

TEMA 2.2

Derivación de funciones de una variable

Existen varias formas de aproximarse al concepto de derivada de una función de una variable en un punto. Nosotros elegiremos dos: la primera, a través de la *tasa de variación instantánea* de una función; la segunda, a partir del problema de la *recta tangente* a una gráfica en un punto.

♦ TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA DE UNA FUNCIÓN

En Física, la velocidad media de un móvil es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en ello. Ahora bien, ¿qué significado tiene entonces la llamada velocidad instantánea? En un instante, un móvil no recorre nada, y la cantidad de tiempo necesitada es también cero. Por tanto, el concepto de velocidad instantánea sólo puede ser entendido como un paso al límite. Es decir, si medimos el espacio recorrido por el vehículo en un tiempo h pequeño, y lo dividimos entre h , el resultado será próximo a nuestra idea de velocidad instantánea. Y será más próximo cuanto más pequeño sea h . Así pues, la velocidad $v(t_0)$ en un instante t_0 no es otra cosa que:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(t_0 + h) - e(t_0)}{h},$$

donde $e(t)$ es el espacio recorrido en función del tiempo t . Cuando dicho límite existe y es finito se llama *derivada* de $e(t)$ en t_0 .

En general, siguiendo la idea que se ha visto en el ejemplo anterior, la derivada representa la tasa instantánea de cambio de una magnitud. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I . Se llama tasa de variación media de f en $[u, v] \subset I$ al número real:

$$TVM(f, [u, v]) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(v) - f(u)}{v - u},$$

que representa cómo cambia la magnitud $y = f(x)$ respecto de x en $[u, v]$. Si nos preguntamos por la tasa de variación instantánea de f en un punto concreto $a \in I$, entonces debemos calcular tasas de variación media en intervalos de la forma $[a, a + h]$ (o de la forma $[a - h, a]$) con $h > 0$ cada vez más pequeño. De este modo:

$$TVI(f, a) = \lim_{h \rightarrow 0} TVM(f, [a, a + h]) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Cuando este límite existe y es finito se llama derivada de $f(x)$ en a .

◆ EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

Dada una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, nos gustaría encontrar la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, para cierto $a \in I$. Según la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, la recta que buscamos, si existe, tendrá una ecuación de la forma

$$y = f(a) + m(x - a),$$

donde m es la pendiente de la recta, a determinar (recordemos que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas). Para calcular m , procedemos de la siguiente forma: Aproximamos la recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ por la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, con h cada vez más pequeño. Resulta entonces claro que, si la recta tangente existe, entonces las pendientes m_h de las rectas anteriores (que son secantes a la gráfica) deben aproximarse a la pendiente m cuando h tiende a cero. Esto quiere decir que $\lim_{h \rightarrow 0} m_h = m$.

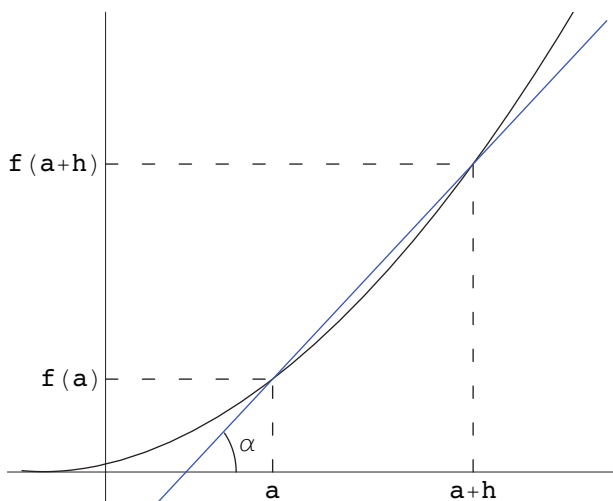


Figura 2.1: Una recta secante a la curva $y = f(x)$

Por otro lado, las pendientes m_h se calculan de la siguiente manera (véase la figura de arriba):

$$m_h = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De este modo, tenemos que:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

que es la definición de derivada de f en a . Así pues, **la derivada de f en un punto a , cuando existe y es finita, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$** . Por tanto, la derivada es igual a $\operatorname{tg}(\beta)$, donde β es el ángulo mostrado en Figura 2.2.

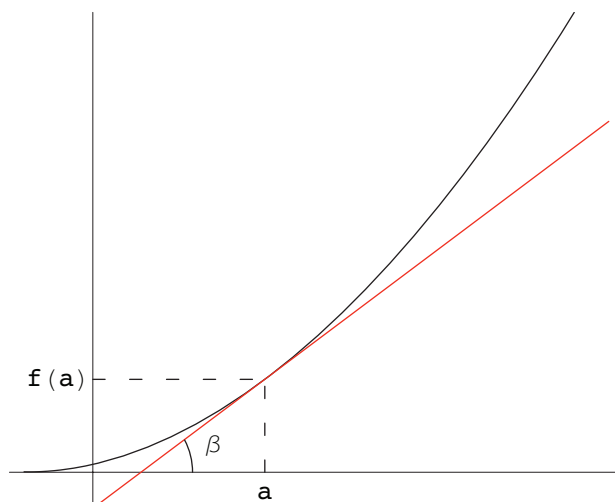


Figura 2.2: La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

◆ DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DERIVADA

Para poder definir la derivada en un punto, necesitamos que la función esté definida definida a ambos lados del punto. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y un punto $a \in A$, diremos que a es INTERIOR si existe un intervalo abierto $]b, c[$ tal que $a \in]b, c[\subseteq A$. Así si $A = [1, 2[$, todos los puntos de $]1, 2[$ son interiores a A , mientras que el 1 no es interior.

Derivada de una función en un punto.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $a \in A$ un punto interior. Se dice que f ES DERIVABLE EN a si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En tal caso, dicho límite se llama DERIVADA DE f EN a y se nota por $f'(a)$. Por lo tanto si f es derivable en a , existe la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ y su pendiente vale $f'(a)$. En tal caso, dicha recta tangente viene dada por la ecuación

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Observación. En la definición de derivada, la h que aparece en el límite anterior no tiene signo (puede ser tanto positivo como negativo).

Observación. Además de la notación $f'(a)$, es también común escribir la derivada de f en a de alguna de las siguientes formas: $\frac{df}{dx}(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{df}{dx}\Big|_a$ y $Df(a)$.

Función derivada.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sea $C \subseteq A$ un conjunto cuyos puntos son todos interiores. Diremos

que f ES DERIVABLE EN C cuando es derivable en todos los puntos de C . En tal caso, la función $f' : C \rightarrow B$ definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

recibe el nombre de FUNCIÓN DERIVADA DE f EN C . Si podemos tomar $C = A$, entonces diremos que f ES DERIVABLE.

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. ¿Es f derivable en 0? Para responder a esta pregunta estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Luego $f'(0)$ existe y es igual a 0. Veamos ahora qué ocurre en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 3) = 3. \end{aligned}$$

Por tanto $f'(1) = 3$. En vista de lo anterior, existen las rectas tangentes a la gráfica de f en $(0, f(0)) = (0, 0)$ y $(1, f(1)) = (1, 1)$, y dichas rectas son

$$y = 0 \quad \text{e} \quad y = 3x - 2,$$

respectivamente.

Mientras que la primera de dichas rectas solo corta a la gráfica de f en $(0, 0)$ (el punto de tangencia), la recta $y = 3x - 2$ corta a la gráfica de f en el punto $(-2, f(-2)) = (-2, -8)$, además de en $(1, 1)$. En general, la recta tangente a una función en un punto puede cortar a la gráfica de la función en puntos distintos al de tangencia.

Ejemplo. La derivada de una función en un punto no tiene por qué existir. Consideramos la función $f(x) = |x|$ y estudiamos si existe su derivada en $x = 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Como la función tiene distintas expresiones a ambos lados de 0, hemos de estudiar los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{y} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1. \end{aligned}$$

Luego dicho límite no existe y, por tanto, f no es derivable en 0. Este ejemplo responde a la noción intuitiva de que la gráfica está “quebrada” (presenta un pico) en el punto en el que falla la derivabilidad.

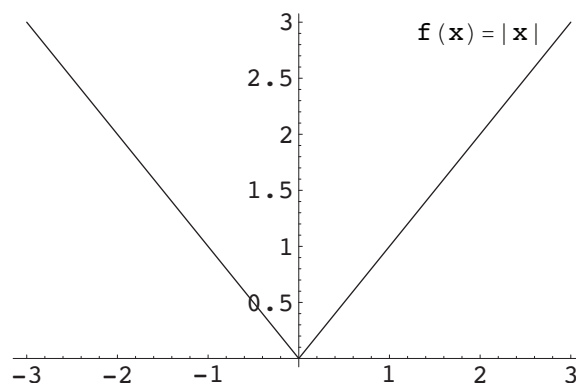


Figura 2.3: La función valor absoluto

Parece natural preguntarse si existe alguna relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función en un punto. El siguiente teorema responde esta pregunta.

Teorema. *Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.*

El recíproco no es cierto, como muestra la función valor absoluto arriba estudiada.

◆ DERIVADAS LATERALES

En ocasiones tendremos que estudiar la derivabilidad en un punto a , de una función que tiene distintas expresiones analíticas a ambos lados de dicho punto. Para ello hemos de estudiar por separado qué es lo que ocurre a la izquierda y a la derecha del punto, esto es, debemos estudiar los límites laterales. También es necesario utilizar límites laterales cuando consideramos una función definida en un intervalo cerrado y nos preguntamos por la existencia de recta tangente en los extremos de dicho intervalo. Motivados por estas dos situaciones, vamos a definir el concepto de derivada lateral. Para ello no vamos a necesitar que la función esté definida a ambos lados del punto hacia el que nos aproximamos, nos bastará con que esté definida en el punto y a uno de dichos lados.

Dada una función $f : A \rightarrow B$ y dado $a \in A$ tal que f está definida a la derecha de a y es continua en a , decimos que f TIENE DERIVADA A LA DERECHA DE a si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De forma análoga, si f está definida a la izquierda de a y es continua en a , decimos que f TIENE DERIVADA A LA IZQUIERDA DE a si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En algunos textos dichas derivadas se notan por $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$, respectivamente.

Observación. Es claro que una función es derivable en un punto si y solo si existen las derivadas laterales en el punto y dichas derivadas coinciden.

Ejemplo. La función valor absoluto tiene derivadas laterales en 0 y sin embargo no es derivable en cero, ya que dichas derivadas no coinciden.

Ejercicio. Estudiar la derivabilidad en 0 de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

◆ DERIVADAS SUCESIVAS

Toda función derivable f es continua. Sin embargo, f' no tiene por qué ser continua. Cuando estudiemos las reglas de derivación, veremos un ejemplo de función derivable cuya función derivada no es continua. Cuando f' sea continua, tiene sentido preguntarse si f' es derivable. Si la respuesta es afirmativa, su función derivada se nota por f'' y se llama DERIVADA SEGUNDA DE f , además en este caso se dice que f es DOS VECES DERIVABLE.

Análogamente, dado $n \in \mathbb{N}$, la DERIVADA n -ÉSIMA DE f , que denotaremos por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$, en el caso en el que $f^{(n-1)}$ exista y sea derivable.

◆ DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Hasta ahora no hemos dado ejemplos de funciones derivables. Pues bien, todas las funciones elementales estudiadas en el primer tema son derivables y sus derivadas quedan especificadas en las dos primeras columnas de la parte superior del Cuadro 1.

Podemos ya dar ejemplos de funciones derivables más de una vez: las funciones constantes y las funciones potenciales pueden ser derivadas tantas veces como queramos. En el caso de las funciones constantes, tenemos que $0 = f' = f'' = f^{(3)} = \dots$, esto es, todas sus derivadas son nulas. Dada la función $g(x) = x^3$

$$g'(x) = 3x^2, \quad g''(x) = 6x, \quad g^{(3)}(x) = 6 \quad \text{y} \quad g^{(n)}(x) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

◆ PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS FRENTE A LAS OPERACIONES DE FUNCIONES. REGLA DE LA CADENA

Dadas dos funciones f y g derivables en a , se verifican:

- (I) $f + g$ es derivable en a y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (II) $f \cdot g$ es derivable en a y $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. En particular, $\lambda \cdot f$ es derivable en a para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.

Cuadro 2.1: Tabla de Derivadas inmediatas

Función	Derivada	Función	Derivada
C	0		
x	1		
x^a	ax^{a-1}	$(f(x))^a$	$af(x)^{a-1} \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
a^x	$a^x \ln(a)$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot f'(x) \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$	$\log_a(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\text{sen}(f(x))$	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\cos(f(x))$	$-\text{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$
$\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2} = \sec(x)^2 = 1 + \text{tg}(x)^2$	$\text{tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos(f(x))^2}$
$\text{cotg}(x)$	$\frac{-1}{\text{sen}(x)^2} = -\text{cosec}(x)^2 =$ $= -1 - \text{cotg}(x)^2$	$\text{cotg}(f(x))$	$\frac{-f'(x)}{\text{sen}(f(x))^2}$
$\text{arc sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\text{arc cos}(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos}(f(x))$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\text{arc tg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad (*)$
$g \circ f(x) = g(f(x))$	$g'(f(x))f'(x) \quad (*48)$	$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (*)$

(III) Utilizando las dos propiedades previas se concluye que $f - g$ es derivable en a y su derivada vale $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

(IV) Si $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Estas propiedades, así como la regla que vamos a estudiar a continuación, quedan reflejadas en la parte inferior del cuadro 1. Hemos marcado con (*) aquellos casos en los que hay que exigir a f y a g condiciones extra para que exista la derivada.

Regla de la cadena. Sean f y g dos funciones tales que $\mathfrak{D}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$. Sea $a \in \text{Dom}(f)$ tal que f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Observaciones.

- En el cuadro 1, la dos últimas columnas nos muestran las derivadas de la composición de una función elemental con otra función cualquiera. Dichas fórmulas se obtienen aplicando la regla de la cadena y usando las dos primeras columnas del cuadro.
- En la esquina derecha de la parte baja del cuadro 1, aparece una fórmula que se justificará en un ejercicio de este tema.

Ejercicio. Gracias a las anteriores propiedades, es fácil ver que las funciones polinómicas y las racionales son funciones derivables. Es más, son derivables tantas veces como queramos. Como ejercicio, prueba que para cada polinomio existe un número m tal que la derivada m -ésima del polinomio y todas las derivadas de orden mayor que m son nulas, mientras que todas las derivadas de orden menor que m no son nulas. ¿Qué relación guarda este número con el grado del polinomio? ¿Ocurre lo mismo para las funciones racionales?

Ejemplo. El siguiente ejemplo nos dice que la derivada de una función derivable no tiene por qué ser continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Todo punto a la izquierda de 0 es interior. Además, f es constante en $]-\infty, 0[$, y por tanto su derivada vale 0 en dicho intervalo. A la derecha de 0, todos los puntos son interiores, y la función f se escribe como producto de dos funciones: una de ellas es $g(x) = x^2$ y la otra $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Sabemos que g es derivable, por ser un polinomio; y h es derivable en $\mathbb{R}^+$, por la regla de la cadena. Por lo tanto, f es derivable en $]0, +\infty[$. Calculemos $f'(x)$ cuando $x > 0$. En primer lugar calculamos la derivada de h usando la regla de la cadena:

$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) (-x^{-2}) = \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

En segundo lugar, puesto que $f(x) = g(x)h(x)$, calculamos la derivada de f usando la regla del producto:

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)(-x^{-2}) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estudiemos ahora la derivabilidad en 0. Primero veamos que f es continua en 0 (recordemos que si no es continua, entonces tampoco es derivable).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0.$$

Luego f es continua en 0. Calculemos ahora las derivadas laterales de f en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0. \end{aligned}$$

De donde concluimos que f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

A lo largo de este ejemplo hemos obtenido que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función tiene en cero una discontinuidad esencial, ya que no existe el límite de f en 0 por la derecha. Concluimos entonces que f es derivable y su derivada no es continua en 0.

◆ APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Las aplicaciones del cálculo diferencial son muy numerosas. Aquí nos preocuparemos sobre todo de aspectos relacionados con la representación gráfica de funciones de una variable.

LA REGLA DE L'HÔPITAL

La Regla de L'Hôpital es una aplicación de la derivación que nos permite calcular límites indeterminados de tipo cociente que se vuelven más sencillos cuando derivamos.

Teorema (Regla de L'Hôpital). Consideremos $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I . Dado $a \in I \cup \{\pm\infty\}$, supongamos que al calcular alguno de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

llegamos a una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$. Entonces, se cumple que:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista (aunque sea $\pm\infty$).

Observaciones.

- No confundir Regla de L'Hôpital con derivada de un cociente. NO ES VERDAD QUE $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$.
- A veces hay que aplicar la regla varias veces hasta poder calcular el límite.
- A la hora de aplicar la regla, **es importante comprobar que el límite** que estamos tratando **es del tipo** $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$. Por ejemplo, claramente $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2$, pero si derivamos numerador y denominador, nos queda $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1 \neq 2$.
- Si el límite $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existiera, esto no significa que el límite original, $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ no exista. Por ejemplo, si aplicamos la regla de L'Hôpital al límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x}$ que es del tipo $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$, nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos(x)),$$

que no existe. En cambio, el límite original sí que existe. De hecho,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) = 1.$$

Ejemplo. Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Ejemplo. Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$, aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} = 0.$$

Observación. En principio, la Regla de L'Hôpital sólo se puede utilizar para límites indeterminados de tipo cociente. Por ello, si nos encontramos con otro tipo de indeterminación, debemos de transformarla hasta obtener una de tipo cociente a la que sí podemos aplicar la regla.

Ejemplo. Vamos a resolver una indeterminación del tipo $(+\infty - \infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right) = (+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x \operatorname{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

En este momento podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular el último límite (ejercicio).

Ejemplo. Si al calcular $\lim(f(x) \cdot g(x))$ se obtiene una indeterminación del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$, entonces podemos transformar la indeterminación en otra de tipo cociente si ponemos:

$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad \lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

De las dos posibilidades puede que sólo una nos conduzca a un límite más sencillo. La filosofía es siempre la de quedarnos con el límite que resulte más fácil de calcular.

Ejemplo. Como aplicación de lo anterior vamos a calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$, que produce una indeterminación del tipo $0 \cdot (-\infty)$. Podemos reescribir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Este último límite es del tipo $(\frac{-\infty}{+\infty})$, por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para deducir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Obsérvese que también hubiéramos podido expresar el límite original como:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Sin embargo, si aplicamos ahora la Regla de L'Hôpital no obtenemos un límite sencillo. De hecho, al aplicar L'Hôpital sucesivamente nuestro límite se va complicando cada vez más.

Ejercicio. Demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin(x))^{\ln(x)} = 1.$$

MONOTONÍA, PUNTOS CRÍTICOS Y EXTREMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN

Estudiar la monotonía de una función consiste en decidir en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente. Cuando la función es derivable ésto se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada primera de la función.

Teorema. Sea I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I . Entonces:

1. Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I .
2. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I .
3. Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I .

4. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I .

5. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I .

En la siguiente gráfica se representan una función y su derivada. Observamos que a la izquierda del valor a , f' es positiva y f es creciente. Entre a y b , f' es negativa y, por tanto, f es decreciente. Por último, a la derecha del valor b , f' vuelve a ser positiva, por lo que f vuelve a ser creciente. Este ejemplo muestra también que una función no tiene por qué tener siempre el mismo tipo de monotonía.

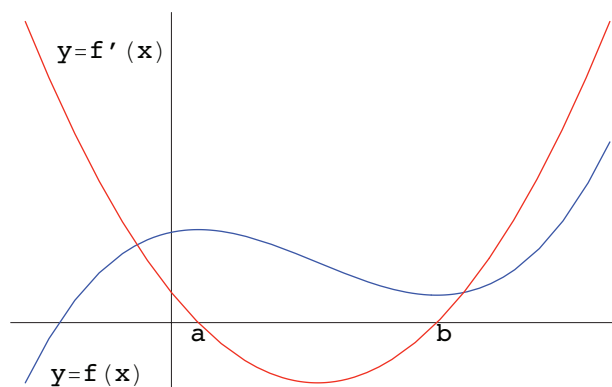


Figura 2.4: Una función y su derivada

Ahora nos preocuparemos de estudiar los puntos en los que *de algún modo* cambia la monotonía de una función.

Definición. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I . Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- MÍNIMO LOCAL si hay un entorno $]a - r, a + r[$ de a , con $r > 0$, contenido en I en el que se cumple que $f(x) \geq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más bajo de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).
- MÁXIMO LOCAL si hay un entorno $]a - r, a + r[$ de a , con $r > 0$, contenido en I en el que se cumple que $f(x) \leq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más alto de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).
- EXTREMO LOCAL si f tiene en a un mínimo local o un máximo local.
- PUNTO CRÍTICO si f es derivable en a y $f'(a) = 0$ (geométricamente, ésto significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es horizontal).

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los extremos locales de una función.

Teorema (Principio de Fermat). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto. Si f es derivable en $a \in I$ y f alcanza en a un extremo local, entonces a es un punto crítico de f .

Por tanto, los extremos locales de una función derivable sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos críticos de la función dentro de dicho intervalo. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto crítico se alcance siempre un extremo local**. Esto ocurre por ejemplo con la función $f(x) = x^3$ en $x = 0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos críticos de una función, que consiste en decidir si en un punto crítico dado la función alcanza un extremo local (mínimo o máximo) o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema (Criterio de la derivada primera). *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto. Dado un punto crítico a de f en I , estudiamos el signo de $f'(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a . Se tiene:*

1. *Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces a es un mínimo local de f .*
2. *Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces a es un máximo local de f .*
3. *Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de a , entonces no hay extremo local en a .*

Así pues, en el ejemplo de la Figura 2.4, se tiene que f presenta un máximo local en a y un mínimo local en b . Esto puede ser deducido tanto a partir de la gráfica de $f(x)$ como de la gráfica de $f'(x)$.

Ejemplo. Estudiemos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2 \arctg(x - 1) - x$. Al derivar una vez y simplificar nos queda:

$$f'(x) = \frac{2}{1 + (x - 1)^2} - 1 = \frac{2x - x^2}{1 + (x - 1)^2}.$$

La expresión anterior se anula sólo cuando $x = 0$ o $x = 2$. Así pues, éstos son los puntos críticos de la función, entre los que tendremos que buscar los extremos locales. Estudiando el signo de $f'(x)$, deducimos que $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y $f'(x) > 0$ para $x \in]0, 2[$. Así pues, f es decreciente en $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y creciente en $]0, 2[$. Por tanto, se deduce que f presenta un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 2$.

Teorema (Criterio de la derivada segunda). *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto I . Dado un punto crítico a de f en I , estudiamos el signo de $f''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f .*
2. *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f .*
3. *Si $f''(a) = 0$, entonces no se puede asegurar nada.*

Ejercicio. Utilizar el criterio anterior para clasificar los puntos críticos de $f(x) = 2 \operatorname{arctg}(x - 1) - x$.

Observación. los dos criterios empleados para clasificar un punto crítico a son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f'(x)$ alrededor de a , mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN DE UNA FUNCIÓN

En esta sección realizaremos un tratamiento muy parecido al de la anterior para estudiar un nuevo aspecto de la gráfica de una función que, en este caso, está controlado por la derivada segunda: la curvatura de la función. Necesitaremos unos conceptos previos.

Definición. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I . Diremos que f es:

1. CONVEXA en I si cada recta secante a la gráfica de f deja por debajo al trozo de la gráfica de f entre los dos puntos de intersección.
2. CÓNCAVA en I si cada recta secante a la gráfica de f deja por encima al trozo de la gráfica de f entre los dos puntos de intersección.

Observación. los términos *convexo* y *cóncavo* no se emplean de forma consistente. Sin embargo, en la mayor parte de los textos matemáticos se utiliza la misma terminología que nosotros hemos adoptado.

Estudiar la curvatura de una función consiste en decidir los intervalos donde f es convexa y aquellos donde es cóncava. Cuando la función es derivable dos veces el estudio de su curvatura se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada segunda de la función.

Teorema. Sea I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en I . Entonces:

1. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I .
2. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I .
3. Si $f''(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces la gráfica de f en I es una recta.

Ahora estudiaremos los puntos en los que cambia la curvatura de una función.

Definición. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I . Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- PUNTO DE INFLEXIÓN CONVEXO-CÓNCAVO si hay un entorno $]a - r, a + r[$ contenido en I de forma que f es convexa en $]a - r, a[$ y cóncava en $]a, a + r[$.

- **PUNTO DE INFLEXIÓN CÓNCAVO-CONVEXO** si hay un entorno $]a - r, a + r[$ contenido en I de forma que f es cóncava en $]a - r, a[$ y convexa en $]a, a + r[$.

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los puntos de inflexión de una función.

Observación. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I . Si f es derivable dos veces en $a \in I$ y f presenta un punto de inflexión en a , entonces $f''(a) = 0$, lo que geométricamente significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ atraviesa a la gráfica.

Por tanto, los puntos de inflexión de una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos que anulan a la derivada segunda. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto con derivada segunda nula se alcance siempre un punto de inflexión**. Esto le ocurre por ejemplo a la función $f(x) = x^4$ en $x = 0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos donde $f''(x) = 0$, que consiste en decidir si en tales puntos la función alcanza un punto de inflexión o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema (Criterio de la derivada segunda). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en un intervalo abierto. Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a) = 0$, estudiamos el signo de $f''(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a . Se tiene:

1. Si $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f .
2. Si $f''(x) > 0$ a la izquierda de a y $f''(x) < 0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f .
3. Si $f''(x)$ no cambia de signo alrededor de a , entonces no hay punto de inflexión en a .

Ejemplo. Vamos a estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \operatorname{arctg}(x - 1) - x$. Como vimos antes, su derivada primera es $f'(x) = \frac{2x - x^2}{1 + (x - 1)^2}$, que se anula en $x = 0$ y en $x = 2$. Calculamos ahora su derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) - (2x - x^2)(2x - 2)}{(1 + (x - 1)^2)^2} = \frac{4(1 - x)}{(1 + (x - 1)^2)^2}.$$

La expresión anterior se anula si y sólo si $x = 1$. Además, $f''(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 1[$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in]1, +\infty[$. Así pues, f es convexa en $] -\infty, 1[$ y cóncava en $]1, +\infty[$. Además, deducimos que f tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en $x = 1$.

Teorema (Criterio de la derivada tercera). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tres veces sobre un intervalo abierto I . Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a) = 0$, estudiamos el signo de $f'''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:

1. Si $f'''(a) > 0$, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f .
2. Si $f'''(a) < 0$, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f .
3. Si $f'''(a) = 0$, entonces no se puede asegurar nada.

Ejercicio. Utilizar el criterio anterior para estudiar los puntos de inflexión de $f(x) = 2 \arctg(x - 1) - x$.

Observación. los dos criterios empleados para clasificar un punto donde $f''(a) = 0$ son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f''(x)$ alrededor de a , mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f'''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

En muchos problemas cotidianos es importante analizar si una determinada función alcanza sus valores mínimo y/o máximo absolutos. En esta sección aprenderemos a resolver este tipo de cuestiones. Antes daremos un par de definiciones.

Definición. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo cualquiera. Dado $a \in I$, diremos que f alcanza en a su

1. MÍNIMO ABSOLUTO si $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in I$.
2. MÁXIMO ABSOLUTO si $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in I$.

Diremos que f alcanza en a un extremo absoluto si alcanza su mínimo absoluto o su máximo absoluto.

Observaciones.

- No hay que confundir el mínimo absoluto (resp. máximo absoluto) de una función con los puntos donde ese mínimo (resp. máximo) se alcanza. Por ejemplo, para la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$, su mínimo absoluto (el valor más pequeño que toma la función) es -1 , que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero. Por otro lado, su máximo absoluto (el valor más grande que toma la función) es 1 , que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = \pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero.

- La relación entre extremo absoluto y extremo local no es tan evidente como parece. Lo que es claro es que si f alcanza en a un extremo local, entonces no tiene por qué alcanzar en a un extremo absoluto (podría haber valores de x alejados de a donde la función tomara un valor más grande o más pequeño que en a). Por otro lado, si f alcanza en a un extremo absoluto y el punto a **pertenece al interior del intervalo I** , entonces f alcanza en a un extremo local. Sin embargo, **ésto no es cierto si a es un punto de la frontera del intervalo I** .
- Los extremos absolutos de una función en un intervalo abierto no tienen por qué alcanzarse (aunque la función sea derivable). Por ejemplo, la función $f(x) = x$ no alcanza su mínimo absoluto ni su máximo absoluto en el intervalo $] -1, 1[$. Lo mismo le pasa a la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi/2 \\ \operatorname{tg}(x) & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) \text{ si } x \in]-\pi/2, \pi/2[, f(-\pi/2) = 0 \text{ y } f(\pi/2) = 0.$$

Evidentemente, es deseable disponer de criterios cómodos para garantizar que una función alcanza sus extremos absolutos. Un buen resultado en relación con este problema es el Teorema de Weierstrass.

Teorema (de Weierstrass). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado. Entonces, f alcanza en $[a, b]$ sus extremos absolutos.*

Supongamos que tenemos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Gracias al Teorema de Weierstrass sabemos que f debe alcanzar su mínimo y su máximo absolutos en $[a, b]$. Si el extremo absoluto se alcanza en un punto de $]a, b[$, entonces deberá ser también un extremo local y, por tanto, un punto crítico. Pero también podría ocurrir que f alcanzase sus extremos absolutos en los puntos frontera del intervalo.

Así pues, para calcular los extremos absolutos de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, se procede como sigue:

1. Se calculan los puntos críticos de f en $]a, b[$.
2. Se calcula la imagen de dichos puntos críticos, y también las imágenes de los puntos a y b . La imagen menor/mayor corresponderá al mínimo/máximo absoluto de la función, que se alcanzará en el punto correspondiente.

Ejemplo. Vamos a calcular los extremos absolutos de la función $f : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) - x$. La existencia de extremos absolutos está garantizada por el Teorema de Weierstrass, al ser f continua en $[0, 3\pi]$. Para determinar los puntos críticos de f en $]0, 3\pi[$ calculamos su derivada primera y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2 \cos(x) - 1, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi/3 + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 5\pi/3 + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ahora bien, puesto que sólo nos interesan los puntos críticos de f en $]0, 3\pi[$, nos quedamos con las soluciones $\pi/3$, $5\pi/3$ y $7\pi/3$. Ahora basta con evaluar f en los puntos anteriores y también en los puntos de la frontera del intervalo $[0, 3\pi]$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \operatorname{sen}(0) - 0 = 0, & f(\pi/3) &= 2 \operatorname{sen}(\pi/3) - \pi/3 = \sqrt{3} - \pi/3, \\ f(5\pi/3) &= 2 \operatorname{sen}(5\pi/3) - 5\pi/3 = -\sqrt{3} - 5\pi/3, & f(7\pi/3) &= 2 \operatorname{sen}(7\pi/3) - 7\pi/3 = \sqrt{3} - 7\pi/3, \\ f(3\pi) &= 2 \operatorname{sen}(3\pi) - 3\pi = -3\pi. \end{aligned}$$

Es fácil deducir entonces que el máximo absoluto vale $\sqrt{3} - \pi/3$ y se alcanza en el punto $x = \pi/3$, mientras que el mínimo absoluto vale -3π y se alcanza en el punto $x = 3\pi$ (véase Figura 2.5).

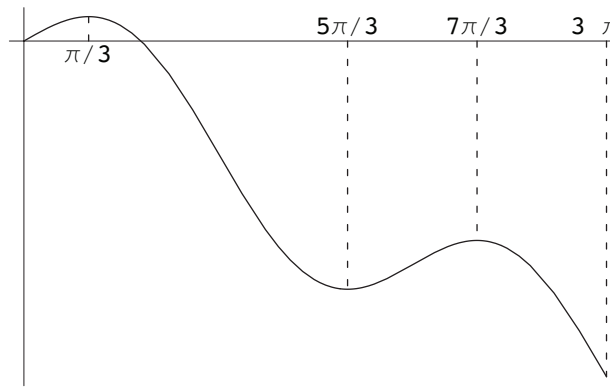


Figura 2.5: Gráfica de $f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) - x$ en $[0, 3\pi]$

En otras ocasiones nos interesará asegurar la existencia de extremos absolutos de una función dentro de un intervalo abierto. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I . Sea $a \in I$ un punto crítico de f . Estudiamos el signo de $f'(x)$ en todo el intervalo I . Entonces:

1. Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su mínimo absoluto.

2. Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su máximo absoluto.

Ejemplo. La función $f(x) = x^2 + 1$ alcanza en $x = 0$ su mínimo absoluto, que vale $f(0) = 1$. La función $g(x) = 1 - x^4$ alcanza en $x = 0$ su máximo absoluto, que vale $g(0) = 1$.

◆ REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

El conocimiento que nos puede proporcionar la gráfica de una función sobre el fenómeno representado por la función es bastante amplio. Así, un simple vistazo a la gráfica puede informarnos acerca de mínimos, máximos, comportamientos del fenómeno para tiempos grandes, asíntotas, saltos de la función, etc. Por todo esto resulta importante poder dibujar de forma aproximada la gráfica de una función.

A la hora de llevar a cabo la representación gráfica de una función $f(x)$ se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Dominio de f :** Si nos viene dado, no tendremos nada que hacer, pero si sólo tenemos la expresión analítica de la función, habrá que calcular su *dominio*, es decir el conjunto de números reales más grande en el que la expresión que define a f tiene sentido.
2. **Corte con los ejes:** El punto de corte con el eje de ordenadas sólo se puede calcular cuando $x = 0$ sea un punto del dominio de la función. En tal caso, el punto de corte es $(0, f(0))$. Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen al resolver la ecuación $f(x) = 0$.
3. **Simetrías:** Debemos estudiar si la función es par o impar, o ninguna de las dos cosas. Esta información nos puede simplificar el estudio de la función y el dibujo de la gráfica.
4. **Continuidad y asíntotas:** Estudiaremos los intervalos donde la función es continua y la naturaleza de las discontinuidades presentadas. También calcularemos las posibles asíntotas de la función y la posición de la gráfica respecto a ellas.
5. **Monotonía y puntos críticos:** Incluye el estudio de la monotonía de la función, es decir, de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como el cálculo y la clasificación de los puntos críticos.
6. **Curvatura y puntos de inflexión:** Incluye el estudio de la curvatura de la función, es decir, de los intervalos donde la función es convexa y cóncava, así como sus posibles puntos de inflexión.

A continuación, empezaremos representando los puntos que hemos ido obteniendo (puntos de corte con los ejes, extremos locales, puntos de inflexión, etc). Luego, dibujaremos la gráfica teniendo en cuenta toda la información obtenida en los apartados anteriores.

◆ EJERCICIOS

1. Utiliza la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \sqrt{x} + 5$, entonces $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.
2. La inversa de una función derivable y biyectiva no tiene por qué ser derivable. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Comprueba que f es derivable y biyectiva, y calcula su inversa f^{-1} . ¿Es f^{-1} derivable?
3. Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva y derivable de forma que $f^{-1} : B \rightarrow A$ sea también derivable. Teniendo en cuenta que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, usa la regla de la cadena para obtener la relación entre la derivada de f y la de f^{-1} .
4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando las expresiones resultantes lo máximo posible:

$$(I) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$$

$$(II) f(x) = (1 + a) \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$(III) f(x) = x^2 \sqrt{3x - 5y}$$

$$(IV) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$(V) f(x) = \ln(2x+1) + y$$

$$(VI) f(x) = x^3 e^{3x}$$

$$(VII) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(VIII) f(x) = \operatorname{tg}^2(ax)$$

$$(IX) f(x) = (\operatorname{sen}^2 x) \sqrt{\cos x}$$

$$(X) f(x) = (\operatorname{sen} x) (\operatorname{sen}(2x))$$

$$(XI) f(x) = \ln(\cos x) - 1$$

$$(XII) f(x) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

$$(XIII) f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$$

$$(XIV) f(x) = xy \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$$

$$(XV) f(x) = e^{-x} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$(XVI) f(x) = x + 1 \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^2)$$

$$(XVII) f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$(XVIII) f(x) = xy^2 + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$(XIX) f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^3$$

$$(XX) f(x) = \frac{1+x}{1-x} + 1$$

$$(XXI) f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$(XXII) f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$(XXIII) f(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$(XXIV) f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \cos(2x)$$

$$(XXV) f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$$

$$(XXVI) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2) - \cos(2x)}{\sqrt{x^2 + e^x}}$$

$$(XXVII) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(x^2) - 1}}$$

$$(XXVIII) f(x) = (2x + 8)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(XXIX) f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$(XXX) f(x) = x^{1/x}$$

$$(XXXI) f(x) = (y^3 - 5)e^{\operatorname{sen} x}$$

$$(XXXII) f(x) = \sqrt[3]{1 + e}$$

5. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$(I) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (II) g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6. Halla el valor de m para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \arccos(x - 1) + mx$ en $x = 1$ sea horizontal.

7. *Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.* ¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x - e^x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

8. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$?

9. Calcula las derivadas segunda y tercera de las funciones:

$$f(x) = 4x^{3/2}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}, \quad h(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}, \quad j(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

10. Calcula los siguientes límites aplicando, cuando sea posible, la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)(\ln x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right), \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 - x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

11. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones dentro del intervalo I que se indica en cada caso:

$$\begin{aligned} (I) f(x) &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4, I = \mathbb{R}. & (V) f(x) &= x - \operatorname{sen} x, I = \mathbb{R}. \\ (II) f(x) &= \frac{x}{x^2 + 1}, I = \mathbb{R}. & (VI) f(x) &= x + \cos x, I =]-\pi, \pi[. \\ (III) f(x) &= \frac{x^2 + 2}{(x+1)(x-1)}, I =]-1, 1[. & (VII) f(x) &= x - \operatorname{arctg} x, I = \mathbb{R}. \\ (IV) f(x) &= \sqrt{x^2 + 1}, I = \mathbb{R}. & (VIII) f(x) &= e^x + e^{-x}, I = \mathbb{R}. \\ & & (IX) f(x) &= x \ln x, I =]0, +\infty[. \end{aligned}$$

12. Estudia la monotonía, la convexidad y concavidad, los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} (I) f(x) &= x^3 - 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}. & (III) h(x) &= x - \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}. \\ (II) g(x) &= \frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. & (IV) i(x) &= \ln x, x \in]0, +\infty[. \end{aligned}$$

13. Calcula los valores de los parámetros b y c para que la función $f(x) = x^5 + bx + c$ cumpla $f(-1) = 2$ y tenga un punto crítico en $x_0 = 0$.
14. Determina el máximo y el mínimo absolutos de las funciones $f(x) = x^3 + x + 1$ y $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ en el intervalo $[-1, 2]$.
15. Halla dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. Calcular el número positivo que sumado con su inverso da lugar a la suma mínima.
16. Un agricultor quiere vallar una parcela rectangular que está junto a un camino. Si el precio del metro de valla es de 5 euros para el lado del campo más cercano al camino y de 1 euro para los restantes lados, halla la mayor superficie que se puede vallar con 2400 euros.
17. La pista de un pabellón deportivo consta de una zona rectangular y de un semicírculo en cada uno de los extremos. Si el perímetro de la pista ha de tener una longitud de 200 metros, calcula las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. (Recordamos que el perímetro de un círculo es $2\pi r$, donde r es el radio del círculo).
18. Calcula el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado cortando cuadraditos iguales de cada esquina.
19. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de dos metros de largo en dos trozos. Uno de los dos trozos se va a doblar en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Determina cómo se debe cortar el alambre para que el área total encerrada por las dos figuras creadas sea mínimo/máximo.
20. Encuentra la relación que deben de cumplir el radio y la altura de una lata cilíndrica que encierra volumen fijo V y tiene la menor superficie total posible.
21. Hallar los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ que están más próximos del punto $(0, 2)$.
22. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{x^2 - 1}.$$

- (I) Determina el dominio de definición de f .
- (II) Halla y representa los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
- (III) Determina si la función es par, es decir, si $f(-x) = f(x)$. En caso afirmativo, la gráfica de f tiene que ser simétrica con respecto al eje y .
- (IV) Calcula las asíntotas, si las hubiera, de f .
- (V) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (VI) Estudia la monotonía y los puntos críticos de f .

- (VII) Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de f .
- (VIII) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de f utilizando la información de los apartados anteriores.

23. Se considera la función:

$$f(x) = x \ln x.$$

- (I) Determina el dominio de definición de f .
- (II) Halla y representa los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes.
- (III) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- (IV) Estudia la monotonía, puntos críticos, curvatura y puntos de inflexión de f .
- (V) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de f utilizando la información de los apartados anteriores.