GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS (PRIMERA PARTE)

Curso 2014-15

1. Sea V un espacio vectorial real. Denotemos por $\mathcal{B}_s^+(V)$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre V. Demostrar que:

   a) Si $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   b) Si $a > 0$ y $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $a\,g \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   ¿Es $\mathcal{B}_s^+(V)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(V)$?

2. Sea $f : V \to V'$ un monomorfismo de espacios vectoriales reales y g' una métrica euclídea en V'. Demostrar que la *métrica pullback* de g' mediante f, que denotamos $f^*(g')$ y definimos como:
$$f^*(g')(u,v) = g'(f(u), f(v))$$
   es una métrica euclídea en V.

3. Sean (V,g) y (V',g') dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto* $g \times g'$ en $V \times V'$ a partir de la igualdad:
$$(g \times g')\big((u,u'),(v,v')\big) = g(u,v) + g'(u',v').$$
   Demostrar que $g \times g'$ es una métrica euclídea en $V \times V'$.

4. Decidir de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

5. Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V,g), demostrar que se cumplen estas propiedades:

   a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\,(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

b) Teorema del coseno: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\,\cos\measuredangle(u,v)$.

c) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow u \perp v$.

d) $\|u\| = \|v\| \Longleftrightarrow u+v \perp u-v$.

e) $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u-v\|$.

6. Utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

   a) Para cualesquiera números $x_1,\ldots,x_n \geq 0$, se cumple que:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

   b) Para cada matriz cuadrada A de orden n se verifica que $(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

   c) Para cualquier función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que:
$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

7. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcular una base ortonormal de (U, g_U), donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:
$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x+4y-z+3t = 0\}.$$
   Ampliar la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcular las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

8. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\| = 2$ para cada $i = 1,\ldots,n$ y que $\measuredangle(v_i,v_j) = \pi/3$ si $i \neq j$. Calcular $M_B(g)$ y una base ortonormal de (V,g).

9. En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$.

   a) Probar que g es una métrica euclídea.

   b) Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Encontrar dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y que formen ángulo $\pi/3$ con I_3.

10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$

Demostrar que la base usual B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g)$ a partir de B_u.

11. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que la métrica g es euclídea.

b) Calcular el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,-1,1)$.

c) Calcular la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ con respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$.

12. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C) = \mathrm{tr}(A\,C^t)$. Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el ángulo determinado por A y C.

b) Obtener las proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^{\perp}$.

c) Calcular la matriz simétrica de A respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, a-b+c-d = 0, -a+d = 0 \right\}.$$

d) Obtener una base de $W^{\perp}$, siendo W el subespacio del apartado anterior.

13. Responder razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si g es una métrica euclídea sobre V, entonces todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base de V son positivos. ¿Es cierto el recíproco?

b) Sea g una métrica cuya matriz en una base B tiene un valor propio negativo. Entonces g no es euclídea.

c) Sean u y v dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo (V,g) que forman un ángulo α. Entonces el ángulo que forman $2u$ y $2v$ es 2α.

d) Toda base B de un espacio vectorial V es base ortonormal para una única métrica euclídea sobre V.

e) Si U es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a U y unitarios.

f) Toda matriz cuadrada con determinante 1 o -1 es ortogonal.

g) Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.

h) Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo (V,g). Entonces, se cumple la igualdad $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$.