Geometría II. Relación de problemas 1

Diagonalización de endomorfismos

Curso 2014-15

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V tal que $f \circ f = -I_V$. Demostrar que f no tiene valores propios. Concluir que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x, y) = (-y, x)$ no es diagonalizable.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $f \circ f = r\, I_V$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de f son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

3. Probar que toda matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales y determinante negativo es diagonalizable. ¿Es cierto que todos los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ son diagonalizables?

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo de forma que su nulidad es 1 y $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Demostrar que f es diagonalizable.

5. En el espacio $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes reales se considera el endomorfismo $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ definido por $f(p(t)) = tp'(t)$, donde $p'(t)$ representa la derivada de $p(t)$ con respecto a t. Caclular los valores propios y los subespacios propios de f. Encontrar, si es posible, una base de $\mathbb{P}_1$ formada por vectores propios de f.

6. Calcular los valores propios y determinar los correspondientes subespacios propios de las siguientes matrices con coeficientes reales:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
¿Es alguna de las matrices diagonalizable? ¿Son semejantes las matrices A y C? ¿Y C y D?

7. Estudiar si la siguiente matriz es semejante a una matriz diagonal
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. En el espacio vectorial S_2 de las matrices simétricas de orden 2 consideramos la base
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y el endomorfismo $f : S_2 \to S_2$ tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcular los valores propios de f. Discutir si existe una base de S_2 formada por vectores propios de f. Calcular los subespacios propios de f y encontrar una base de cada uno.

9. Estudiar para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para dichos valores, encontrar P regular tal que $P^{-1} A\, P$ sea diagonal.

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide lo siguiente:

a) Estudiar si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1} A\, P$ sea diagonal.

b) Calcular A^5 y A^{-4}.

c) ¿Existe una matriz cuadrada B tal que $B^2 = A$?

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Estudiar para qué valores de a el endomorfismo f es diagonalizable.

b) Para $a = 1$ y $a = 2$ encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

12. Se considera la siguiente matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix},$$

donde a y b son parámetros reales. Se pide lo siguiente:

a) Calcular el polinomio característico y los valores propios de A.

b) Calcular las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A. Estudiar cuando A es diagonalizable.

c) En los casos en los que A sea diagonalizable, encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1} A P$ sea diagonal.

13. Sea V un espacio vectorial tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

    a) $f(u) = u$, con $u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$.

    b) $U = \{v \in V \,/\, x+6y-3z = 0\}$ es un subespacio propio de f. Aquí x, y, z representan las coordenadas de v con respecto a B.

    c) La traza de f es 5.

    Calcular los valores propios de f y la matriz $M(f, B)$.

14. Sea V un espacio vectorial tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

    a) $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3, \quad f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$.

    b) $M(f, B)$ es simétrica.

    c) El vector $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ está en el núcleo de f.

    Calcular $M(f, B)$ y estudiar si f es diagonalizable. En caso afirmativo, obtener una base B' de V tal que $M(f, B')$ sea diagonal.

15. Discutir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) La suma de dos vectores propios de un endomorfismo es siempre un vector propio del mismo endomorfismo.

    b) Si una matriz A es diagonalizable, entonces su traspuesta A^t también lo es.

    c) Si una matriz A es diagonalizable y regular, entonces su inversa A^{-1} también es diagonalizable.

    d) Si A es diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada $n \in \mathbb{N}$.

    e) ¿Es cierto que si el polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden dos es $(1 - \lambda)^2$ entonces A es semejante a una matriz diagonal?

    f) Si el polinomio característico de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ es $-\lambda^5 + \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + 2014$, entonces f no es diagonalizable.

    g) Una matriz cuadrada diagonalizable es regular si y sólo si 0 no es un valor propio.

    h) Si un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tiene tres valores propios simples entonces existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(f, B)$ es diagonal. Además, la base B es única.

    i) La suma y el producto de matrices diagonalizables es una matriz diagonalizable.

    j) Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V cumple $f \circ f = f$, y 0 no es un valor propio de f, entonces $f = I_V$.

    k) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$, y tal que $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 57$ son valores propios de f. Entonces, f es diagonalizable.