Geometría II. Relación de problemas 4

Espacios vectoriales euclídeos (segunda parte)

Curso 2014-15

1. Demostrar que si $f : V \to V$ es un endormorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo (V, g), entonces el núcleo y la imagen de f son subespacios ortogonales cuya suma directa es V.

2. Sea V un plano vectorial y B una base de V. Supongamos que g es la métrica en V tal que:
$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V \to V$ tal que:
$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Probar que g es una métrica euclídea sobre V y encontrar los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V, g).
   b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V, g)?

3. Se consideran los endomorfismos $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que:
$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z), \quad M_{B_u}(h) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcular dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales.

4. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $B = \{(1,0,1), (-1,2,1), (1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encontrar una base ortonormal de vectores propios de f.

5. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base B de V. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que f es autoadjunto en (V,g) y encontrar una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios de f.

6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encontrar una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

7. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular los valores propios de A y estudiar su signo para determinar la signatura de g y clasificarla en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$?

8. Se considera la familia de métricas g_{ab} en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M_{B_u}(g_{ab}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasificar, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, las métricas g_{ab}.

9. Describir las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

10. Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo y B una base de V para la que:
$$M_B(g)=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$
Estudiar si los endomorfismos $f,h:V\to V$ tales que:
$$M_B(f)=\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_B(h)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$
son isometrías de (V,g). En caso afirmativo, describir tales isometrías.

11. Consideremos el endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por:
$$f(x,y,z)=\frac{1}{3}(x-2y-2z,-2x+y-2z,2x+2y-z).$$
   a) Demostrar que f es una isometría cuando usamos la métrica euclídea usual.
   b) Calcular los valores propios de f y sus multiplicidades. Describir la isometría f.

12. Describir las isometrías de $(\mathbb{R}^3,g_u)$ cuyas matrices en labase usual son:
$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$D=\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad E=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

13. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $B=\{1,x,x^2\}$ es ortonormal. Demostrar que el endomorfismo $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ dado por:
$$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=\frac{1}{3}\left((2a_0-a_1+2a_2)+(-a_0+2a_1+2a_2)x+(2a_0+2a_1-a_2)x^2\right)$$
es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x],g)$ y describirla.

14. Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}),g)$, donde $g(A,C)=\mathrm{tr}(A,C)$, se define el endomorfismo $f:S_2(\mathbb{R})\to S_2(\mathbb{R})$ dado por:
$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$
Demostrar que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}),g)$ y describirla.

15. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

    a) Calcular la matriz $M_{B_u}(f)$, siendo f la simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$.

    b) Calcular, en coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$.

16. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

    a) Calcular la matriz $M_{B_u}(f)$, siendo f una rotación de ángulo $\pi/2$ con eje dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y=0, x-z=0\}$.

    b) Calcular, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta U del apartado anterior.

    c) Calcular $M_{B_u}(f)$, siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometría directa con $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ y $f(1,1,5) = (3,3,-3)$.

17. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcular la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z = 0$, y h es el giro de angulo $\pi/3$ alrededor del eje OX. Clasificar y describir la isometría resultante.

18. Responder de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo es automorfismo.

    b) Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.

    c) Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.

    d) Si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V,g) entonces dos vectores propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.

    e) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.

    f) En un espacio vectorial euclídeo (V,g), dados dos subespacios vectoriales de la misma dimensión siempre existe una isometría de (V,g) que lleva uno en otro.

    g) En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ consideramos el giro r_θ de ángulo $\theta \in (0,2\pi)$ y la simetría ortogonal σ con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces, $f = r_\theta \circ \sigma$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

    h) En un plano vectorial euclídeo la composición de dos simetrías axiales es un giro.

    i) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.

    j) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 es inversa.

    k) Sobre un espacio vectorial euclídeo (V,g) de dimensión impar no existe ninguna isometría f tal que $f \circ f = -I_V$.