GEOMETRÍA II: Capítulo 2

Formas Bilineales y Formas Cuadráticas

1. Ejercicios

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz
$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
¿Es $\mathbf{b}$ una métrica degenerada? Calcula la matriz que la representa en la siguiente base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1); (1,1,1); (0,1,2)\}$

2. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y en él, la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz
$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Prueba que un plano vectorial, $\mathbf{U}$, de ecuación $ax + by + cz = 0$ es degenerado si y sólo si el vector $\vec{n} = (a, b, c)$ pertenece al cono de luz de $(\mathbb{R}^3, \mathbf{b})$.

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad. ¿Es cierto que todos los planos de este espacio métrico son no degenerados?

4. Se considera una forma bilineal cualquiera, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$. Prueba que existen dos, únicas, formas bilineales, $\mathbf{b}_s$ simétrica y $\mathbf{b}_a$ antisimétrica, sobre $\mathbf{V}^n$ de manera que $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$.

5. ¿Es cierto que la forma cuadrática asociada con una forma bilineal solo depende de la parte simétrica de la misma?

6. Sea $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, y $\mathbf{Q} : \mathbf{V}^n\mathbb{R}$ su forma cuadrática. Prueba las dos siguientes afirmaciones
   - $\mathbf{b}$ es simétrica si y solo si la puedes recuperar a partir de $\mathbf{Q}$.
   - $\mathbf{b}$ es antisimétrica si y solo si $\mathbf{Q}$ se anula.

7. Para cada vector (fijo), $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se define la aplicación $\mathbf{b}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por
$$\mathbf{b}_{\vec{v}}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}).\vec{v}_o \qquad \text{producto mixto}$$
   - Comprueba que es una forma bilineal antisimétrica
   - Si $\mathbf{b}_{\vec{v}} = \mathbf{b}_{\vec{w}}$, ¿qué se puede decir de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

- Si conoces $\mathbf{b}_{\vec{v}}$ y $\mathbf{b}_{\vec{w}}$, ¿puedes calcular $\mathbf{b}_{\vec{v}+\vec{w}}$?
- Si conoces $\mathbf{b}_{\vec{v}}$, ¿puedes calcular $\mathbf{b}_{\lambda\vec{v}}$? para $\lambda \in \mathbb{R}$

8. Ya sabes que en un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, los vectores pueden ser de tres tipos

   - $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **espacial** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) > 0$
   - $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **temporal** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) < 0$
   - $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **luminoso** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$

   Caracteriza los tres tipos de vectores en los espacios métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ donde $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son las métricas cuyas matrices en la base canónica son, respectivamente

   $$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. En un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, se consideran los siguientes subconjuntos:

   - $\mathbf{E} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) > 0\}$ Conjunto de vectores espaciales
   - $\mathbf{T} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) < 0\}$ Conjunto de vectores temporales
   - $\mathbf{L} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = 0\}$ Conjunto de vectores luminosos

   ¿Es alguno de ellos un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$?

10. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica representada, en la base canónica, por la siguiente matriz

    $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

    Encuentra los conjuntos definidos en el ejercicio anterior en este espacio métrico. Calcula también una base ortogonal del mismo.

11. ¿Se puede asegurar que toda matriz simétrica de orden dos es congruente a una matriz diagonal?

12. ¿Se puede asegurar que toda matriz simétrica de orden dos y determinante positivo es congruente a la matriz identidad?

13. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica $\mathbf{b}$ definida por

    $$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

    - Calcula el conjunto de vectores que son ortogonales en dicha métrica al polinomio $1 - t^2$. ¿Es un subespacio vectorial dicho conjunto?
    - Calcula el conjunto de vectores que son ortogonales, en dicha métrica, a todos los polinomios del subespacio vectorial $\mathcal{P}_1$. ¿Es un subespacio vectorial dicho conjunto?
    - Calcula una base ortonormal del espacio métrico $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$

14. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica $\mathbf{b}$ definida por

    $$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P'(t).Q'(t)\, dt$$

- Calcula el radical de dicha métrica
- Calcula el subespacio ortogonal, en dicha métrica, al subespacio vectorial $\mathcal{P}_1$.
- Calcula una base ortonormal del espacio métrico $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$

15. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ se considera $\mathbf{b} : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{b}(M, N) = \text{Traza}(M.N^t)$$

   - Prueba que es una métrica no degenerada
   - Calcula el conjunto de vectores ortogonales a todas las matrices anti-simétricas
   - Calcula una base ortonormal de $(\mathcal{M}_2, \mathbf{b})$ cuyos vectores sean matrices simétricas o anti-simétricas.

16. Se considera la métrica $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, está representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   Encuentra una base ortonormal del espacio métrico $(\mathbf{R}^3, \mathbf{b})$

17. Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ son dos métricas sobre un mismo espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$, y tales que sus formas cuadráticas coinciden, ¿puedes asegurar que las dos métricas coinciden?

18. En $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de métricas, representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

   - Calcula los valores del parámetro a para que las matrices anteriores representen métricas no degeneradas sobre $\mathbb{R}^3$
   - Calcula la signatura de estas métricas
   - Prueba que las matrices anteriores son siempre congruentes con matrices diagonales.

19. En $\mathbb{R}^2$ considera las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? En caso afirmativo, construye uns isometría.

20. En $\mathbb{R}^2$ considera las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? En caso afirmativo, construye uns isometría.

21. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, representadas por las siguientes matrices en la base canónica
$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? ¿son congruentes las dos matrices anteriores?

22. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, representadas por las siguientes matrices en la base canónica
$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son siométricos? ¿son congruentes las dos matrices anteriores?

23. Construye una isometría entre cada par de los siguientes espacios métricos
   - $\mathbb{R}^3$ con la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad.
   - $\mathbf{S}_2$ con la métrica $\mathbf{b}(M, N) = \mathrm{Traza}(M.N)$
   - $\mathcal{P}_2$ con la métrica $\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$

24. Prueba que toda métrica no degenerada en $\mathbb{R}^2$ es isométrica a una de las siguientes tres
   - La representada en la base canónica por la matriz identidad.
   - La representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - La representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

25. En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\}\vec{x} = (1, 1, 1)\})$ y el plano, $\mathbf{U}$ de ecuación $z = 0$. Encuentra métricas degeneradas sobre $\mathbf{R}^3$ que cumplan, respectivamente los siguientes supuestos
   - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Euclideo.
   - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Lorentziano.

26. En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\}\vec{x} = (1, 1, -1)\})$ y el plano, $\mathbf{U}$ de ecuación $y - z = 0$. Encuentra métricas degeneradas sobre $\mathbf{R}^3$ que cumplan, respectivamente los siguientes supuestos
   - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Euclideo.
   - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Lorentziano.

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera la métrica representada, en la base canónica por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$
   - Calcula su radical

- Calcula una base ortogonal de $(\mathbf{R}^4, \mathbf{b})$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- ¿Son isométricos los dos hiperplanos anteriores?

28. En $\mathbb{R}^4$ se considera la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcula su radical
- Calcula una base ortogonal de $(\mathbf{R}^4, \mathbf{b})$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_2 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_2 + x_3 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- ¿Son isométricos los dos hiperplanos anteriores?