CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO C.

1. Demuestra que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

   Solución.

   En este caso al tratarse de demostrar una propiedad de los números naturales parece conveniente intentarlo por inducción. Para el número 1 la expresión de la izquierda se reduce a un sumando, $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$ y el miembro de la derecha vale $\frac{1}{3}$ así que es cierta la igualdad para $n=1$.

   Supongamos que para un natural n dado se verifica la igualdad $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ y veamos si también se verifica para el natural $n+1$. El miembro de la izquierda, para $n+1$, quedaría

   $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

   que, utilizando la hipótesis de inducción es igual a

   $$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+1)}{2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3},$$

   que es el miembro de la derecha de la igualdad que pretendemos demostrar evaluada en $n+1$.

2. Estudia la convergencia de la sucesión definida por $x_1=a\in]-2,1[$, y $x_{n+1}=\frac{2+x_n^3}{3}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

   Solución.

   Al ser una sucesión definida de forma recurrente parece apropiado intentar demostrar que es monótona y acotada y, por tanto, convergente. Para estudiar la monotonía veamos que ocurre con los primeros términos. $x_2=\frac{2+a^3}{3}$ y tenemos que ver si es mayor o menor que $x_1=a$. Veamos cuándo son iguales.

   $$a=\frac{2+a^3}{3}\Leftrightarrow a^3-3a+2=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ ó } x=1.$$

   Hemos encontrado las soluciones por Ruffini probando entre los divisores de 2. Está claro entonces que, como $a\in]-2,1[$, los dos miembros son distintos y, además, la relación de desigualdad entre ellos es siempre la misma. Probando, por ejemplo, con $a=0$, se tiene que $x_1<x_2$. Supongamos ahora que, para un natural n, se verifica que $x_n<x_{n+1}$. Entonces

   $$x_n^3<x_{n+1}^3\Rightarrow x_n^3+2<x_{n+1}^3+2\Rightarrow\frac{x_n^3+2}{3}<\frac{x_{n+1}^3+2}{3}\Rightarrow x_{n+1}<x_{n+2}.$$

   Así que la sucesión es creciente. Para ver la acotación (en este caso mayoración) necesitamos un candidato a mayorante de la sucesión. Si no tenemos claro con qué número probar podemos suponer que la sucesión es convergente a un número L y este número L será mayorante de la sucesión.

Se tiene que

$$L = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{\frac{2+x_n^3}{3}\} = \frac{2+\lim\{x_n\}^3}{3} = \frac{2+L^3}{3},$$

que tiene como soluciones (ya lo hemos hecho antes con a en vez de L) $L = -2$ ó $L = 1$. Pero como $x_1 > -2$ y la sucesión es creciente sólo nos queda como solución $L = 1$.

Veamos que 1 es mayorante de la sucesión. Evidentemente $x_1 = a < 1$. Supongamos que, para un natural n, se verifica que $x_n < 1$ entonces se tiene que

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n^3}{2} < \frac{2+1^3}{3} = 1.$$

Así que $x_n < 1$ para todo natural n y entonces es creciente y mayorada y por lo tanto convergente. Ya sabemos que en ese caso el límite es 1.

3. Calcula el límite de la sucesión $\{x_n\} = \left\{ n\left(\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right)\right\}$.

Solución.

Vamos a analizar la sucesión por partes. Se tiene que $\{n^3\}$ diverge positivamente y $\{\log(1+1/n)\}$ converge a $log(1) = 0$ así que estamos ante una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. Pero

$$n^3\log(1+1/n) = n^2\log(1+1/n)^n,$$

y sabemos que $\{\log(1+1/n)^n\} \to \log(e) = 1$. Entonces $\{n^3\log(1+1/n)\} \to +\infty$.

Entonces $\left\{\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n\right\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Pero utilizando la regla del número e se obtiene que

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n\right\} = e^L \Leftrightarrow \lim\left\{\frac{n}{n^3\log(1+1/n)}\right\} = \lim\left\{\frac{1}{n^2\log(1+1/n)}\right\} = L,$$

pero, utilizando otra vez que $\log(1+1/n)^n \to 1$, se obtiene que

$$\lim\left\{n^2\log(1+1/n)\right\} = \lim\left\{n\log(1+1/n)^n\right\} = +\infty,$$

y entonces $L = 0$ y

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n\right\} = e^0 = 1.$$

Resumiendo, $\{x_n\} = \left\{ n\left(\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right)\right\}$ presenta una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Utilizando repetidas veces la regla del número e tenemos

$$M=\lim\{x_n\}=\lim\left\{n\left(\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n-1\right)\right\}\Leftrightarrow\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^{n^2}\right\}=e^M.$$

Ahora

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^{n^2}\right\}=e^M\Leftrightarrow\lim\left\{\frac{n^2}{n^3\log(1+1/n)}\right\}=\lim\left\{\frac{1}{n\log(1+1/n)}\right\}=M.$$

Utilizando, otra vez, que $\lim\{n\log(1+1/n)\}=\lim\{\log(1+1/n)^n\}=1$ obtenemos que $M=1$.

4. Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}$.

Solución.

El término general de esta serie tiene tanto potencias como factoriales. Las potencias van bien tanto con el criterio de la raiz como con el del cociente, pero los factoriales van mal con el criterio de la raiz y mucho mejor con el criterio del cociente. Si llamamos $a_n=\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}$ tendremos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2 2^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}=\frac{(n+1)^2 2^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{4(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{4(n+1)}{2(2n+1)}=\frac{4n+4}{4n+2}.$$

Está claro entonces que $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}\to 1$. Si no nos fijamos muy bien concluiríamos que el criterio del cociente no da información pero, si nos fijamos bien, nos daremos cuenta que $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4n+4}{4n+1}>1$ para cualquier natural n y entonces se tiene que la sucesión $\{a_n\}$ no es convergente a 0 y por tanto la serie no es convergente.

5. Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 2}\frac{n^2+1}{n!}$ y en caso de que lo sea calcula la suma de la serie.

Solución.

Para comprobar que la serie es convergente vamos a utilizar el criterio del cociente. Si llamamos $a_n=\frac{n^2+1}{n!}$ tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2+1}=\frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n^2+1)}=\frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1},$$

y $\lim\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}=\lim\{\frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1}\}=0<1$ con lo que la serie es convergente. Para calcular la suma tenemos que tener en cuenta que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$; igualdad que conocemos perfectamente. De esta igualdad se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1$ y que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-2$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $n^2+1 = n(n-1)+n+1$, se tiene que

$$\frac{n^2+1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$$

y entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + (e-1) + (e-2) = 3e-3.$$

Granada, 10 de diciembre de 2010