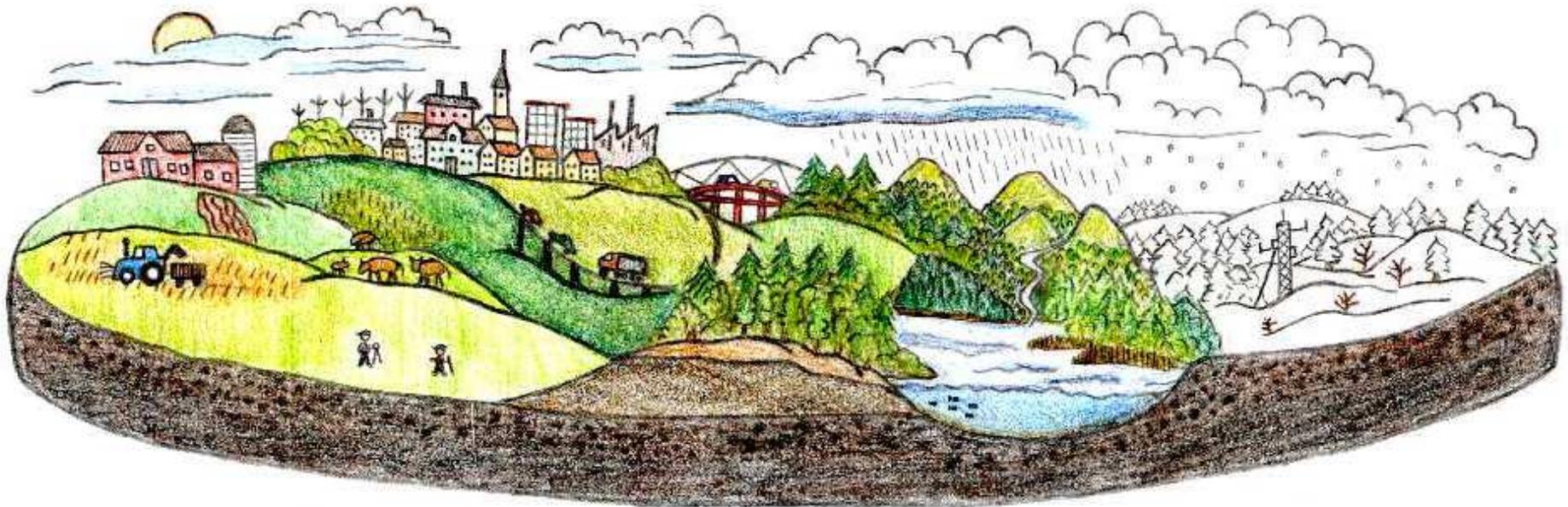


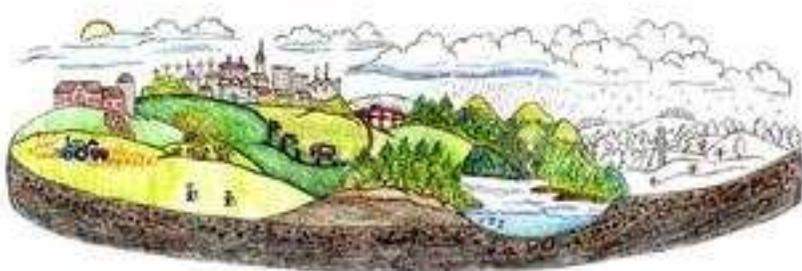
Bases Físicas del Medio Ambiente

Dinámica de Fluidos



Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



Programa

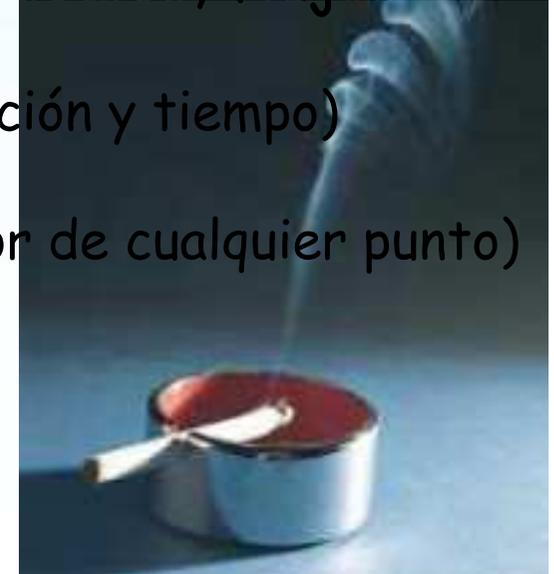
- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- **Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad.** Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



La hidrodinámica

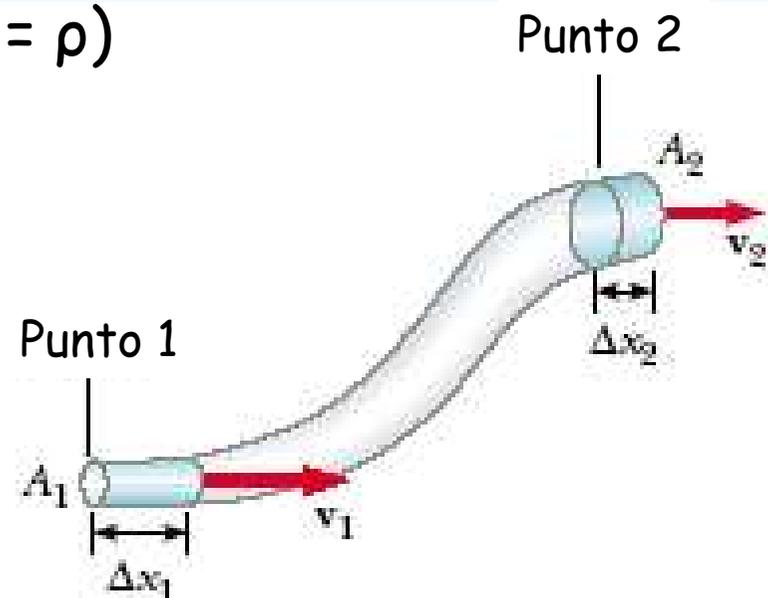
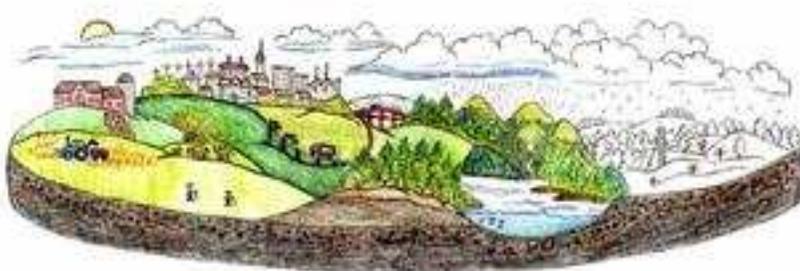
- Movimiento (flujo) de los fluidos Clases diferentes de interés (ordenados hacia simplicidad) **SIMPLIFICACIONES!**
 - Turbulento: caracterizado por regiones con remolinos (caótico)
 - Laminar: Capas del fluido fluyen paralelamente sin mezclarse
 - Estacionario
 - Velocidad no varía con tiempo, $v = v(x,y,z)$.
 - Líneas de corriente = trayectorias de partículas
 - Uniforme: velocidad en cada instante es igual en todos los puntos, $v = v(t)$
 - No viscoso: si se desprecia la viscosidad (fricción interna del fluido).
- Empezamos con lo más sencillo: los fluidos ideales, flujos

- Laminares
- **Incompresibles** (densidad independiente de posición y tiempo)
- No viscosos
- Irrotacionales (falta de inercia angular alrededor de cualquier punto)



Ecuación de continuidad

- Flujo de un fluido ideal en un tubo
- Empezamos en el punto 1 y un intervalo de tiempo Δt
 - Anchura del bloque de fluido que pasa la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
 - Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$
 - Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Principio físico: la masa se conserva
 - Punto 1: $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
 - Punto 2: $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$
- Para fluido incompresibles ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$)
$$A_2 v_2 = A_1 v_1$$
- Definimos el *caudal*: $Q = A v$
(unidades: $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)



Ejemplos Comunes

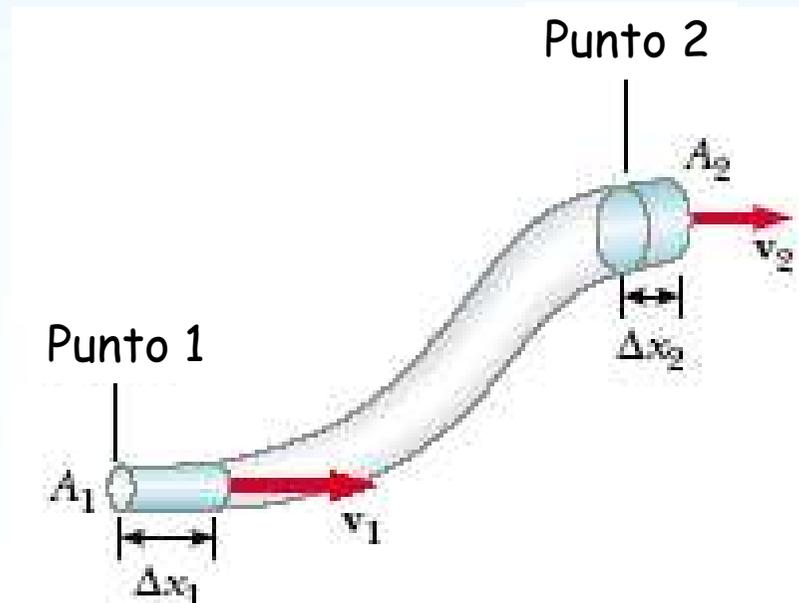
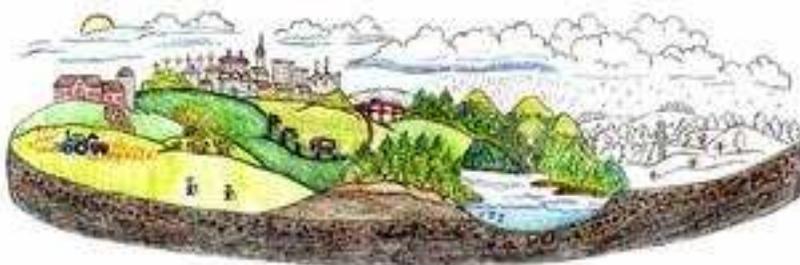
- Aceleración de agua en caída libre
 - Aumenta la velocidad
 - Disminuye el área del flujo
 - Caudal, $Av = \text{cte.}$



Ecuación de continuidad (Fluido compresible)

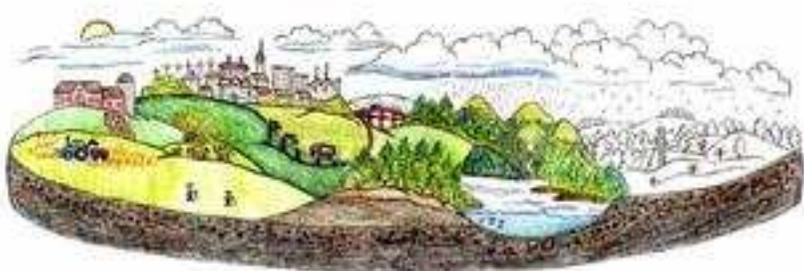
- Flujo compresible (ejm. Gases)
 - El término caudal no tiene sentido
 - Pero la masa aún se conserva
- En el punto 1
 - Anchura del bloque de fluido que pasa la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
 - Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$
 - Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Conservación de masa
 - Punto 1: $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
 - Punto 2: $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

$$\rho_2 A_2 v_2 = \rho_1 A_1 v_1$$



Programa

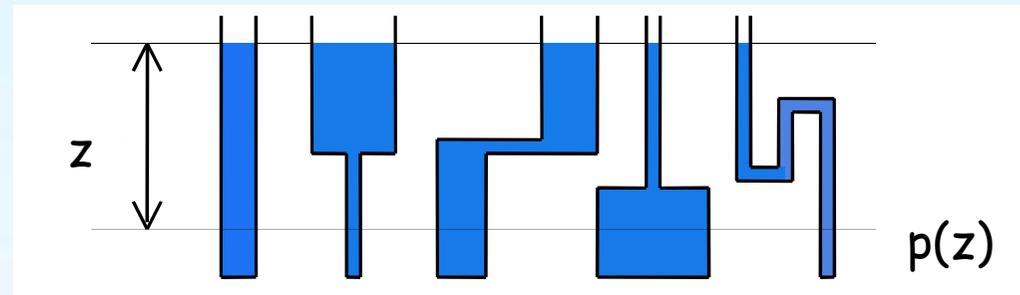
- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. **Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli.** Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



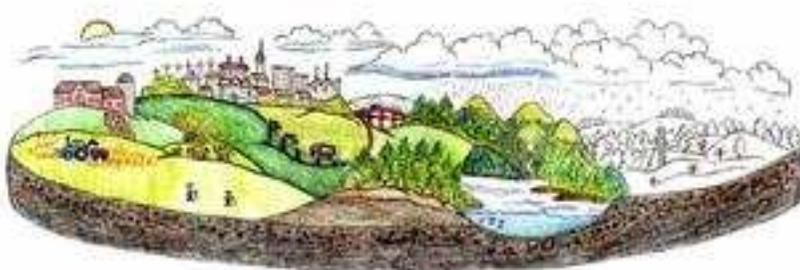
Presión estática

Presión Dinámica

- La presión hidrostática solo depende en z



- Para los fluidos en movimiento, hay otro factor que influye en la presión ($p_A < p_B$)



Daniel Bernoulli

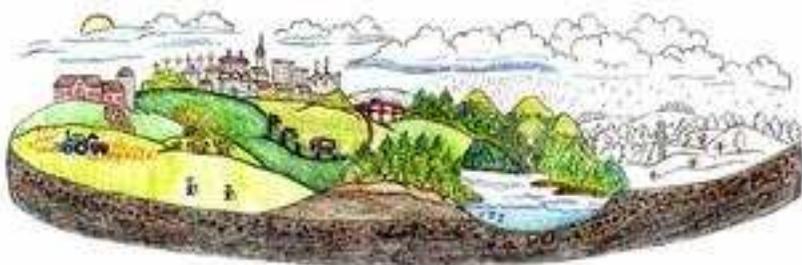
Físico Suizo (1700-1782)

- Publicación famosa:
Hydrodynamica (1738)
 - Demostró que la presión en un fluido disminuye cuando acelera (aumenta cuando decelera)



Daniel Bernoulli

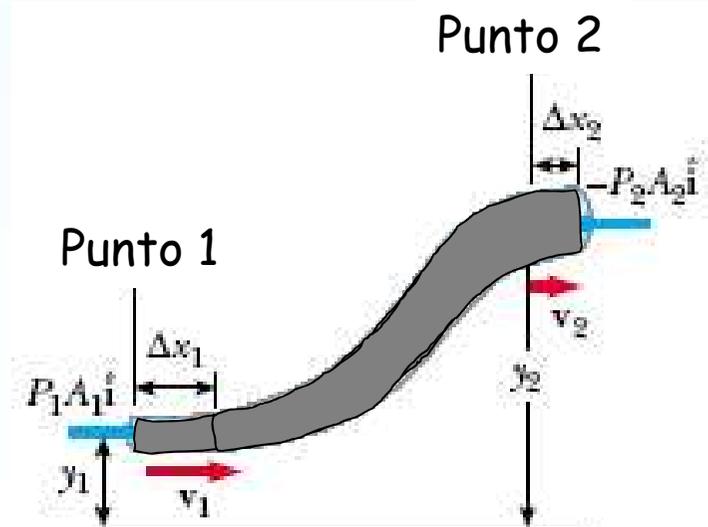
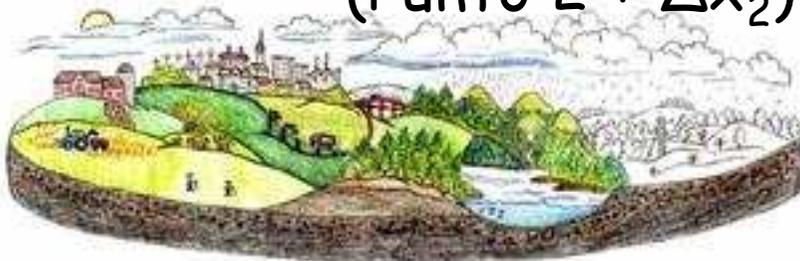
- Derivación:



Principio de Bernoulli

Derivación

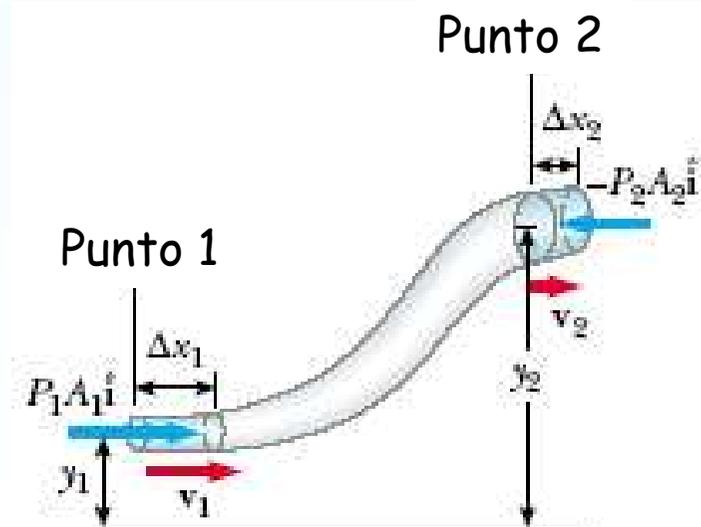
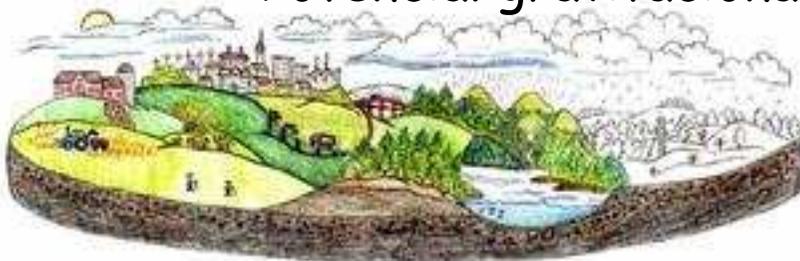
- Consideramos
 - Un volumen (masa) de fluido ideal
 - En un tubo (cuyo diámetro aumenta)
- La masa bajo consideración se halla
 - Al principio entre Punto 1 y Punto 2
 - Después de Δt entre
 - (Punto 1 + Δx_1) y
 - (Punto 2 + Δx_2)



Principio de Bernoulli

Derivación

- Consideramos el trabajo de las fuerzas actuando
 - Desde la izquierda tenemos
 - La fuerza $F_1 = P_1 A_1$
 - Ejerce un trabajo $W = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$
 - Y desde la derecha
 - La fuerza $F_2 = -P_2 A_2$
 - Ejerce un trabajo $W = F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 V$
(la fuerza opone el movimiento)
- Trabajo neta, $W = (P_1 - P_2) V$
- Sirve para aumentar la energía
 - Cinética (ΔK); y/ó
 - Potencial gravitacional (ΔU)



Principio de Bernoulli

Los cambios de energía

- Simplificación: (Estacionario) líneas de corriente

- La energía de la porción gris es constante

- ΔK se debe a la diferencia entre

- La parte con velocidad v_1 , y

- La parte con velocidad v_2

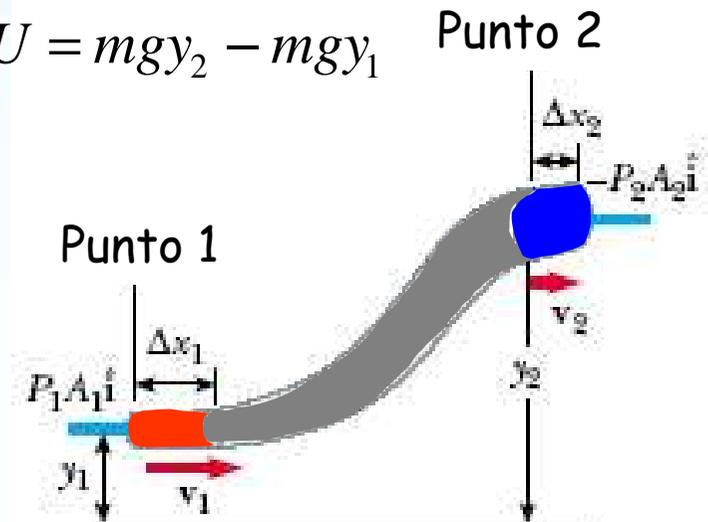
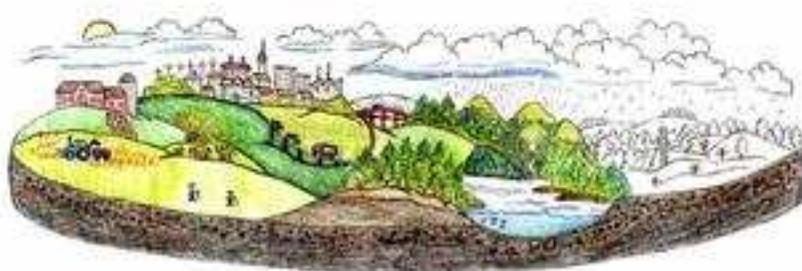
$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

- De igual manera, ΔU se debe a la diferencia de altura entre

- La parte con altura y_1 , y

- La parte con altura y_2

$$\Delta U = mgy_2 - mgy_1$$



Principio de Bernoulli

Los cambios de energía

- El trabajo neto sirve para cambiar la energía

$$W = \Delta K + \Delta U$$

$$(P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1$$

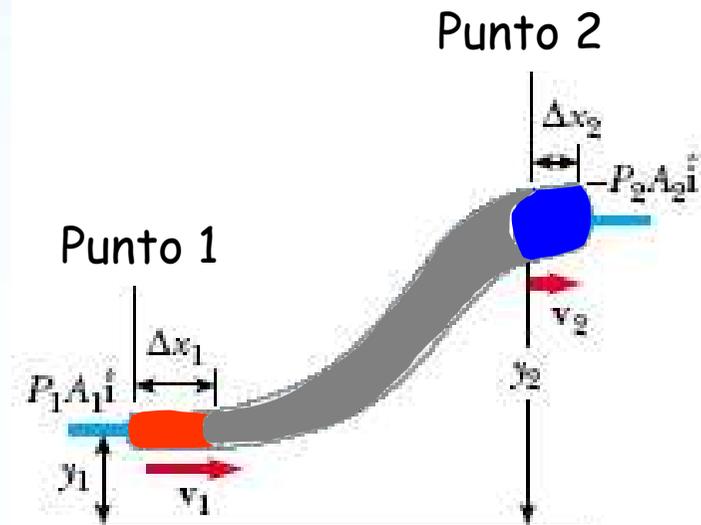
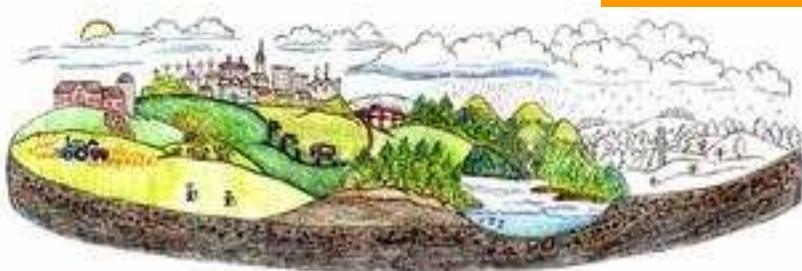
Si ahora dividimos por V y reconocemos que $\rho = m/V$ tenemos

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1$$

y con un poco de álgebra

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = cte$$



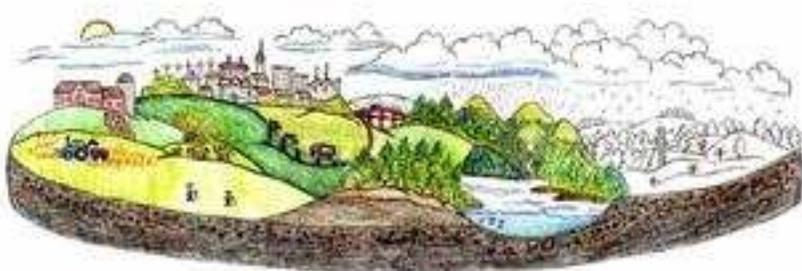
Principio de Bernoulli

Ejemplo

- La constructora de tu nuevo baño ahorra dinero comprando un tubo de 1 cm (diámetro) en vez de 2 cm como en el resto de la casa



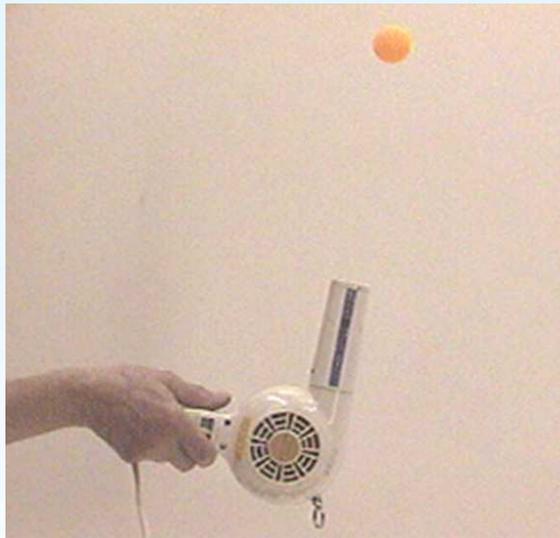
- ¿Dónde hay más presión?
 - A) En el tubo de 1cm?
 - B) En el tubo de 2cm?
 - C) Son iguales?



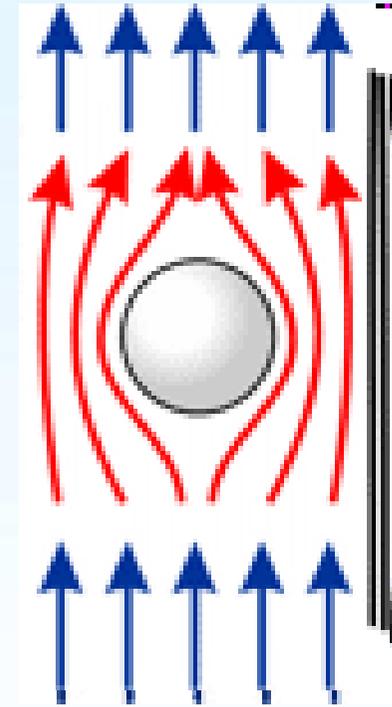
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte$$

Principio de Bernoulli

Cambios: velocidad y presión



- Baja velocidad y alta presión
- Alta velocidad y baja presión



Principio de Bernoulli

Aplicación Clásica

Antes: aplicamos la ecuación hidrostática para determinar la presión del agua en la casa

Ahora: vamos a ver lo que pasa cuando el agua fluye:

Bernoulli: $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2$

Hipótesis para simplificar
Presión atmosférica

$$v_1 \gg v_2$$

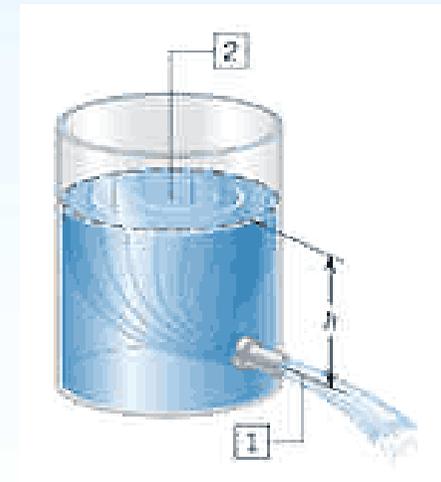


$$\frac{1}{2} v_1^2 = g(y_2 - y_1)$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Teorema de Torricelli

Velocidad \neq f(tamaño apertura)
(¿Caudal?)



Principio de Bernoulli

El metro de Venturi



Determinar la velocidad en un tubo, por mediciones de presión



Principio de Bernoulli

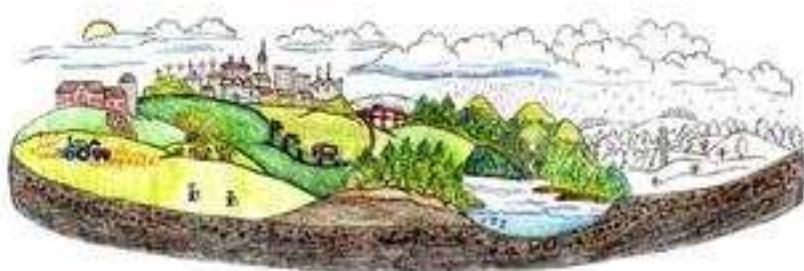
¿Cómo funciona el metro de Venturi?



Caudal,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\text{Bernoulli: } p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$



$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2 - p_1$$

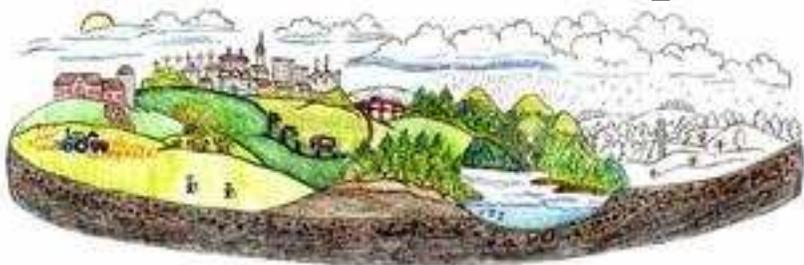
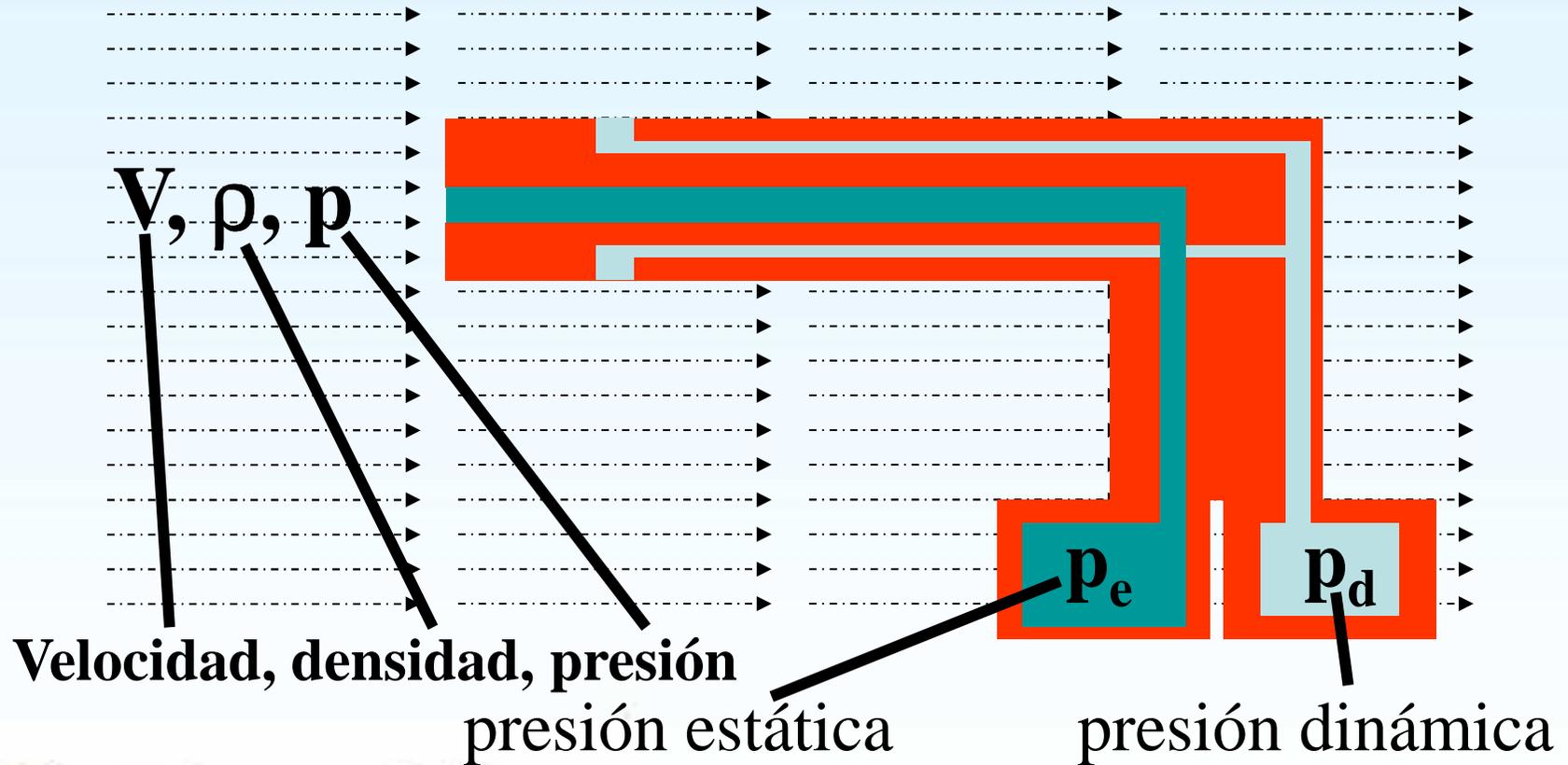
$$v_1^2 \left[1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right] = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}$$

$$v_1^2 \left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right] = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right]}}$$

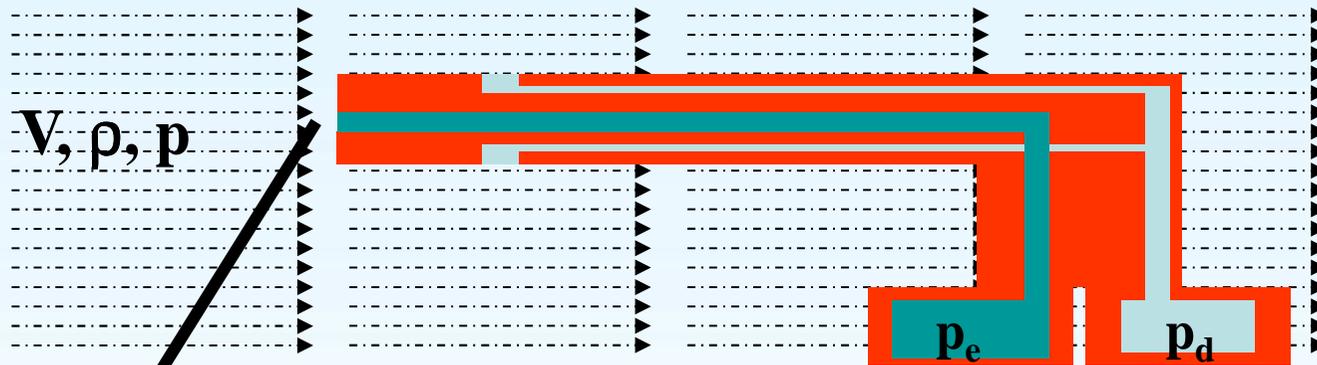
Principio de Bernoulli

Henry Pitot (1695-1771)



Principio de Bernoulli

El Tubo de Pitot



Punto de estagnación

$$p_e = \frac{1}{2} \rho V^2 + p_d$$

$$V = \left(\frac{2}{\rho} [p_e - p_d] \right)^{\frac{1}{2}}$$

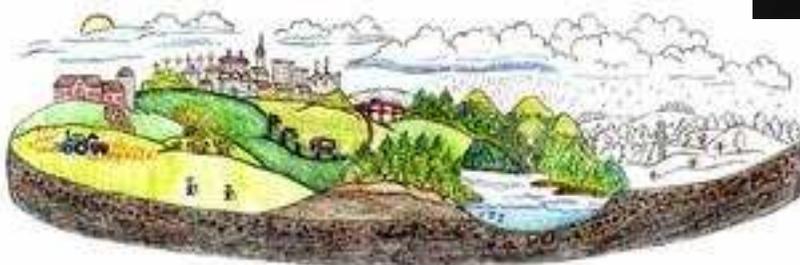


Principio de Bernoulli

La cavitación

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

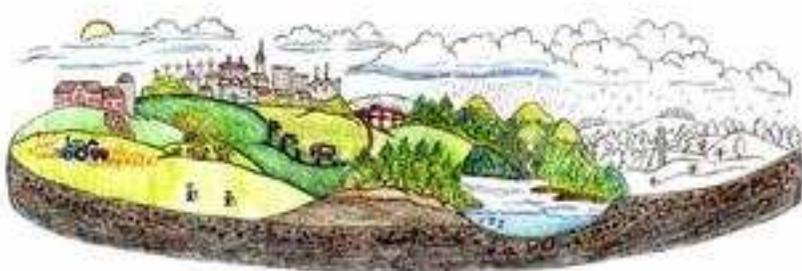
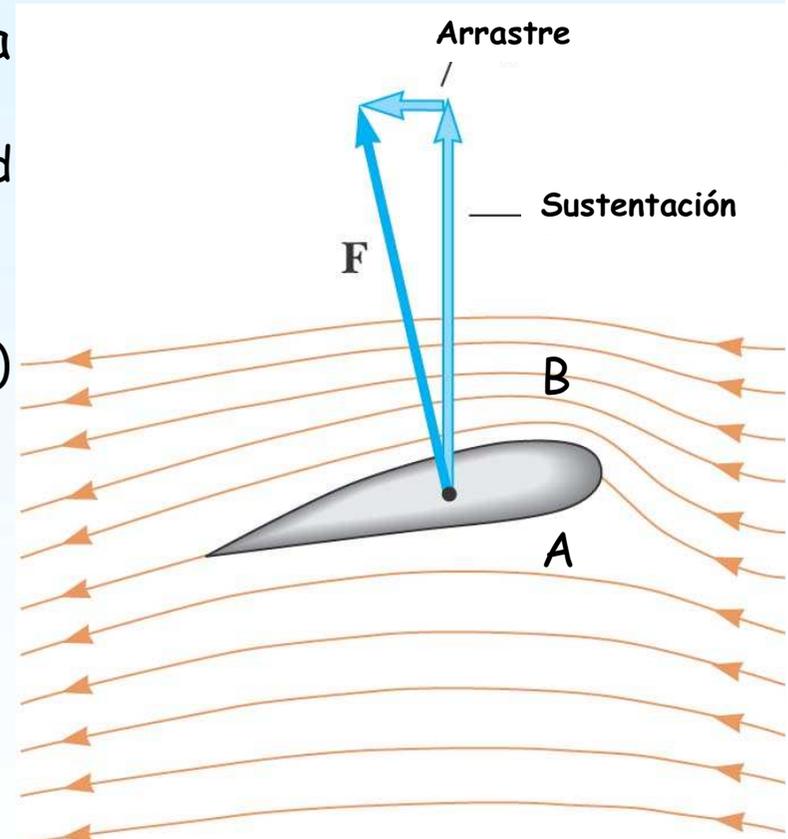
- En un fluido de alta velocidad, puede bajar tanto la presión que el líquido se vaporice (Lord Rayleigh; 1842-1919)
- Problemas
 - Ruido
 - Vibraciones
 - Pérdida de rendimiento
 - Daño a los elementos



Principio de Bernoulli

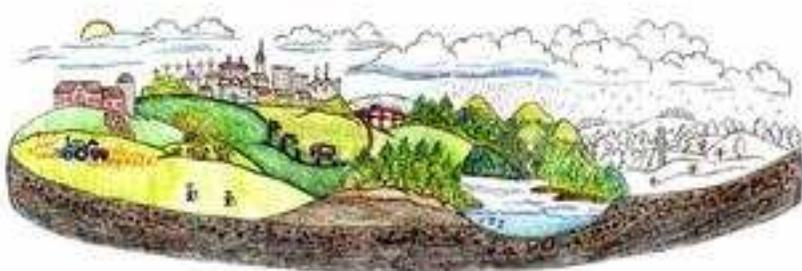
Vuelo de un avión

- Las líneas de corriente alrededor de una ala de avión en movimiento
 - La densidad de líneas refleja la velocidad
 - Bernoulli: alta velocidad \rightarrow baja presión
- La sustentación
 - Debido al gradiente de velocidad ($v_A < v_B$)
 - Hay un gradiente de presión ($p_A > p_B$)
 - Una fuerza neta hacia arriba
 - Depende de
 - La velocidad del avión (relativo al aire)
 - La ala (superficie, curvatura, ángulo)



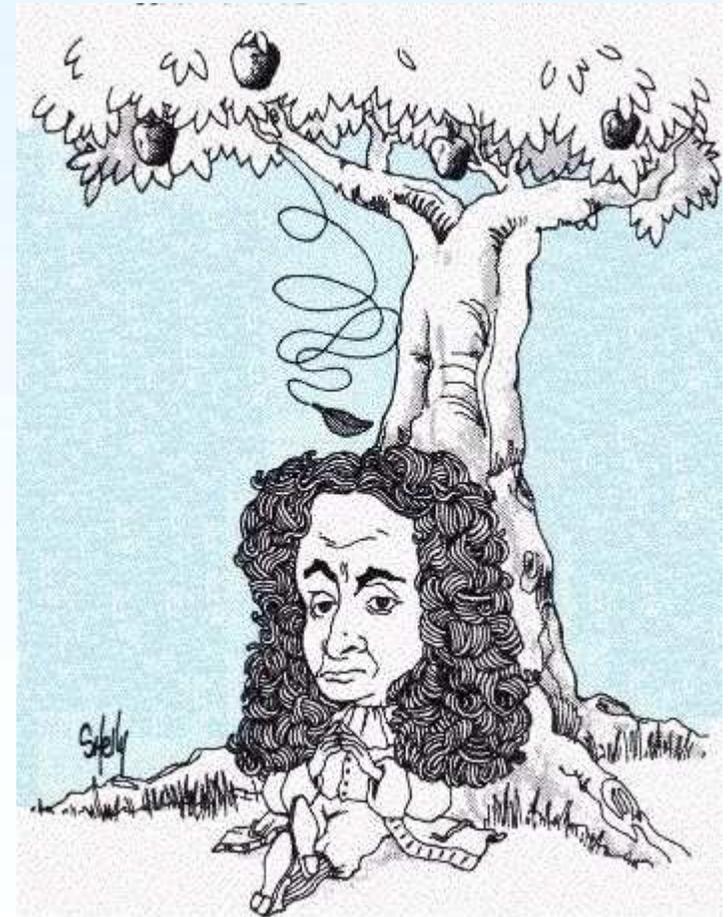
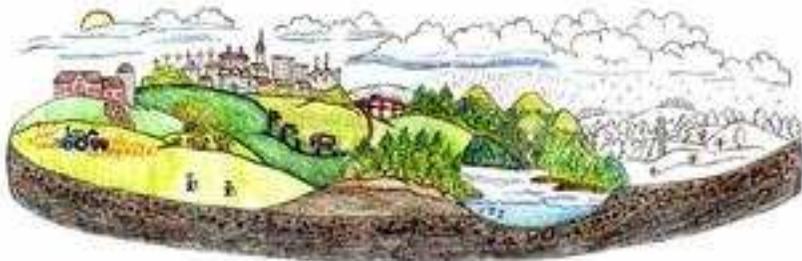
Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernouilli. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. **Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos.** Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite Flujo externo.. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



"Fluidos Reales"

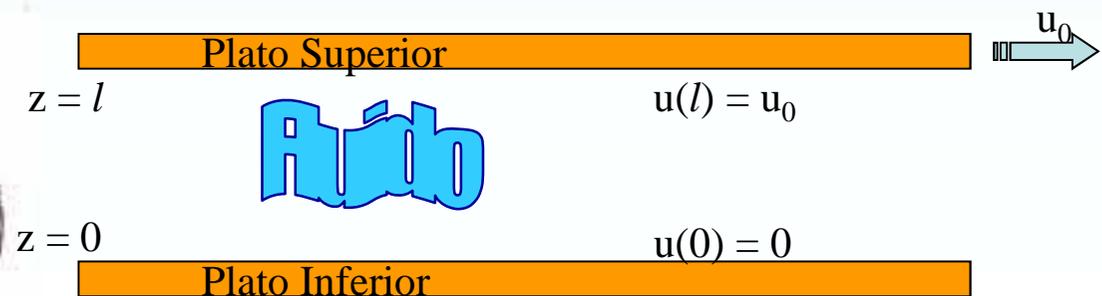
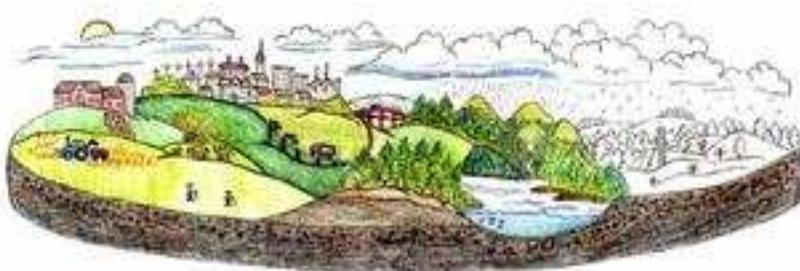
- Los fluidos *reales* (frente a ideales)
 - Resisten al deslizamiento entre capas
 - Fricción interna - "viscosidad"
- La viscosidad es más importante para ciertos fluidos
 - Comparar la caída de un ladrillo por 2m
 - En el aire / en el agua / en la miel
- La importancia de la viscosidad
 - Depende del fluido, pero también
 - Depende del flujo



<http://home.alltel.net/nelpi/newton.jpg>

Viscosidad (molecular)

- Consideramos dos platos (poco) separados por un fluido
 - El plato superior se mueve con velocidad u_0
 - El plato inferior no **fijo**; $u=0$
- Observaciones empíricas
 - En ausencia de otras fuerzas, el plato superior decelera
 - La deceleración depende en
 - La diferencia de las velocidades ($u_0 - 0 = u_0$)
 - La distancia (l) de separación
 - La superficie (A) de los platos
 - El fluido que interviene



Viscosidad (molecular)

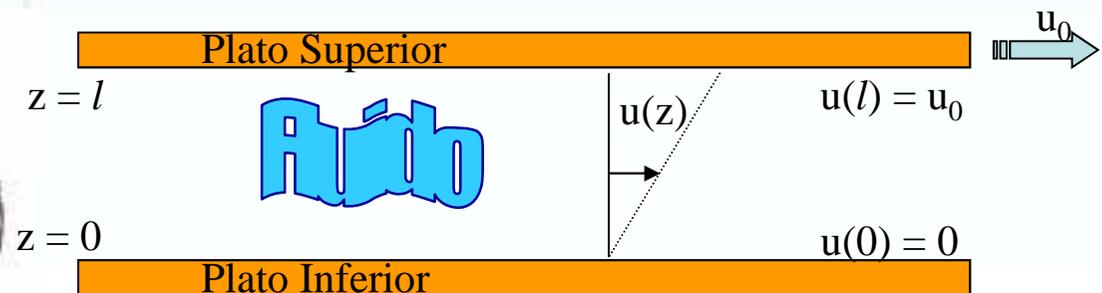
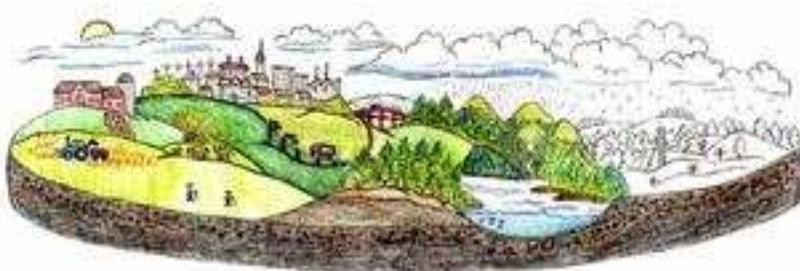
- Más observaciones empíricas

- La propiedad relevante del fluido es la viscosidad (μ)
- Entonces, la fuerza que decelera el plato superior es

$$F = \eta A \frac{u_0}{l} \quad \text{Característica de los fluidos "newtonianos"}$$

- En este caso (simple), la velocidad cambia linealmente
- En general, la relación es

$$F = \eta A \frac{du}{dz}$$



Viscosidad (molecular)

- La viscosidad

(unidades)

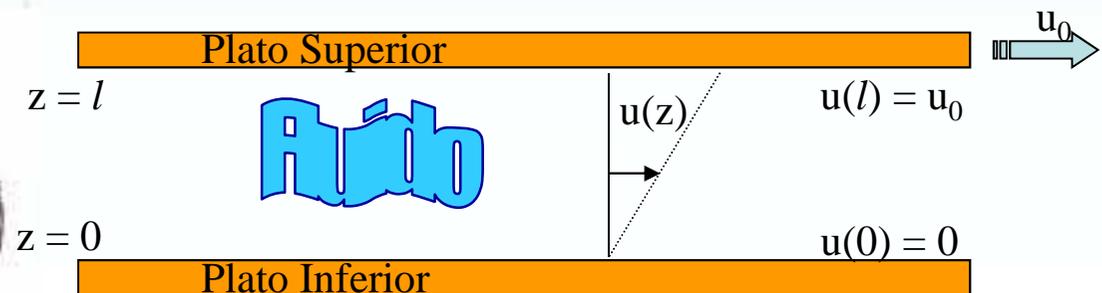
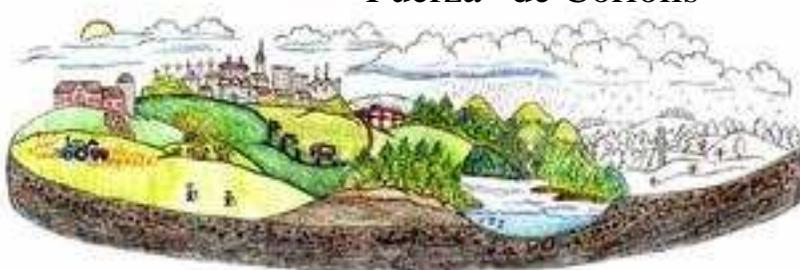
$$\eta = \frac{Fl}{uA} \sim \frac{(kg \cdot m \cdot s^{-2})(m)}{(m \cdot s^{-1})(m^2)} \sim Pa \cdot s$$

- Esta es la viscosidad absoluta (o dinámica)

- A veces se denota μ
- Siempre usaremos η

- A saber: hay otro tipo de viscosidad

- La viscosidad cinemática (ν) $\nu = \frac{\eta}{\rho}$
- Estudio de aceleraciones/fuerzas que no dependen de la masa de fluido
 - Debidas a la fuerza de gravedad
 - “Fuerza” centrífuga
 - “Fuerza” de Coriolis



Viscosidades de unos fluidos

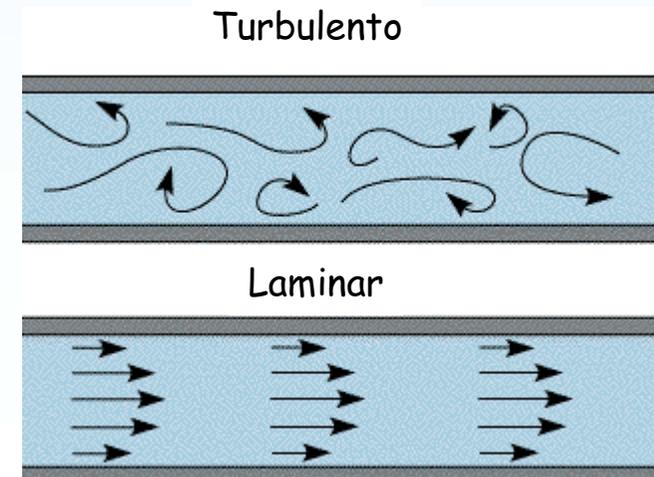
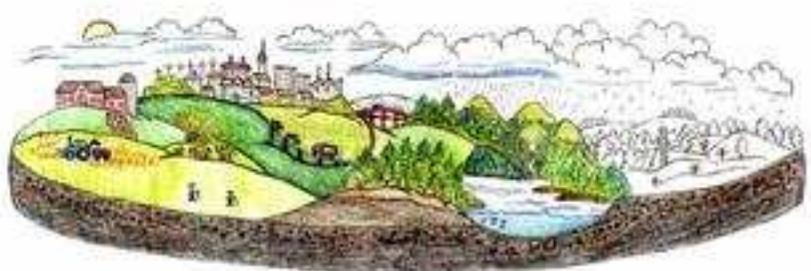
Fluido	T (°C)	η (10^{-3} Pa s)
Agua	0	1.8
	20	1.0
	100	0.3
Sangre	37	~4
Plasma de sangre	37	~1.5
Alcohol etilo	20	1.2
Aceite de motor	30	200*
Glicerina	20	1500
Aire	20	0.018
Hidrógeno	0	0.009
Vapor de agua	100	0.013



*mucho mayor a temperaturas bajas
(importante para los motores)

Programa

- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Fluidos ideales. Flujo estacionario. Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.



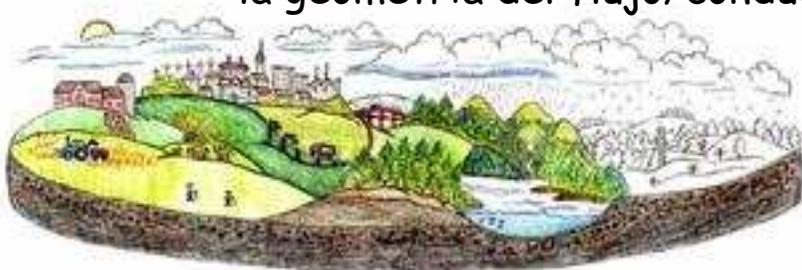
Régimen laminar y turbulento

- Imagen familiar - ambos regimenes

Laminar,
alta velocidad

Turbulento,
baja velocidad

La transición de flujo laminar a turbulento depende de
la velocidad v
la viscosidad η
la densidad del fluido ρ
la geometría del flujo/conducto



Régimen laminar y turbulento

¿Qué Importancia Tiene?

- Un flujo se retarda más cuando es turbulento
 - Flujo se pone turbulento → decelera
 - Fuerza adicional de arrastre (luego)
 - La presencia de la turbulencia cambia muchos aspectos de un flujo



El número de Reynolds

- Para flujo en un tubo, la iniciación de la turbulencia se puede predecir

$$Re = \frac{2vr\rho}{\eta} \sim \frac{\textit{inercia}}{\textit{fricción}}$$

- Una cifra adimensional. Por experiencia:
 - Si $Re < 2000$: flujo laminar
 - Si $Re > 3000$: flujo turbulento



Iniciación de la turbulencia

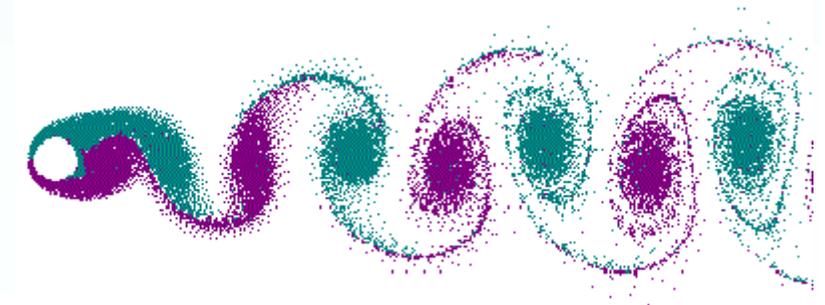
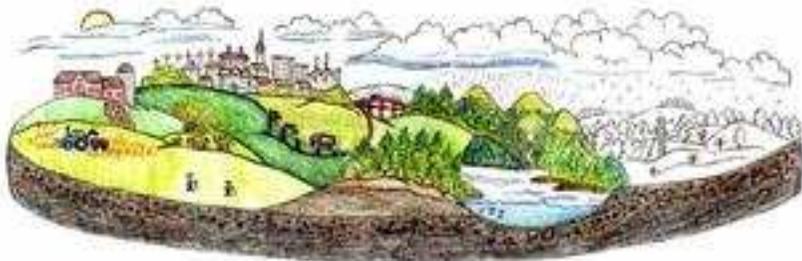


Imagen del satélite SeaWiFS
Isla de Guadalupe,
20 de agosto, 1999

- Un obstáculo puede accionar la turbulencia

$$Re' = \frac{vL\rho}{\eta}$$

- En función de su tamaño



Caída Libre de Gotas de Agua

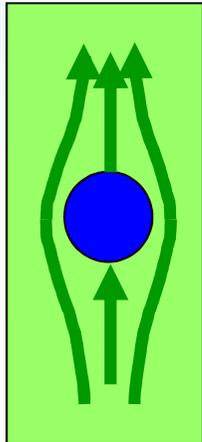
Flujo Viscoso

- En la caída de una gota de nube (agua líquida)
 - Acelera hasta lograr una velocidad límite (velocidad terminal)
 - Equilibrio entre la fuerza de gravedad, y la viscosa (F_v)

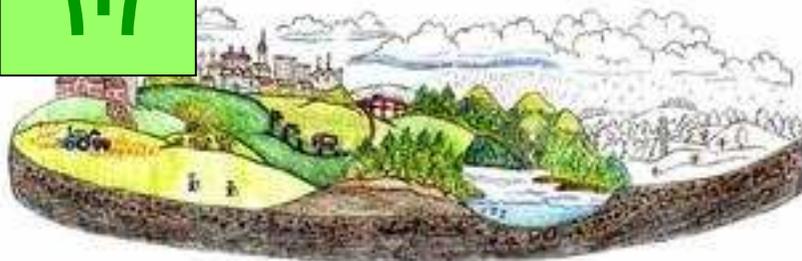
$$F_v = mg = \rho Vg = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) g$$

- Empíricamente, para $Re < 1$, se sabe que $F_v = kv$

Donde k depende de la viscosidad y el "tamaño", $k = 6\pi r \eta$



$$6\pi r \eta v = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) g$$



$$v = \frac{2 r^2 g \rho}{9 \eta}$$

Ley de Stokes,
(sin turbulencia)
para $r < 30\mu\text{m}$
 $Re < 1$

Caída Libre de Gotas de Agua

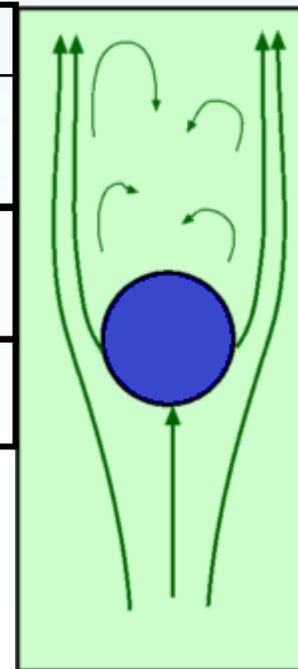
Flujo Viscoso \leftrightarrow Turbulento

- En la caída de una gota de lluvia
 - Sobresalta el valor crítico de Re
 - Se inicia la turbulencia, creación de una huella turbulenta ("wake")
 - La energía cinética (turbulenta) baja la presión (efecto Bernoulli)
 - El arrastre (por presión) es más eficaz para altas velocidades
- El incremento de velocidad con r no es tanto

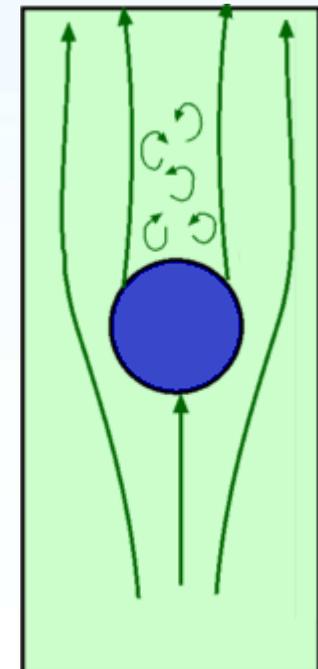
Régimen	Arrastre	Re	r (μm)	$v=f(r)$
Viscoso (Stokes)	Fricción	$Re < 1$	< 30	$V=c_1r^2$
Intermedio	Fricción Presión	$Re \sim 1$	40-600	$V=c_2r$
Turbulento	Presión	$Re \gg 1$	600-2000	$V=c_3r^{1/2}$



$Re > 1$

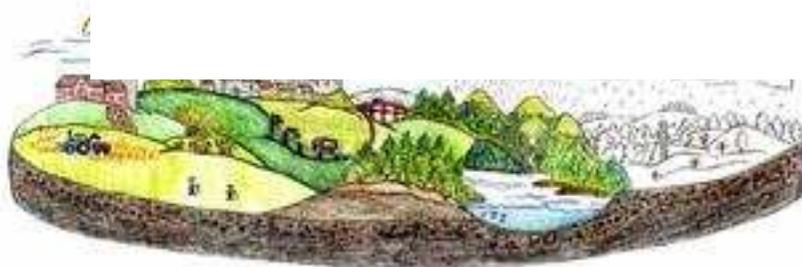
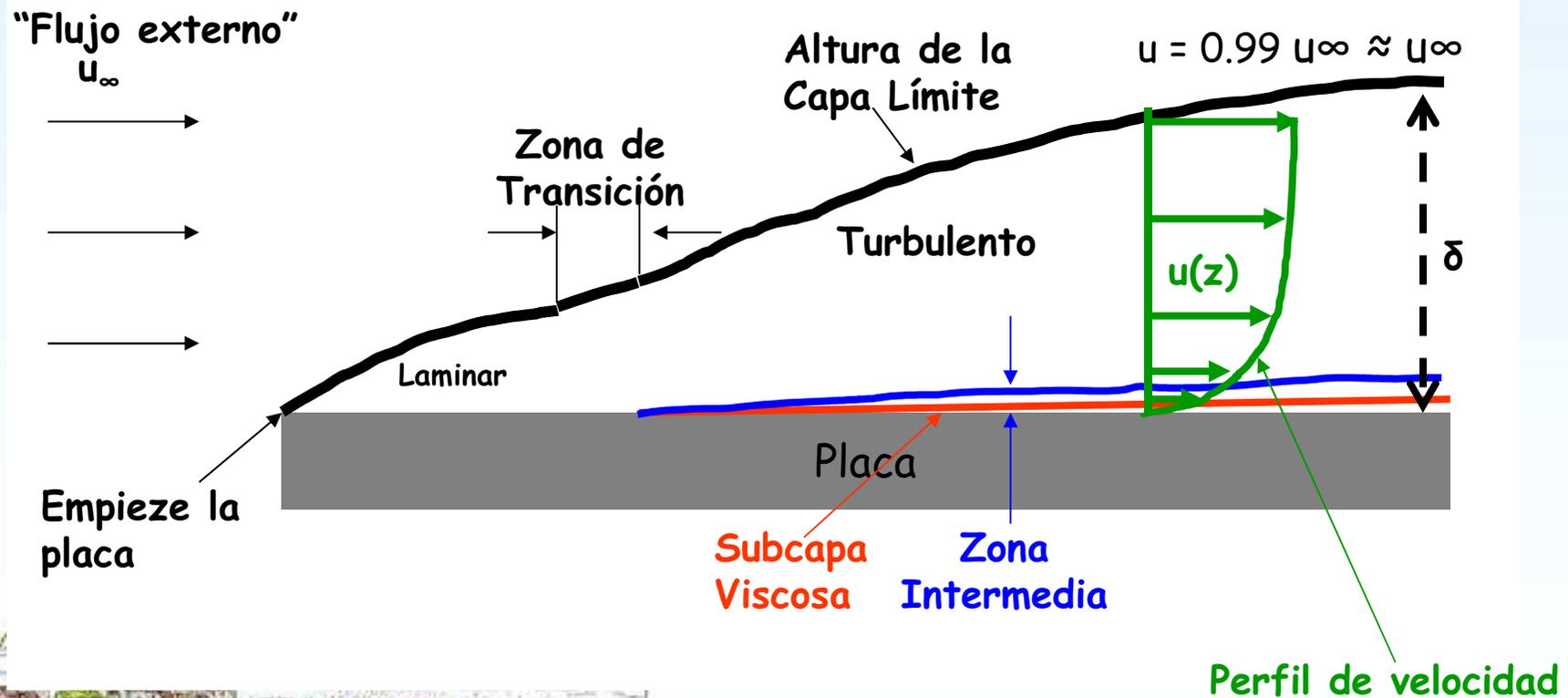


$Re \gg 1$



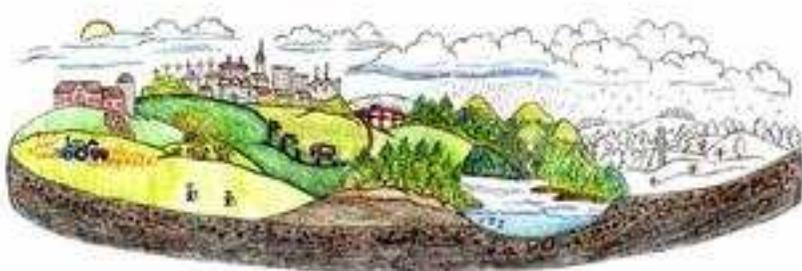
"Huella turbulenta" La Capa Límite

- Capa Límite de una placa



Programa

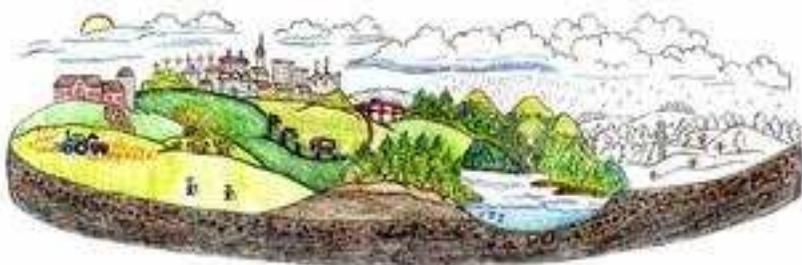
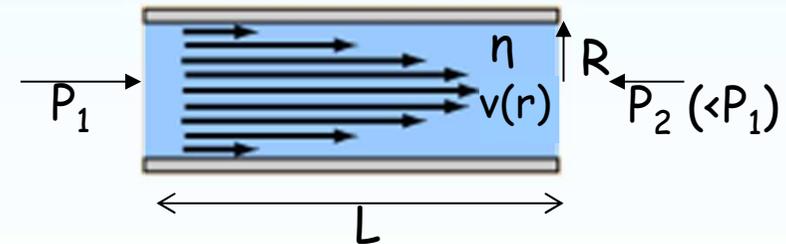
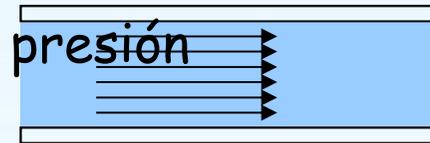
- **IV. DINÁMICA DE FLUIDOS. (3h)**
- Introducción. Flujo estacionario. Ecuación de Bernouilli. Ecuación de continuidad. Fluidos ideales. Aplicaciones de la ecuación de Bernouilli. Fluidos reales. Viscosidad. Fluidos newtonianos. Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds. Flujo viscoso. Capa límite. Flujo externo. **Flujo laminar en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.**



Flujo laminar en tubos

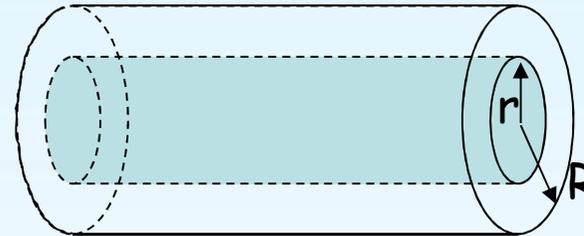
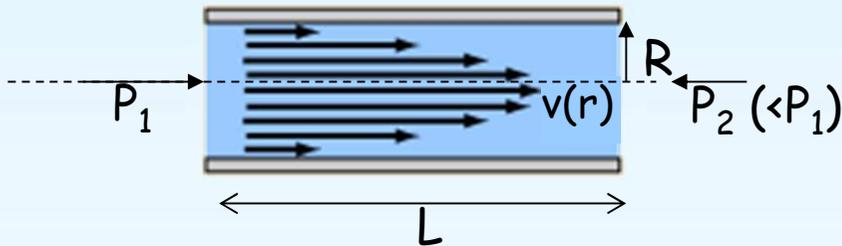
La Ley de Hagen-Poiseuille

- Un fluido ideal (sin viscosidad), fluiría por un tubo sin necesidad de una fuerza
 - Genial, pero en realidad no hay fluidos ideales
 - Fluido real: hace falta una diferencia de presión
 - Agua o aceite en un tubo
 - Sangre en el sistema circulatorio del organismo
- El flujo varía con el radio, y depende de
 - La diferencia de presión
 - Las dimensiones del tubo
 - La viscosidad



Flujo laminar en tubos

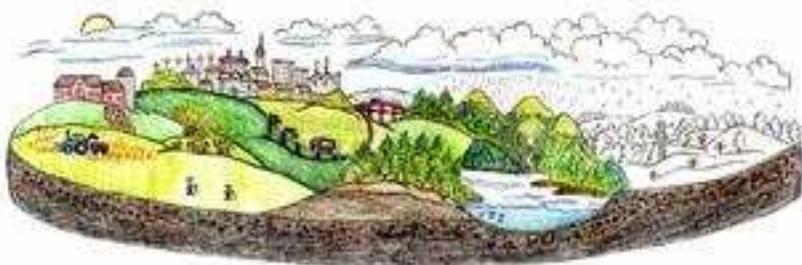
La Ley de Hagen-Poiseuille



- Consideramos un cilindro de fluido con radio r
 - La fuerza de impulsión F_i es
$$F_i = (P_1 - P_2)\pi r^2$$
 - La fuerza de arrastre F_a es
$$F_a = -\eta(2\pi r L) \frac{dv}{dr}$$
 - Igualando para buscar el equilibrio dr

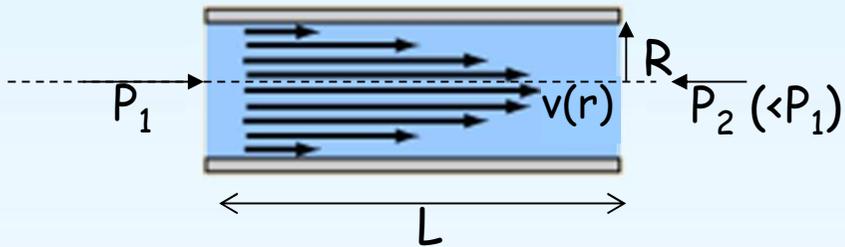
$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta(2\pi r L) \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$



Flujo laminar en tubos

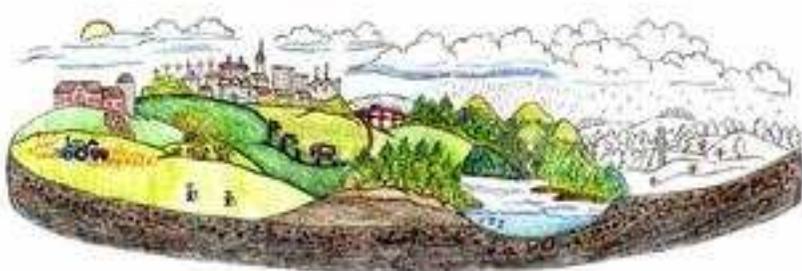
La Ley de Hagen-Poiseuille



$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$
$$\int_0^v dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L} \int_R^r r dr$$

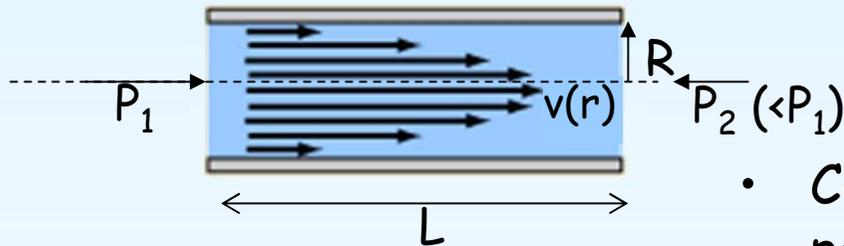
$$v = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r$$

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$



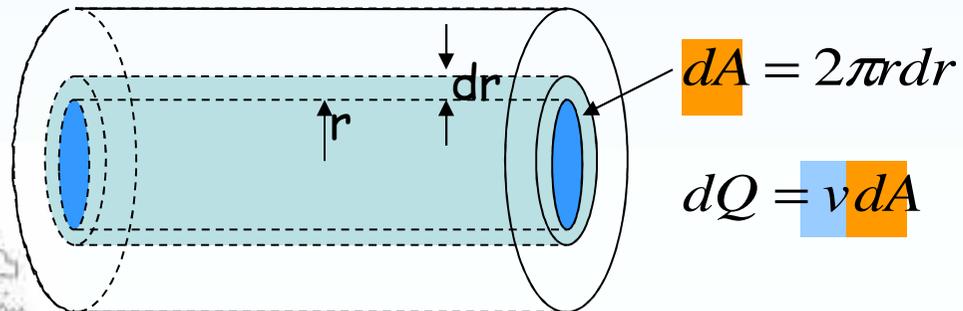
Flujo laminar en tubos

La Ley de Hagen-Poiseuille

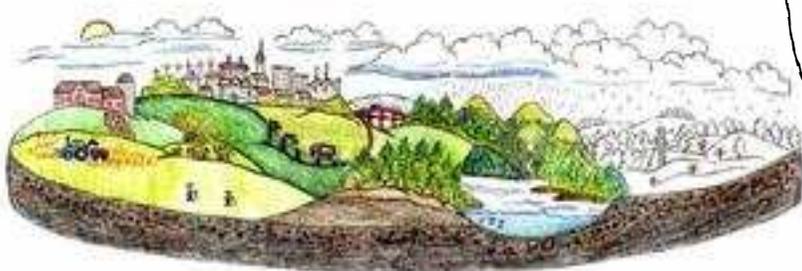


$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

- Con esta información sobre $v(r)$, podemos estimar el caudal del tubo
 - Problema: $v(r) \neq \text{cte}$
 - Pues, no es tan sencillo como $Q = Av$
- Truco: análisis por anillo de grosor dr con $v = \text{cte}$. (dentro del anillo)

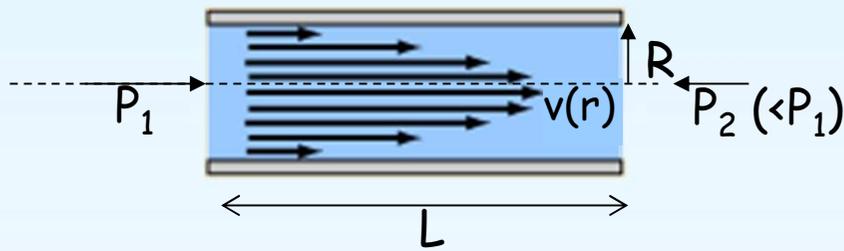


$$dQ = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

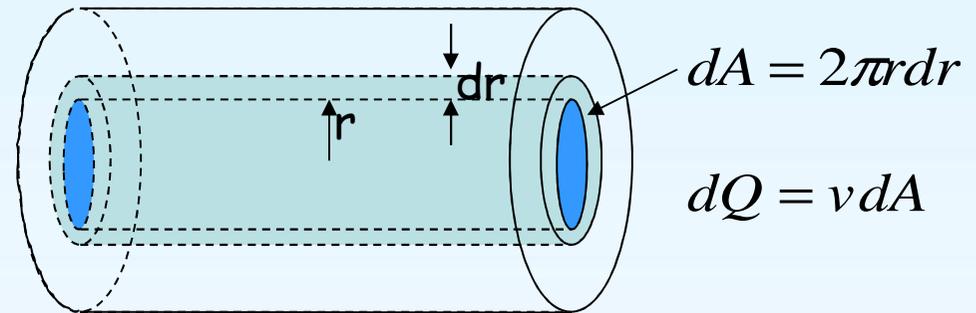


Flujo laminar en tubos

La Ley de Hagen-Poiseuille



$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

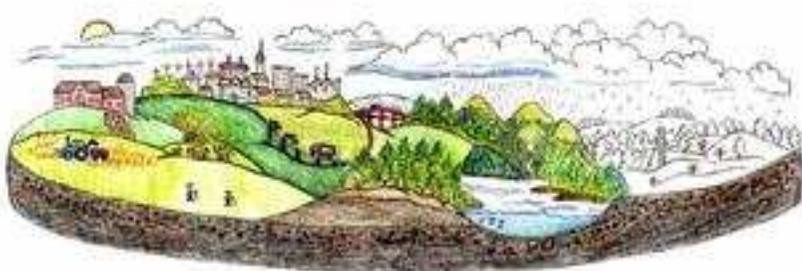


$$dQ = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$Q = \int_{r=0}^{r=R} dQ = \frac{\pi (P_1 - P_2)}{2\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$= \frac{\pi (P_1 - P_2)}{2\eta L} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$= \frac{\pi (P_1 - P_2) R^4}{8\eta L}$$



Conceptos/Ecuaciones a Dominar

- Continuidad:

- $\rho_2 A_2 v_2 = \rho_1 A_1 v_1$
- Incompresible: *caudal*: $Q = A v = cte$

- Presión dinámica (Bernoulli):

- Torricelli $v_1 = \sqrt{2gh}$
- Venturi
- Pitot $V = \left(\frac{2}{\rho} [p_e - p_d] \right)^{\frac{1}{2}}$
- Sustentación

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = cte$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right]}}$$

- Viscosidad

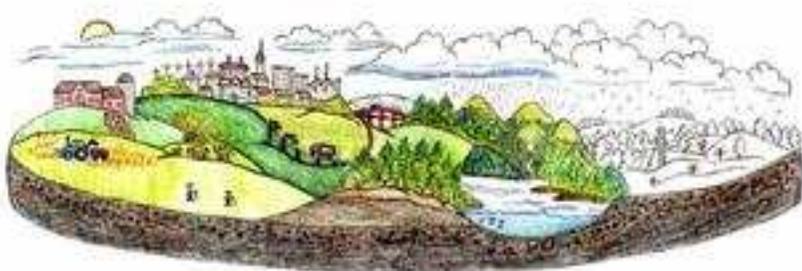
$$F = \eta A \frac{u_0}{l}$$

- Número de Reynolds

$$Re = \frac{2vr\rho}{\eta}$$

- Significación
- Relaciones: inercia, fricción, arrastre
- Capas Límites

- Hagen-Poiseuille: balance entre fricción y (Δ presión)



Fin

