Geometría II. Relación de problemas 1

Diagonalización de endomorfismos

Curso 2014-15

Ejercicio 1.- Calcula los valores propios de las siguientes matrices o de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que ellas representan, o de los endomorfismos de V que en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ vienen representados por ellas

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B}_0 = \{1, t, t^2\}$ y el endomorfismo, f, que en dicha base viene representado por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Existe en $\mathcal{P}_2$ una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz M semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 3.- Sea $f \in End(V)$ un endomorfismo de manera que $\lambda = 0$ es uno de sus valores propios. ¿Se puede garantizar que f no es automorfismo?

Ejercicio 4.- Sea $f \in End(V)$ de manera que no es automorfismo. ¿Se puede garantizar que $\lambda = 0$ es necesariamente un valor propio de f?

Ejercicio 5.- Sea $f \in End(V)$ y λ un valor propio del mismo. Comprueba que el subespacio propio U_λ coincide con el núcleo del endomorfismo $f - \lambda I_V$

Ejercicio 6.- Sea $f \in End(V)$ de manera que admite n valores propios simples. ? Se puede garantizar que f es diagonalizable?

Ejercicio 7.- En S_2 se considera la base siguiente

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y el endomorfismo f que en dicha base viene representado por la matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe en $\mathcal{P}_2$ una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz M semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 8.- En $\mathcal{M}_2$ se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿Es diagonalizable?

Ejercicio 9.- Sea λ un valor propio de $f \in End(V)$. Considera el endomorfismo $f^2 = f \circ f$, ¿ puedes asegurar que λ^2 es un valor propio de dicho endomorfismo? De manera general, ¿puedes afirmar que λ^r es un valor propio de $f^r = f \circ ... \circ f$ (r veces)?

Ejercicio 10.- Si $f \in End(V)$ es un endomorfismo diagonalizable, ¿se puede asegurar que f^r también lo es?

Ejercicio 11.- En $\mathcal{M}_2$ se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿ Es diagonalizable?

Ejercicio 12.- En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo f cuya matriz en la base canónica es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?

Ejercicio 13.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si un endomorfismo es diagonalizable y todos sus valores propios son distintos de cero, entonces es un automorfismo.
- Si un automorfismo es diagonalizable, entonces su inverso también lo es.
- Si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polonomio característico.
- Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

Ejercicio 14.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si dos endomorfismos son diagonalizables y poseen los mismos valores propios entonces son idénticos.
- Si $\lambda = 42$ es un valor propio de un cierto endomorfismo, f, entonces f tiene exactamente 21 vectores propios asociados con $\lambda = 42$.
- Dos vectores propios, asociados a dos valores propios diferentes, son autom·ticamente linealmente independientes.
- Un endomorfismo puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

Ejercicio 15.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B} = \{1-t, 1+t, t^2\}$ y el endomorfismo, f, representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 16.- En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo, f, representado en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(f,\mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 17.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si λ es un valor propio de $f \in End(V)$ entonces $-\lambda$ es un valor propio de su endomorfismo dual $f^* \in End(V)^*_n)$
- λ es un valor propio de $f \in End(V)$ si y solo si lo es de su endomorfismo dual $f^* \in End(V)^*_n)$
- Un endomorfismo y su dual tienen el mismo polinomio característico.
- Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si su endomorfismo dual lo es.

Ejercicio 18.- En el espacio vectorial $\mathbf{A}_3$ de las matrices antisimétricas de orden tres se considera la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se considera el endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{A}_3)$, representado en la base anterior por la siguiente matriz

$$M = M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 19.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si λ es un valor propio de $f \in End(V)$ y μ un valor propio de $h \in End(V)$ entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $f + h$
- Toda matriz simétrica de orden dos es semejante a una matriz diagonal.

- Si $f \in End(V^{17})$ posee 17 valores propios simples, entonces es diagonalizable.
- Si $f \in End(V^{24})$ posee 24 valores propios simples, entonces es diagonalizable.

Ejercicio 20.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B} = \{1+t^2, 1-t^2, t\}$ y el endomorfismo, f, representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 21.- Para cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo f_α de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canúnica es

$$M_\alpha = M(f_\alpha, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha & 2-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha-1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

¿ Qué valores debe tomar α para que algún valor propio de f_α tenga multiplicidad aritmética dos?. ¿ Para qué valores de α es diagonalizable f_α?

Ejercicio 22.- Se consideran las siguientes matrices cuadradas y de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿ Existe alguna de ellas que sea semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 23.- ¿ Son semejantes las dos matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24.- Estudia para qué valores de los parámetros α y β la siguiente matriz representa, en una cierta base de un cierto espacio vectorial, a un endomorfismo diagonalizable

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$