Capítulo 5

Espacios vectoriales. Bases. Coordenadas

♦ Operaciones en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que el producto cartesiano de dos conjuntos A y B consiste en los pares ordenados (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Cuando consideramos n conjuntos $A_1,\ldots,A_n$, el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$ consiste en las n-uplas $(a_1,\ldots,a_n)$ con $a_i \in A_i$, $i = 1,\ldots,n$. En particular, denotaremos por $\mathbb{R}^n$ el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$. Observemos que hay dos operaciones naturales en $\mathbb{R}^n$: podemos definir la suma de dos elementos en $\mathbb{R}^n$, $v = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$ y $w = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$ como

$$v+w = (v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n).$$

Además dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos definir la multiplicación de λ por un elemento v de $\mathbb{R}^n$ mediante

$$\lambda \cdot v = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2,\ldots,\lambda \cdot v_n).$$

Es fácil comprobar que dichas operaciones verifican las siguientes propiedades con respecto a la suma:

(1.1) $v+w = w+v$ para todo $v,w \in \mathbb{R}^n$,

(1.2) $v+(w+z) = (v+w)+z$ para todo $v,w,z \in \mathbb{R}^n$,

(1.3) $v+\mathbf{0} = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$,

(1.4) $v+(-v) = \mathbf{0}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $-v = (-v_1,-v_2,\ldots,-v_n)$,

y las siguientes con respecto a la multiplicación por un número:

(2.1) $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v,w \in \mathbb{R}^n$,

(2.2) $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$,

(2.3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$,

(2.4) $1 \cdot v = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

De hecho como vamos a ver en la siguiente sección, estas propiedades son justamente las propiedades que definen un espacio vectorial.

♦ Definición de espacio vectorial

Hay algunos conjuntos distintos de $\mathbb{R}^n$ que verifican las mismas propiedades (1.1)-(1.4) y (2.1)-(2.4). Pongamos como ejemplos

- los polinomios de grado menor o igual que n. De forma natural se puede definir una suma y una multiplicación por escalares. El alumno puede verificar como ejercicio que los polinomios satisfacen de hecho tales propiedades.

- las matrices de orden $m \times n$ con la suma y multiplicación que definimos en el tema anterior.

Así pues, puede ser interesante definir unos objetos que verifiquen dichas propiedades y estudiar así de una vez por todas, las características de todos ellos. Nos hace falta un conjunto V con una *operación interna* (la suma) que consiste en una aplicación

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (v,w) &\to v+w \end{aligned}$$

y una operación externa o *multiplicación por escalares*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (\alpha,v) &\to \alpha \cdot v \end{aligned}$$

Además a estas dos operaciones vamos a exigirle que satisfagan las propiedades:

(1.1) $v+w = w+v$ para todo $v,w \in \mathbb{R}^n$ (conmutativa de la suma),

(1.2) $v+(w+z) = (v+w)+z$ para todo $v,w,z \in \mathbb{R}^n$ (asociativa de la suma),

(1.3) $v+\mathbf{0} = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ siendo $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ (existencia del cero),

(1.4) $v+(-v) = \mathbf{0}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $-v = (-v_1,-v_2,\ldots,-v_n)$ (existencia del opuesto),

(2.1) $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v,w \in \mathbb{R}^n$ (distributiva de la suma con respecto al producto),

(2.2) $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ (distributiva del producto con respecto a la suma),

(2.3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ (asociativa del producto),

(2.4) $1 \cdot v = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ (existencia de la unidad en el producto).

Definición

Un *espacio vectorial* es una terna $(V,+,\cdot)$ satisfaciendo las propiedades (1.1)-(1.4) y (2.1)-(2.4). En general, nos referiremos al espacio vectorial simplemente como V, dando por supuesto la existencia de las operaciones.

Se puede comprobar de forma inmediata que un espacio vectorial verifica las siguientes propiedades :

(1) $\alpha \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot v = \mathbf{0}$

(2) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$

(3) $(\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v$

(4) $\alpha \cdot (v - w) = \alpha \cdot v - \alpha \cdot w$

(5) $\alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow [(\alpha = 0)$ ó $(v = 0)]$

(6) $\alpha \cdot v = \alpha \cdot w$, con $\alpha \neq 0 \Rightarrow v = w$

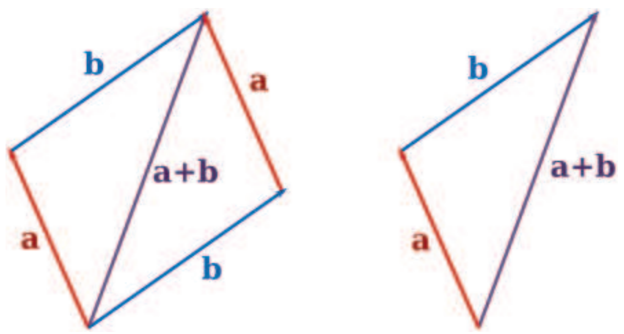
(7) $\alpha \cdot v = \beta \cdot v$, con $v \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Por ejemplo, podemos comprobar la primera. Usando las propiedades (1.3) y (2.1), obtenemos

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (v + \mathbf{0}) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot \mathbf{0}.$$

Usando la (1.4) se concluye que $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Observemos que la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$ se puede representar mediante la regla del paralelogramo:



♦ Subespacios vectoriales

Hay algunos subconjuntos de un espacio vectorial V que tienen propiedades interesantes. Piensa por ejemplo en un conjunto $W \subset V$ que sea cerrado para la suma y el producto, esto es, tal que si $v, w \in W$, entonces $v + w \in W$ y si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot v \in W$. Es fácil comprobar que W con las operaciones heredadas (la suma y el producto de V restringidos a W) es un espacio vectorial.

Definición

Un *subespacio vectorial* es un subconjunto W de un espacio vectorial V que es cerrado para la suma y el producto por escalares.

Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}^2$, el subconjunto $W = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ es claramente un subespacio pues si $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(x,0) + (y,0) = (x+y,0) \in W$$

y

$$\alpha \cdot (x,0) = (\alpha \cdot x, 0) \in W.$$

Caracterización

Para comprobar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V basta verificar que dados $v, w \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha \cdot v + \beta \cdot w \in W.$$

Ahora intentaremos visualizar e identificar de una forma más precisa cómo son los subespacios de $\mathbb{R}^n$ cuando $n = 2, 3$. Para ello, estudiaremos las dos formas más usuales de construir subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

♦ SUBESPACIO GENERADO POR UNA FAMILIA FINITA DE VECTORES

Combinación lineal

Dados p vectores $v_1, \ldots, v_p$ de un espacio vectorial V, decimos que un vector $w \in V$ es combinación lineal de dichos vectores si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tales que

$$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p.$$

Por ejemplo, el vector $\mathbf{0}$ es combinación lineal de cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_p$, pues

$$\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_p$$

Sistema generador

Diremos que un sistema de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ genera un subespacio W de V (en particular W puede coincidir con V) si todo vector $w \in W$ es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_p$.

Subespacio generado

Definimos el *subespacio generado* por un sistema de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de un espacio vectorial V como el subconjunto de todas las combinaciones lineales de $\{v_1, \ldots, v_p\}$, y lo denotamos por $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ ó $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$. Es fácil comprobar que $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ es de hecho un subespacio de V.

Ejemplos:

- Dado un único vector $v \in \mathbb{R}^n$, el subespacio $\langle v \rangle$ está formado por todos los vectores de la forma λv con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, por todos los vectores que son paralelos o proporcionales a v. Si $v = 0$ entonces es claro que $\lambda v = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y deducimos que $\langle v \rangle = \{0\}$. Si $v \neq 0$ entonces hay infinitos vectores en $\langle v \rangle$ obtenidos al comprimir o dilatar el vector v en el mismo sentido que v o en el opuesto. Los vectores obtenidos de esta manera llenan una recta: la *recta vectorial generada por* v. Esta recta es la que pasa por 0 con vector director v.

- En $\mathbb{R}^2$, el eje de abscisas $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$ es la recta vectorial generada por el vector $v = (1,0)$. El eje de ordenadas $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}$ es la recta generada por $v = (0,1)$.

- Supongamos ahora que $S = \{v_1, v_2\}$ donde v_1 y v_2 son dos vectores distintos de $\mathbb{R}^n$. Podemos suponer que ni v_1 ni v_2 coinciden con el vector 0 (de lo contrario, nos encontraríamos en el caso anterior). El subespacio $\langle S \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ estará entonces formado por todas las combinaciones lineales de v_1 y v_2, es decir, por vectores de la forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Cuando tomamos $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_1 = 0$ vamos obteniendo todos los vectores paralelos a v_1 y a v_2 respectivamente. Esto significa que $\langle S \rangle$ contiene a las rectas vectoriales generadas por v_1 y por v_2. Si v_1 y v_2 son paralelos, entonces $\langle S \rangle$ coincide exactamente con dichas rectas vectoriales que, además, son coincidentes. Sin embargo, cuando v_1 y v_2 no son paralelos, entonces $\langle S \rangle$ coincide con un plano que pasa por 0 y que llamamos *plano vectorial generado por* v_1 y v_2.

- En $\mathbb{R}^3$, el plano coordenado $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0)$ es el plano vectorial generado por los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$. Se comprueba que el vector $v = (0,0,1)$ no pertenece a este plano.

- En $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ coincide con $\mathbb{R}^3$.

La forma de construir subespacios que hemos aprendido aquí puede parecer muy particular. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema (Sistemas de generadores de un subespacio). *Dado un subespacio U de $\mathbb{R}^n$, existe una familia S formada por una cantidad finita de vectores de U de forma que $U = \langle S \rangle$. En tal caso, diremos que S es un sistema de generadores de U.*

A partir del resultado anterior y de los ejemplos estudiados, se pueden probar estos dos teoremas:

Teorema (Subespacios de $\mathbb{R}^2$). *Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, además del subespacio nulo $\{0\}$ y del total $\mathbb{R}^2$, son las rectas del plano que pasan por el origen.*

Teorema (Subespacios de $\mathbb{R}^3$). *Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, además del subespacio nulo $\{0\}$ y del total $\mathbb{R}^3$, son las rectas y los planos que pasan por el origen.*

♦ Subespacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Otra forma usual de definir un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ es a partir de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir:

$$U = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right\}.$$

Nota: Se demuestra de forma sencilla que U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Esto nos permite de alguna forma saber la forma geométrica que tienen las soluciones de un SEL homogéneo. Cuando el SEL homogéneo que define a U sea compatible determinado entonces $U = \{0\}$. En general, las soluciones de un SEL forman un subespacio si y sólo si el SEL es homogéneo. Tampoco es cierto que, en general, las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones con n incógnitas formen un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Todo ésto se puede ilustrar con ejemplos.

Ejemplo.

- El conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y = 0\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
- El conjunto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. De hecho, $U = \{0\}$.
- El conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$ es un subespacio al ser el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea. De hecho, U coincide con el eje de abcisas en el plano.

La forma de construir subespacios que hemos aprendido aquí puede parecer muy particular. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema (Ecuaciones implícitas de un subespacio)**.** *Dado un subespacio U de $\mathbb{R}^n$, existe un SEL homogéneo cuyas soluciones son exactamente los vectores de U. Diremos que las ecuaciones del SEL son unas ecuaciones implícitas para U.*

En este momento aprenderemos como expresar un subespacio descrito como el conjunto de soluciones de un SEL en un subespacio del tipo $\langle S \rangle$.

Ejemplo: Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{ccccc} 2x & +y & -z & +3t & = 0 \\ x & & +2z & +t & = 0 \end{array} \right\}.$$

Buscamos una familia de vectores S de $\mathbb{R}^4$ de forma que $U = \langle S \rangle$. Para ello, resolvemos por el método de Gauss el SEL anterior. Obtenemos que las soluciones son de la forma $x = -2\alpha - \beta$, $y = 5\alpha - \beta$, $z = \alpha$, $t = \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si ponemos las soluciones como un vector (x,y,z,t), entonces tenemos:

$$(x,y,z,t) = (-2\alpha - \beta, 5\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-2,5,1,0) + \beta(-1,-1,0,1),$$

lo que nos indica que las soluciones del SEL son siempre combinaciones lineales de los vectores $(-2,5,1,0)$ y $(-1,-1,0,1)$. Concluimos entonces que $U = \langle (-2,5,1,0), (-1,-1,0,1) \rangle$.

♦ BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Dependencia e independencia lineal

Vamos a ver a continuación una noción que va a resultar clave para estudiar los espacios vectoriales. Dado un sistema de vectores, podemos preguntarnos cuando existe una combinación lineal de ellos no trivial (es decir con algún escalar no nulo) que sea igual a cero. De existir tal combinación lineal, al menos uno de los vectores dependerá linealmente de los otros, esto es, se podrá expresar como combinación lineal de los otros. Por ejemplo, supongamos que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = \mathbf{0}.$$

Si por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot v_3 - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} \cdot v_p.$$

Por tanto, si queremos calcular $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$, podemos prescindir de v_1. Por otro lado, será interesante encontrar sistemas en los que no suceda lo anterior, pues a la postre vamos a ver que serán sistemas generadores con un número mínimo de elementos generadores.

Definición

Decimos que un sistema de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es *linealmente independiente* cuando no existe ninguna combinación no trivial (con algún escalar distinto de cero) que sea igual a $\mathbf{0}$. O lo que es lo mismo, si para toda combinación lineal tal que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = \mathbf{0},$$

se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$.

Decimos que un sistema $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es *linealmente dependiente* cuando existe una combinación no trivial tal que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = \mathbf{0}.$$

En la práctica puede resultar complicado probar que un conjunto de vectores sean linealmente independientes a partir de la definición. Un método útil en $\mathbb{R}^n$ lo da el siguiente resultado:

Teorema. *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia de vectores de $\mathbb{R}^n$. Sea M la matriz cuyas columnas son los vectores de S. Entonces, los vectores de S son linealmente independientes si y sólo si $rg(M) = m$. En particular, se deduce que en $\mathbb{R}^n$ no puede haber más de n vectores linealmente independientes.*

Una pregunta natural a la vista de lo que sabemos hasta el momento de espacios vectoriales es si existe un sistema generador que sea lo más pequeño posible. Veamos que la noción de base que introducimos a continuación satisface tal requisito.

Definición

Decimos que un sistema de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial V, si es un sistema generador de V y es linealmente independiente.

Ejemplos

El sistema $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ a la que llamamos *base canónica*. En general decimos que el sistema $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Prueba como ejercicio que $\{(1,2),(0,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Coordenadas de un vector en una base

Dado que una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un sistema generador, podemos expresar cualquier vector w de V como combinación lineal de la base. Además los coeficientes de dicha combinación lineal son únicos, pues si existiesen dos distintos:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = a'_1 v_1 + a'_2 v_2 + \cdots + a'_n v_n$$

entonces

$$(a_1 - a'_1)v_1 + (a_2 - a'_2)v_2 + \cdots + (a_n - a'_n)v_n = \mathbf{0},$$

y como la base es linealmente independiente, deducimos que $a_i = a'_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Llamaremos a dichos coeficientes *coordenadas* de w en B.

Teorema de existencia de la base y la dimensión

Dado un espacio vectorial V, podemos preguntarnos si existe una base para dicho subespacio. El teorema de la existencia de la base nos asegura que siempre existe y además si el espacio es finitamente generado (existe un sistema generador con un número finito de elementos), entonces todas las bases de dicho espacio tienen el mismo número de elementos. Llamaremos a dicho número la *dimensión* de V.

Observemos que existen espacios vectoriales de dimensión infinita (que no son finitamente generados), como por ejemplo el de los polinomios de cualquier grado, pero dichos espacios vectoriales no serán tratados en este curso.

Teorema

Dado un sistema generador de un espacio vectorial V, siempre podemos extraer una base de V.

♦ EJERCICIOS

1. Determina cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   (I) $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x+3y=2z\}$
   (II) $T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : y=2z+1\}$
   (III) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y=2z+t\}$
   (IV) $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2y=1\}$
   (V) $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x+3t=2y\}$
   (VI) $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=1; y+z=0\}$

2. Obtén el valor de x sabiendo que el vector $(8,7,x,6)$ pertenece al subespacio

   $$W=\langle(1,2,3,0),(2,1,1,2)\rangle$$

   de $\mathbb{R}^4$.

3. Determina un sistema generador de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

   (I) $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+3y=z\}$
   (II) $T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : y=2z\}$
   (III) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+2y=2z+t\}$
   (IV) $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2y=t\}$
   (V) $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x+3t=2y\}$
   (VI) $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=0; y+z=0\}$

4. Halla el valor de x e y para que el vector $(x,y,-23,-5)$ pertenezca al subespacio

   $$\langle(1,2,-5,3),(2,-1,4,7)\rangle.$$

5. Demuestra que los subespacios $U=\langle(1,0,1),(0,2,1)\rangle$ y $V=\langle(1,2,2),(-1,4,1)\rangle$ son iguales.

6. Determina cuales de las siguientes familias de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

   (I) $A=\{(0,0,1),(1,0,0)\}$
   (II) $B=\{(0,0,0),(1,1,0)\}$
   (III) $C=\{(1,2,4)\}$
   (IV) $D=\{(0,2-4),(1,-2,1),(1,4,3)\}$
   (V) $E=\{(2,4,1),(6,12,3)\}$
   (VI) $F=\{(1,2,3),(0,1,0),(2,5,1),(0,0,1)\}$

7. Demuestra que si los vectores u, v y w son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores $u+v$, $u+w$ y $v+w$. ¿Si los tres últimos vectores son linealmente dependientes, entonces también lo son los tres primeros?

8. ¿Qué valor tienen que tener x e y para que los vectores $(3,-2,-1,3$, $(1,0,2,4)$ y $(7,-4,x,y)$ sean linealmente dependientes?

9. Demuestra que los vectores $(2,0,1),(2,0,3),(0,4,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

10. Obtén una base de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ descritos en el ejercicio 3.

11. Halla el valor de x para que los vectores $(x,-3,2)$, $(2,3,x)$ y $(4,6,-4)$ engendren un subespacio vectorial de dimensión 1.

12. Las coordenadas de un vector v de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base $B=\{(1,2,0),(0,2,4),(1,0,4)\}$ son $(2,2,3)$. Halla las coordenadas de v en la base $B'=\{(2,2,0),(1,0,1),(3,2,0)\}$.

13. Halla las coordenadas del vector $(1,4,2)$ en las bases:

    (I) $A=\{(0,0,1),(1,2,0),(0,1,1)\}$

    (II) $B=\{(1,2,3),(1,1,0),(0,0,1)\}$

    (III) $C=\{(1,2,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$

    (IV) $D=\{(0,2-4),(1,2,1),(1,4,3)\}$

    (V) $E=\{(2,4,1),(1,1,3),(1,0,1)\}$

    (VI) $F=\{(1,2,3),(0,1,0),(2,5,1)\}$