Geometría II (Grado en Matemáticas)

Examen de Julio - Grupos A y B (11/7/2013)

1. *a*) **(1,5 puntos)** Partiendo de las definiciones de valor y vector propio y de dependencia o independencia lineal (esto es, sin usar proposiciones o teoremas sobre valores, vectores o subespacios propios), probad que:

   Si $\bar{u}$, $\bar{v} \in \mathbf{V}$ son dos vectores propios de $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, correspondientes a dos valores propios distintos, entonces $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes.

   b) Responder razonadamente si son ciertas las dos afirmaciones siguientes:

   (I) **(1 punto)** Toda métrica indefinida en un plano vectorial euclídeo tiene algún vector no nulo ortogonal a sí mismo.

   (II) **(1 punto)** Todo isomorfismo autoadjunto de un plano vectorial euclídeo viene representado en cualquier base por una matriz simétrica invertible.

2. **(2 puntos)** Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada en la base estándar es

$$A \equiv M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

   tenga al 0 como valor propio. Con ese valor de α, encontrad una base de cada subespacio propio de f. Escribid una matriz P, si es que existe, tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

3. **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$ la forma cuadrática asociada a una métrica $\mathbf{g}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar la signatura de $\mathbf{g}$. Encontrad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ sea diagonal, con solo unos, menos unos o ceros en la diagonal principal.

4. *a*) **(1,5 puntos)** Probad que la aplicación $f(x, y) = \frac{1}{2}(-x + y, 3x + y)$ es una isometría del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g})$, siendo $\mathbf{g}$ la métrica euclídea cuya matriz en la base estándar es

$$M(\mathbf{g}, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Justificad porqué f es una simetría ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g})$ respecto a una recta vectorial. Hallad dicha recta.

   b) **(1,5 puntos)** En el espacio euclídeo usual $(\mathbb{R}^3, \mathbf{g}_0)$, hallad la matriz en la base estándar de la aplicación $f = g \circ \mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ que se obtiene de componer la simetría ortogonal $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ respecto al plano $\mathbf{U}$ dado por la ecuación $z = 0$, con el giro g de ángulo $\pi/3$ alrededor del eje OX (no importa el sentido de giro elegido). Probad que f es una simetría ortogonal respecto a un plano y hallad una base de dicho plano.