Conjuntos, números y propiedades básicas

Conjuntos

Entenderemos que un CONJUNTO es una colección de objetos. Dichos objetos pueden ser de diferente naturaleza, tanto objetos "tangibles" como abstracciones matemáticas. Esos objetos que al reunirse forman el conjunto, se denominarán elementos del conjunto. El conjunto que no tiene elementos se llama CONJUNTO VACÍO y se representa por $\emptyset$.

Se designa a los conjuntos y a los elementos que los constituyen por medio de letras pertenecientes a diversos alfabetos. Lo más frecuente es usar letras mayúsculas para designar a los conjuntos y reservar las minúsculas para designar elementos.

La expresión del tipo "x es un elemento del conjunto A", o equivalentemente "x pertenece al conjunto A", es de uso muy frecuente cuando se habla de conjuntos y elementos. Por ello, es útil recurrir a un símbolo que nos permita expresar esa idea más brevemente. Concretamente,

"x pertenece al conjunto A" se representa por $x \in A$,
"x **no** pertenece al conjunto A" se representa por $x \notin A$.

Del mismo modo, usamos símbolos para sintetizar o acortar las expresiones más frecuentes. Así el símbolo "$\forall$" se lee "para todo", el símbolo "$\exists$" se lee "existe", los dos puntos ":" y "/" se leen como "tal que".

Los conjuntos suelen describirse encerrando sus elementos entre llaves "{" y "}". Entre esas llaves pueden aparecer o bien todos los elementos del conjunto separados por comas, o bien expresar la condición que deben cumplir los elementos para pertenecer a dicho conjunto. Por ejemplo, se puede definir:

$$\begin{aligned}
&A = \{\text{Alumnos del grupo } 1^{\text{o}} \text{ A de Óptica}\},\\
&B = \{\text{Alumnos del grupo } 1^{\text{o}} \text{ B de Óptica}\},\\
&X = \{2,3,4,7,9,11\},\\
&Y = \{x \in X : x \leq 5\}, \text{ es decir, } Y = \{2,3,4\},\\
&Z = \{x^2 : x \in Y\}, \text{ es decir, } Z = \{4,9,25\}.
\end{aligned}$$

Un SUBCONJUNTO X de A es un conjunto tal que todo elemento de X es también elemento de A, es decir, si $a \in X$ entonces $a \in A$. Se escribe $X \subseteq A$ y se lee X *incluido en* A. Observarás que con esta definición $A \subseteq A$, esto es, cualquier conjunto se contiene a si mismo. Cuando queremos decir que un conjunto X está contenido en A pero no es igual a A diremos que X está *contenido estrictamente* en A y lo escribiremos $X \subset A$ o bien $X \subsetneq A$.

Ejemplo. En los ejemplos anteriores $Y \subseteq X$. Además dicha inclusión es estricta, esto es, $Y \subset X$.

Sean A y B dos conjuntos. La UNIÓN de A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B (sin repetir los elementos comunes de A y de B), y se escribe $A \cup B$. La INTERSECCIÓN de A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B, y se escribe $A \cap B$. Con estas definiciones conviene observar que $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, que $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ y que $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

Ejemplo. En los ejemplos anteriores el conjunto $A \cup B$ es el conjunto de todos los alumnos de 1º de Óptica (tanto los del grupo A como los del grupo B). $X \cup Y = X$ ya que Y está contenido en X, $X \cap Y = Y$ (por el mismo motivo) y $X \cap Z = \{4,9\}$.

Dados dos conjuntos A y B, la DIFERENCIA entre ellos, que notaremos por $A \setminus B$ (aunque también es usual usar la notación $A - B$), es el conjunto formado por los elementos de A que no están en B. Por ejemplo $X \setminus Y = \{7,9,11\}$. Nótese que el símbolo utilizado para la diferencia de conjuntos, $\setminus$, no es el mismo que el usado para expresar "tal que", $/$.

Sean A y B dos conjuntos. El PRODUCTO CARTESIANO de A y B es el conjunto formado por los pares (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Se escribe $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Dado un elemento $(x,y) \in A \times B$, llamamos a x *primera componente* del par, y a y *segunda componente* del par. Para que dos elementos (x,y) y (z,t) del conjunto $A \times B$ sean iguales, es necesario que ambas componentes coincidan, esto es, que $x = z$ y también $y = t$. Observemos que en si $A \neq B$, $A \times B$ y $B \times A$ son conjuntos diferentes. Si $A = B$, se suele escribir $A \times A = A^2$.

Ejercicio. Si has entendido bien el concepto de producto cartesiano observarás que $A \times A \neq \{(a,a) : a \in A\}$. ¿Por qué?

Ejemplo. Sean A y B los conjuntos de los anteriores ejemplos. Supongamos que hay que hacer un trabajo para alguna asignatura en grupos de dos alumnos, tales que uno sea del grupo A y el otro del grupo B. Entonces el conjunto de las parejas posibles es descrito por el conjunto $A \times B$.

Ejercicio. Se consideran los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,2,4,6,9\}$ y $C = \{2,6\}$. Describir los conjuntos: $A \cup B$, $A \cap C$, $C \cap B$, $(A \cup B) \cap C$. ¿Está A contenido en B?, ¿y C contenido en B? En caso afirmativo, ¿alguna de estas inclusiones es estricta?

Números. Desigualdades. Identidades relevantes

Recuerda los tipos de números que conoces.

Conjunto	Definición	Símbolo
Naturales	$1, 2, 3, 4, \ldots$	$\mathbb{N}$
Enteros	$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\mathbb{Z}$
Racionales (fracciones de números enteros)	$\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{20}, \ldots$	$\mathbb{Q}$
Irracionales (los que no son racionales)	$\sqrt{2}, \pi, \ldots$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Reales	todos los racionales y los irracionales	$\mathbb{R}$

Observemos que se cumple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (nótese que todas las inclusiones son estrictas). A lo largo del curso también trabajaremos con los conjuntos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

Los números reales tienen un orden "$\leq$". Dados dos números reales a y b, se dice que a es menor o igual que b si podemos encontrar otro número, h, positivo o cero, tal que $b = a + h$. En tal caso escribimos $a \leq b$ o bien $b \geq a$. Si h es positivo, escribimos $a < b$ o $b > a$. Ejemplos: $3 < 4$, $1 > -8$, $-4 \leq 2$, $2 \geq 2$.

Propiedad 1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES *Sean a, b y c números reales.*

1. *Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.*
   ($3 \leq 6$, entonces $3 + 2 = 5 \leq 6 + 2 = 8$)

2. *Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$.*
   ($3 \leq 6$ y $7 \geq 0$, entonces $3 \cdot 7 = 21 \leq 6 \cdot 7 = 42$)

3. *Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$. En particular, $-b \leq -a$.*
   ($3 \leq 6$ y $-2 < 0$, entonces $-2 \cdot 6 = -12 \leq -2 \cdot 3 = -6$)

4. *Si a y b son números reales no nulos con el mismo signo y $a \leq b$ entonces $1/a \geq 1/b$.*
   ($-3 \leq -2$, por tanto $-1/3 \geq -1/2$)

Recuerda algunas igualdades que conoces y que se cumplen para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Polinomios

Un POLINOMIO es una expresión del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales. A a_n se le llama *coeficiente líder* y a a_0 *término independiente*. El GRADO del polinomio es el mayor exponente de x. Todo polinomio puede ser evaluado en un número, $b \in \mathbb{R}$, simplemente sustituyendo la variable x por dicho número. Por ejemplo, el polinomio x^2+x+1 evaluado en -1 produce el número real $(-1)^2+(-1)+1=1$. Diremos que $r \in \mathbb{R}$ es una RAÍZ REAL del polinomio si al evaluarlo en dicho número obtenemos cero, esto es, las raíces reales de un polinomio $p(x)$ son las soluciones reales de la ecuación $p(x)=0$. El número de raíces reales de un polinomio siempre es menor o igual que su grado.

Dados dos polinomios, podemos *sumarlos, restarlos y multiplicarlos*. Así

$$
\begin{aligned}
(x^2+x+1)+(x^3+2x^2-x+2) &= x^3+(1+2)x^2+(1-1)x+(1+2)=x^3+3x^2+3, \text{ y}\\
(x+1)(x^2-x+1) &= x(x^2-x+1)+1(x^2-x+1)=(x^3-x^2+x)+(x^2-x+1)=\\
&= x^3+1
\end{aligned}
$$

Sea un polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ con raíces reales $r_1,r_2,\ldots,r_k \in \mathbb{R}$ con $k \leq n$. FACTORIZAR dicho polinomio consiste en expresarlo como:

$$p(x)=a_n(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}q(x),$$

siendo $m_1,m_2,\ldots m_k$ números naturales y $q(x)$ un polinomio de grado $n-k$ que no tiene raíces reales. Para cada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, el número m_i recibe el nombre de multiplicidad de la raíz r_i. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x^3-2x^2+x &= x(x-1)^2\\
2x^3+8x^2+8x+6 &= 2(x^2+x+1)(x+3).
\end{aligned}
$$

Nótese que en el segundo caso el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales.

Dado un polinomio de grado 2, ax^2+bx+c, si $b^2-4ac \geq 0$ entonces sus raíces reales vienen dadas por:

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Por tanto dicho polinomio se factoriza como

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

En el caso $b^2-4ac<0$, el anterior polinomio no tiene raíces reales (compruébese el ejemplo x^2+x+1).

Existen fórmulas para el cálculo de las raíces de los polinomios de grado tres y cuatro pero no resultan útiles debido a su complejidad.

Valor absoluto, intervalos y entornos

Para cada número real a, se define su *valor absoluto* como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|-3| = 3$, $|3| = 3$, $|-\pi| = \pi$.

Dado un número real a se tiene que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, un INTERVALO de $\mathbb{R}$ es un conjunto de alguno de los siguientes tipos:

(I) $]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (abierto y acotado),

(II) $]a,b] = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (abierto por la izquierda, cerrado por la derecha y acotado),

(III) $[a,b[= [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (cerrado por la izquierda, abierto por la derecha y acotado),

(IV) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (cerrado y acotado),

(V) $]a,+\infty[= (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (abierto por la izquierda y no acotado),

(VI) $[a,+\infty[= [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (cerrado por la izquierda y no acotado),

(VII) $]-\infty,b[= (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (abierto por la derecha y no acotado),

(VIII) $]-\infty,b] = (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ (cerrado por la derecha y no acotado),

(IX) $]-\infty,+\infty[= (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Los símbolos $\pm\infty$ que aparecen en las definiciones de los distintos tipos de intervalos, que leeremos como *más o menos infinito*, no son números reales, se trata simplemente un convenio de notación que resulta útil.

Dados dos números reales a y b, a la cantidad $|b-a|$, que coincide con $|a-b|$, la llamaremos DISTANCIA entre a *y* b. Sea $a \in \mathbb{R}$ y r un número real positivo. Se llama ENTORNO ABIERTO (SIMÉTRICO) DE CENTRO a Y RADIO r, y lo denotamos por $B(a,r)$, al intervalo abierto y acotado $(a-r, a+r)$, es decir:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}.$$

Geométricamente, el conjunto $B(a,r)$ contiene todos los puntos de la recta real cuya distancia al punto a es menor que r.

Ejercicio. Encontrar un error en la siguiente demostración.

Vamos a probar que $-1 = 1$. Procedemos de la siguiente forma: es cierto que $1-2 = 3-4$. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos que $(1-2)^2 = (3-4)^2$. Como el cuadrado de un número cualquiera coincide con el cuadrado de su opuesto, la igualdad anterior se transforma en $(1-2)^2 = (4-3)^2$. Por último, simplificamos los cuadrados y obtenemos que $1-2 = 4-3$, o lo que es lo mismo, $-1 = 1$.

[*Solución*: Puesto que $\sqrt{a^2} = |a|$, en el tercer paso tenemos que $\sqrt{(1-2)^2} = \sqrt{(4-3)^2}$ se convierte en $2-1 = 4-3$, de donde se deduce que $1 = 1$.]

Apuntes elaborados por César Rosales y modificados por Magdalena Caballero y Francisco Torralbo.
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada.

Capítulo 1

Conceptos básicos. Funciones elementales

♦ DEFINICIONES BÁSICAS

Dados dos conjuntos, A y B, una APLICACIÓN es una regla de asociación que asigna a cada elemento del conjunto A un **único** elemento del conjunto B. Se suele denotar por $F : A \to B$. Es muy importante observar que una aplicación no sólo está formada por la regla de asociación sino también por el conjunto dónde está definida, A, y el conjunto donde toma valores, B.

Una FUNCIÓN REAL DE (UNA) VARIABLE REAL es una aplicación $f : A \to B$ definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ que toma valores en otro subconjunto B de $\mathbb{R}$, es decir, es una regla que hace corresponder a cada número real $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$, que se llama *imagen de x mediante f*.

Dada una función $f : A \longrightarrow B$:

- Se llama EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN a la fórmula matemática que nos indica las operaciones que debemos realizar con el elemento $x \in A$ para calcular $f(x)$.

- El conjunto A sobre el que la función está definida recibe el nombre de DOMINIO de f, y lo denotaremos por $\mathrm{Dom}(f)$. Cuando no se especifique el dominio de una función se entenderá que éste *es el subconjunto más grande de* $\mathbb{R}$ *en el que la expresión analítica que define a la función tiene sentido*

- El conjunto B recibe el nombre de CODOMINIO, conjunto donde la función toma valores o conjunto de llegada. Cuando no se especifique el codominio tomaremos $B = \mathbb{R}$.

- Se llama IMAGEN O RECORRIDO de f al conjunto representado por $f(A)$ o por $\mathrm{Im}(f)$, cuyos elementos son las imágenes de los elementos de A mediante f, es decir:

  $$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

  Un manera práctica de decidir si $y \in \mathbb{R}$ está o no en $\mathrm{Im}(f)$ consiste en intentar resolver la ecuación $f(x) = y$, siendo x la incógnita de la ecuación. Si somos capaces de encontrar soluciones x a dicha ecuación y dichas soluciones pertenecen al dominio de la función, entonces $y \in \mathrm{Im}(f)$; de lo contrario $y \notin \mathrm{Im}(f)$.

Observemos que la imagen de una función depende de cuál es su dominio. De esta manera, dada $f : A \to \mathbb{R}$, si restringimos el dominio de f a un subconjunto más pequeño, $A' \subseteq A$, tenemos que la imagen de la nueva función (que voy a denotar por la misma letra) $f : A' \to \mathbb{R}$ ha cambiado, en concreto

$$f(A') = \{f(x) : x \in A'\} \subseteq \{f(x) : x \in A\} = f(A)$$

- Se llama GRÁFICA de f a la curva $y = f(x)$ del plano $\mathbb{R}^2$, es decir:

  $$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in A\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

  Normalmente representaremos los puntos de A sobre el eje x (o eje de abcisas) y sus imágenes, $f(x)$, en el eje y (o eje de ordenadas). El punto $(x_0, f(x_0))$ se obtiene entonces como la intersección de la recta vertical $\{x = x_0\}$ y la recta horizontal $\{y = f(x_0)\}$. La gráfica de f es la curva en el plano que se forma cuando unimos todos estos puntos. Nótese que esta curva corta a cada línea vertical a lo sumo una vez, debido a la definición de función. Además, un número y_0 pertenecerá a la imagen de f si la recta horizontal $\{y = y_0\}$ corta a la gráfica de f al menos una vez.

Ejemplo. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, tenemos que:

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su expresión analítica es la fórmula $y = x^2$, que nos indica que para calcular la imagen de un número real x basta con elevarlo al cuadrado.
- Su imagen estará formada por aquellos $y \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación $x^2 = y$ tiene solución en la incógnita $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Ahora, si queremos despejar la x en la ecuación $x^2 = y$ necesitamos hacer la raíz cuadrada de y, para lo que se precisa que $y \geq 0$. En tal caso al despejar tendríamos $x = \pm\sqrt{y}$. Concluimos que $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$.
- Es bien sabido que la gráfica de f es una parábola cuyo vértice es el punto $(0,0)$.

Conviene observar que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ es otra función distinta de f ya que, aunque las expresiones analíticas de ambas funciones coinciden, no así sus dominios.

Ejemplo. Para la función $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, tenemos que:

- Su dominio está especificado y es el intervalo abierto y acotado $]0,1[$.
- Su expresión analítica es la fórmula $y = 1/x$, que nos indica cómo calcular la imagen de cualquier elemento x.
- Su imagen es el intervalo $]1, +\infty[$, ya que la ecuación $y = 1/x$ con $x \in]0,1[$ sólo tiene solución para $y \in]1, +\infty[$.
- La gráfica de f es el trozo de la hipérbola $xy = 1$ cuando $x \in]0,1[$.

Por otro lado, el conjunto más grande donde la expresión analítica de la función tiene sentido es $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$ (no se puede dividir por 0).

Propiedades de acotación. Dada una función $f : A \to B$ diremos que:

- Está ACOTADA SUPERIORMENTE si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para todo $x \in A$. Dicho de otra manera, si $\mathrm{Im}(f) \subseteq]-\infty, K]$. Geométricamente esto significa que su gráfica se queda siempre por debajo de una recta horizontal.

- Está ACOTADA INFERIORMENTE si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in A$. Dicho de otra manera, si $\mathrm{Im}(f) \subseteq [M, +\infty[$. Geométricamente esto significa que su gráfica se queda siempre por encima de una recta horizontal.

- Está ACOTADA si lo está superior e inferiormente. Esto es, si existen $M, K \in \mathbb{R}$ tales que $M < K$ e $\mathrm{Im}(f) \subseteq [M, K]$ para M, $K \in \mathbb{R}$. Geométricamente esto significa que la gráfica de f está contenida dentro de una banda horizontal del plano.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ no está acotada ni superior ni inferiormente, ya que su imagen es todo $\mathbb{R}$. La función $g(x) = x^2 + 1$ está acotada inferiormente por 1 pero no está acotada superiormente ya que toma valores arbitrariamente grandes. La función $g(x) = 1/(x^2 + 1)$ está acotada superiormente por 1 ya que el denominador está acotado inferiormente por 1. Además, está también acotada inferiormente ya que toma siempre valores positivos.

Propiedades de crecimiento. Dada una función $f : A \to B$ diremos que:

- Es CRECIENTE si para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$, se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Geométricamente esto significa que la gráfica de f siempre sube o se mantiene constante. Diremos además que es ESTRICTAMENTE CRECIENTE si para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$ se cumple $f(x) < f(y)$ (siempre sube).

- Es DECRECIENTE si para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f siempre baja o se mantiene constante. Diremos además que f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE si para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$ se cumple $f(x) > f(y)$ (siempre baja).

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es una función creciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,1)$. La función $f(x) = -x$ es decreciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,-1)$. ¿Es estricto el crecimiento en cada caso?

Propiedades de paridad. Dada una función $f : A \to B$, donde $A = \mathbb{R}$ ó $]-a, a[$ ó $[-a, a]$ con $a > 0$, diremos que:

- Es PAR si para cada $x \in A$ se cumple que $f(-x) = f(x)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas.

- Es IMPAR si para cada $x \in A$ se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplo. La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$ es una función par ya que $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$. La función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x^3$ es una función impar, ya que $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$.

Periodicidad. Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es PERIÓDICA si existe un valor $T>0$ de forma que $f(x+T)=f(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$. El menor T para el cuál se cumple esto, recibe el nombre de PERÍODO de la función. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f consta de un trozo fundamental que se va repitiendo a lo largo de todo el eje x. Esto ocurre con las funciones trigonométricas: por ejemplo $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ son funciones periódicas con período $T=2\pi$.

♦ OPERACIONES CON FUNCIONES

A continuación proporcionamos formas de "fabricar" nuevas funciones a partir de funciones dadas.

- Si $f,g:A\to\mathbb{R}$ son dos funciones con el **mismo** dominio, se definen la SUMA, el PRODUCTO y el COCIENTE de f y g como las funciones $f+g:A\to\mathbb{R}$, $f\cdot g:A\to\mathbb{R}$ y $\dfrac{f}{g}:A\setminus\{x\in A:\, g(x)=0\}\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (f\cdot g)(x)=f(x)\,g(x),\quad \text{y}\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

  En el caso de que las funciones f y g no tengan el mismo dominio, pero su intersección sea no vacía, es posible realizar estas operaciones y el dominio de la nueva función es $\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$, teniendo en cuenta que en el caso del cociente hay que eliminar además los puntos donde $g(x)=0$.

- Se define el producto de un número $\alpha\in\mathbb{R}$ por una función $f:A\to\mathbb{R}$ como la función $\alpha\cdot f:A\to\mathbb{R}$ dada por $(\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x)$.

- **Composición** Sean $f:A\to\mathbb{R}$ y $g:B\to\mathbb{R}$ dos funciones tales que $\mathrm{Im}(f)=f(A)\subseteq\mathrm{Dom}(g)=B$. Definimos la COMPOSICIÓN de g y f, que representaremos por $g\circ f$, como la función real cuyo dominio es $\mathrm{Dom}(f)$ y cuya expresión analítica viene dada por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Esto es, la forma en la que actúa la nueva función $g\circ f$ es la siguiente: para cada x, primero actúa f sobre x, de modo que calculamos $f(x)$; a continuación actúa la función g, pero no sobre x, sino sobre el valor $f(x)$ previamente calculado.

Ejemplo.

1. Supongamos que tenemos las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=x$. La suma de f y g es la función $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f+g)(x)=\operatorname{sen}x+x$. El producto de f y g es la función $f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f\cdot g)(x)=x\operatorname{sen}x$. El cociente de f y g es la función $f/g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $(f/g)(x)=(\operatorname{sen}x)/x$ (obsérvese que hemos tenido que suprimir del dominio los puntos que anulan al denominador para que la expresión resultante tenga sentido). Por último $9\cdot f$ es la función $9\cdot f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $(9\cdot f)(x)=9\operatorname{sen}x$.

2. **La composición de funciones no es una operación conmutativa** en general. Esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo: sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$. Se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1) - 3 = x^2 - 2,$$

mientras que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2 + 1 = x^2 + 9 - 6x + 1 = x^2 - 6x + 10.$$

3. En caso de que no sea posible hacer la composición de dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ (esto es, en el caso en que $f(A) \nsubseteq B$), pero $f(A) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \emptyset$, es posible restringir el dominio de f a un subconjunto más pequeño, $A' \subseteq A$, de manera que $f(A') \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ y entonces sí es posible realizar la composición.

   Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = x^3$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ es $g(x) = \sqrt{x}$, ocurre que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Si restringimos f a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ocurre que $f(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathrm{Dom}(g)$ y por tanto sí es posible realizar la composición. Observemos que el dominio de la nueva función $g \circ f$ es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

♦ INVERSA PARA LA COMPOSICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Todo número real, distinto de cero, tiene un *inverso* para la multiplicación, esto es, dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $ab = ba = 1$. A b se le suele denotar por $1/a$ o por a^{-1}. Del mismo modo, dada una función $f : A \to B$, la función $\frac{1}{f} : \{x \in A : f(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ cumple que $f\frac{1}{f} = \frac{1}{f}f = 1$, donde 1 es aquí la función constantemente igual a 1. La función $\frac{1}{f}$ NO se va a notar por f^{-1}. En algunos textos esta función recibe el nombre de inversa para la multiplicación de f. Nosotros NO vamos a ulilizar este nombre.

Ahora bien, hemos definido una operación entre funciones a la que hemos llamado composición y cabe preguntarse si dicha operación tiene un inverso, esto es, si dada f existe una función g tal que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$ (observarás que el papel que jugaba el número 1 en el inverso para la multiplicación lo juega ahora la función identidad $\mathrm{Id}(x) = x$). Pues bien, esta función inversa, que vamos a denotar por f^{-1}, sólo existe bajo determinadas circunstancias que vamos a estudiar a continuación.

Sea $f : A \to B$ una función entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dice que f es INYECTIVA si no toma dos veces el mismo valor, es decir, si para cada $x, y \in A$ distintos, se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Geométricamente esto significa que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en a lo sumo un punto. Existen varias formas de comprobar si una función es inyectiva o no: por medio de la anterior definición o por medio de los siguientes enunciados:

(a) $f : A \to B$ es inyectiva si la igualdad $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

(b) $f : A \to B$ **no** es inyectiva si podemos encontrar dos valores x e y en A distintos, tales que $f(x) = f(y)$.

Se dice que una función $f : A \to B$ es SOBREYECTIVA si cada elemento de B es la imagen mediante f de algún elemento de A, es decir, $f(A) = \mathrm{Im}(f) = B$. Geométricamente esto significa que cada recta horizontal del plano a altura $y \in B$ corta a la gráfica de f por lo menos en un punto. Al igual que para la inyectividad, existen varias formas de decidir si una función es sobreyectiva o no lo es: por medio de la anterior definición o por medio de las siguientes afirmaciones,

(a) $f : A \to B$ es sobreyectiva si la ecuación $f(x) = y$ tiene al menos una solución $x \in A$ para cada $y \in B$.

(b) $f : A \to B$ **no** es sobreyectiva si podemos encontrar un valor $y \in B$ tal que $y \notin f(A)$

Se dice que $f : A \to B$ es BIYECTIVA si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Geométricamente esto significa que cada recta horizontal del plano a altura $y \in B$ corta a la gráfica de f en exactamente un punto; equivalentemente, cada número real $y \in B$ es la imagen de exactamente un elemento $x \in A$. Dicho de otra manera, para cada real $y \in B$ existe una sola solución de la ecuación $f(x) = y$ con $x \in A$.

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. A la función $f^{-1} : B \to A$ definida por $f^{-1}(y) =$ único valor $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (tenemos garantizado que dicho valor x existe y es único puesto que f es biyectiva), la llamaremos FUNCIÓN INVERSA PARA LA COMPOSICIÓN de f.

Propiedades de la función inversa.
Si $f : A \to B$ es biyectiva y $f^{-1} : B \to A$ es su inversa para la composición entonces se cumplen:

- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$.
- $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in B$.
- Las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Observación. La función inversa para la composición f^{-1} que acabamos de definir NO COINCIDE con $1/f$, es decir, no es lo mismo $f^{-1}(y)$ que $1/f(y)$.

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x+7$. La gráfica de f es la recta que pasa por los puntos $(0,7)$ y $(-3,1)$ (dibujarla). Por tanto es una función biyectiva, ya que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en exactamente un punto. Para calcular la inversa ponemos $y = 2x+7$ y despejamos x en función de y. Al hacerlo se obtiene $x = (y-7)/2$, con lo que $f^{-1}(y) = (y-7)/2$, cuya gráfica es otra recta (dibujarla). Obsérvese que la gráficas de f y de f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano).

Por otro lado, la función $\frac{1}{f}$ está definida en $\mathbb{R}\backslash\{-7/2\}$, su expresión analítica es $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{2x+7}$ y su gráfica es una hipérbola. Queda entonces totalmente claro que $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, cuya gráfica es una parábola con vértice en el origen de coordenadas. Es claro que f no es inyectiva, ya que cada recta horizontal $\{y = K\}$ con $K > 0$ corta a la gráfica dos veces. Esto es un reflejo de que la ecuación $x^2 = y$ tiene siempre dos soluciones cuando $y > 0$, concretamente, $x = \pm\sqrt{y}$. Tampoco es sobreyectiva, porque cada recta $\{y = K\}$ con $K < 0$ no corta a la gráfica de f, o lo que es lo mismo, la ecuación $x^2 = y$ no tiene solución siempre que $y < 0$.

¿Cómo obtener a partir de esta función otra que sea biyectiva? Para arreglar el problema de la falta de inyectividad tenemos que restringir el dominio de f a un subconjunto donde la función no repita valores; esto ocurre por ejemplo en $[0,+\infty)$ y en $(-\infty,0]$. Así, la función $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x^2$ sí es inyectiva (nos estamos quedando con la rama derecha de la parábola), pero sigue sin ser sobreyectiva porque la gráfica no corta a las rectas horizontales $\{y=K\}$ con $K<0$. Para arreglar la falta de sobreyectividad se sustituye el conjunto de llegada de la función (en este caso $\mathbb{R}$) por la imagen de la función. En este caso, es claro que la imagen de g es el conjunto $[0,+\infty[$ (todo número real no negativo es el cuadrado de su raíz cuadrada). Concluimos que la función $h:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ dada por $h(x)=x^2$ es biyectiva. Para calcular su inversa para la composición escribimos $y=x^2$ y despejamos x en función de y. Deducimos que $x=\sqrt{y}$, con lo que la inversa para la composición de h es la función $h^{-1}:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ dada por $h^{-1}(y)=\sqrt{y}$.

En definitiva, si queremos construir una función biyectiva a partir de otra que no lo es, debemos restringir el dominio de la función para hacerla inyectiva, y debemos sustituir el conjunto de llegada por la imagen de la función para hacerla sobreyectiva. Con estas restricciones, podemos calcular la inversa para la composición de la función escribiendo $y=f(x)$ y despejando la variable x en función de y.

♦ REPASO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Esta sección está dedicada a recordar algunas funciones básicas y sus propiedades.

Observación. Van a aparecer dos conceptos cuya definición no ha sido aún introducida: límite y continuidad. Por ahora debeis ignorar todo lo relacionado con ellos. Cuando estudiemos estos dos conceptos en el tema siguiente, volveremos de nuevo a este apartado para terminar el estudio de las funciones elementales.

1. **Funciones polinómicas:** Una *función polinómica* de grado n es una función $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuya expresión analítica es un polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, donde todos los a_i son números reales, todos los exponentes son naturales, y $a_n\neq 0$. Los polinomios de grado 0 son de la forma $p(x)=a_0$, es decir, son funciones constantes. Los polinomios de grado 1 son de la forma $p(x)=a_1x+a_0$, cuyas gráficas son rectas con pendiente $a_1\neq 0$ que pasan por el punto $(0,a_0)$. Los polinomios de grado 2 son de la forma $p(x)=ax^2+bx+c$ y es bien sabido que sus gráficas son parábolas. Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

2. **Funciones racionales:** Llamaremos *función racional* a toda función $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas. El dominio de una función racional es $Dom(r)=\mathbb{R}\setminus\{x:q(x)=0\}$ (no se puede dividir por cero). Son funciones continuas en cada intervalo de su dominio.

3. **Función potencial de exponente** $b\in\mathbb{Q}$: Sea $b=n/m\in\mathbb{Q}$ con $n\in\mathbb{Z}$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que n/m es una fracción irreducible (esto es m y n no tienen divisores naturales comunes). La *función potencial de exponente b* es una función cuya expresión analítica viene dada por

$f(x) = x^b = \sqrt[m]{x^n}$. El dominio de estas funciones depende de la naturaleza de $b = n/m$. Así:

a) Si $n > 0$ y m es impar entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) Si $n > 0$ y m es par entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

c) Si $n < 0$ y m es impar entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Si $n < 0$ y m es par entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$.

Propiedades
Puesto que en $\mathbb{R}^+$ la función potencial $f(x) = x^b$ está bien definida sea quien sea b, de aquí en adelante el dominio de esta función será $\mathbb{R}^+$, salvo que se especifique lo contrario. Así:

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y continua.

b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está acotada inferiormente, de hecho $x^b > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

c) $(xy)^b = x^b y^b$, $(x/y)^b = x^b/y^b$ y $(x^b)^c = x^{bc}$.

d) Si $b > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to 0} x^b = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} x^b = +\infty$.

e) Si $b < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to 0} x^b = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} x^b = 0$.

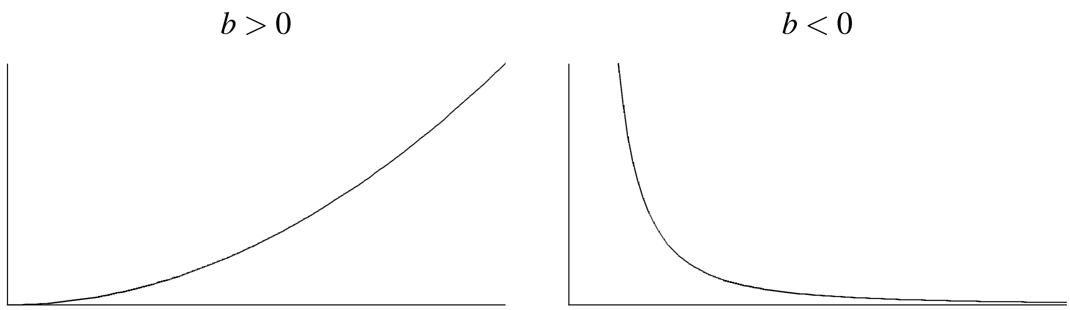

Figura 1.1: Gráficas de la función $f(x) = x^b$ para $b > 0$ y $b < 0$

4. **Función exponencial (de base e)**: Es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$, donde e es un número irracional cuyo valor aproximado es 2,711828. En algunos textos a dicha función se la denota también por $\exp(x) = e^x$.

   Sus propiedades se estudiarán en el apartado siguiente.

5. **Función exponencial de base $a > 0$ ($a \neq 1$)**: Es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Propiedades de esta función:

   a) f es continua en todo $\mathbb{R}$ y biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.

b) f está acotada inferiormente por 0, de hecho $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $a^0 = 1, a^{x+y} = a^x a^y, a^{x-y} = a^x/a^y \quad$ y $\quad (a^x)^y = a^{xy}$.

d) Si $a > 1$, entonces f es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces f es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

En particular, cuando a es el número e tenemos la función exponencial de base e o simplemente función exponencial $f(x) = e^x$.

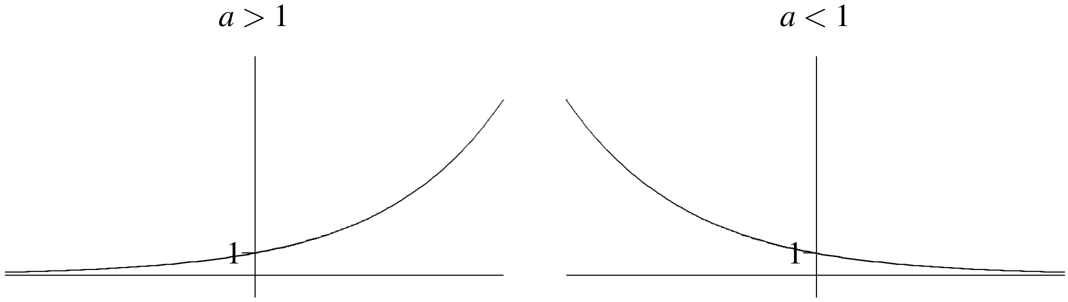

Figura 1.2: Gráficas de la función $f(x) = a^x$ para $a > 1$ y $a < 1$

6. **Función logaritmo neperiano o logaritmo natural:** Es la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$, donde $\ln x$ el único número $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^y = x$, es decir, esta función es la inversa para la composición de la función exponencial.

   Sus propiedades serán estudiadas en el próximo apartado.

7. **Función logarítmica de base** $a > 0$ ($a \neq 1$): Es la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, siendo $\log_a x$ el único número $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$. Coincide con la inversa para la composición de la función exponencial de base a y puede ser expresada en términos de la función logaritmo neperiano tal y como sigue

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

   Propiedades de esta función:

   a) Es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. No está acotada ni superior ni inferiormente.

   b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y \quad$ y $\quad \log_a(x^y) = y \log_a x$.

   c) Si $a > 1$, $\log_a$ es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.

   d) Si $0 < a < 1$, $\log_a$ es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.

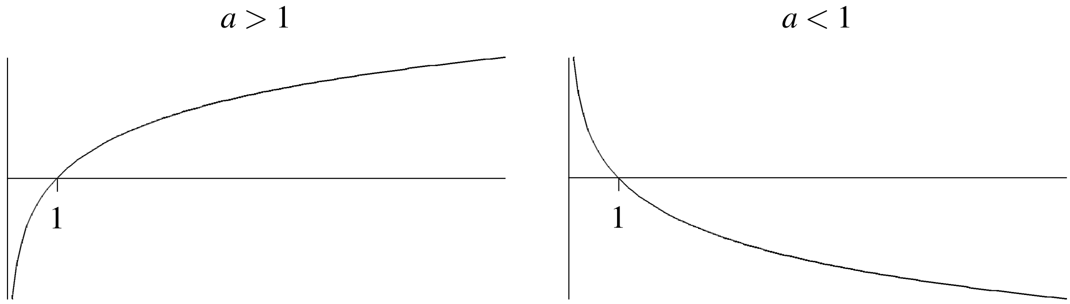

Figura 1.3: Gráficas de la función $f(x) = \log_a(x)$ para $a > 1$ y $a < 1$

En particular, cuando a es el número e tenemos la función logaritmo neperiano, $f(x) = \ln x$. En algunos textos este logaritmo se representa también por $\log(x)$.

8. **Funciones seno y coseno:** Son las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   a) Ambas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Sus imágenes coinciden con el intervalo $[-1, 1]$, por lo que son funciones acotadas. No tienen límite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

   b) Son periódicas con período 2π, esto es, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente creciente.

   d) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente decreciente.

   e) $\operatorname{sen} x = 0$ si y sólo sí $x = k\pi$ con k un número entero; $\operatorname{sen} x = 1$ si y sólo si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero; $\operatorname{sen} x = -1$ si y sólo si $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero.

   f) $\cos x = 0$ si y sólo sí $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k un número entero; $\cos x = 1$ si y sólo si $x = 2k\pi$ con k un número entero; $\cos x = -1$ si y sólo si $x = (2k+1)\pi$ con k un número entero.

   g) Seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Coseno es par: $\cos(-x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. **Función tangente:** Es la función dada por el cociente entre la función seno y la función coseno. Por tanto estará bien definida sólo en los puntos donde $\cos x \neq 0$. Sabemos que $\cos x = 0$ si y solo si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Definimos entonces la función tangente, $\operatorname{tg} : A \to \mathbb{R}$, como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para todo $x \in A$, siendo $A = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Es continua en cada intervalo de A y no está acotada ni superior ni inferiormente. Su imagen es $\mathbb{R}$.

   b) Es una función periódica de período π: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ para todo $x \in A$. Es una función impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

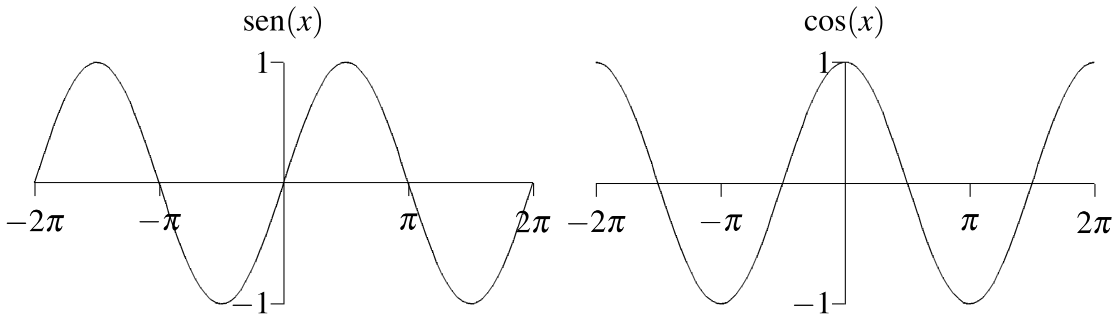

Figura 1.4: Gráficas de las funciones seno y coseno

c) $\operatorname{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva y estrictamente creciente. Además:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

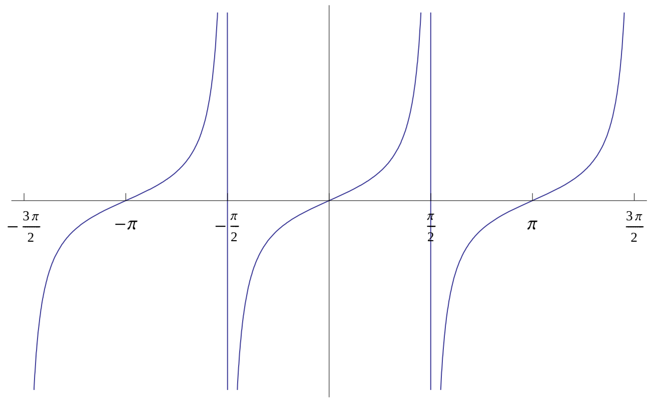

Figura 1.5: Gráfica de la función tangente en $]-\pi/2, \pi/2[$

A continuación mostramos una tabla con algunos valores de las funciones seno, coseno y tangente que debes conocer.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

10. **Funciones secante, cosecante y cotangente:** Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$ son

$x = k\pi$, con k número entero. Definimos el conjunto $B = \mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y las funciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} : B \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad \operatorname{cosec} x = \tfrac{1}{\operatorname{sen} x}, \text{ para todo } x \in B, \\ \sec : A \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad \sec x = \tfrac{1}{\cos x}, \text{ para todo } x \in A, \\ \operatorname{cotg} : B \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad \operatorname{cotg} x = \tfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \text{ para todo } x \in B, \end{aligned}$$

donde el conjunto A fue definido en el apartado anterior.

11. **Función arcoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\operatorname{arcsen} y$ es el único valor en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno coincide con y.

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Es impar.

    b) $\operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$, $\operatorname{arcsen}(0) = 0$ y $\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$.

12. **Función arcocoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\arccos y$ es el único valor en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno coincide con y.

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente decreciente.

    b) $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \pi/2$ y $\arccos(1) = 0$.

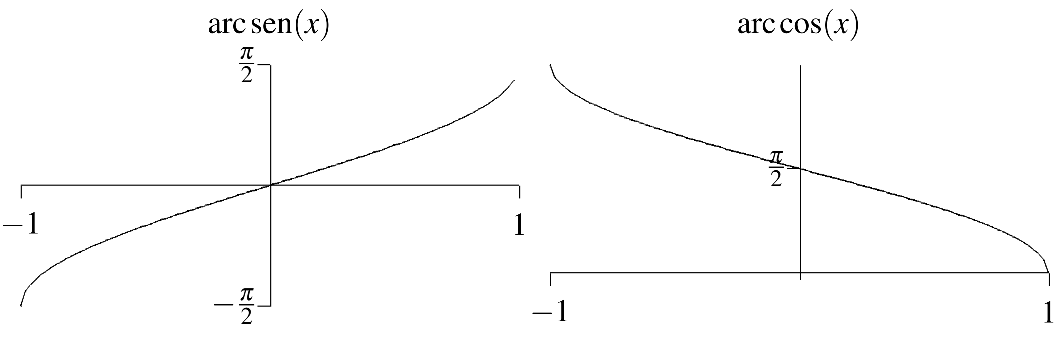

Figura 1.6: Gráficas de las funciones arcoseno y arcocoseno

13. **Función arcotangente:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Por tanto, es la función $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\operatorname{arctg} y$ es el único valor en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ cuya tangente coincide con y.

    a) Es biyectiva, continua, estrictamente creciente, impar y acotada.

    b) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm\pi/4$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$.

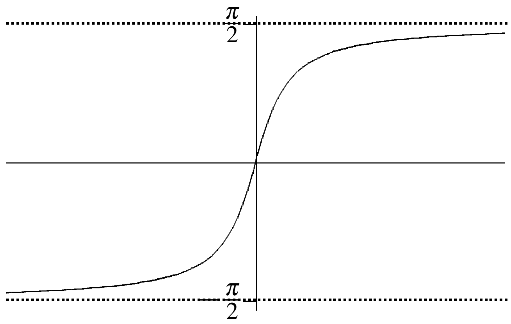

Figura 1.7: Gráfica de la función arcotangente

♦ IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \end{aligned}$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}.$$

Producto

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x - y) + \cos(x + y) \\ 2 \operatorname{sen} x \cos y &= \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) \end{aligned}$$

♦ EJERCICIOS

1. Determinar, en cada caso, el dominio donde es posible hacer la composición $g \circ f$ y escribir la función compuesta.

(I) $f(x) = 2\log(x)$ y $g(x) = e^x$

(II) $f(x) = x+3$ y $g(x) = x^2+1$

(III) $f(x) = x-1$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(IV) $f(x) = x^2-1$ y $g(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(V) $f(x) = x^2+2$ y $g(x) = \arccos(x)$

2. Recordad que cuando se da la expresión analítica de una función sin especificar su dominio, éste es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde dicha expresión tiene sentido. Teniendo en cuenta esto, determinar el dominio de las siguientes funciones:

(I) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(II) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

(III) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-5x^2+8x-4}$

(IV) $f(x) = 2 + \sqrt{1-(x-1)^2}$

(V) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

(VI) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}}$

(VII) $f(x) = 2^x + \pi$

(VIII) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(IX) $f(x) = \ln(x^2-1)$

(X) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2-5x+3)$

(XI) $f(x) = \sec\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(XII) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(XIII) $f(x) = \arccos(x^2-x+1)$

(XIV) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-x^2})$

(XV) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x^2+1)$

3. **Paridad de un polinomio**. Estudiar la paridad de los siguientes polinomios: x^2+3x+1, x^2-4, x^3+3, x^3+x+1, x^3+3x^2. ¿Sabrías decir qué propiedad, en términos de sus coeficientes, debe de cumplir un polinomio para que sea par? ¿Y para que sea impar?

4. Consideremos b un número real y f la función dada por $f(x) = e^{b\ln(x)}$. Determinar el dominio de la función y simplificar su expresión analítica usando las propiedades del logaritmo y la exponencial. ¿Qué tipo de función resulta?

5. La composición de aplicaciones inyectiva es una aplicación inyectiva y la composición de aplicaciones sobreyectivas es una aplicación sobreyectiva. Decidir en qué dominio las siguientes funciones son inyectivas, calcular su imagen y obtener en cada caso la inversa de una función biyectiva que se obtenga a partir de ellas.

(I) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$

(II) $\ln(3x+1)$

(III) $e^{3\ln(2x+1)}$

(IV) $e^{(x^2)}$

(V) $\ln(x^2-1)$

(VI) $\operatorname{arc\,sen}(2x) - 1$

(VII) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+3\right)$

(VIII) $\ln(3\,2^x+1)$