

# Números reales y funciones elementales

## 1 Números reales

**Ejercicio 1.** Calcula para qué valores de  $x$  se verifica que  $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$ .

**Ejercicio 2.** Encuentra aquellos valores de  $x$  que verifican que:

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$ , | d) $x^2 \leq x$ ,             |
| b) $x^2 - 5x + 9 > x$ ,                | e) $x^3 \leq x$ ,             |
| c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$ ,             | f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$ . |

**Ejercicio 3.** Discute para qué valores de  $x$  se verifica que:

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $ x-1   x+2  = 3$ , | c) $ x-1  +  x+1  < 1$ , |
| b) $ x^2 - x  > 1$ ,   | d) $ x+1  <  x+3 $ .     |

**Ejercicio 4.** ¿Para qué valores de  $x$  se cumple la desigualdad  $x^2 - (a+b)x + ab < 0$ ?

## 2 Funciones elementales

**Ejercicio 5.** Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

- |   |   |
|---|---|
| a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$                     | d) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$ | e) $y = \log(\text{sen}(x))$                |
| c) $y = \sqrt{\frac{x}{1- x }}$                     | f) $y = \sqrt{\log(\text{sen}(x))}$         |

**Ejercicio 6.** Si  $f(x) = 1/x$  y  $g(x) = 1/\sqrt{x}$ , ¿cuáles son los dominios naturales de  $f$ ,  $g$ ,  $f+g$ ,  $f \cdot g$  y de las composiciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$ ?

**Ejercicio 7.** Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| a) $f(x) =  x+1  -  x-1 $                    | d) $f(x) = e^x - e^{-x}$    |
| b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | e) $f(x) = \text{sen}( x )$ |
| c) $f(x) = e^x + e^{-x}$                     | f) $f(x) = \cos(x^3)$       |

**Ejercicio 8.** ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad  $e^{3x+8}(x+7) > 0$ ?

**Ejercicio 9.** Comprueba que la igualdad  $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$  es cierta para cualquier par de números positivos  $a$  y  $b$ .

**Ejercicio 10.** Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

**Ejercicio 11.** ¿Para qué valores de  $x$  se cumple que  $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$ ?

**Ejercicio 12.** Prueba que  $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$ .

**Ejercicio 13.** Resuelve la ecuación  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ .

**Ejercicio 14.** Simplifica las siguientes expresiones:

a)  $a^{\log(\log a)/\log a}$ ,

b)  $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$ .

**Ejercicio 15.** Comprueba que si  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , entonces  $f \circ f \circ f(x) = x$ .

**Ejercicio 16.** Calcula la inversa de las siguientes funciones

a)  $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

b)  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

**Ejercicio 17.** ¿Hay algún valor de  $x$  e  $y$  para los que se cumpla que  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ?

**Ejercicio 18.** ¿Hay algún valor de  $x$  e  $y$  para los que se cumpla que  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ?

**Ejercicio 19.** Estudia si son periódicas y cuál es el periodo de las siguientes funciones:

a)  $2 \cos(3x)$ ,

c)  $3 \sin(5x/8)$ ,

b)  $4 \sin(\pi x)$ ,

d)  $|\sin(x)| + |\cos(x)|$ .

**Ejercicio 20.** Calcula el valor de  $\sin(7\pi/12)$  y  $\cos(\pi/12)$ .

**Ejercicio 21.** Discute si son ciertas las siguientes identidades:

a)  $\arccos(\cos(\pi/4)) = \pi/4$ ,

c)  $\arctan(\tan(3\pi/2)) = 3\pi/2$ ,

b)  $\arcsen(\sin(10)) = 10$ ,

d)  $\arccos(\cos(x)) = x$ .

**Ejercicio 22.** Usa las fórmulas de adición para expresar  $\tan(x+y)$  en términos de  $\tan(x)$  y  $\tan(y)$ .