Geometría II. Grado en matemáticas
Examen parcial. Curso 2013-2014. Grupo B

1. Se consideran las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix},$$

   donde α es un parámetro real. Se pide lo siguiente:

   a) (2'25p) Discutir razonadamente para qué valores de α la matriz A es diagonalizable. Para todos esos valores, encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   b) (1'75p) Calcular la signatura y clasificar la métrica g en $\mathbb{R}^3$ con $M_{B_u}(g) = C$.

   c) (2p) ¿Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que A y C sean semejantes? ¿Y congruentes?

   d) (1p) Utilizar lo obtenido en b) para encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 16yz = 0$.

2. Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

   a) (1'5p) Demostrar que toda matriz simétrica de orden dos con coeficientes reales es diagonalizable (por semejanza).

   b) (1'5p) Sea g una métrica sobre un espacio vectorial V de dimensión n. Demostrar que el índice de g coincide con la dimensión máxima que tienen los subespacios vectoriales U de V tales que la restricción de g a U es una métrica definida negativa.

Duración: 2 horas

Granada, 30 de abril de 2014

SOLUCIONES

Ejercicio 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

a) Para estudiar cuando A es diagonalizable usaremos el teorema fundamental de diagonalización. Necesitamos calcular los valores propios de A y sus multiplicidades.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & \alpha \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda)^2 + 9(2+\lambda)$$

$$= -(2+\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda)+18+9\lambda$$

$$= -2\underline{-2\lambda^2}+4\lambda-\lambda-\lambda^3\underline{+2\lambda^2}+18+9\lambda = -\lambda^3+12\lambda+16$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3+12\lambda+16.$$

Los valores propios son las raíces de $p_A(\lambda)$. Usamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 0 & 12 & 16 \\ 4 & & -4 & -16 & -16 \\ \hline & -1 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & & 2 & 4 & \\ \hline & -1 & -2 & 0 & \\ -2 & & 2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda+2)^2$

Por tanto, hay 2 valores propios, que son:

$$\begin{cases} 4 & m_4 = 1 \\ -2 & m_{-2} = 2 \end{cases}$$

Nótese que $m_4 + m_{-2} = 3$ con lo que siempre se cumple la primera condición en el teorema de diagonalización

A será diagonalizable $\Longleftrightarrow$ $d_4 = 1$ y $d_{-2} = 2$. Lo primero siempre se tiene, ya que $m_4 = 1$ y $1 \leq d_4 \leq m_4$.

Por tanto A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ $d_{-2} = 2$.

$$d_{-2} = 3 - rg\,(A + 2I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 2 & si\ \alpha = 0 \\ 1 & si\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

<u>Conclusión</u>: A es diagonalizable $\Longleftrightarrow \alpha = 0$.

Ahora buscamos, en el caso $\alpha = 0$, una matriz regular P tal que $P^{-1}.A.P = I_3$. Basta con buscar una base de vectores propios del endomorfismo $f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $M_{B_u}(f_A) = A$.

$$V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & \overset{\alpha=0}{\alpha} \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -6y + \overset{\alpha=0}{\alpha} z = 0 \\ 3x \quad - 3z = 0. \end{cases}$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(V_4) = d_4 = 1$, basta elegir una solución no trivial del sistema anterior. $B_4 = \{(1, \underset{\uparrow\ \alpha=0}{-\alpha}, 1)\}$ base de V_4

Por ejemplo $v_1 = (1, -\underset{\alpha=0}{\alpha}, 1)$

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A + 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x \quad + z = 0.$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(V_{-2}) = d_{-2} = 2$, habrá que elegir 2 vectores lin. ind. que cumplan el sistema anterior. Así, $B_{-2} = \{(0,1,0), (1,0,-1)\}$ es base de V_{-2}. Por último una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f_A sería: $B = B_4 \cup B_{-2} = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$. Por tanto, la matriz regular buscada sería $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y sabemos que

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Sin más que mirar la diagonal de C vemos que $g(e_2, e_2)=1$ y $g(e_3, e_3)=-1$. Por tanto, g es indefinida. Para calcular $\operatorname{sign}(g)$ obtenemos una base conjugada $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ para g. Nótese que $|C|=16\neq 0$. Por tanto $\operatorname{rg}(g)=\operatorname{rg}(C)=3$ y $\operatorname{nul}(g)=\dim_{\mathbb{R}} N(g)=0$. Así, $N(g)=\{0\}$ y g es no degenerada.

Por el Teorema de Sylvester tendremos $M_B(g)=\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$ donde cada $*$ es un número real no nulo.

Buscamos $v_1 \in \mathbb{R}^3$ con $\omega(v_1)\neq 0$. Mirando la diagonal de C vemos que $\omega(e_2)=g(e_2, e_2)=1\neq 0$. Elijo $\boxed{v_1=e_2=(0,1,0)}$.

Buscamos $v_2=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{cases} v_2 \in \operatorname{Conj}(v_1), \text{ es decir, } g(v_1, v_2)=0, \\ \omega(v_2)=g(v_2, v_2)\neq 0, \\ \{v_1, v_2\} \text{ son lin. ind.} \end{cases}$$

Utilizando la expresión matricial de g en B_u tenemos:

$$0=g(v_1, v_2)=(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(1\ 1\ 8)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=x+y+8z$$

Elijo $\boxed{v_2=(1,-1,0)}$, que es claramente lin. ind. con v_1. ¿$\omega(v_2)\neq 0$?

$$\omega(v_2)=g(v_2, v_2)=(1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=(-1\ 0\ -7)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=-1\neq 0.$$

Buscamos $v_3=(x,y,z)$ tal que:

$$\begin{cases} v_3 \in \operatorname{Conj}(v_1)\cap \operatorname{Conj}(v_2), \text{ es decir, } g(v_1, v_3)=g(v_2, v_3)=0 \\ \omega(v_3)=g(v_3, v_3)\neq 0. \\ \{v_1, v_2, v_3\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$0=g(v_1, v_3)=\text{----} \text{ (ya se hizo antes) } \text{----} = x+y+8z$$

$$0=g(v_2, v_3)=(1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(-1\ 0\ -7)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-x-7z$$

$$\begin{cases} x+y+8z=0 \\ -x \qquad -7z=0 \end{cases}$$ Elijo $\boxed{v_3=(7,1,-1)}$. ¿$\omega(v_3)\neq 0$?

$w(v_3) = g(v_3, v_3) = (7\ 1\ -1)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&8\\1&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\\-1\end{pmatrix} = (0\ 0\ 16)\begin{pmatrix}7\\1\\-1\end{pmatrix} = -16 \neq 0.$

Además $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, ya que $\begin{vmatrix}0&1&7\\1&-1&1\\0&0&-1\end{vmatrix} = +1 \neq 0.$

Por construcción, B es una base conjugada para g. Además:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} w(v_1) & & \\ & w(v_2) & \\ & & w(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-16\end{pmatrix}.$$

Por tanto $\text{sign}(g) = (1, 2)$ y g es indefinida, como ya sabíamos.

c) ¿A y C semejantes? Para ello, es necesario (y no suficiente en general) que:
$rg(A) = rg(C)$, $|A| = |C|$, $tr(A) = tr(C)$, $P_A(\lambda) = P_C(\lambda)$.
$|A| = |C| = 16 \Rightarrow rg(A) = rg(C) = 3.$
Además $tr(A) = tr(C) = 0$. ¿$P_A(\lambda) = P_C(\lambda)$?
Sabemos que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$. Por otro lado:

$$P_C(\lambda) = |C - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 8 \\ 1 & 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 67\lambda + 16$$

Como $P_A(\lambda) \neq P_C(\lambda)$ independientemente de α, concluimos que A y C nunca serán semejantes.

¿A y C congruentes? Como C es simétrica, una condición necesaria para que A y C sean congruentes es que A sea también simétrica, es decir, $\alpha = 0$.
Sabemos que 2 matrices simétricas son congruentes $\Longleftrightarrow$ tienen la misma signatura. Por el apartado b) sabemos que $\text{sign}(C) = \text{sign}(g) = (1, 2)$. Todo se reduce a calcular $\text{sign}(A)$ y comprobar si es igual o no a $(1, 2)$.

Sea g' la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B_u}(g') = A$ (para $\alpha = 0$). Como en la diagonal de A hay elementos $+$ y $-$, la métrica g' es indefinida. Calculamos su signatura como en b).

$|A| = 16 \neq 0 \Rightarrow rg(g') = 3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} N(g') = 0 \Rightarrow$ no degenerada. $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ base conjugada para g'. Mirando la matriz A vemos que $g'(e_1, e_1) = 1 \neq 0$, $g'(e_2, e_2) = -2 \neq 0$ y $g'(e_1, e_2) = 0$. Así, podemos tomar $v_1' = e_1 = (1,0,0)$ y $v_2' = e_2 = (0,1,0)$. Finalmente buscamos $v_3' = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ con: $v_3' \in Conj(v_1') \cap Conj(v_2')$, es decir, $g'(v_1', v_3') = g'(v_2', v_3') = 0$,

$$\begin{cases} v_3' \in Conj(v_1') \cap Conj(v_2'), \\ \omega'(v_3') \neq 0, \\ B' = \{v_1', v_2', v_3'\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$0 = g'(v_1', v_3') = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\ 0\ 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 3z$$

$$0 = g'(v_2', v_3') = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0\ -2\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2y$$

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$ Elijo $v_3' = (3, 0, -1)$. ¿$\omega'(v_3') \neq 0$?

$$\omega'(v_3') = g'(v_3', v_3') = (3\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 8)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$$

Además claramente $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ es base de $\mathbb{R}^3$. Esta base es conjugada por construcción. Además:

$$M_{B'}(g') = \begin{pmatrix} \omega'(v_1') & & \\ & \omega'(v_2') & \\ & & \omega'(v_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Así $sign(g') = (1,2) = sign(g)$.

Concluimos que A y C son congruentes $\Longleftrightarrow \alpha = 0$.

Esto concluye el apartado c).

d) En la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ del apartado b) se tiene

$$M_B(w) = M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

Obviamente, la parte izquierda de la ecuación

$$y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 16yz = 0$$

coincide con w, la forma cuadrática asociada a g. (basta con mirar la matriz C).

En coordenadas (x', y', z') con respecto a B, esta forma cuadrática se expresa como $(x')^2 - (y')^2 - 16(z')^2$

Buscamos dos soluciones lin. ind. de $(x')^2 - (y')^2 - 16(z')^2 = 0$.

Por ejemplo $(1,1,0)$ y $(1,-1,0)$. Estas soluciones representan coordenadas en B de auténticas soluciones de la ecuación original. Así, los vectores:

$v_1 + v_2 = (0,1,0) + (1,-1,0) = (1,0,0)$ y

$v_1 - v_2 = (0,1,0) - (1,-1,0) = (-1,2,0)$

son 2 soluciones lin. ind. de la ecuación original.

Ejercicio 2 a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$. Veamos que es diagonalizable por semejanza.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$$

Calculamos los valores propios.

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

Obsérvese que el discriminante vale $a^2+c^2+2ac-4ac+4b^2 = a^2+c^2-2ac+b^2 = (a-c)^2+b^2 \geq 0$. Distinguimos 2 casos:

① disc. $= 0$. En este caso $a=c$ y $b=0$. En particular,

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, que es ya una matriz diagonal.

② disc. > 0. En este caso, A tendría 2 valores propios simples distintos. Sabemos entonces que A es diagonalizable.

b) V = e.v. sobre $\mathbb{R}$ con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, g = métrica en V.
Recordemos que el índice de g es el segundo de los números que aparece en sign(g). Dicho de otra forma,
si $\text{sign}(g) = (p, q) \Longrightarrow \text{ind}(g) = q$.

Sea $m = \max\left\{ \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) \;/\; \begin{array}{l} \mathcal{U} \subseteq V \text{ es un sub. vect. y} \\ g_{\mathcal{U}} \text{ es def. negativa} \end{array} \right\}$

Lo que piden es que se pruebe la igualdad $\text{ind}(g) = m$. Lo hacemos en 2 pasos:

$\underline{\text{ind}(g) \leq m}|$ Sea $B = \{v_1, \ldots, v_p, v'_1, \ldots, v'_q, v''_1, \ldots, v''_s\}$ una base conjugada normalizada, donde $s = \text{nul}(g)$. Entonces:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \overset{p)}{\ddots} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{q)}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \overset{s)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{U} = L(v'_1, \ldots, v'_q)$, que es un sub. vect. de V tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = q = \text{ind}(g)$. Claramente: $\{v'_1, \ldots, v'_q\}$ es base de $\mathcal{U}$, y:

$$M_{\{v'_1, \ldots, v'_q\}}(g_{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \overset{q)}{\ddots} & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -I_q.$$

En particular, $g_{\mathcal{U}}$ es def. negativa, ya que $\text{sign}(g_{\mathcal{U}}) = (0, q)$. Por definición de m, se tiene que $q \leq m$, es decir, $\text{ind}(g) \leq m$.

$\underline{\text{ind}(g) \geq m}|$ Por definición de m, existe $\mathcal{U} \subseteq V$ sub. vect. de forma que $g_{\mathcal{U}}$ es def. negativa, y tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = m$.

Supongamos probado que $V = \mathcal{U} \oplus \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$. Entonces, si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es base conjugada de $\mathcal{U}$ para $g_{\mathcal{U}}$ y $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ e base conjugada de $\mathrm{Conj}(\mathcal{U})$ para $g_{\mathrm{Conj}(\mathcal{U})}$ $\Longrightarrow B = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es base conjugada de V para g. y:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1^{(m)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & d_{m+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n \end{pmatrix},$$

con lo que se tendría que el número de negativos en la diagonal cumpliría $\mathrm{ind}(g) \geq m$ y habríamos acabado. Por tanto, todo se reduce a probar que $V = \mathcal{U} \oplus \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$.

I) $V = \mathcal{U} + \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$.

Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base conjugada cualquiera de $\mathcal{U}$ y $v \in V$. Buscamos $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tales que $v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m \in \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$.

Queremos entonces que:

$$0 = g(v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m, v_i) = g(v, v_i) - a_i\, g(v_i, v_i) \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

con lo que $a_i = \dfrac{g(v, v_i)}{\boxed{g(v_i, v_i)}}$ $\forall i = 1, \dots, m$ $\quad < 0$ porque $g_{\mathcal{U}}$ es def. negativa.

Con esta elección de los a_i tenemos que $\exists\, u \in \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$ tal que $v = \underbrace{(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{u}_{\in \mathrm{Conj}(\mathcal{U})}$ $\Longrightarrow v \in \mathcal{U} + \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$.

II) $\mathcal{U} \cap \mathrm{Conj}(\mathcal{U}) = \{0\}$.

Sea $v \in \mathcal{U} \cap \mathrm{Conj}(\mathcal{U})$. En particular, se tendría que $g(v, v) = 0$. Pero $v \in \mathcal{U}$ y $g_{\mathcal{U}}$ es def. negativa. Esto implica que $v = 0$ y completa la prueba.