Geometría II. Grado en matemáticas
Examen final. Curso 2013-2014
Toda la asignatura

1. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que respecto de la base usual tiene matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Probar que $\lambda = 1$ es un valor propio de f y estudiar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable.

   (b) Cuando f no sea un automorfismo encontrar una base de vectores propios de f.

   (c) Para algún valor de α, encontrar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con su métrica usual formada por vectores propios de f.

2. Sea g_β la métrica en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática está dada por:

$$\Phi_\beta(x, y, z) = y^2 + \beta z^2 + 2xy + 2\beta xz.$$

   (a) Clasificar las métricas g_β según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Calcular el radical o núcleo de cada g_β.

   (c) Resolver la ecuación $\Phi_0(x, y, z) = 0$.

3. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\,(x - \sqrt{2}\,y - z, \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z, -x - \sqrt{2}\,y + z).$$

   Demostrar que es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$, clasificarla y describir sus elementos geométricos.

4. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

   (a) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. ¿Es A semejante a una matriz diagonal? Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.

   (b) Probar que si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f.

   (c) ¿Es cierto que en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

Duración: 3 horas

Granada, 10 de julio de 2014

Geometría II. Grado en matemáticas
Examen final. Curso 2013-2014

Solo segunda parte

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $(M_2(\mathbb{R}), g)$, donde $M_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y g es la métrica definida como $g(A, C) = tr(A\,C^t)$. Se pide lo siguiente:

   (a) Calcular el complemento ortogonal en $(M_2(\mathbb{R}), g)$ del subespacio $A_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices antisimétricas.

   (b) Obtener dos matrices $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean linealmente independientes, unitarias en $(M_2(\mathbb{R}), g)$, y que formen ángulo $\pi/4$ con la matriz identidad I_2.

2. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\,(x - \sqrt{2}\,y - z, \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z, -x - \sqrt{2}\,y + z).$$

   Demostrar que es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$, clasificarla y describir sus elementos geométricos.

3. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

   (a) Probar que si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f.

   (b) Probar que si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces existe una métrica euclídea g en V tal que f es autoadjunto en (V, g).

   (c) ¿Es cierto que en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

Duración: 2 horas y media

Granada, 10 de julio de 2014