

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Presentación</b>	<b>2</b>
<b>2. Datos básicos.</b>	<b>3</b>
<b>3. Temario y bibliografía.</b>	<b>5</b>
3.1. Temario. . . . .	5
3.2. Bibliografía. . . . .	6
3.3. Temario de prácticas con Maxima . . . . .	8
3.4. Temario de actividades académicamente dirigidas. . . . .	9
<b>4. Objetivos.</b>	<b>11</b>
<b>5. Metodología, horario y cronología.</b>	<b>18</b>
5.1. Horario y metodología. . . . .	18
5.2. Cronología . . . . .	19
<b>6. Evaluación.</b>	<b>24</b>

# PRESENTACIÓN

Esta guía didáctica pretende, por una parte, contener la cantidad suficiente de información sobre la asignatura Cálculo para que el alumnado pueda conocer, antes de comenzar el curso, la mayoría de los aspectos básicos de la asignatura como pueden ser el programa de la asignatura, los objetivos a alcanzar, la sincronización y organización de las clases, los métodos de evaluación etc. Por otra parte pretende ser una guía diaria del trabajo que hay que hacer a lo largo del curso.

La asignatura Cálculo tiene una importancia múltiple dentro de la titulación de Ingeniero de telecomunicación; por una parte es una asignatura instrumental que proporciona herramientas al resto de asignaturas de la titulación para desarrollar con éxito sus respectivos programas. Por otra parte proporciona conocimientos que serán útiles para el desarrollo profesional de los futuros ingenieros y, por último, introduce ciertas nociones de rigor, orden y pulcritud, que son inherentes al lenguaje y métodos matemáticos y que, sin duda, resultarán útiles en el desarrollo integral de los alumnos.

Para cursar esta asignatura no es necesario ningún requisito especial, si bien es conveniente haber cursado matemáticas en bachillerato. Los alumnos que no hayan cursado matemáticas en bachillerato encontrarán una dificultad añadida, ya que en clase se presupone un nivel básico que es el que corresponde al nivel medio de un alumno de bachillerato que ha cursado matemáticas. Por tanto los alumnos que no han cursado matemáticas en bachillerato deberán “ponerse las pilas” para alcanzar ese nivel cuanto antes.

## DATOS BÁSICOS.

### Datos básicos de la asignatura.

- Nombre: **Cálculo.**
- Titulación: **Ingeniero de telecomunicación.**
- Curso: **Primero.**
- Tipo: **Obligatoria de Universidad.**
- Duración: **Anual.**
- Descriptores: **Cálculo diferencial e integral de funciones de una y varias variables. Ecuaciones diferenciales. Aplicaciones en ingeniería. Introducción al análisis vectorial.**
- Créditos LRU: **12 (9 teóricos y 3 prácticos).**
- Créditos ECTS: **9.6 (7.2 teóricos y 2.4 prácticos).**

### Datos básicos del profesor.

- Nombre: **Jerónimo Alaminos Prats y José Extremera Lizana.**
- Departamento: **Análisis matemático.**
- Centro: **Facultad de Ciencias.**

- Ubicación: **Jerónimo Alaminos: Despacho 16, Dpto. Análisis matemático, Facultad de Ciencias; Despacho 17, tercera planta ETSIT.**  
**José Extremera: Despacho 3, Dpto. Análisis matemático, Facultad de Ciencias; Despacho 17, tercera planta ETSIT.**
- Teléfono: **Jerónimo Alaminos: 958246308. José Extremera: 958243277.**
- e-mail: **Jerónimo Alaminos:: alaminos@ugr.es**  
**José Extremera: jlizana@ugr.es**
- Horario de tutorías: **Jerónimo Alaminos: Lunes, de 10 a 11 horas (Fac. de Ciencias); Martes, de 10 a 11 (Fac. de Ciencias); Miércoles, de 9 a 11 y de 17 a 18 (ETSIT); Jueves, de 10 a 11 (Fac. de Ciencias)**  
**José Extremera: Lunes, de 17 a 19 horas (Fac. de Ciencias); Miércoles, de 8 a 9 horas (ETSIT) y de 17 a 20 horas (Fac. de Ciencias).**

## TEMARIO Y BIBLIOGRAFÍA.

### 3.1. Temario.

El temario viene determinado por los descriptores de la asignatura. Está dividido en tres temas que contienen varias lecciones.

- Tema 1: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE. REPASO Y AMPLIACIÓN.
  - 1.1: Conceptos generales.
    - 1.1.1: La recta real y el plano complejo. Sucesiones.
    - 1.1.2: Continuidad y derivabilidad de funciones de variable real.
  - 1.2: Series.
    - 1.2.1: Series numéricas y series de potencias reales y complejas.
    - 1.2.2: Fórmula de Taylor. Desarrollo en serie de potencias de las funciones elementales.
  - 1.3: Integración.
    - 1.3.1: Área e integral.
    - 1.3.2: Cálculo de primitivas.
    - 1.3.3: Aplicaciones: cálculo de áreas planas, longitudes de curvas, volúmenes y superficies laterales de sólidos de revolución.
- Tema 2: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

- 2.1: Plano y espacio euclídeos.
  - 2.1.1: Producto escalar y módulo. Distancia euclídea.
  - 2.1.2: Funciones de varias variables: límites y continuidad.
- 2.2: Campos escalares y vectoriales.
  - 2.2.1: Derivadas parciales y direccionales. Vector gradiente y matriz jacobiana. Álgebra de derivadas.
  - 2.2.2: Derivadas de orden superior. Matriz hessiana.
  - 2.2.3: Derivación implícita e inversa.
- 2.3: Optimización de campos escalares.
  - 2.3.1: Extremos relativos.
  - 2.3.2: Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange.
  - 2.3.3: Extremos absolutos.
- 2.4: Integración múltiple.
  - 2.4.1: Integrales dobles y triples.
  - 2.4.2: Cambio de variable: integración en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
  - 2.4.3: Aplicaciones: áreas, volúmenes, masas, centros de masas, momentos de inercia.
- Tema 3: ECUACIONES DIFERENCIALES.
  - 3.1: Métodos elementales de integración.
    - 3.1.1: Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Métodos aproximados de solución: Isoclinas y poligonales de Euler.
    - 3.1.2: Ecuaciones con variables separadas, ecuaciones exactas, factores integrantes.
  - 3.2: Ecuaciones diferenciales lineales.
    - 3.2.1: Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1.
    - 3.2.2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

## 3.2. Bibliografía.

La siguiente bibliografía es orientativa. Hay que hacer algunas precisiones al respecto.

- No hay «un libro de texto» oficial de la asignatura. En cada uno de los libros que vamos a enumerar hay capítulos que pueden ser aprovechadas para distintas partes de la asignatura o que contienen ejercicios o problemas que son similares a los que haremos en clase. En cualquier caso no es necesario comprarse ningún libro.

- La bibliografía es para consultar. Los libros que aparecen en ella están en la biblioteca (la mayoría tanto en la biblioteca de la facultad de ciencias como en la de la ETSIT) y se pueden retirar.
- La lista de libros que aparecen en la bibliografía no es exhaustiva. Al tratarse nuestra asignatura de un cálculo general hay muchos más libros, de títulos similares, que pueden ser utilizados para consultar. Basta con echarle un vistazo al índice del libro para ver si nos puede ser de utilidad.
- Aunque los programas de bachillerato son los mismos en todos los centros, es posible que algunos alumnos hayan estudiado menos profundamente que otros ciertos temas. En la mayoría de los libros de la bibliografía se pueden consultar temas de bachillerato. Si algún alumno tiene problemas específicos con algún tema en particular, sólo tiene que consultar con el profesor para que le oriente en qué libro puede encontrar información sobre el tema concreto.
- En cada uno de los libros haremos una breve descripción del contenido y de la adecuación a nuestro curso.

1. AYRES, F., *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill, 1990.

En este libro está recogido básicamente todo el temario del curso. En cada lección se hace una breve introducción teórica y hay ejercicios resueltos y otros suplementarios. Al final del libro se dan las soluciones de los ejercicios complementarios. El nivel es el básico y puede servir a los alumnos que necesiten apoyo en algún tema concreto.

2. BRADLEY, G.L., SMITH, K.J., *Cálculo de una variable. Volumen 1*. Prentice-Hall, 1998.

3. BRADLEY, G.L., SMITH, K.J., *Cálculo de varias variables. Volumen 2*. Prentice-Hall, 1998.

Tanto el dedicado a una variable como a varias variables siguen el mismo esquema. Los teoremas están puestos al final del libro, con algunas demostraciones. Tiene ejemplos y ejercicios propuestos de los que se da la solución al final del libro. También tiene reseñas históricas de matemáticos ilustres. También utiliza el programa Matlab dando instrucciones sobre su uso. La temática de los dos volúmenes es la que se indica en el título.

4. GARCÍA-MAROTO, A., *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Problemas útiles*. García Maroto Editores, 2006.

Es muy básico pero tiene lo imprescindible para el poco tiempo que tenemos para dedicarle a las ecuaciones diferenciales. El libro consiste básicamente en problemas.

5. STEWART, J., *Cálculo diferencial e integral*. Internacional Thomson Editores, 1998. Prentice-Hall, 1998.

Para problemas de funciones de una variable está muy bien. Muy extenso, con muchos ejercicios, la mitad de ellos con soluciones al final del libro y con apéndices interesantes como, por ejemplo, el dedicado a números complejos.

6. THOMAS, G.B., FINNEY, R.L., *Cálculo (una variable)*. Addison Wesley Longman, 1998.

Al igual que el anterior también es muy extenso e incluso tiene alguna parte dedicada a ecuaciones diferenciales. También aproximadamente la mitad de los ejercicios tienen las soluciones al final del libro.

7. THOMAS, G.B., FINNEY, R.L., *Cálculo con geometría analítica (2 volúmenes)*. Addison Wesley Iberoamericana, 1987.

Son dos volúmenes que cubren el programa completo de la asignatura, incluso tiene apéndices dedicados a algunos apartados de álgebra lineal que complementan bien los contenidos. Al igual que los anteriores tiene una gran cantidad de ejemplos resueltos y ejercicios de los que se dan las soluciones al final del libro.

### 3.3. Temario de prácticas con Maxima

Las prácticas de ordenador se organizan en 15 sesiones semanales durante el segundo cuatrimestre.

- Sesión 1: Introducción al manejo del programa.
- Sesión 2: Introducción al manejo del programa (segunda parte).
- Sesión 3: Capacidad gráfica del programa. Representación gráfica de funciones de una variable.
- Sesión 4: Representación de curvas definidas por coordenadas polares y paramétricas. Animaciones.
- Sesión 5: Resolución de ecuaciones. Métodos estándar.
- Sesión 6: Métodos constructivos para la solución de ecuaciones.
- Sesión 7: Sucesiones. Límites de sucesiones y de funciones. Continuidad y derivabilidad.
- Sesión 8: Rectas tangentes y secantes. Extremos relativos.
- Sesión 9: Polinomio de Taylor. Aproximación.
- Sesión 10: Integración de funciones de una variable.
- Sesión 11: Representación gráfica de funciones de dos variables. Curvas en el espacio.

- Sesión 12: Diferenciabilidad. Derivadas parciales y representación del plano tangente.
- Sesión 13: Extremos relativos y condicionados de funciones de varias variables.
- Sesión 14: Integración de funciones de varias variables.
- Sesión 15: Ecuaciones diferenciales ordinarias.

### **3.4. Temario de actividades académicamente dirigidas.**

El curso también comprende una serie de actividades académicamente dirigidas, compuestas por el desarrollo de distintos temas que, o bien se debieran haber estudiado en bachillerato, pero ahora los estudiamos con más detalle y profundidad, o bien son temas nuevos que se estudian por primera vez. También hay temas de otras disciplinas que son necesarios para el desarrollo del curso. Estas actividades están ligadas temporalmente al programa de la asignatura, como comentaremos en la cronología de la asignatura. En la cronología lo denominamos seminario.

1. Diagonalización de matrices.
2. Progresiones aritméticas y geométricas.
3. El número e. Algunos límites relacionados.
4. Funciones exponenciales y logarítmicas.
5. Funciones trigonométricas e hiperbólicas.
6. Cálculo de derivadas.
7. Aplicaciones prácticas del polinomio de Taylor.
8. Cálculo de diferenciales.
9. Formas cuadráticas.
10. Métodos de clasificación de formas cuadráticas.
11. Cálculo de áreas y longitudes de curvas.
12. Área y volumen de cuerpos de revolución.
13. Sumas de Riemann y series.
14. Criterios de comparación para integrales impropias.
15. Método de las poligonales de Euler.

16. Factores integrantes.

17. Aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales.

Para el desarrollo de los anteriores temas se puede utilizar la bibliografía propia del programa de la asignatura.

## OBJETIVOS.

La asignatura Cálculo es una asignatura obligatoria de universidad en el plan de estudios de la titulación. Al mismo tiempo es una asignatura eminentemente instrumental, es decir, proporciona instrumentos, técnicas y conocimientos que deben ser útiles al resto de las asignaturas para alcanzar las competencias propias de un ingeniero. Esta característica hace que el conocimiento de esta asignatura, de una forma indirecta, ayude a desarrollar la mayoría de las competencias del título de ingeniero en telecomunicación.

Por otra parte la asignatura por sí misma contribuye a desarrollar competencias de la titulación. Dentro de las competencias transversales (libro blanco) esta asignatura contribuiría a desarrollar las siguientes.

- Competencias instrumentales:
  - Capacidad de análisis y síntesis.
  - Capacidad de organización y planificación.
  - Comunicación oral y escrita en la lengua nativa.
  - Resolución de problemas.
- Competencias personales:
  - Trabajo en equipo.
  - Habilidades en las relaciones interpersonales.
  - Razonamiento crítico.
- Competencias sistémicas:
  - Aprendizaje autónomo.

- Creatividad.
- Motivación por la calidad.

Vamos a describir también los objetivos principales que se desean obtener a lo largo del curso. La enumeración de estos objetivos viene relacionada fundamentalmente con el temario de la asignatura. Para las actividades académicamente dirigidas, los alumnos que preparen los trabajos tienen como objetivo general desarrollar la capacidad de buscar información, organizarla y exponer un trabajo, aparte de los objetivos propios de cada actividad.

Para las prácticas con ordenador, por tratarse de una herramienta para resolver problemas relativos al temario de la asignatura el único objetivo que podría comentarse es desarrollar la capacidad de traducir los distintos problemas que estudiamos al lenguaje informático apropiado para que puedan ser resueltos, además de familiarizarse con el programa Maxima.

En cualquier caso, antes de enumerar los objetivos que se pretenden alcanzar, tema por tema, existen objetivos generales de toda la asignatura que es conveniente fijar.

- Es objetivo transversal de la asignatura introducir a los alumnos en el método y en el lenguaje matemáticos combinando la práctica con la explicitación del mismo. Los alumnos deben habituarse a saber analizar, comprender y reproducir demostraciones de algunos teoremas importantes, así como a discutir con ejemplos y contraejemplos la función de las hipótesis en la tesis y a identificar errores en razonamientos incorrectos.
- Profundizar en el conocimiento que ya se tiene de los números reales y las funciones reales de variable real, manejando con soltura las distintas clases de funciones que intervienen en el cálculo y en la modelización de fenómenos y saber utilizar el cálculo diferencial e integral en relación con su estudio.
- Relacionar los números complejos con los reales, analizando las propiedades que comparten ambos cuerpos así como las diferencias.
- Identificar conceptos hasta ahora propios del análisis unidimensional, como la derivación e integración, como casos particulares de conceptos multidimensionales.
- Relacionar la intuición geométrica con conceptos del cálculo de funciones de varias variables.
- Relacionar las ecuaciones diferenciales con los conceptos de derivación e integración.

Estos serían los objetivos generales que se pretenden alcanzar en el curso. En un nivel más concreto podemos analizar los anteriores objetivos tema por tema. Serían los siguientes:

- Cálculo diferencial e integral en funciones de una variable.
  - Distinguir los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos.

- Relacionar las propiedades de los números reales con su estructura de cuerpo ordenado.
- Operar con desigualdades y valores absolutos.
- Aplicar el principio de inducción para estudiar propiedades de los números naturales.
- Relacionar los conceptos de sucesión acotada, convergente y monótona, estableciendo las distintas implicaciones entre los tres conceptos.
- Calcular el límite de una sucesión definida por recurrencia.
- Calcular límites de sucesiones, aplicando resultados teóricos.
- Utilizar el álgebra de límites de sucesiones para estudiar el comportamiento de sucesiones de números reales.
- Conocer la relación entre el comportamiento de una sucesión y el comportamiento de sus parciales.
- Conocer las propiedades de cuerpo de los números complejos.
- Operar correctamente con números complejos en forma binómica.
- Operar correctamente con números complejos en forma polar.
- Distinguir el argumento principal del argumento.
- Distinguir el logaritmo principal del logaritmo.
- Cambiar los números complejos de forma polar a binómica y viceversa.
- Interpretar geoméricamente la suma y el producto de números complejos.
- Calcular las raíces  $n$ -ésimas de un número complejo.
- Conocer las funciones elementales complejas y sus propiedades.
- Interpretar el concepto de límite de una sucesión en el ambiente de las funciones reales de variable real.
- Relacionar la existencia de límite de una función en un punto con la posible existencia de límites laterales.
- Interpretar el concepto de divergencia de una función en un punto.
- Convertir límites en  $\infty$  en límites en 0 y viceversa.
- Reconocer las distintas indeterminaciones.
- Discutir la continuidad de una función en un punto.
- Discutir la continuidad de una función en un conjunto.
- Relacionar la continuidad de una función en un punto con el concepto de límite de la función en ese punto.
- Reconocer los distintos tipos de discontinuidades.
- Aplicar, para conocer la estructura de la imagen de una función, el teorema de Bolzano, el teorema del valor intermedio y el teorema de compacidad.

- Conocer las propiedades de las funciones continuas e inyectivas.
- Conocer las funciones elementales; su crecimiento, comportamiento en cualquier punto, etc.
- Resolver indeterminaciones (bien de sucesiones o de funciones) en las que intervengan funciones elementales.
- Resolver indeterminaciones mediante la regla del número  $e$ .
- Discernir si una función es derivable en un punto.
- Interpretar geoméricamente el concepto de derivada de una función en un punto.
- Calcular las derivadas de las funciones elementales y de la composición, suma, producto, etc., de tales funciones.
- Utilizar la derivabilidad de una función, junto con las propiedades de la derivabilidad (Teorema de Rolle, del valor medio, etc.) para calcular la imagen de dicha función.
- Utilizar las reglas de L'Hôpital para el cálculo de límites.
- Utilizar las reglas de L'Hôpital para estudiar la derivabilidad de una función en un punto.
- Conocer el polinomio de Taylor de una función en un punto y aplicar dicho polinomio para estimar el valor de la función en un punto.
- Utilizar el polinomio de Taylor para discernir si una función alcanza en un punto crítico algún tipo de extremo relativo y qué clase de extremo es.
- Utilizar los resultados conocidos referidos a crecimiento y extremos relativos de una función, junto con los de concavidad y convexidad para estudiar la gráfica de dicha función.
- Distinguir en una serie de números reales el término general de la serie de la sucesión de sumas parciales.
- Distinguir la convergencia de una serie de la convergencia absoluta y de la convergencia incondicional. Conocer las implicaciones entre los tres conceptos.
- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio de comparación.
- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio de la raíz.
- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio del cociente.
- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio de Raabe.
- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio de condensación.

- Decidir si una serie de números reales es convergente utilizando el criterio de Leibniz.
  - Calcular la suma de una serie geométrica.
  - Calcular la suma de una serie telescópica.
  - Calcular la suma de una serie hipergeométrica.
  - Distinguir en una serie de potencias los distintos elementos: centro de la serie, el término general y el radio de convergencia.
  - Calcular el radio de convergencia de una serie de potencias utilizando el criterio de la raíz y el del cociente.
  - Desarrollar en serie de potencias la función binomial.
  - Desarrollar en serie de potencias las funciones relacionadas con las funciones elementales.
  - Conocer someramente los fundamentos de la integral de Riemann.
  - Aplicar las propiedades de la integral para decidir si una función es integrable.
  - Analizar las propiedades de una función definida mediante una integral indefinida: teorema fundamental del cálculo.
  - Calcular integrales mediante la regla de Barrow.
  - Decidir si una función es impropia y calcular su integral impropia cuando lo sea.
  - Calcular integrales mediante el cambio de variable.
  - Calcular integrales mediante la integración por partes.
  - Decidir el método apropiado y aplicarlo para calcular integrales de distintos tipos de funciones atendiendo a la clase de función en el integrando.
  - Calcular mediante integración el área de un conjunto.
  - Calcular mediante integración la longitud de una curva.
  - Calcular mediante integración el volumen de un sólido de revolución.
  - Calcular mediante integración la superficie lateral de un sólido de revolución.
- Cálculo diferencial e integral en funciones de varias variables reales.
    - Conocer los elementos de la topología de  $\mathbb{R}^n$  y relacionarla con la topología de  $\mathbb{R}$ .
    - Calcular la norma de un vector y el producto escalar de dos vectores.
    - Identificar conjuntos abiertos, cerrados, compactos, etc. de  $\mathbb{R}^n$ .
    - Descomponer una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  en sus funciones componentes.
    - Conocer el concepto de límite de una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  e identificar cuándo hay una indeterminación.

- Conocer el concepto de límite de una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .
- Relacionar los dos conceptos anteriores.
- Estudiar si una función de varias variables reales tiene límite en un punto y si es continua en dicho punto.
- Calcular derivadas direccionales de una función real de varias variables reales.
- Calcular derivadas parciales de una función real de varias variables reales.
- Construir la diferencial de una función real de varias variables reales.
- Construir la diferencial de una función vectorial de varias variables reales.
- Asociar la matriz jacobiana de una función en un punto a su diferencial en dicho punto.
- Interpretar geoméricamente el concepto de función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un punto: plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.
- Interpretar geoméricamente el concepto de gradiente de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Aplicar el teorema de la función implícita para decidir cuando una ecuación en  $\mathbb{R}^2$  define implícitamente a una variable como función de la otra.
- Aplicar el teorema de la función implícita para decidir cuando  $m$  ecuaciones en  $\mathbb{R}^{n+m}$  definen implícitamente a  $m$  variables como funciones de las  $n$  variables restantes.
- Aplicar el teorema de la función implícita para calcular derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
- Calcular el plano tangente a la gráfica de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida implícitamente.
- Interpretar geoméricamente el concepto de gradiente de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuando ésta está definida implícitamente.
- Calcular la matriz hessiana de una función en un punto.
- Utilizar la matriz hessiana de una función en un punto crítico para el cálculo de los extremos relativos de la función en dicho punto. Relacionarlo con el caso unidimensional.
- Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos condicionados de una función.
- Decidir cuando un conjunto de  $\mathbb{R}^n$  es compacto. Aplicarlo para el estudio de problemas de extremos absolutos.
- Conocer someramente los fundamentos de la integral de Riemann para funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ : sumas superiores e inferiores, integral superior e inferior, etc.
- Calcular integrales de funciones continuas mediante integración iterada.
- Decidir si un conjunto de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto medible-Jordan.

- Calcular integrales de funciones aplicando el método de Fubini en conjuntos medibles-Jordan.
  - Conocer los cambios de variable estándar para calcular integrales de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y funciones de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$ : cambio a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
  - Aplicar el teorema de cambio de variable para calcular integrales de funciones atendiendo a la naturaleza del integrando.
  - Aplicar la integración de funciones de varias variables para calcular áreas y volúmenes de conjuntos del plano y del espacio, respectivamente.
  - Aplicar la integración de funciones de varias variables para calcular centros de gravedad de conjuntos en el espacio.
  - Aplicar la integración de funciones de varias variables para calcular momentos de inercia.
- Ecuaciones diferenciales.
- Conocer el concepto de ecuación diferencial ordinaria y de ecuación diferencial en derivadas parciales.
  - Distinguir los tipos de soluciones de una ecuación diferencial: la solución general y las soluciones particulares.
  - Distinguir una solución exacta de una solución exacta de una solución aproximada.
  - Identificar algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias: variables separadas, homogéneas, exactas, lineales.
  - Resolver ecuaciones diferenciales de los tipos enunciados en el apartado anterior.
  - Reducir ecuaciones diferenciales que no sean de ninguno de los tipos anteriores (mediante un cambio de variable) a alguno de ellos.
  - Identificar distintos problemas físicos, geométricos y mecánicos como problemas de ecuaciones diferenciales.

## METODOLOGÍA, HORARIO Y CRONOLOGÍA.

### 5.1. Horario y metodología.

El horario de la asignatura está en la página web de la titulación. En líneas generales se tiene una carga lectiva de 4 horas semanales durante el primer cuatrimestre y 3 semanales durante el segundo, además de las clases de prácticas de ordenador (15 horas, en el segundo cuatrimestre), cuyo horario también se encuentra en la página web de la titulación.

En clase, en cada lección, el profesor dará un resumen teórico de la lección a la vez que estudiará algunos ejemplos y ejercicios que ilustren la teoría. Después se repartirá una relación de ejercicios y problemas (a través del tablón de docencia de la universidad o colgándolo en la página web de los profesores) que los alumnos tendrán que resolver. Una vez transcurrido un tiempo prudente para resolverlos en clase se comentarán las dificultades que se han tenido con los ejercicios. El enfoque de la asignatura es eminentemente práctico, por lo que la introducción teórica no es más que un soporte para poder realizar los problemas propuestos.

Adicionalmente, los alumnos que lo deseen, en grupos de dos o tres, prepararán conjuntamente con el profesor los apuntes de los temas de las actividades académicamente dirigidas. A principio de cada trimestre el profesor propondrá los temas a desarrollar y los repartirá entre los alumnos voluntarios, indicándole a cada grupo de alumnos la semana en la que tendrán que tener preparado el tema asignado. Dos o tres semanas antes de la fecha prevista habrá reuniones entre el profesor y cada uno de los grupos de alumnos para obtener la bibliografía necesaria, organizar el trabajo, resolver las dudas que surjan

y elaborar los temas que se repartirán al resto de los compañeros. Finalmente en la fecha prevista los alumnos expondrán su trabajo en clase resolviendo las dudas del resto de los compañeros que puedan surgir. Dependiendo del tema elegido la sesión puede durar una hora de clase o algo menos. La idea es que estos seminarios ocupen aproximadamente entre un 15 y un 20% de la carga lectiva total de la asignatura. La situación ideal es que todos los alumnos participen en algún seminario pero dado el número de alumnos matriculados es difícil que todos puedan hacerlo. Además los grupos de trabajo para que sean operativos no deberían tener más de 3 o 4 miembros. Si hubiera más candidatos para preparar los seminarios que puestos ya veríamos la solución.

Para las clases de prácticas con el programa Maxima el profesor pondrá en el tablón de docencia la semana anterior a cada sesión un guión con el trabajo que se va a realizar en la clase. En clase se repasarán los apuntes del guión haciendo hincapié en los problemas que puedan surgir en el desarrollo del tema. Después se deja un tiempo para realizar ejercicios sobre lo explicado en cada sesión. Debido a la capacidad del aula de informática, es necesario hacer tres grupos de prácticas. Como quiera que en otras asignaturas también se dividen las prácticas en grupos más pequeños se procurará que los grupos estén hechos de forma que ningún alumno tenga que estar en dos clases a la vez y también se procurará, en la medida de lo posible, que no existan demasiados huecos en el horario de los alumnos. En cualquier caso, para las consideraciones anteriores se toma como modelo un alumno matriculado en todas las asignaturas de primer curso y solamente en este curso. Los alumnos que no estén en esta situación no tienen garantizado que no le coincidan distintas clases. Deben estudiar, antes de matricularse, si les es posible asistir a todas las asignaturas en las que desean matricularse.

Para las clases de prácticas con ordenador los alumnos es conveniente que lleven un dispositivo para almacenar su trabajo (disquete o pen-drive) o bien pueden mandar su trabajo como fichero adjunto a una cuenta de correo electrónico.

## 5.2. Cronología

El curso se organiza en 30 semanas lectivas, divididas en dos cuatrimestres, cada uno de ellos con 15 semanas lectivas. La distribución del trabajo en las distintas semanas es la siguiente:

- Primer cuatrimestre.
  - Semana 1:
    - Presentación. Información sobre el curso.  
Números reales: propiedades de la suma, producto y orden. Conjuntos mayores y minorados. Supremos e ínfimos. Axioma del supremo. Propiedades de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$ . Existencia de números irracionales. Inducción, problemas de inducción.
  - Semana 2:

- Topología de  $\mathbb{R}$ . Conjuntos abiertos y cerrados, acumulación, frontera, etc. Relación 1 de ejercicios.
  - Números complejos: definición, módulo y argumento. Ejemplos.
- Semana 3:
  - Fórmula de De Moivre. Raíces de un número complejo. Exponencial compleja. Logaritmo complejo, exponenciales y potenciales. Relación 2 de ejercicios.
- Semana 4:
  - Relación 2 de ejercicios. Sucesiones de números reales. Convergencia. Álgebra de límites. Monotonía y acotación. Sucesiones por recurrencia. Sucesiones divergentes, álgebra de límites con sucesiones divergentes. Indeterminaciones. Criterio de Stolz. Criterio de la raíz.
  - Seminario: El número e. Algunos límites relacionados.
  - Seminario: Progresiones aritméticas y geométricas.
- Semana 5:
  - Resolución de la indeterminación  $1^\infty$ . Relación 3 de ejercicios.
  - Definición de límite funcional. Límites laterales. Continuidad. Relación con el límite. Teorema de los ceros de Bolzano. Teorema del valor intermedio. Teorema de compacidad.
  - Seminario: Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Semana 6:
  - Problemas de continuidad. Funciones continuas e inyectivas. Relación 4 de ejercicios.
  - Seminario: Funciones trigonométricas e hiperbólicas.
- Semana 7:
  - Derivada de una función en un punto. Reglas de derivación y derivación de las funciones elementales. Extremos relativos. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Teorema del valor medio generalizado. Consecuencias sobre crecimiento. Reglas de L'Hôpital.
  - Seminario: Cálculo de derivadas.
- Semana 8:
  - Derivadas de orden superior. Aplicación al cálculo de extremos relativos. Polinomio de Taylor. Fórmula de Taylor. Concavidad y convexidad.
  - Seminario: Aplicaciones prácticas del polinomio de Taylor.
- Semana 9:
  - Relación 5 de ejercicios.
  - Definición y ejemplos de funciones integrables. Propiedades.
- Semana 10:

- Aditividad de la integración respecto al intervalo. Condiciones suficientes de integrabilidad. Teorema Fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Integración por partes. Cambio de variable.
- Semana 11:
  - Cálculo de primitivas: funciones trigonométricas, racionales e irracionales.
  - Seminario: Área y volumen de cuerpos de revolución.
- Semana 12:
  - Integración impropia. Relación 6 de ejercicios.
  - Seminario: Criterios de comparación para integrales impropias.
- Semana 13:
  - Relación 6 de ejercicios.  
Series de números reales. Definiciones y ejemplos. Criterios de convergencia de series: criterio de comparación.
- Semana 14:
  - Criterios de convergencia para series de términos positivos. Criterios de Dirichlet, Abel y Leibniz. Constante de Euler-Mascheroni. Sumas de series.
  - Seminario: Sumas de Riemann y series.
- Semana 15:
  - Relación 7 de ejercicios.
- Periodo de exámenes.
- Segundo cuatrimestre.
  - Semana 16:
    - Series de potencias. Radio de convergencia: definición y cálculo. Funciones definidas por series de potencias. Derivación e integración de series de potencias. Serie de Taylor.
    - Sesión 1ª de prácticas de ordenador.
  - Semana 17:
    - Serie binomial. Series de potencias de las funciones elementales. Relación 8 de ejercicios.
    - Sesión 2ª de prácticas de ordenador.
  - Semana 18:
    - Funciones de varias variables reales. Topología de  $\mathbb{R}^n$ . Funciones vectoriales y escalares. Límite de una función de varias variables. Estrategias para calcular límites.
    - Sesión 3ª de prácticas de ordenador.
  - Semana 19:

- Continuidad de funciones de varias variables. Teorema de compacidad. Diferenciabilidad de funciones de varias variables. Diferenciabilidad y funciones componentes. Derivadas direccionales y parciales. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función real de dos variables reales. Plano tangente.
  - Seminario: Cálculo de diferenciales.
  - Sesión 4ª de prácticas de ordenador.
- Semana 20:
  - Vector gradiente: definición e interpretación geométrica. Matriz jacobiana. Regla de la cadena.
  - Sesión 5ª de prácticas de ordenador.
- Semana 21:
  - Teorema de la función inversa. Teorema de la función implícita. Plano tangente a una superficie definida implícitamente. Vector gradiente: interpretación geométrica. Derivadas de orden superior. Teorema de Schwarz. Matriz hessiana.
  - Seminario: Formas cuadráticas.
  - Seminario: Métodos de clasificación de formas cuadráticas.
  - Sesión 6ª de prácticas de ordenador.
- Semana 22:
  - Teorema de Taylor. Extremos relativos: definición y propiedades. Extremos condicionados.
  - Seminario: Diagonalización de matrices.
  - Sesión 7ª de prácticas de ordenador.
- Semana 23:
  - Relación 9 de ejercicios.
  - Sesión 8ª de prácticas de ordenador.
- Semana 24:
  - Relación 9 de ejercicios.
  - Sesión 9ª de prácticas de ordenador.
- Semana 25:
  - Integración de funciones de varias variables: definiciones y Teorema de Fubini. Conjuntos medibles. Integración sobre conjuntos medibles.
  - Sesión 10ª de prácticas de ordenador.
- Semana 26:
  - Cambios de variable. Cambios a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
  - Sesión 11ª de prácticas:

- Semana 27:
  - Relación 10 de ejercicios.
  - Sesión 12ª de prácticas de ordenador.
- Semana 28:
  - Ecuaciones diferenciales. Definiciones. Solución general y solución particular. Clasificación. Ecuaciones en variables separadas. Ecuaciones lineales de orden 1. Ecuaciones exactas y reducibles a exactas. Factores integrantes.
  - Seminario: Método de las poligonales de Euler.
  - Seminario: Factores integrantes.
  - Sesión 13ª de prácticas de ordenador.
- Semana 29:
  - Factores integrantes. Ecuaciones lineales de orden superior a 1. Método de variación de constantes. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
  - Seminario: Aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales.
  - Sesión 14ª de prácticas de ordenador.
- Semana 30:
  - Relación 11 de ejercicios.
  - Sesión 15ª de prácticas de ordenador.

## EVALUACIÓN.

Para superar la asignatura hay unas recomendaciones básicas que, si bien no es obligatorio seguirlas, sí que es bastante conveniente. Por ejemplo se podrían citar las siguientes:

- Estudiar todos los días. No es necesario saberse las cosas de memoria todos los días pero sí que es necesario repasar cada día el trabajo hecho en clase, ordenarlo, pasar a limpio los apuntes o problemas sobre los que se haya trabajado en clase. Al final de cada lección es muy conveniente hacer un resumen con lo más importante, los resultados y técnicas más útiles, etc. Según algunos cálculos son necesarias 1.5 horas de trabajo adicional del alumno por cada hora de clase presencial. Si esto se hace cada día no representa un esfuerzo ímprobo, pero si lo dejamos para la semana (o el mes) anterior al examen simplemente no hay tiempo.
- Hacer los ejercicios. La resolución de ejercicios es un trabajo que requiere un esfuerzo que puede parecer frustrante: sobre todo al comienzo de cada tema los ejercicios “se resisten” a salir. Es el momento de intentarlo por diversos métodos y recordar que para que los ejercicios sean resueltos bien es casi necesario haberse equivocado unas cuantas veces, es decir casi nunca salen al primer intento. Por eso dejar ese primer intento para el día del examen es bastante peligroso. Por otra parte la resolución de ejercicios es un trabajo que requiere del trabajo del estudiante, no del profesor: no sirve para nada copiar la solución del ejercicio. El profesor puede ayudar, encaminar, corregir, etc., pero sobre un trabajo previo del alumno.

Este trabajo no necesariamente tiene que ser individual. Se pueden hacer grupos para resolver los problemas. El contacto con otros alumnos a la hora de abordar un problema es enriquecedor. Los problemas no siempre se pueden hacer de una única forma sino que, a veces, hay varias formas de hacerlo. Evaluar cuál es más

rentable, más directa o más cómoda es un trabajo de equipo. De todas formas hay que tener en cuenta que el objetivo no es tener los problemas y ejercicios hechos, sino hacerlos. Escaquearse dentro de un grupo no consigue engañar a nadie.

- Hay que preguntar todo lo que no se entienda. Al profesor se le puede, y se le debe, preguntar todo lo que no se entienda o no quede absolutamente claro. Bien en clase, al terminar la clase, en horario de tutoría o por correo electrónico. Por supuesto si hay alguna duda y el alumno puede aclararla por otros medios puede utilizarlos (consultar libros, comparar con los compañeros, etc.) pero en cualquier caso el profesor estará encantado de resolver las dudas que le planteéis (cuando pueda, claro).
- En prácticas de ordenador quizá lo fundamental sea practicar mucho, por ello es conveniente que además de las sesiones de prácticas practiquéis por vuestra cuenta. En la escuela existen aulas de libre acceso que pueden ser utilizadas por los alumnos. Dichas aulas están equipadas con ordenadores que tienen acceso al programa Maxima ; para cualquier duda consultar con el profesor.
- Hay que darse de alta en la cuenta de correo que la universidad ofrece a cada alumno. Mediante el acceso identificado se puede acceder al tablón de docencia de la asignatura que es el medio mediante el que el profesor dará las relaciones de ejercicios, los apuntes de los seminarios, las calificaciones de los exámenes y toda la información relativa a la asignatura que crea conveniente. Es por tanto muy conveniente consultar el tablón de docencia periódicamente. Si hay alguna duda sobre como darse de alta en el servicio de correo se puede consultar con el profesor.

Veamos ahora la evaluación de la asignatura. La evaluación de cada una de las partes en las que está dividida la asignatura es distinta:

- Prácticas de ordenador.

Durante el curso se realizarán controles periódicos en clase (3 o 4) sobre el aprendizaje de las distintas técnicas estudiadas en las sesiones de prácticas con Maxima. Estas sesiones se harán sin previo aviso pero, por supuesto, los alumnos pueden utilizar todo el material que tengan a su alcance, ya sean apuntes, el menú de ayuda, etc. La nota para superar estas pruebas es una media mayor o igual que 4. En caso de que no la superen (o deseen obtener una calificación mayor) siempre pueden optar a un examen de prácticas que se realizará el día del segundo examen parcial (ver página web de la titulación para las fechas). Si superan estas pruebas esta calificación representará el 15% de la calificación final de la asignatura.

Las pruebas de prácticas con ordenador consistirán en distintos ejercicios que el alumno deberá resolver utilizando el programa Maxima. Al utilizar dicho programa se generará un fichero que será el documento que el profesor calificará. La forma de presentar dicho fichero puede ser de dos formas: o bien mediante un dispositivo de almacenamiento tipo pen-drive que se entrega al profesor al final de la sesión o bien

enviando el fichero como adjunto a la cuenta de correo electrónico del profesor. Evidentemente esta segunda opción deberá hacerse desde el aula de ordenadores. Es por ello conveniente que los alumnos tengan abierta una cuenta de correo electrónico. La universidad provee de cuentas de correo electrónico a todos los alumnos y, preferentemente, esta cuenta es la que debe ser utilizada ya que a través del tablón de docencia el profesor puede conocer la dirección electrónica de dicha cuenta, y este canal de comunicación será ampliamente utilizado durante todo el curso.

Para los alumnos que tengan que presentarse a la convocatoria de septiembre se les hará una prueba (usualmente el mismo día que está fijado el examen de septiembre, dependiendo de la disponibilidad del aula de ordenadores), que otra vez contará un 15 % de la calificación final.

- Actividades académicamente dirigidas/ seminarios.

Los alumnos que participen en la elaboración y exposición de uno de los temas del apartado de actividades académicamente dirigidas obtendrán por esta actividad un 15 % de la calificación final (incluida la convocatoria de septiembre si fuera necesario) Esta actividad se califica mediante la observación por parte del profesor del trabajo realizado en la preparación del tema, de la claridad de la exposición y del dominio del tema al aclarar las dudas de los compañeros. Desafortunadamente el elevado número de alumnos matriculados hace que no todos los alumnos puedan desarrollar este tipo de actividades. Como se ha comentado anteriormente se asignarán al principio de cada cuatrimestre las actividades a los grupos de alumnos que la soliciten.

- Clases teórico-prácticas.

Durante el curso se realizarán 3 o 4 pruebas durante el horario lectivo que versarán sobre las relaciones de problemas que se hayan trabajado anteriormente. Estas pruebas se realizarán avisando únicamente con uno o dos días de antelación. Con ello se pretende, por una parte, que los alumnos sean conscientes de que es necesario llevar el trabajo al día. Por otra parte, si se avisara con más antelación, los alumnos podrían dedicarse en exclusiva a estudiar una asignatura con lo que descuidarían el resto de las asignaturas y esta situación se intenta evitar por todos los medios. Estas pruebas representan un 10 % de la calificación final de cada alumno.

Además se realizarán dos exámenes parciales en las fechas previstas que contendrán distintas cuestiones, fundamentalmente problemas, de la materia estudiada. También es posible que se pregunten algunos aspectos teóricos. Para superar la asignatura mediante este método es necesario obtener en cada uno de los exámenes parciales una calificación mayor o igual a cuatro. Si en alguno de los exámenes parciales el alumno obtuviera una calificación menor que 4 entonces deberá presentarse al examen final de la asignatura, en el que, para superar la asignatura deberá obtener una calificación mayor o igual a 4. La estructura del examen final es similar a la de los parciales. La calificación obtenida por la media de los parciales o en el

examen final representa un 60 % de la calificación si el alumno ha participado en un seminario y un 75 % si no ha participado en ninguna.

Para superar la asignatura es necesario que la media ponderada anterior sea mayor o igual a 5.

No superarán la asignatura (además de los alumnos que no se presenten a las pruebas, evidentemente) aquellos alumnos que estén en una de las siguientes situaciones:

- Han obtenido en la media de las distintas pruebas de prácticas con ordenador (y en la prueba final) una calificación menor que 4.
- Han obtenido en algún examen parcial una calificación menor que cuatro (si lo han hecho) y en el examen final también han obtenido una calificación menor que 4.
- Si no están en los casos anteriores pero la media ponderada sale por debajo de 5.

Estos alumnos deberán presentarse a la convocatoria de septiembre donde tendrán un examen de prácticas con ordenador (15 % de la calificación) y un examen teórico-práctico (70 u 85 % de la calificación, dependiendo de si participaron en algún seminario). Para superar la asignatura en esta convocatoria es necesario que la calificación de ambos exámenes sea mayor o igual a 4 y que la media ponderada sea mayor o igual a 5.