GEOMETRÍA II: Tema 2

Formas Bilineales y Formas Cuadráticas

- **2.1. Definiciones y ejemplos. Expresión matricial. Congruencia de matrices.**
- **2.2. Clasificación de formas cuadráticas reales. Ley de inercia de Sylvester.**
- **2.3. Diagonalización ortogonal de matrices simétricas.**

1. Introducción

★ Seguramente recuerdas la manera de definir el producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$. Si tienes, por ejemplo, los vectores $\vec{x} = (1, 2, -1)$ e $\vec{y} = (2, 1, 1)$ entonces su producto escalar es

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 + 2 - 1 = 3$$

En general si tomas dos vectores, cualesquiera, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3$ de $\mathbb{R}^3$, le asocias un número real, su **producto escalar**, que obtienes multiplicando coordenada a coordenada y sumando, es decir

$$\bigstar \boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i} \quad \text{Producto Escalar}$$

★ El producto escalar lo puedes ver como una aplicacióon que asocia a cada pareja de vectores, de $\mathbb{R}^3$, un núumero real (su producto escalar). El dominio de la aplicación es $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y su codominio es $\mathbb{R}$

$$\boxed{\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}}$$

★ Quisiera que te fijaras en las siguientes propiedades de esta aplicación, del producto escalar

- $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \vec{y} = \vec{x}_1 \cdot \vec{y} + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}$
- $(\alpha\, \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha\, \vec{x} \cdot \vec{y}$
- $\vec{x} \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \cdot \vec{y}_1 + \vec{x} \cdot \vec{y}_2$
- $\vec{x} \cdot (\alpha\, \vec{y}) = \alpha\, \vec{x} \cdot \vec{y}$

★ Si miras al producto escalar como una aplicación 'de dos variables", ambas vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces las dos primeras de las propiedades anteriores significan que el producto escalar es lineal en la primera variable, mientras que las otras dos hacen referencia a su linealidad en la segunda variable. En este sentido, diremos que el producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ es una **forma bilineal**.

★ Recuerda que una forma lineal, sobre $\mathbb{R}^3$ (o en general, sobre un espacio vectorial), es una aplicación lineal del espacio vectorial en $\mathbb{R}$. El conjunto de formas lineales permite definir el espacio dual del dado.

★ Naturalmente, la existencia de una aplicación bilineal no es exclusiva del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Observa que en las propiedades lo que estamos asegurando es el buen comportamiento de la aplicación, de dos variables, frente a la estructura (suma y producto por escalares) del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Yo creo que somos capaces de abstraer las propiedades anteriores y decidir cuándo en un espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$ con dimensión n, una aplicación de dos variables, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}n \to \mathbb{R}$ es **bilineal**. En efecto, se ha de cumplir lo siguiente

- $\mathbf{b}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{y})$
- $\mathbf{b}(\alpha\, \vec{x}, \vec{y}) = \alpha\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$
- $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_1) + \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_2)$
- $\mathbf{b}(\vec{x}, \alpha\, \vec{y}) = \alpha\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$

2. Formas Bilineales versus Matrices Cuadradas

★ Imagina que sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ realizas construcciones de formas del tipo siguiente

- $\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1.y_2 - 3x_2.y_2 + x_3.y_1 + 4x_3.y_3$$
- $\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1.y_2 - 81x_1.y_3 + 48x_2.y_3 + 89x_3.y_1 + 102x_3.y_3$$

¿puedes asegurar que estás construyendo formas bilineales?

♣ Naturalmente, para responder, de manera razonada, a estas preguntas, puedes tratar de probar, en cada uno de los dos casos, una a una las cuatro propiedades de la definición de forma bilineal. No obstante, también puedes proceder de otra manera, quizá más simple o, puede que más elegante pero, en cualquier caso relacionada, una vez más, con la teoría de matrices. Observa que, en el primer caso, la forma $\mathbf{b}$ la puedes escribir del siguiente modo

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, en el segundo caso, la forma se puede escribir como sigue

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -81 \\ 0 & 0 & 48 \\ 89 & 0 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Es claro ahora que, usando las propiedades que conoces de las operaciones con matrices, puedes deducir que, en ambos casos, se trata de una forma bilineal.

★ Además, lo anterior se podría reproducir a partir de cualquier matriz. Quiero decir que si te dan una matriz, cualquiera, de orden tres

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces puedes definir, a partir de ella, la siguiente forma, obviamente bilineal, sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

♣ Observa, en particular que el producto escalar que ya conoces para $\mathbb{R}^3$ es un caso especial de esta construcción. En efecto si tomas la matriz M como la identidad entonces si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

★ Es claro también que lo anterior puede ser extendido, sin ninguna dificultad adicional, al caso de $\mathbb{R}^n$. Así, si te dan una matriz cuadrada de orden n, $M \in \mathbf{M}_n$ cuyos items los representas por a_{ij}, puedes construir la siguiente forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como sigue: los vectores de $\mathbb{R}^n$ los puedes ver como **matrices fila** de modo que podemos hacer el siguiente producto de matrices

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}.M.\vec{y}^{\,t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j} \tag{1}$$

es claro, usando las propiedades que conoces del producto y otras operaciones con matrices, que la aplicación así definida cumple las cuatro propiedades requeridas para ser una forma bilineal. En particular, cuando la matriz M es la identidad de orden n entonces tienes el producto escalar, que como puedes pensar no es exclusivo de las dimensiones dos y tres. Si $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ entonces tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

♣ Ya sabes construir, usando matrices, montones de formas bilineales sobre, en general, $\mathbb{R}^n$. Como debes sospechar, en este punto, aparecen unas cuantas preguntas naturales, por ejemplo

- ¿Cuántas formas bilineales puedes construir sobre $\mathbb{R}^n$?
- ¿Toda forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ procede de una matriz cuadrada de orden n?

Es obvio que ambas preguntas están relacionadas. En efecto, si la respuesta a la segunda fuese afirmativa entonces obtienes una repuesta contundente a la primera. **Puedo construir tantas formas bilineales sobre $\mathbb{R}^n$ como matrices cuadradas de orden n.** Obtendrías así una bella identificación, biyección o aplicación biyectiva, entre $\mathbf{M}_n$ y el conjunto de las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^n$.

★ Bien pues, la teoría es tan perfecta, tan a medida, que lo anterior es verdad. Veamos pues que en efecto, toda forma bilineal $\mathbf{b}$ sobre $\mathbb{R}^n$ procede de una matriz $M \in \mathbf{M}_n$. En otras palabras, veamos que si tenemos definida una forma bilineal a partir de una matriz, entonces podemos recuperar la matriz a partir de la forma bilineal. Observa entonces de (1) que si consideras la base canónica $\mathcal{B}_o = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, el item a_{ij} (que ocupa la fila i columna j) de la matriz M es

$$\boxed{a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Hemos hecho un gran descubrimiento, los items de la matriz M, y así la propia matriz, se recuperan haciendo las imágenes, por la forma bilineal $\mathbf{b}$, de las parejas de vectores de la base canónica. Entonces, imagina que te dan una forma bilineal, $\mathbf{b}$ sobre $\mathbb{R}^n$, puedes definir una matriz, $M \in \mathbf{M}_n$ definiendo sus items por la fórmula anterior, es claro entonces que si defines una forma bilineal usando esta matriz (1) entonces obtienes $\mathbf{b}$.

♣ Unas observaciones para continuar

- En primer lugar, es claro de lo anterior que para determinar una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ es suficiente con conocer las imágenes por ella de las parejas de vectores obtenidas de la base canónica.

- Naturalmente y como siempre, el aparente protagonismo, que en esta construcción, tienen por un lado $\mathbb{R}^n$ y por otro, su base canónica, no es tal. Lo anterior no es exclusivo de $\mathbb{R}^n$ ni de su base canónica, $\mathcal{B}_o$, sino que se puede extender a cualquier espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$, tomando cualquier base, $\mathcal{B}$ sobre el mismo. En efecto,

- **Extensión.-** Si tienes una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ y tomas una base cualquiera, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$, entonces puedes definir la matriz $M \in \mathbf{M}_n$ cuyos items son

  $$\boxed{a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

  Ahora dados dos vectores cualesquiera, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\, \vec{x}_i$ e $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j\, \vec{x}_j$, usas la bilinealidad de $\mathbf{b}$ para obtener

  $$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i\, \vec{x}_i; \sum_{j=1}^n y_j\, \vec{x}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i\, y_j\, \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, y_j$$

  Claramente, esta expresión se puede escribir en forma matricial del siguiente modo: si representamos por X e Y a las matrices fila que expresan las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en la base $\mathcal{B}$ entonces tienes

  $$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = X.M.Y^t} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}n \qquad \text{Expresión matricial forma bilineal}$$

- **Conclusión.-** Si fijas una base, $\mathcal{B}$, de un espacio vectorial, $\mathbf{V}n$, entonces hablar de formas bilineales sobre éste es lo mismo que hablar de matrices cuadradas de orden n.

3. Algunos ejemplos

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, puedes calcular las formas bilineales que en la base canónica vienen representadas, respectivamente, por las siguientes matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces obtienes

   - $\mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 + x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 - x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_3(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_2 + x_2.y_1$
   - $\mathbf{b}_4(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1.y_1 + 2x_1.y_2 + 8x_2.y_1 + 4x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_5(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1.y_1 - 2x_1.y_2 - 2x_2.y_1 + x_2.y_2$

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se considera la forma bilineal definida por (producto escalar usual)

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$$

   es claro que la matriz que representa a esta forma bilineal en la base canónica, $\mathcal{B}_o$, es la identidad. Vamos a calcular la matriz que la representa en la base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1 = (1,1,1); \vec{x}_2 = (1,-1,1); \vec{x}_3 = (1,0,4)\}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_3) \\ \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_3) \\ \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se considera la aplicación bilineal definida como sigue

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_2 - x_2.y_1 + x_1.y_3 - x_3.y_2 + x_2.y_3 - x_3.y_2$$

   entonces su matriz en la base canónina es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. En el espacio vectorial $\mathbf{M}_2$ puedes definir la aplicación $\mathbf{b} : \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2 \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(M, N) = \text{traza}(M.N^t)$$

   comprobar, usando propiedades de las operaciones con matrices que se trata de una forma bilineal.

5. Puedes comprobar también que la matriz de la anterior forma bilineal en la base $\mathcal{B}$ definida por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   es la matriz identidad

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_4$$

6. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ puedes definir la aplicación $\mathbf{b} : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

y comprobar que se trata de una forma bilineal.

7. Ahora puedes calcular la matriz que representa a la forma bilineal anterior en cualquier base de $\mathcal{P}_3$. Por ejemplo, en la base $\mathcal{B}_o = \{1, t, t^2, t^3\}$, la matriz de $\mathbf{b}$ es la siguiente

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

8. En un espacio vectorial $\mathbf{V}^n$ puedes considerar dos formas lineales, $\varphi, \psi \in (\mathbf{V}^n)^*$ y entonces definir $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}).\psi(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}n$$

entonces puedes comprobar que se trata de una forma bilineal.

4. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

★ Las formas bilineales pueden cumplir propiedades adicionales. Por ejemplo, sabes que el producto escalar usual verifica $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, entonces decimos que el producto escalar es una **forma bilineal simétrica**. En general, una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$, se dice simétrica si ocurre lo siguiente

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{x})} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

♣ Puesto que las formas bilineales están representadas, cuando tomas bases, por matrices, parece natural preguntarse si la simetría de una forma bilineal y la simetría de las matrices que la representan son equivalentes. La respuesta es, evidentemente, afirmativa. Por un lado si $\mathbf{b}$ es una forma bilineal y simétrica sobre $\mathbf{V}^n$ y tomas cualquier base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ entonces se cumple que

$$\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_i) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Pero la matriz $M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$ es la que tiene por items precisamente los números reales $\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ y por lo tanto M es simétrica.

Para probar el recíproco, supones que en una cierta base, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$, la matriz $M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$ es simétrica, ello implica que

$$a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_i) = a_{ji} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Ahora para dos vectores cualesquiera $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\, \vec{x}_i$ e $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j\, \vec{x}_j$ de $\mathbf{V}^n$ tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, y_j\, x_i = \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{x})$$

Puedes comprobar que en los ejemplos anteriores de formas bilineales existen bastantes de ellas que son simétricas, ¿cuáles?

★ Por analogía al caso del determinante de dos vectores del plano, decimos que una forma bilineal, $\mathbf{b}:\mathbf{V}^n\times\mathbf{V}^n\rightarrow\mathbb{R}$, es antisimétrica cuando

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y})=-\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})}\qquad\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}^n$$

Naturalmente puedes comprobar que la antisimetría de una forma bilineal equivale a la de las matrices que la representan en las distintas bases de $\mathbf{V}^n$.

♣ Para acabar este epígrafe, un par de cuestiones. Una esperable, la segunda menos pero también natural

- *Toda forma bilineal se descompone, de modo único, como suma de dos formas bilineales, la primera simétrica y la segunda antisimétrica.* Para comprobarlo, si te dan una forma bilineal, $\mathbf{b}:\mathbf{V}^n\times\mathbf{V}^n\rightarrow\mathbb{R}$, observamos que la forma bilineal $\mathbf{b}_s:\mathbf{V}^n\times\mathbf{V}^n\rightarrow\mathbb{R}$,definida por
$$\mathbf{b}_s(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}(\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y})+\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}))\qquad\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}^n$$
es simétrica y la forma bilineal $\mathbf{b}_a:\mathbf{V}^n\times\mathbf{V}^n\rightarrow\mathbb{R}$,definida por
$$\mathbf{b}_a(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}(\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y})-\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}))\qquad\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}^n$$
es antisimétrica. Además, es obvio que
$$\mathbf{b}=\mathbf{b}_s+\mathbf{b}_a$$

- *Una forma bilineal es antisimétrica si y solo si verifica que* $\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x})=0$ *cualquiera que sea* $\vec{x}\in\mathbf{V}^n$
  - **(⇒)** Si $\mathbf{b}$ es antisimétrica entonces $\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x})=-\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x})=0$
  - **(⇐)** la condición suficiente se sigue del cáculo siguiente, tomas dos vectores cualesquiera $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}^n$ y entonces
$$0=\mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x})+\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y})+\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})+\mathbf{b}(\vec{y},\vec{y})=\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y})+\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})$$

5. Formas Cuadráticas

♠ Recuerda, del curso pasado, que cuando estudiabas el producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$, entonces definías a partir de él la idea de norma de vectores $\vec{x}.\vec{x}$ cuyos valores son siempre no negativos y por tanto existe su raíz cuadrada positiva a la que llamabas módulo $\vec{x}$. En esencia, lo que tienes es una aplicación

$$\mathbf{Q}:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}\qquad\mathbf{Q}(\vec{x})=\vec{x}.\vec{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2\qquad\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3$$

♠ Esta misma definición la puedes hacer sobre cualquier espacio vectorial, siembre que tengas una forma bilineal. En tal caso, es decir si tienes $(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$ entonces puedes definir la aplicación

$$\mathbf{Q}:\mathbf{V}^n\rightarrow\mathbb{R}\qquad\mathbf{Q}(\vec{x})=\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x})\quad\forall\vec{x}\in\mathbf{V}^n$$

A esta aplicación le llamaremos la **forma cuadrática** asociada con la forma bilineal $\mathbf{b}$. Las formas cuadráticas poseen las siguientes propiedades, derivadas de manera sencilla y directa de las de las formas bilineales

- $\mathbf{Q}(\vec{0}) = 0$
- $\mathbf{Q}(\alpha\,\vec{x}) = \alpha^2.\mathbf{Q}(\vec{x}), \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\vec{x} \in \mathbf{V}^n$
- $\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{Q}(\vec{x}) + \mathbf{Q}(\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}) \qquad \forall\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$

♠ Por lo que has visto antes, es claro que la forma cuadrática asociada con una forma bilineal antisimétrica es trivial. Lo que se puede usar para ver que distintas formas bilineales pueden tener asociadas la misma forma cuadrática.

Aquí tienes un par de ejemplos, en $\mathbb{R}^3$ consideras las dos siguientes formas bilineales

$$\mathbf{b}_1(\vec{x},\vec{y}) = x_1.y_2 + 2x_2.y_1 + x_1.y_3 + 2x_3.y_1 + x_2.y_3 + 2x_3.y_2$$

$$\mathbf{b}_2(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1.y_2 + 3x_1.y_3 + 3x_2.y_3$$

Puedes ver que la forma cuadrática de ambas formas bilineales es la siguiente

$$\mathbf{Q}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{Q}(\vec{x}) = 3x_1.x_2 + 3x_1.x_3 + 3x_2.x_3$$

Con ello, lo que deseo que comprendas es que si esto lo ves como una aplicación, con dominio el conjunto de todas las formas bilineales sobre un cierto espacio vectorial y codominio el de formas cuadráticas sobre el mismo, que aplica cada forma bilineal en su correspondiente forma cuadrática, entonces **no es inyectiva**. Las siguientes cuestiones puedes considerarlas como los titulares que encuadran y resumen la noticia sobre cualquier espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$

1. Si tienes una forma bilineal, $\mathbf{b}$, y representas por $\mathbf{Q}$ a su forma cuadrática, entonces puedes sumar a $\mathbf{b}$ cualquier forma bilineal antisimétrica, $\mathbf{a}$, para obtener otra forma bilineal, $\mathbf{b}+\mathbf{a}$ cuya forma cuadrática sigue siendo $\mathbf{Q}$

2. Si una forma bilineal, $\mathbf{b}$, la descompones, como sabes, en su parte simétrica y su parte antisimétrica, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$ entonces la forma cuadrática de la forma bilineal original es la asociada a su parte simétrica. En otras palabras, la forma cuadrática de una forma bilineal solo depende de su parte simétrica.

3. Si la aplicación de la que estamos hablando la restringes a formas bilineales simétricas (lo que en el siguiente epígrafe llamaremos métricas) entonces se convierte en biyectiva. En efecto si tienes una forma bilineal y simétrica, $\mathbf{b}$, cuya forma cuadrática es $\mathbf{Q}$ entonces para cualquier pareja de vectores, $\vec{x},\vec{y}$, tienes

$$\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{y})$$

   y entonces, suando la simetría de $\mathbf{b}$ obtienes

$$\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) - \mathbf{Q}(\vec{x}) - \mathbf{Q}(\vec{y}))$$

   fórmula que te permite recuperar la forma bilineal simétrica de su forma cuadrática.

★ **Nota Informativa.-** En general, cuando tienes una forma bilineal y simétrica (lo que llamaremos una métrica), $\mathbf{b}$, sobre un espacio vectorial, entonces tienes su forma cuadrática, $\mathbf{Q}$, y siguiendo la jerigonza relativista puedes clasificar a los vectores de tu espacio $\mathbf{V}^n$ en tres clases o familias

- Vectores espaciales, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) > 0$
- Vectores temporales, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) < 0$
- Vectores luminosos, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) = 0$ con $\vec{x} \neq 0$

6. Métricas

♣ A partir de ahora, vamos a estudiar formas bilineales simétricas, a las que llamaremos **métricas**, sobre espacios vectoriales. Así si $\mathbf{V}^n$ es un espacio vectorial, una métrica sobre $\mathbf{V}^n$ es una forma bilineal y simétrica $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$. Al par $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ le llamaremos **espacio vectorial métrico** o simplemente espacio métrico.

★ **Ortogonalidad o Conjugación.-** En general, en un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, puedes hablar de conjugación u ortogonalidad de vectores. Así, dos vectores, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$, son ortogonales o conjugados, con respecto a $\mathbf{b}$ si ocurre que

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = 0} \qquad \text{ortogonales o conjugados}$$

Naturalmente, esta idea se puede extender a subespacios vectoriales. Así si tienes dos subespacios vectoriales, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ entonces puedes decir que son ortogonales o conjugados si ocurre que

$$\mathbf{b}(\vec{u}, \vec{w}) = 0 \qquad \forall \vec{u} \in \mathbf{U} \quad \text{y} \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{W}$$

♣ No es difícil comprender que estudiando la fauna de espacios métricos, o, simplemente, la de métricas sobre un mismo espacio vectorial, te puedes encontrar con comportamientos muy diferentes, algunos contra natura, rayando la aberración. Para convencerte de ello, voy a ponerte algunos ejemplos de métricas sobre el plano. De las cinco formas bilineales, sobre el plano $\mathbb{R}^2$, que consideramos en el ejemplo 1, es claro que salvo la cuarta, las otras cuatro son métricas.

1. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)}$ Esta geometría métrica debe resultarte bastante familiar, la conoces bien del bachillerato. En efecto, el plano dotado con la métrica definida como el producto escalar que estudiaste el curso pasado. Se trata de un plano Euclideo y en él la noción de ortogonalidad es también conocida por perpendicularidad. No obstante, tendrás algunas sorpresas relacionadas con esta geometría, en esta tema y aún más en el siguiente. Quizá y de momento, una propiedad que me conviene recordarte es que en este plano métrico se verifica lo siguiente

   $$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

2. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)}$ En este plano métrico, lo anterior no se cumple. Encuentras vectores, distintos de cero, con los siguientes tres comportamientos posibles

   - Los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en la región $x_1 > x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, se llaman vectores espaciales en la jerigonza relativista.
   - Los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en la región $x_1 < x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) < 0$, se llaman vectores temporales en el argot relativista.
   - Finalmente, los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en las rectas $x_1 = \pm x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, se llaman vectores luminosos en la jerga relativista.

   Evidentemente, se trata de un plano de Lorentz.

3. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_3)}$ En este caso los dos vectores de la base canónica son luminosos $\mathbf{b}_3(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \mathbf{b}_3(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$. Si consideramos la base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por $\vec{x}_1 = (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$

y $\vec{x}_2 = (\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$ entonces es fácil comprobar que en esta base la matriz de la métrica es

$$M(\mathbf{b}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que se trata de una métrica de Lorentz, como en el caso anterior, aunque referida a una base formada por vectores luminosos.

4. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_5)}$ El caso de este plano métrico es, todavía, más raro y patológico. En esta geometría existen vectores distintos al cero que son capaces de ser ortogonales a todos los vectores del plano. En efecto si deseamos calcular los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ que son ortogonales a todos los vectores $\vec{y}$ del plano, por la bilinealidad de la métrica, en la segunda veriable, ello es equivalente a considerar aquellos que son ortogonales a los dos vectores de la base canónica

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 = 0$$

Obtienes así que los vectores ortogonales a todos los del plano son los que están en la recta de ecuación $-2x_1 + x_2 = 0$ Si tomas un vector de esta recta, por ejemplo $\vec{v}_2 = (1, 2)$ entonces puedes considerar cualquier otro vector que no esté en esta recta, por ejemplo $\vec{v}_1 = (1, 0)$ para tener una base, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, del plano y en ella la matriz de la métrica es

$$M(\mathbf{b}_5, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

★ Lo anterior permite clasificar a las métricas en dos grandes grupos. Aquellas que poseen vectores distintos de cero que son ortogonales a todos los del espacio (es suficiente con que lo sea a todos los de una base) las llamaremos **métricas degeneradas** y las que no tengan vectores ortogonales a todos los del espacio que serán las **métricas no degeneradas**.

★ **El radical de una métrica.-** Si te dan un espacio vectorial métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ entonces, para saber donde andas, conviene calcular el conjunto de aquellos vectores que son ortogonales a todos los de $\mathbf{V}^n$. Esto es lo que se llama el **radical** de la métrica

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \;:\; \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \;\; \forall \vec{y} \in \mathbf{V}^n\}$$

puedes comprobar de manera sencilla que el radical de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, es siempre un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$, a su dimensión se le llama nulidad de la métrica.

Naturalmente las métricas degeneradas tienen radical no trivial, la nulidad es mayor que cero; mientras que los espacios métricos no degenerados poseen radical trivial.

★ **Problema.-** ¿Cómo se distingue si una métrica es degenerada o no? Obviamente, calculando el radical y viendo si es trivial o no. Pero, a efectos prácticos, si te dan una métrica por la matriz que la representa en una cierta base ¿cómo codifica la matriz el hecho de que la métrica sea degenerada o no? ¿existe algo en la matriz que nos delate si la métrica es de una manera u otra?

★ **Respuesta.-** La respuesta, naturalmente, es afirmativa. Tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, tomas una base $\mathbf{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ de manera que tienes la matriz $M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$. Es obvio que un vector, $\vec{x}$, está en el radical $\text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ si y sólo si ocurre $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_2) = ... = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_n) = 0$ lo que equivale a que su matriz de coordenadas $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sea una solución del siguiente sistema homogéneo de n ecuaciones

$$X.M = O \quad \text{donde} \quad O = (0, 0, ..., 0)$$

y naturalmente ello equivale a que $\det(M) = 0$. Hemos descubierto que las **métricas degeneradas** se corresponden con matrices que poseen **determinante cero** (ello obviamente no depende de la base que elijas para representar a la métrica). Por lo tanto las **métricas no degeneradas** vienen representadas, en cualquier base, por matrices con **determinante distinto de cero**.

Ejercicio.- En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, como sabes, puedes calcular su radical del siguiente modo, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \text{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b})$ si y solo si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_3) = 0$ lo que implica que

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\text{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b}) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$. La nulidad de esta métrica es uno.

♣ Si tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, entonces puedes considerar un subespacio complementario, $\mathbf{U}$, de $\text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ en $\mathbf{V}^n$, esto es

$$\mathbf{V}^n = \text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U}$$

Es claro que, de la propia definición de radical, si tomas vectores en ambos sumandos entonces son ortogonales de manera que la suma directa anterior es, además, una suma ortogonal.

★ Es importante que comprendas que si tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, y tomas un subespacio, $\mathbf{U}$, de $\mathbf{V}^n$, entonces la métrica la puedes restringir al subespacio para convertirlo en un espacio métrico. Esto es, puedes considerar a $\mathbf{b}$ actuando sobre parejas de vectores de $\mathbf{U}$ con lo que obtienes una forma bilineal y simétrica, esto es una métrica, sobre $\mathbf{U}$ que, si no hay confusión, puedes seguir representando por $\mathbf{b}$. No obstante el hecho de que el espacio métrico de partida sea degenerado o no degenerado, no obliga en absoluto, a que sus subespacios lo sean. En este sentido, se pueden dar todas las posibilidades

- En un espacio métrico degenerado puedes encontrar, obviamente, subespacios degenerados. En efecto, si $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ es degenerado, entonces su radical es un subespacio no trivial y, por definición, la métrica sobre él es trivial y por lo tanto degenerada.

- En un espacio métrico degenerado puedes encontrar subespacios no degenerados. También es claro, si tomas cualquier subespacio complementario al radical

  $$\mathbf{V}^n = \text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U}$$

  entonces, es claro que el subespacio $\mathbf{U}$, naturalmente con la métrica inducida, es no degenerado.

- En un espacio métrico no degenerado puedes encontrar, obviamente, subespacios no degenerados. Por ejemplo cualquier plano del espacio Euclideo ($\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar representado en la base canónica por la matriz identidad)

  Otro ejemplo, toma, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ la métrica que en la base canónica está representada por la siguiente matriz

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  entonces puedes comprobar que los planos

  - $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{(1,1,0);(0,0,1)\})$
  - $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{(1,-1,0);(0,0,1)\})$

  son no degenerados

- En un espacio métrico no degenerado puedes encontrar subespacios degenerados. En el espacio métrico anterior, los planos

  - $\mathbf{W}_1 = \mathbf{L}(\{(1,0,0);(0,0,1)\})$
  - $\mathbf{W}_2 = \mathbf{L}(\{(0,1,0);(0,0,1)\})$

  son degenerados.

7. Matrices Congruentes

♣ En este epígrafe vamos a estudiar un problema natural al que ya estamos acostumbrados. Tienes un espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ entonces si tomas dos bases de $\mathbf{V}^n$, por ejemplo $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, en cada una de ellas la métrica está representada por una matriz simétrica, $M_1 = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_1)$ y $M_2 = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_2)$, la cuestión es entonces la de conocer la relación que existe entre estas dos matrices.

Para resolver el problema, sean $\vec{x}, \vec{y}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbf{V}^n$. Representamos por X y X', respectivamente a las matrices fila de las coordenadas de $\vec{x}$ en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Del mismo modo, Y e Y' serán las correspondientes al vector $\vec{y}$. Entonces tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = X.M_1.Y^t = X'.M_2.Y'^t$$

Por otro lado si P representa a la matriz del cambio de base, esto es, $P = M(\mathbf{1_V}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ entonces tienes

$$X' = X.P \qquad Y' = Y.P$$

y por lo tanto obtienes

$$X.M_1.Y^t = X.(P.M_2.P^t).Y^t$$

Cuando en esta expresión tomas a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como vectores de la base $\mathcal{B}_1$ entonces para cada elección obtienes la igualdad de dos items correspondientes de las matrices M_1 y $P.M_2.P^t$ con lo que estas matrices son iguales

$$\boxed{M_1 = P.M_2.P^t} \qquad \text{matrices congruentes}$$

Como consecuencia obtienes los siguientes invariantes por congruencia

- Todas las matrices congruentes (representan a la misma métrica) tienen el mismo rango. Ello es debido a que tanto P como P^t son no singulares.

- Si dos matrices son congruentes entonces el signo de sus determinantes es el mismo

$$\det(M_1) = \det(M_2).\,(\det(P))^2$$

8. Subespacios y Ortogonalidad

★ Ya conoces algunas cosas relativas al comportamiento de los subespacios de un espacio métrico con respecto a la métrica. Te recuerdo las más importantes. Estamos, obviamente en un espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$

- Siempre que tomes un subespacio, $\mathbf{U}$, de $\mathbf{V}^n$ puedes restringir la métrica sobre él para obtener un subespacio métrico.

- La naturaleza de la métrica (degenerada o no degenerada) no es, en general, heredada por los subespacios.

- El radical de una métrica es siempre un subespacio degenerado pues la métrica sobre él es trivial.

- Los subespacios complementarios del radical son todos no degenerados.

- Tomando un complementario del radical, obtienes una descomposición del tipo

$$\mathbf{V}^n = \mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U} \qquad \text{suma directa y ortogonal}$$

  en consecuencia si tomas bases de ambos subespacios y las reúnes para formar una base de $\mathbf{V}^n$, entonces la matriz de la métrica en esta base es esencialmente la de la métrica restringida a $\mathbf{U}$ en la base que has tomado sobre este subespacio, convenientemente orlada de ceros.

En esencia, lo que estamos diciendo es que el estudio de métricas degeneradas se puede reducir al de métricas no degeneradas sobre los complementarios del radical.

★ **NOTA.-** A partir de ahora, a menos que se diga lo contrario, vamos a considerar espacios métricos no degenerados.

★ Si te dan un subespacio, $\mathbf{U}^r$ (dimensión r), de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, entonces puedes definir su subespacio ortogonal como sigue

$$\mathbf{U}^\perp = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{U}^r\}$$

Es claro que el conjunto de vectores así definido es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$ (lo puedes comprobar como ejercicio). Además, su dimensión es $n - r$ (recuerda que estamos en el caso de espacios métricos no degenerados). Para comprobarlo, observa que si tomas cualquier base de $\mathbf{U}^r$, por ejemplo $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r\}$, entonces un vector, $\vec{x}$ está en $\mathbf{U}^\perp$ si y sólo si se verifica

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_2) = ... = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_r) = 0$$

la cuestión es escribir estas ecuaciones en una base para obtener un sistema de r ecuaciones lineales homogéneas en las n coordenadas de $\vec{x}$, relativas a esa base. Las r ligaduras son independientes y aquí interviene que la métrica es no degenerada con lo cual constituyen unas ecuaciones implícitas para $\mathbf{U}^\perp$.

Como ya tenemos una base de $\mathbf{U}^r$, la ampliamos para obtener la siguiente base de $\mathbf{V}^n$

$$\bar{\mathcal{B}} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r, \vec{x}_{r+1}, ..., \vec{x}_n\}$$

En esta base la métrica viene representada por una matriz simétrica no singular puesto que la métrica es no degenerada

$$M = M(\mathbf{b}, \bar{\mathcal{B}}) = (\alpha_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

las r ecuaciones anteriores al expresarlas en esta base son

$$\mathbf{b}(\vec{u}_1, \vec{x}) = \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0$$

$$\mathbf{b}(\vec{u}_2, \vec{x}) = \alpha_{21}x_1 + ... + \alpha_{2n}x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{b}(\vec{u}_r, \vec{x}) = \alpha_{r1}x_1 + ... + \alpha_{rn}x_n = 0$$

naturalmente, estas r ecuaciones homogéneas son independientes pues la matriz M es regular, lo que prueba que la dimensión de $\mathbf{U}^\perp$ es $n - r$.

★ Lo anterior no ocurre si el espacio métrico en el que estás trabajando es degenerado. Aquí tienes un ejemplo. Considera en $\mathbb{R}^3$ la métrica, $\mathbf{b}$, representada en la base canónica por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tienes entonces una métrica degenerada cuyo radical, puedes comprobarlo, es la recta siguiente

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b}) = \mathbf{L}(\{\vec{v} = (1, 1, 1)\})$$

Si ahora tomas el plano $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0); \{\vec{v} = (1, 1, 1)\})$ entonces puedes calcular su subespacio ortogonal y obtienes que es el siguiente plano

$$\mathbf{U}^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 = 0\}$$

con lo que no se cumple que la suma de dimensiones es tres.

♣ Ya sabes que aunque $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ sea un espacio métrico no degenerado, tiene subespacios degenerados. Imagina que tomas un subespacio $\mathbf{U}$, con dimensión r. Por lo que se ha visto antes, el subespacio ortogonal, $\mathbf{U}^\perp$, tiene dimensión $n - r$. La suma de las dimensiones de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{U}^\perp$ es justamente la del espacio ambiente. Naturalmente, hay que preguntar **¿cuándo se puede romper el espacio ambiente, $\mathbf{V}^n$, en suma directa, y por tanto ortogonal, de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^\perp$?**

La anterior descomposición ortogonal se produce si y sólo si $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\vec{0}\}$. Lo que, obviamente, es equivalente a que no exista ningún vector en $\mathbf{U}$, distinto al cero, que esté en $\mathbf{U}^\perp$, es decir que sea ortogonal con todos los vectores de $\mathbf{U}$. Falta entonces concluir con que lo anterior equivale a que el subespacio $\mathbf{U}$ es no degenerado. Hemos probado entonces las siguientes afirmaciones

- **Sea U un subespacio no degenerado de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathrm{b})$ no degenerado entonces se tiene la siguiente descomposición en suma directa ortogonal**

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U} \oplus_\perp \mathbf{U}^\perp \qquad \text{directa y ortogonal}$$

- **Si para un subespacio, U, de un espacio métrico no degenerado se tiene la descomposición anterior, entonces el subespacio es no degenerado**.
- **Como consecuencia, cuando tienes un subespacio no degenerado, de entre todos sus complentarios, puedes determinar uno, único, que es ortogonal a él, a partir de ahora, le llamaremos su complemento ortogonal**.
- **Además de manera inmediata puedes ver que un subespacio es no degenerado si y sólo si su ortogonal lo es**.

Aquí tienes algunos ejemplos

Ejemplo 1.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar Euclideo que ya conoces, esto es la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad. Entonces cualquier recta vectorial es un subespacio no degenerado. En efecto si tomas cualquier recta, $\mathbf{R} = \mathbf{L}(\{\vec{x}\})$, la métrica Euclidea restringida a ella y en la base $\{\vec{x}\})$ es la matriz de orden uno $\begin{pmatrix} \vec{x}.\vec{x} \end{pmatrix}$ cuyo determinante es, obviamente distinto de cero, de manera más concreta positivo.

Ejemplo 2.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este ejercicio está dedicado a determinar las rectas $\mathbf{R} = \mathbf{L}(\{\vec{x}\})$ que son no degeneradas. Como en el ejercicio anterior, la matriz de la métrica restringida a $\mathbf{R}$ es $\begin{pmatrix} \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) \end{pmatrix}$ y su determinante sigue siendo el número $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x})$ pero ahora, no tenemos la garantía de que sea distinto de cero. Si el vector es $\vec{x} = (x, y, z)$ entonces $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 + y^2 - z^2$ y naturalmente, este número puede ser positivo (vectores espaciales), negativo (vectores temporales) y cero (vectores luminosos). Estos últimos son los que proporcionan las rectas degeneradas. La conclusión es que las rectas vectoriales degeneradas son, justamente, las generatrices del cono con ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 \qquad \textbf{cono de luz}$$

Ejemplo 3.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad (ya sabes el producto escalar que bien conoces). Entonces te propongo que tomes cualquier plano, el que se te ocurra y trates de ver si es degenerado o no.

Ejemplo 4.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora consideramos el plano $\mathbf{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x+3y-z=0\}$, veamos si es degenerado o no degenerado. Para ello lo que haremos será, en primer lugar calcular una base del plano y después calcular la matriz de la métrica, restringida al plano, en dicha base para finalmente calcular su determinante.

$$\mathbf{U} = \{(x,y,2x+3y) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1 = (1,0,2), \vec{x}_2 = (0,1,3)\})$$

Entonces la matriz de la métrica, restringida a $\mathbf{U}$, en la base anterior es

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero y por lo tanto se trata de un plano no degenerado.

No creas, en esta espacio métrico también existen planos degenerados, por ejemplo considera el plano de ecuación $3x+4y-5z=0$ entonces puedes calcular una base del mismo, por ejemplo $\vec{x}_1 = (5,0,3), \vec{x}_2 = (0,5,4)$. Ahora la matriz de la métrica, restringida a este plano, en la base anterior es

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

que es una matriz singular, su determinante es cero, lo que implica que el plano es degenerado.

♣ **Nota.-** Puedes elegir planos en el espacio métrico definido anteriormente y tratar de ver si son degenerados o no. Después, si quieres *rizar el rizo*, puedes tratar de encontrar alguna regla para determinar todos los planos degenerados (y por tanto los no degenerados) de este espacio métrico.

Ejemplo 5.- *En* $\mathbb{R}^3$ *considera la métrica que, en la base canónica, viene dada por la matriz identidad (el producto escalar Euclideo que conoces del curso pasado). Calcula los subespacios ortogonales a los siguientes*

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(1,1,1)\}) \qquad \mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x-y-z=0\}.$$

Para que un vector esté en $^{\perp}$ es suficiente con que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (1,1,1)$ el cual forma una base del primer subespacio vectorial (recta) entonces obtienes

$$\mathbf{U}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z=0\} \qquad \textbf{plano perpendicular}$$

Para calcular $\mathbf{W}^{\perp}$ observamos que los vectores $\vec{w}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{w}_2 = (0,1,-1)$ forman una base de $\mathbf{W}$ y por lo tanto

$$\mathbf{W}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+z=y-z=0\} \qquad \textbf{recta perpendicular}$$

Ejemplo 6.- *En* $\mathbb{R}^3$ *considera la métrica que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los subespacios ortogonales a los siguientes

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(1,1,0)\}) \qquad \mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x-y-z=0\}.$$

Para que un vector esté en $\mathbf{U}^{\perp}$ es suficiente con que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (1,1,0)$ el cual forma una base del primer subespacio vectorial (recta) entonces obtienes

$$\mathbf{U}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y = 0 \right\}$$

Dicho subespacio (plano), evidentemente contiene a la propia recta $\mathbf{U}$, esta situación es imposible en la geometría Euclidea que conoces del curso pasado.
Para calcular $\mathbf{W}^{\perp}$ observamos que los vectores $\vec{w}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{w}_2 = (0,1,-1)$ forman una base de $\mathbf{W}$ y por lo tanto

$$\mathbf{W}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = y + z = 0\} = \mathbf{L}(\{(1,1,-1)\})$$

En este caso se tiene $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$ y por lo tanto $\mathbb{R}^3 = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$, como en la geometría Euclidea.

Ejemplo 7.- *En $\mathbb{R}^3$ considera la métrica que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los subespacios ortogonales a los tres planos coordenados.
Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{12} \equiv z = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{12}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = 0\} \qquad \textbf{eje}\, z$$

Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{13} \equiv y = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_3$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{13}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = z = 0\} \qquad \textbf{eje}\, x$$

Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{23} \equiv x = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{23}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = z = 0\} \qquad \textbf{eje}\, y$$

Nota.- Deberías fijarte en la situación tan distinta que se obtiene en el resultado anterior.

Ejemplo 8.- *En $\mathcal{P}_2$ considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^4 P(t).Q(t)\,dt$$

Calcula el subespacio ortogonal del plano generado por los polinomios $1 - t$ y $1 + t^2$. Para ello tomamos $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y

$$\mathbf{b}(P(t), 1 - t) = \int_0^2 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_0 t - a_1 t^2 - a_2 t^3) dt = -\frac{2}{3} a_1 - \frac{4}{3} a_2 = 0$$

Los polinomios ortogonales con el $1 - t$ son los que verifican $a_1 + 2a_2 = 0$.

$$\mathbf{b}(P(t), 1 + t^2) = \int_0^2 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_0 t^2 + a_1 t^3 + a_2 t^4) dt = \frac{14}{3} a_0 + 6a_1 + \frac{136}{15} a_2 = 0$$

Los polinomios ortogonales con el $1 + t^2$ son los que verifican $35a_0 + 45a_1 + 68a_2 = 0$. Por tanto los polinomios ortogonales a todos los del plano dado deben verificar conjuntamente las dos siguientes ligaduras: $a_1 + 2a_2 = 0$ y $35a_0 + 45a_1 + 68a_2 = 0$.

9. Bases Ortogonales

★ En un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, la métrica la puedes representar por muchas matrices, dependiendo de la base que tomes, todas estas matrices, como bien sabes, son congruentes. Interesa entonces elegir bases donde las matrices sean diagonales. Geométricamente ello implica que dichas bases deben estar formadas por vectores que son ortogonales dos a dos. Tenemos entonces el siguiente problema

¿Existen bases ortogonales en un espacio métrico?

Este problema también se puede plantear en términos de congruencia de matrices en los siguientes términos

¿Es toda matriz simétrica congruente a otra diagonal?

★ Vamos a ver que podemos resolver de manera afirmativa el primer problema y por tanto el segundo. Es claro que podemos considerar, sin perder generalidad y como por otro lado lo estamos haciendo, el caso de métricas no degeneradas. En efecto, si probamos la existencia de bases ortogonales en cualquier espacio métrico no degenerado, entonces también se tiene dicha existencia en los espacio métricos degenerados. Recuerda que todo espacio métrico es la suma directa y ortogonal de su radical con cualquier complementario suyo.

★ Para probar el resultado realizaremos un argumento constructivo para probar la existencia de bases ortogonales. Tienes el espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y empiezas eligiendo el primer vector de la futura base ortogonal, $\vec{x}_1$, con la única condición de que no sea luminoso (recuerda que estamos en un contexto de métrica no degenerada, su m atriz en cualquier base debe ser regular y entonces al diagonalizar, no puede haber ceros en la diagonal principal).

$$¿\exists\, \vec{x}_1 \in \mathbf{V}^n \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) \neq 0?$$

Si ello no fuese posible, todos los vectores deberían ser luminosos, pero en general, de la bilinealidad y simetría de $\mathbf{b}$ puedes escribir

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) - \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{y}) \right) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

Así si todos los vectores son luminosos la forma bilineal $\mathbf{b}$ debe ser trivial. Por lo tanto

$$\exists\, \vec{x}_1 \in \mathbf{V}^n \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) \neq 0$$

Con ello garantizamos que la recta generada por $\vec{x}_1$, que representamos por $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1\})$, es un subespacio no degenaro y entonces admite un complemento ortogonal de dimensión $n-1$ y tienes

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U}_1 \oplus^{\perp} \mathbf{U}_1^{\perp}$$

Resulta que $\mathbf{U}_1^{\perp}$, con la métrica inducida, es un espacio métrico con dimensión $n-1$ y podemos elegir en él el segundo vector de la base, $\vec{x}_2$ con la condición de que no sea luminoso.

$$\exists\, \vec{x}_2 \in \mathbf{U}_1^{\perp} \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) \neq 0$$

Si representamos por $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_2\})$ a la recta que genera este vector, es un subespacio no degenerado y admite un complemento ortogonal en $\mathbf{U}_1^{\perp}$ con lo que se tiene

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \mathbf{U}_2 \oplus^{\perp} \mathbf{U}_2^{\perp}$$

El subespacio, no degenerado, $\mathbf{U}_2^{\perp}$ se convierte en un espacio métrico con dimensión $n-2$ y en él elegimos el tercer vector de la base con la condición de que no sea luminoso. Realizando n elecciones obtenemos la base ortogonal.

Aquí tienes algunos ejemplos

Ejemplo 1.- *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *considera la métrica,* $\mathbf{b}$*, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula una base ortogonal para dicha métrica.
Empezamos eligiendo como primer vector uno que no sea luminoso, por ejemplo, $\vec{x}_1 = (1,0,0)$ y calculamos el subespacio ortogonal a la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1\})$, se tiene

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -x+y+z=0\}$$

En este plano, no degenerado, elegimos el segundo vector de la base, por ejemplo, $\vec{x}_2 = (1,1,0)$ y volvemos a calcular el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_2\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3y+2z=0\}$$

Finalmente elegimos el tercer vector de la base en la recta $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp}$, por ejemplo, $\vec{x}_3 = (1,-2,3)$. Obtienes así una base ortonormal, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, y la matriz de la métrica en dicha base es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

donde hemos calculado $\mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = 3$ y $\mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_3) = 15$

Ejemplo 2.- *En el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos,* $\mathbf{S}_2$*, se considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(M,N) = \text{Traza}(M.N)$$

Calcula una base ortogonal para dicho espacio métrico. Empezamos eligiendo un primer vector que no sea luminoso. Entonces, lo mejor es calcular la expresión de los vectores luminosos

$$\mathbf{b}(M,M) = \text{Traza}(M.M) = \text{Traza}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right] = a^2 + 2b^2 + c^2$$

en consecuencia no existen vectores luminosos. Tomamos entonces como primer vector de la base

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{M_1\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix} \,:\, b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Elegimos el segundo vector en este plano, por ejemplo

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{M_2\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Elegimos el tercer vector en $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp}$, por ejemplo

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos así una base ortogonal, $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$ y la matriz de la métrica en dicha base es

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.- *En $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

Calcula una base ortogonal de $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$. Como en el ejemplo anterior, nos damos cuenta de que $\mathbf{b}(P(t), P(t)) \geq 0$ siendo cero únicamente cuando el polinomio es cero. En consecuencia, el cono de luz es trivial. Por lo tanto podemos elegir como primer vector de la futura base ortogonal a cualquier polinomio, obviamente que no sea cero. Pomamos, por ejemplo $P_1(t) = 1$ y determinamos el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{P_1(t)\})$

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ \int_0^1 P(t)\, dt = 0 \right\}$$

con lo que

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = 0 \right\}$$

Puedes entonces elegir como segundo vector de tu futura base ortogonal al polinomio $P_2(t) = 1 - 2t$ y determinar el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{P_2(t)\})$

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ \int_0^1 P(t)(1 - 2t)\, dt = 0 \right\}$$

ahora un cálculo sencillo te permitirá ver que

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ 10a_1 + 10a_2 + 9a_3 = 0 \right\}$$

por lo que el tercer vector de tu futura base ortogonal debes elegirlo en el plano $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp}$. Entonces, puedes elegir, por ejemolo, al polinomio $P_3(t) = 1 - 6t + 6t^2$ y determinar el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_3 = \mathbf{L}(\{P_3(t)\})$

$$\mathbf{U}_3^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ \int_0^1 P(t)(1 - 6t + 6t^2)\, dt = 0 \right\}$$

Puedes comprobar después de un cálculo sencillo que

$$\mathbf{U}_3^{\perp} = \left\{P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ : \ 2a_2 + 3a_3 = 0\right\}$$

de manera que el último vector de tu base ortogonal deberás tomarlo como un polinomio en la recta $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp} \cap \mathbf{U}_3^{\perp}$. Puedes ver que las ecuaciones paramétricas de esta recta son

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{20} a_3 \\ a_1 &= \frac{3}{5} a_3 \\ a_2 &= -\frac{3}{2} a_3 \end{aligned}$$

de manera que tomando $a_3 = 20$ obtienes como cuarto y último polinomio de tu base ortonormal $P_4(t) = -1 + 12t - 30t^2 + 20t^3$. Entonces la base ortogonal que te has regalado es la siguiente

$$\mathcal{B} = \{P_1(t) = 1; P_2(t) = 1 - 2t; P_3(t) = 1 - 6t + 6t^2; P_4(t) = -1 + 12t - 30t^2 + 20t^3\}$$

Si te apetece, puedes ahora calcular la matriz de la métrica en esta base y comprobar que debería de darte una matriz diagonal, es un buen ejercicio.

10. Bases Ortonormales, signatura o índice

★ Una vez que hemos conseguido una base ortogonal para un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, nos encontraremos que en la diagonal de la matriz que representa a la métrica en dicha base habrá un cierto número de valores positivos y otro de valores negativos (no puede haber ceros pues estamos hablando de métricas que son no degeneradas). Concretamente $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ con

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = a_{ii} > 0 \quad 1 \leq i \leq p} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_j) = c_{jj} < 0 \quad p+1 \leq j \leq n}$$

En estas condiciones, podemos **normalizar** la base ortogonal, es decir, sin cambiar las direcciones, cambiamos los vectores de la base por los siguientes

$$\boxed{\vec{v}_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \vec{x}_i \quad 1 \leq i \leq p} \qquad \boxed{\vec{v}_j = \frac{1}{\sqrt{-c_{jj}}} \vec{x}_j \quad p+1 \leq j \leq n}$$

En esta nueva base, la matriz de la métrica sigue siendo diagonal pero en la diagonal principal aparece $+1$ justamente p veces y -1 justamente $n-p$ veces. A estas base las llamaremos ortonormales.

★ Sea $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ un espacio métrico y sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases ortogonales entonces el número de valores negativos (y por lo tanto también el de positivos) que aparecen en la diagonal de las dos matrices diagonales que representan a la métrica en dichas bases es el mismo. En efecto, supongamos que en $M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_1)$ aparecen p valores positivos y $n-p$ negativos. Suponemos que en $M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_2)$ aparecen q valores positivos y $n-q$ negativos, además los podemos normalizar en ambos casos para que sean $+1$ y -1, esto es

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_q, \vec{y}_{q+1}, \cdots, \vec{y}_n\}$$

con

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_i,\vec{x}_i)=+1 \quad 1\le i\le p} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_j,\vec{x}_j)=-1 \quad p+1\le j\le n}$$

y

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{y}_k,\vec{y}_k)=+1 \quad 1\le k\le q} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{y}_l,\vec{y}_l)=-1 \quad q+1\le l\le n}$$

Vamos a ver que $p=q$

para ello consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbf{V}^n$ en los que indicamos sus dimensiones

$$\mathbf{U}_p=\mathbf{L}(\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p\}) \quad \mathbf{U}^{\perp}_{n-p}=\mathbf{L}(\{\vec{x}_{p+1},\cdots,\vec{x}_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}^n=\mathbf{U}_p\oplus^{\perp}\mathbf{U}^{\perp}_{n-p}$$

$$\mathbf{W}_q=\mathbf{L}(\{\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_q\}) \quad \mathbf{W}^{\perp}_{n-q}=\mathbf{L}(\{\vec{y}_{q+1},\cdots,\vec{y}_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}^n=\mathbf{W}_q\oplus^{\perp}\mathbf{W}^{\perp}_{n-q}$$

Ahora consideramos el subespacio vectorial $\mathbf{U}_p\cap\mathbf{W}^{\perp}_{n-q}$, si $\vec{z}$ es un vector de dicho subespacio vectorial entonces tienes

$$\vec{z}\in\mathbf{U}_p \quad \Rightarrow \quad \vec{z}=\sum_{i=1}^{p} a_i\vec{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(\vec{z},\vec{z})=\sum_{i=1}^{p} a_i^2$$

$$\vec{z}\in\mathbf{W}^{\perp}_{n-q} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}=\sum_{j=q+1}^{n} b_j\,\vec{y}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(\vec{z},\vec{z})=-\sum_{j=q+1}^{n} b_j^2$$

Combinando ambas expresiones, obtienes que $\vec{z}=\vec{0}$ y por lo tanto la suma de ambos subespacios vectoriales es directa, es decir

$$\dim(\mathbf{U}_p+\mathbf{W}^{\perp}_{n-q})=p+n-q\le n \quad \Rightarrow \quad p\le q$$

Considerando ahora el subespacio $\mathbf{U}^{\perp}_{n-p}\cap\mathbf{W}_q$ obtienes que $q\le p$.

★ Al número común de valores diagonales negativos que te aparecen en cualquier base ortogonal se le suele llamar **signatura** o **índice** de la métrica. En esencia es la mayor dimensión de los subespacios vectoriales en los que la métrica es definida negativa.

★ **NOTA.-** La misma prueba anterior se puede reproducir para métricas degeneradas. Basta con sustituir los subespacios $\mathbf{U}_p$ y $\mathbf{W}_q$ por los subespacios $\mathbf{U}_p\oplus\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$ y $\mathbf{W}_q\oplus\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$ y usar el mismo argumento.

★ **CONCLUSIÓN (Ley de inercia de Sylvester.-** Para cualquier espacio métrico, $(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$, hemos encontrado tres números naturales que suman la dimensión del espacio vectorial

- La nulidad o dimensión del radical, r
- La signatura o índice, p, mayor dimensión de los subespacios sobre los que la métrica es definida negativa
- El número $n-(r+p)$ que indica la mayor dimensión de los espacios sobre los que la métrica es definida positiva

Entonces en cualquier base ortogonal, la matriz de la métrica es diagonal y tiene r ceros, p items igual a -1 y $n-(p+r)$ items igual a 1 en la diagonal principal.

11. Isometrías

★ Ya sabes que al definir cualquier estructura matemática, tienes con ella asociada una relación de igualdad. En este sentido, dos conjuntos se consideran iguales cuando puedes establecer entre ellos una biyección. Dos grupos son iguales cuando son isomorfos. Lo mismo que dos espacios vectoriales, son iguales cuando puedes establecer entre ellos una aplicación que sea lineal y biyectiva. Recuerda que si dos espacios vectoriales son isomorfos entonces tienen la misma dimensión. Así, decimos que la dimensión de un espacio vectorial es un invariante. También sabes que el recíproco es cierto, si dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión entonces puedes definir isomorfismos entre ellos.

★ En este tema hemos introducido la idea de espacio métrico y deberiamos establecer la relación de igualdad entre espacios métricos. Es claro que para que dos espacios vectoriales métricos los podamos considerar iguales deben ser, en primer lugar, iguales como espacios vectoriales. Es decir deben ser isomorfos y por tanto tener la misma dimensión. Partimos entonces de dos espacios vectoriales métricos que tengan la misma dimensión: $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ (hemos representado a propósito la dimensión común, n, en la parte superior). Entre ellos podemos establecer muchos isomorfismos, sin embargo, unos serán compatibles con las métricas y otros no. Diremos que un isomorfismo, $f : \mathbf{V}^n \to \mathbf{W}^n$, es una **isometría** entre los espacios vectoriales métricos $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ cuando se verifique la siguiente condición de compatibilidad

$$\boxed{\mathbf{b}'(f(\vec{x}, f(\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

★ Entonces si entre dos espacios vectoriales métricos tenemos definida una isometría diremos que son **isométricos** esto es iguales como espacios métricos. Naturalmente si ello ocurre deben tener la misma dimensión. También **tienen la misma signatura**. Esto es, **la signatura (o el índice) es otro invariante frente a las isometrías**. Para verlo, es suficiente con que observes lo siguiente: si $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}^n$, entonces, por ser f un isomorfismo, tienes que $\mathcal{B}' = \{f(\vec{x}_1), \cdots, f(\vec{x}_n)\}$ es una base de $\mathbf{W}^n$. Al ser f una isometría tienes una información extra, **las matrices de las métricas en estas bases coinciden**, es decir

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = M(\mathbf{b}', \mathcal{B}')$$

esto es suficiente para poder asegurar que ambas métricas tienen la misma signatura.

★ Ocurre que el recíproco del hecho anterior también es cierto. Es decir, tienes el siguiente resultado de clasificación. **Dos espacios vectoriales $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión y la misma signatura**. Para creernos la condición suficiente, suponemos que los dos espacios vectoriales tienen dimensión n y ambas métricas signatura s entonces podemos encontrar, en ambos espacios vectoriales, bases ortonormales del siguiente tipo

$$\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_s, \vec{x}_{s+1}, \cdots, \vec{x}_n\} \quad \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = -1 \quad 1 \le i \le s \quad \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_j) = +1 \quad s-1 \le j \le n$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_s, \vec{y}_{s+1}, \cdots, \vec{y}_n\} \quad \mathbf{b}'(\vec{y}_i, \vec{y}_i) = -1 \quad 1 \le i \le s \quad \mathbf{b}'(\vec{y}_j, \vec{y}_j) = +1 \quad s-1 \le j \le n$$

Ahora defines una aplicación lineal $f : \mathbf{V}_s^n \to \mathbf{W}_s^n$ aplicando uno a uno los vectores de estas bases, $f(\vec{x}_k) = \vec{y}_k$, $1 \le k \le n$, y extendiendo por linealidad. Consigues, de esta forma, un isomorfismo que, evidentemente, resulta ser una isometría.

★ **NOTA.-** El resultado anterior vale para métricas degeneradas haciendo intervenir a la nulidad. **Dos espacios métricos son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión, la misma nulidad y la misma signatura**.