Relación de problemas 4

Fundamentos Matemáticos de CCAA

Curso 2009-10

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:

(a)	$f(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$	(b)	$f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\right)$
(c)	$f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$	(d)	$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
(e)	$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	(f)	$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x)$
(g)	$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(\dfrac{1}{x})$	(h)	$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
(i)	$f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$	(j)	$f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\ln(x)}$
(k)	$f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x})$	(l)	$f(x) = \log_a(1+\operatorname{tg}^2(x))$
(m)	$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	(n)	$f(x) = \dfrac{x^3+7x^2+5}{x^4+x^2+1}$
(ñ)	$f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$	(o)	$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

2. Utilizar la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

3. Utilizar la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(a) = 1/a$. Pista: hay que utilizar propiedades de los logaritmos y el criterio 1^∞.

4. La población de una colonia de bacterias es de, aproximadamente, $P(t) = P_0 + 61t + 3t^2$ miles, t horas después del inicio de la observación, donde P_0 es la población inicial. Hallar la tasa de crecimiento de la colonia a las cinco horas.

5. Un estudio de medio ambiente de una comunidad suburbana concluye que, dentro de t años, el nivel medio de monóxido de carbono en el aire será de $q(t) = 0,05t^2 + 0,1t + 3,4$ partes por millón.

   a) Calcular la tasa de variación del monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de un año.

   b) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el primer año.

c) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el segundo año.

6. Escribir las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - \operatorname{arc\,sen}(x)$ en el punto $(0,0)$. Lo mismo para la función $f(x) = \cos(x-1)\ln(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

7. Hallar el valor del parámetro k para que la recta tangente a la curva $y = \ln(x) - kx$ en el punto de abcisa $a = 2$ forme un ángulo de 45^o con el eje de abcisas.

8. Hallar el valor de m para que la recta tangente a la curva $y = \arccos(x-1) + mx$ en el punto de abcisa $a = 1$ sea horizontal.

9. ¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x - e^x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

10. Encontrar los puntos en los que la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$.

11. Utilizar el Teorema del valor medio para demostrar que si f es una función derivable en un intervalo abierto I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x) = f(y)$ para cualesquiera $x, y \in I$, es decir f es constante sobre I.

12. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan empatados. Probar que tuvieron exactamente la misma velocidad en un instante de tiempo.

13. Estudiar el límite en $a = 0$ de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad x \in A.$

   b) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}, \quad x \in A.$

   c) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (1 - \operatorname{tg}(x))^{\frac{1}{x^2}}, \quad x \in A.$

14. Calcular los siguientes límites aplicando, cuando sea posible, la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))(\ln(x)), \quad \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(x))^{\ln(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{arc\,tg}(x)}{x^4}, \quad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(2x)}, \quad \lim_{x\to 0^+} (\cos(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2 - x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right).$$

15. Calcular y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones dentro del intervalo I que se indica en cada caso:

   (i) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \qquad I = \mathbb{R}.$

   (ii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)(x-1)}, \qquad I = (-1, 1).$

(iv) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(v) $f(x) = x - \operatorname{sen}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

(vi) $f(x) = x + \cos(x), \qquad I = (-\pi, \pi).$

(vii) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

(viii) $f(x) = e^x + e^{-x}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(ix) $f(x) = x\ \ln(x), \qquad I = (0, +\infty).$

16. Estudiar la monotonía, la curvatura, los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

    (i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

    (ii) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}.$

    (iii) $h(x) = x - \operatorname{arc\,tg}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

    (iv) $i(x) = \ln(x), \quad x \in (0, +\infty).$

17. Determinar el máximo y el mínimo absolutos de las funciones $f(x) = x^3 + x + 1$ y $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

18. Probar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.

19. Hallar el número positivo que sumado a su inverso da lugar a la suma mínima. ¿Hay algún número positivo de tal manera que la suma con su inverso sea máxima?

20. Un agricultor quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si el precio del metro de valla es de 5 euros para el lado del campo más cercano al camino y de 1 euro para los restantes lados, hallar la mayor superficie de campo que se puede vallar con 2400 euros.

21. La pista de un pabellón deportivo consta de una zona rectangular y de un semicírculo en cada uno de los extremos. Si el perímetro de la pista ha de tener una longitud de 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular.

22. Calcular el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado al cortar y doblar cuadraditos iguales de cada esquina.

23. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de dos metros de largo en dos trozos. Uno de los dos trozos se va a doblar en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Determinar cómo se debe de cortar el alambre para que el área total encerrada por las dos figuras creadas sea mínimo /máximo.

24. Una lata cilíndrica debe contener $64cm^3$. Hallar sus dimensiones de manera que la cantidad de metal sea mínima supuesta la lata: a) abierta por arriba, b) cerrada.

25. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

26. Estudiar las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{3(x^2-4)}{x^2-1}$ (d) $f(x) = x\ \ln(x)$

(e) $f(x) = e^{-x^2/2}$ (f) $f(x) = x\, e^x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$