ¿Qué error tiene este valor?

T (ºC)	Calor latente de evaporación (J/g)
0	2501
5	2489
10 (x_1)	2477 (z_1)
15 (x_2)	2466 (z_2)
20	2453



Interpolación Lineal



$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

$$\Delta z = \left|\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right| \Delta x$$

Hipótesis:

A. Error proviene de x

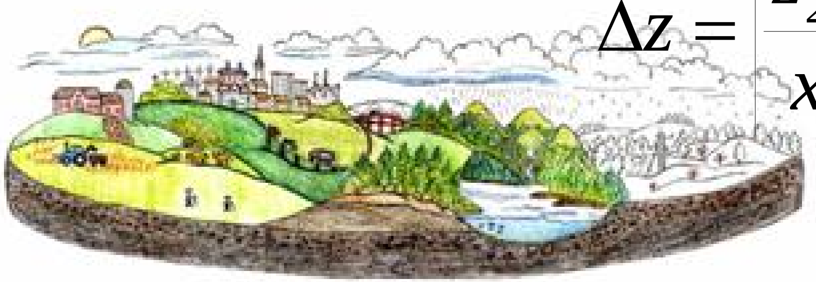
B. Relación lineal

En tablas de doble entrada

	y_1	y_2
x_1	z_{11}	z_{12}
x_2	z_{21}	z_{22}

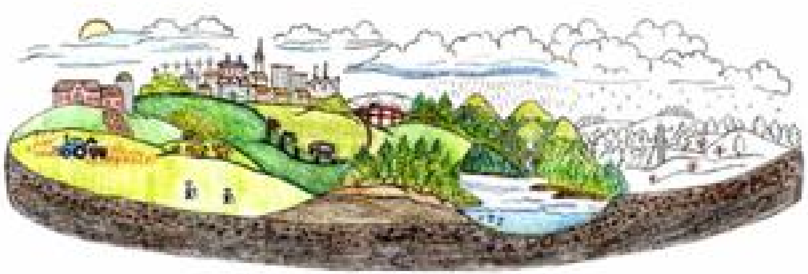
$$z = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}\left(y - y_1\right)$$

$$\Delta z = \left|\frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}\right|\Delta x + \left|\frac{z_{21} - z_{11}}{y_2 - y_1}\right|\Delta y$$



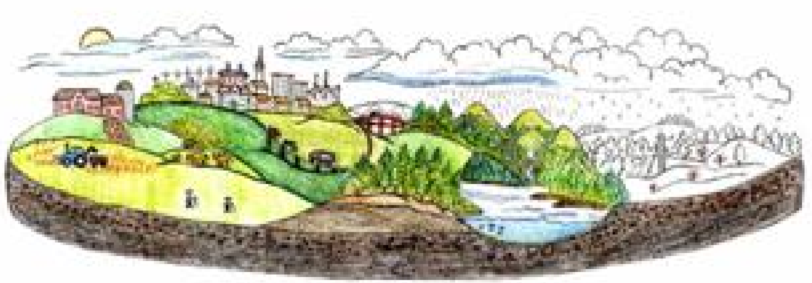
Programa

- **IB. Teoría de Errores. (2h)**
- Introducción. Errores y conceptos relacionados. Cuantificación de errores. Expresión de magnitudes físicas. Minimización de errores. Propagación de errores. Interpolación en tablas. Regresión y correlación.



Regresión y Correlación (Métodos cuantitativos de análisis gráfico)

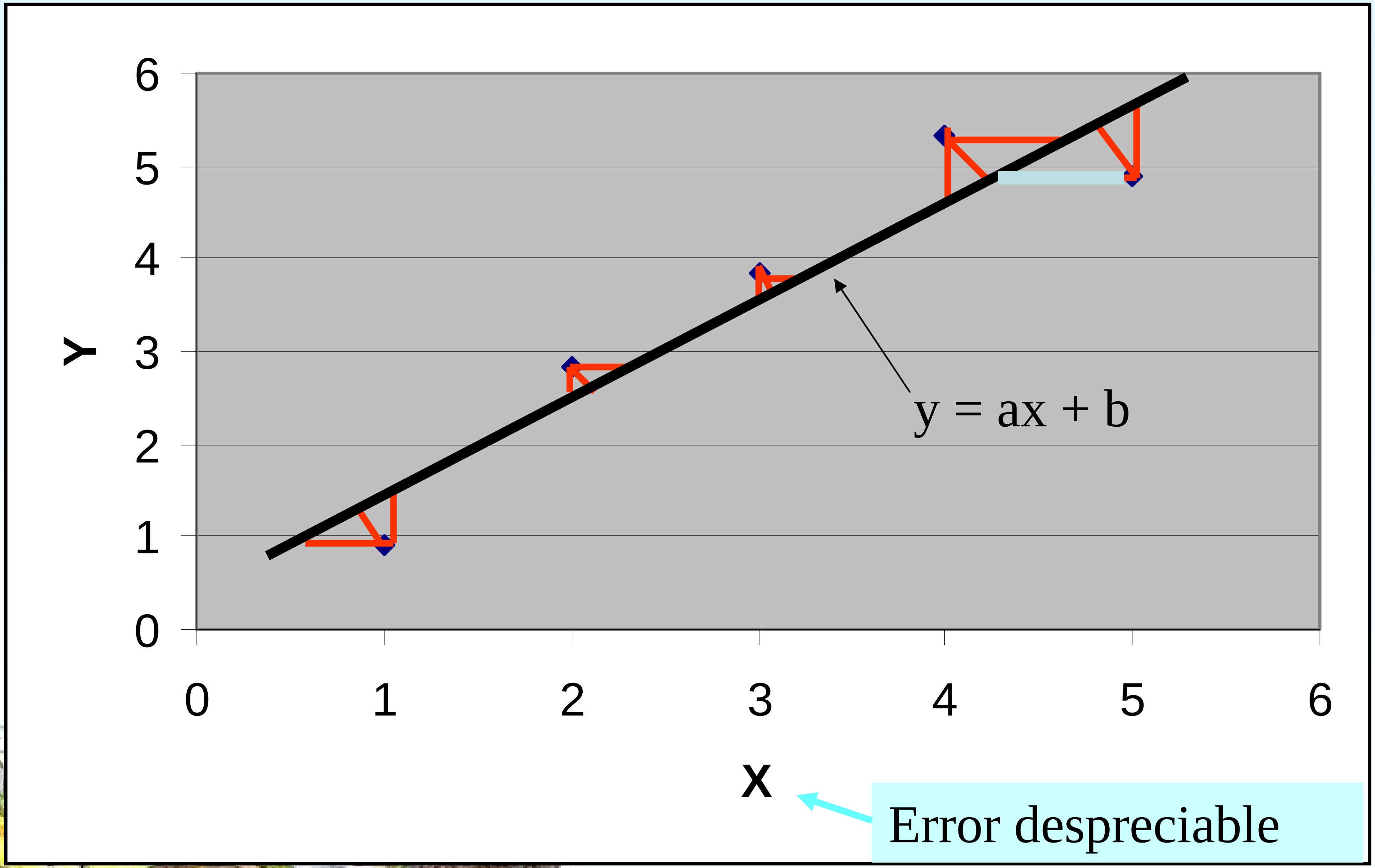
- Importancia de las representaciones gráficas
- Utilidad de las versiones linealizadas de los gráficos (X, Y)
- Distintas maneras de llevar a cabo una linealización



Regresión Lineal

- El método se llama también "mínimos cuadrados"
  - La relación analítica que mejor se ajusta a nuestros datos
  - La importancia de la elección del variable "independiente"

¿En que dirección?

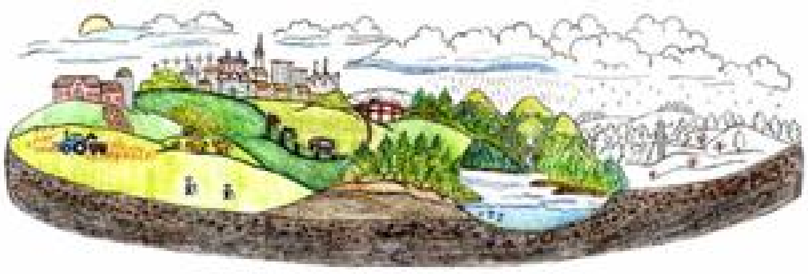


Suma de cuadrados (*Sum of squares*)

- Es útil definir la función χ^2 (Chi-cuadrado):

$$\chi^2 = \sum \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2$$

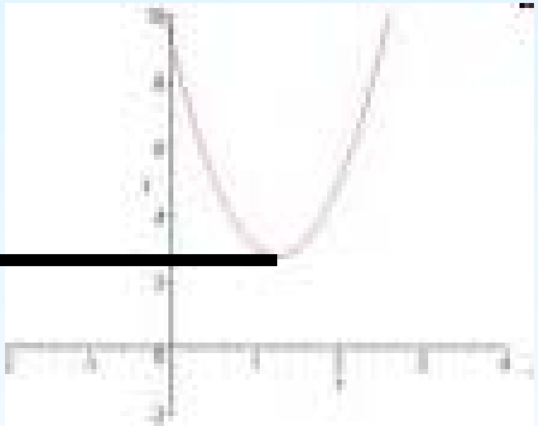
- Una medida de la desviación total de los valores observados y_i respecto de los predichos por el modelo lineal.
- Los mejores valores de la pendiente a y la ordenada en el origen b son aquellos que minimizan esta desviación total.



Mínimos cuadrados (*Least Squares*)

Como buscar el mínimo de una función cuadrática:

Primer derivado = 0

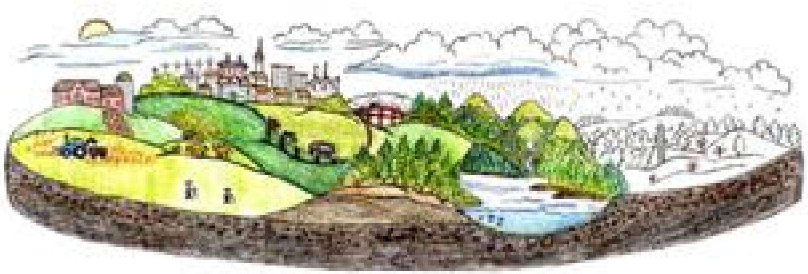


$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

$$a = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$



Bondad del ajuste (*Goodness of fit*)

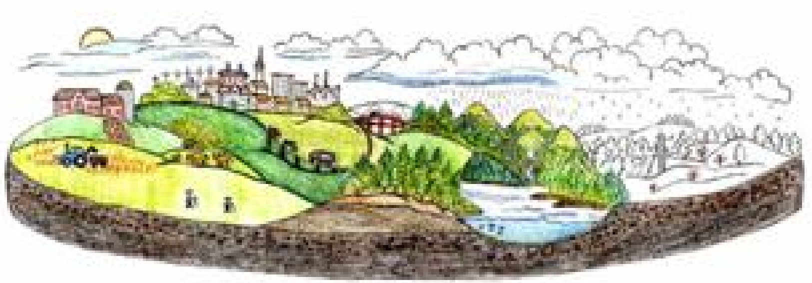
- El criterio de mínimos cuadrados es **objetivo**; reemplaza el juicio personal de quien mire los gráficos y defina cuál es la mejor recta.
- Además, da una posibilidad de estimar la bondad del ajuste, a través el coeficiente de correlación (r) entre las variables X e Y
- Muchas veces se presenta su cuadrado (R^2).

El coeficiente de correlación

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2 = < x^2 > - < x >^2$$

$$Var(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \right)^2 = < y^2 > - < y >^2$$

$$Cov(x, y) = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N^2} = < xy > - < x >< y >$$



$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

$$-1 \leq \rho \leq +1$$

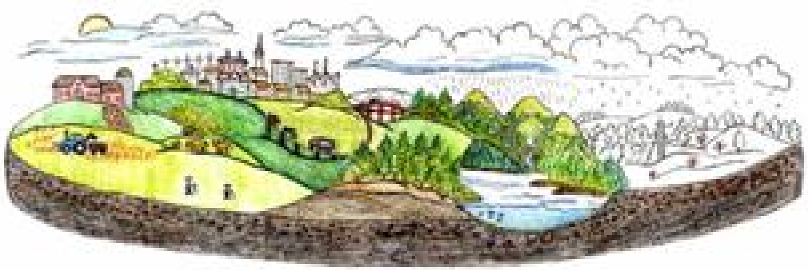
El coeficiente de correlación

- Describe la correlación entre los variables

- r = 0, los variables no son correlacionados
- r < 0, los variables son anti-correlacionados
- r > 0, los variables son correlacionados

  r = 0.95, mucha correlación

  r = 0.7, correlación, pero no mucho



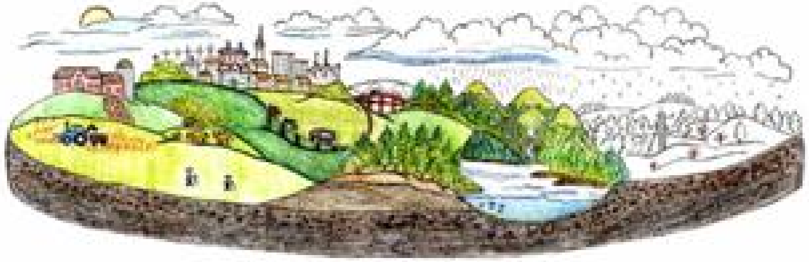
$$R^2 = \rho^2$$

- El cuadrado del coeficiente de correlación exprime el porcentaje de la varianza en los variables X y Y que explica el modelo lineal
  - r=0.95, el modelo explica 90% de la varianza
  - r=0.7, explica 49% de la varianza
  - r=0.3, explica 9% de la varianza

Otra ventaja del método

- Podemos estimar los errores asociados con los parámetros *a* y *b*

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot Var(x)}} \qquad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \cdot Var(x)}}$$

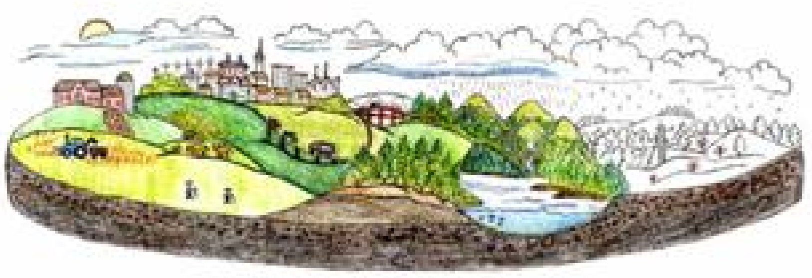


En función de ρ

- Las incertidumbres de a y b también pueden describirse así:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{a^2}{(N-2)}\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)} \qquad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle}$$

- Estas ecuaciones son **muy útiles**, ya que la mayoría de las hojas de cálculo y programas de ajuste indican *a*, *b* y ρ (ó a veces R^2).



Incertidumbre de los parámetros de un modelo general

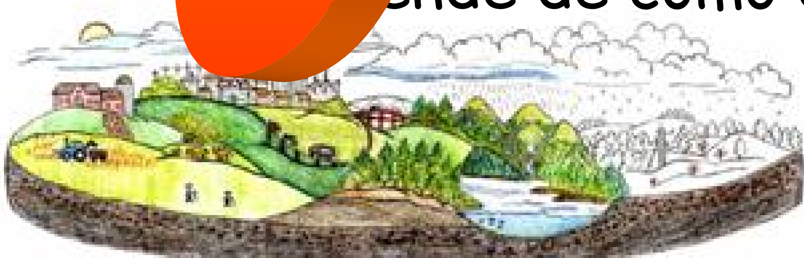
- Al igual que en el caso del ... minimiz... de la f...
- ...
- ... , ...?

...sficado

...rías y opiniones

...ende de cómo es de no-lineal

Chungo



Es preferible Transformar (a lo lineal)

- En general, es preferible
- Método: suponemos un modelo $y = a \ln(x)$
  - Definimos $z=\ln(x)$
  - Entonces: $y = a z (+ b)$
  - Buscamos ajuste lineal entre y & z
  - Podemos estimar los errores asociados con los parámetros *a* y *b*

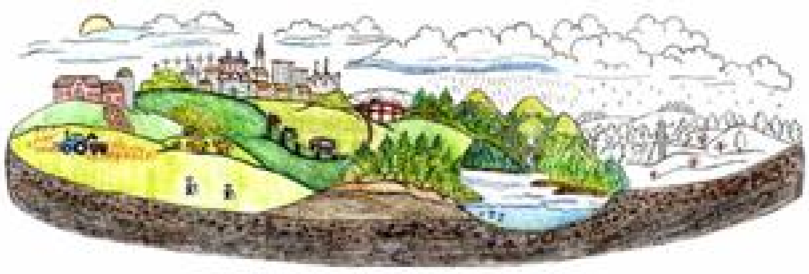
No gusta hacer muchos cálculos (tocar botones calculador)

- Muchos cálculos

$$a = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \qquad \sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot Var(x)}}$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \qquad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \cdot Var(x)}}$$

- Por eso tenemos ordenadores



Bases Físicas del Medio Ambiente

Lecciones

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

11 12 13 14

ANUNCIOS

¿Hora extraordinaria?

Lección Extraordinaria : Teoría de los Errores

Relaciones de Problemas

Materiales de Prácticas

Libro de Prácticas

Técnicas auxiliares de laboratorio

Normas del Laboratorio

Ayuda con la Regresión Lineal

Fin